

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS VIA SÉRIES DE POTÊNCIAS. A EQUAÇÃO DE BESSEL.

Lian Fidélis de Sousa Nogueira¹ Alexandro Belém da Silva²

Resumo

Encontrar a solução geral de uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem com coeficientes constantes é, até certo ponto, uma tarefa simples e sistemática. No entanto, quando passamos a considerar uma classe mais geral de equações, por exemplos as que têm coeficientes variáveis, é, por vezes, necessário buscar soluções além das funções elementares que estamos acostumados. Nesse sentido, uma ferramenta muito útil é tentar encontrar as soluções em termos de uma *série de potências*.

Palavras-chave: Séries de funções; coeficientes variáveis; singularidades.

1 Introdução

As primeiras aplicações das Equações Diferenciais datam do século XVII, iniciando pelas ciências físicas, aplicando-se posteriormente em outras atividades humanas, a exemplo, citam-se o campo da engenharia, biologia e até medicina. Os primeiros ensaios do estudo sobre Equações Diferenciais, deram-se com os aprofundamentos do cálculo iniciado por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Dentre os matemáticos destacados, embora seu campo de estudo seja mais na Física, Newton forneceu contribuições essenciais no tocante ao desenvolvimento do cálculo e aplicações das equações diferenciais, principalmente na mecânica. Leibniz também chegou aos resultados obtidos por Newton.

Por definição, uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de *Equação Diferencial*. Quando essa função envolve a derivada de uma função de apenas uma variável, temos as chamadas *Equações Diferenciais Ordinárias*. Pretende-se, neste trabalho, estudar equações diferenciais cujos coeficientes são funções da variável independente.

Os pré-requisitos para a leitura desse texto são um curso de cálculo e um curso inicial em equações diferenciais ordinárias. Tentaremos, na medida do possível, deixar claro os resultados utilizados com exemplos e/ou demonstrações e sempre citando as referências que dão maior embasamento.

Muitas das ideias e métodos aqui discutidos são de uma matemática bastante avançada, em nível de pós-graduação, construída ao longo do tempo por matemáticos conceituados como *Euler*, *Frobenius*, *Bessel*, *Cauchy*.

Num primeiro momento estudaremos sequências e séries de números e de funções, preparando assim o ambiente para estudar as equações diferenciais propriamente ditas.

2 Séries de Potências

2.1 Breve Contexto Histórico

No período de desenvolvimento embrionário do cálculo, alguns matemáticos tiveram destaque nesse campo de estudo, dentre eles citam-se Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Johann Bernoulli, Cauchy, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Lipschitz, dentre outros. Aqui, faz-se um destaque a Daniel Bernoulli, filho de Johann, que dava um interesse maior nos estudos das equações diferenciais e suas aplicações. Foi ele o primeiro a estudar as funções que hoje são conhecidas como *funções de Bessel*. Funções essas que receberam essa terminologia em homenagem a Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), alemão de nascimento, interessado

¹ Autor - UFERSA

² Orientador - UFERSA

em Astronomia e Matemática. Seu estudo sobre perturbações planetárias levou-o, em 1824 a fazer a primeira análise sistemática das soluções da equação (10) cujas principais contribuições deram-se na construção de aparelhos muito precisos para o estudo do posicionamento das estrelas e dos planetas. Bessel aprofundou o cálculo da astronomia e foi um pouco além do esperado criando novos métodos de aplicação ao cálculo de perturbação planetária. As funções de Bessel (ou funções cilíndricas), tem ampla aplicação em matemática, física e astronomia e, apesar do nome, já apareciam nos trabalhos de Euler em 1766 e Lagrange em 1771.

2.2 Sequências e Séries de Números Reais

Antes de falarmos sobre *Séries de Potências* propriamente ditas, é necessário compreendermos conceitos como *sequências e séries numéricas*, *sequências e séries de funções*. Ou pelo menos termos noções básicas desses assuntos. Faremos isso nessa seção e na próxima.

Definição 2.2.1 Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência x faz corresponder o número real $x(n)$. Em geral, $x(n)$ é denotado simplesmente por x_n e chamado *termo de ordem n* ou *n -ésimo termo* da sequência. Pode-se, ainda, indicar uma sequência através das seguintes notações;

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (x_n), (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots).$$

Exemplos:

1. $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(n) = 2^n$ é a sequência cujo termo geral é $x_n = 2^n$, ou seja, $(2, 4, 8, 16, \dots)$.
2. $x_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ define uma sequência constante $(a, a, a, \dots)$.
3. $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} k$, $n \in \mathbb{N}$ é a sequência $(1, 3, 6, \dots)$

Definição 2.2.2 Dizemos que o número real L é limite da sequência (x_n) , e escrevemos $L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$) quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \varepsilon$ sempre que $n > n_0$.

Em símbolos, escrevemos

$$L = \lim x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Quando $\lim x_n = L$, diz-se que a sequência (x_n) *converge* para L , ou *tende* para L e escreve-se $x_n \rightarrow L$. Uma sequência que possui limite é chamada *convergente*. Do contrário, ela se chama *divergente*.

Proposição 2.2.3 O número L definido acima, quando existe, é único.

Demonstração: De fato, seja (x_n) na sequência convergente, digamos para L_1 . Por outro lado, se $\lim x_n = L_2$, com $L_2 \neq L_1$, então dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1, n_2 \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pela desigualdade triangular, segue que

$$|L_1 - L_2| = |L_1 + x_n - x_n - L_2| \leq |x_n - L_1| + |x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que $L_1 = L_2$, absurdo. ■

Exemplos:

4. Considere a sequência (x_n) cujo termo geral é $x_n = \frac{n}{n+12}$. Afirmamos que $x_n \rightarrow 1$, como efeito, dado $\varepsilon > 0$ observe que

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+12} - 1 \right| = \left| \frac{n - n - 12}{n+12} \right| = \left| \frac{-12}{n+12} \right| = \frac{12}{n+12}.$$

Agora, para que ocorra $|x_n - 1| < \varepsilon$, devemos ter $\frac{12}{n+12} < \varepsilon$ ou ainda $n > \frac{12}{\varepsilon} - 12$. Tomando, então, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{12}{\varepsilon} - 12$ temos que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$.

5. A sequência (x_n) cujo n -ésimo termo é $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$, ou seja, $(2, 0, 2, 0, \dots)$ não é convergente porque ela possui dois limites distintos.

Convergência é uma ideia de proximidade. Quando dizemos que “a sequência x_n tende para L , ou converge para L ” isso significa que, a partir de uma certa ordem, seus termos são praticamente indistinguíveis de L . Dito de outro modo, o $\varepsilon > 0$ da definição 2.2.2 é, em geral, muito pequeno. Isso fica evidenciado no exemplo 4 acima, quanto menor o ε dado, maior a exigência sobre o índice n_0 . Por exemplo, se $\varepsilon = 0,0001$ então precisamos tornar $n_0 > 119998$, isto é, a diferença $|x_n - 1| < \varepsilon$ só começa a acontecer quando $n = 119999$, já que $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, se ε dado for “grande” pode ser que não haja nada a se fazer. Ainda no exemplo 4, se $\varepsilon = 1$ então $n_0 > 12 - 12 = 0$, isto é a diferença $|x_n - 1| < \varepsilon$, nesse caso, começa a ocorrer a partir do primeiro índice $n = 1$, o que era de se esperar já que o primeiro termo da sequência é $\frac{1}{13}$ o qual difere de 1, em módulo, cerca de 0,92.

Dado um subconjunto finito de números naturais, ou mesmo inteiros, ou reais, sabe-se perfeitamente o que significa a “soma” dos elementos desse conjunto, ou dos termos desse conjunto. No entanto, devemos ter certos cuidados quando essa “soma” se dá com um número infinito de parcelas. Nossa intuição pode falhar quando falamos em “soma infinita”. Um exemplo simples, mas que ilustra muito bem isso é dado pela chamada *série de Grandi*³.

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Em princípio, somos levados a imaginar que $S = 0$, já que cada parcela $1 - 1$ é igual a zero e o que estamos fazendo na verdade é simplesmente somar uma quantidade indefinida de zeros.

No entanto, observemos que

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) \dots$$

novamente, cada termo entre parênteses vale 0, logo $S = 1$.

Ou ainda

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

sendo $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ temos

$$S = 1 - S \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Como decidir então $S = 0$? $S = 1$? $S = \frac{1}{2}$?

A fim de evitar esse tipo de anomalia, precisamos dar sentido a uma “soma infinita” ou mais precisamente, *Série Infinita*.

Definição 2.2.4 Seja (x_n) uma sequência de números reais. A partir dela, forma-se uma nova sequência (S_n) , cujos elementos são somas, a saber,

$$S_1 = x_1, S_2 = x_1 + x_2, \dots, S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n,$$

que serão chamadas as reduzidas da série $\sum x_n$. A parcela x_n é chamada n -ésimo termo ou termo geral da série.

Se existir o limite

$$S = \lim S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n),$$

diz-se que a série é *convergente* e o limite S será chamado *soma* da série. Escreve-se, então

$$S = \sum x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diz-se que a série $\sum x_n$ é *divergente*.

Proposição 2.2.5 Se $\sum x_n$ é uma série convergente, então $\lim x_n = 0$.

³Luigi Guido Grandi (1671-1742). Monge, padre, filósofo, matemático, e engenheiro italiano. Na matemática, Grandi é mais conhecido pelo seu trabalho *Flores Geometricae* (1728), estudando a Rosa Polar, uma curva com o formato de uma flor com pétalas, a qual recebeu o nome derhodonea, e pela Série de Grandi.

Demonstração: Seja S_n na reduzida de ordem n de $\sum x_n$. Então,

$$x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) = S_n - S_{n-1}.$$

Assim, $\lim x_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. ■

Observação: Utilizamos no teorema anterior algo que não mencionamos antes. Mas é imediato ver que são válidas as *propriedades operatórias* dos limites de seqüências: “limite de uma soma é soma dos limites”, “limite do produto é o produto dos limites”, desde que as seqüências envolvidas sejam convergentes.

Exemplos:

6. A *série geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a + a^2 + \cdots + a^n.$$

Sua reduzida S_n é a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_n = a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Quando $|a| < 1$, $a^n \rightarrow 0$ de forma que a série converge, sendo $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Quando $|a| \geq 1$ a série diverge, pois neste caso seu termo geral não tende a zero.

7. A *série harmônica* $\sum \frac{1}{n}$ cujo seu termo geral, $\frac{1}{n}$, tende para zero mas a série diverge (a recíproca do teorema anterior é falsa). Observe que,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como a última soma tende a $+\infty$ quando n tende a $+\infty$, segue que $\lim S_n = \infty$.

8. A série de Grandi $\sum (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, examinada anteriormente, é divergente pois seu termo geral não tende a zero. Suas reduzidas de ordem par são iguais a 0, enquanto que as de ordem ímpar são iguais a 1.

Concluir a convergência de uma série, às vezes, pode não ser tarefa das mais simples. Pensando nisso, há inúmeros *testes de convergência*. Trabalhar também apenas com valores absolutos nos termos de uma dada série pode ajudar. Nesse sentido temos a

Definição 2.2.6 Uma série $\sum x_n$ é chamada absolutamente convergente quando $\sum |x_n|$ é uma série convergente.

Claro que se uma série $\sum x_n$ converge e seus termos são positivos, ela continua sendo absolutamente convergente, já que o módulo de cada um de seus termos não vai alterá-los em nada. Veremos a seguir que se uma série converge em módulo, então, ela converge. A recíproca, no entanto, não é verdadeira em geral.

Exemplo 9: A série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Em módulo, obtemos a série harmônica $\sum \frac{1}{n}$ a qual já vimos ser divergente. A convergência dessa série segue de um teorema devido a Leibniz⁴.

Teorema 2.2.7 Toda série absolutamente convergente é convergente.

⁴O critério de Leibniz diz precisamente o seguinte: Se (x_n) , onde $x_n = \frac{1}{n}$, é uma seqüência que tende a zero decrescentemente, isto é, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \rightarrow 0$. Então $\sum (-1)^{n+1} x_n$ é uma série convergente.

A demonstração envolve objetos que não trabalhamos aqui, por isso, a omitimos.

Para a prova desse resultado precisamos comentar um pouco sobre *sequências de Cauchy*.

Definição 2.2.8 Diz-se que (x_n) é uma sequência de Cauchy quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m > n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Dito de outro modo, isso significa que a partir de um certo índice, os termos da sequência se tornam suficientemente próximos uns dos outros.

Ser de Cauchy, é o que chamamos de propriedade “intrínseca” da sequência, depende dela mesma, de seus próprios termos e não de “fatores externos”.

Fato interessante, que caracteriza o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, assim como outros tipos de conjuntos mais gerais, é:

Teorema 2.2.9 (Critério de Cauchy para Sequências) Uma sequência (x_n) de números reais converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.

A ideia por trás da demonstração desse teorema é algo muito simples: Se (x_n) é convergente, então, seus termos tendem a se aproximar de um certo valor e, conseqüentemente, eles se aproximam uns dos outros, logo (x_n) é de Cauchy. Reciprocamente se (x_n) é de Cauchy, então, seus termos tendem a ser suficientemente próximos, é natural, então, se imaginar que eles se aproximam de um valor comum, tal valor será o limite de x_n . Veja a prova rigorosa em [7].

Temos em análogo para séries.

Teorema 2.2.10 (Critério de Cauchy para Séries) Uma série $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$ qualquer que sejam $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja (S_n) a sequência das reduzidas de $\sum x_n$. Assim,

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p} - x_1 - x_2 - \dots - x_n| \\ &= |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}|. \end{aligned}$$

Assim, se $\sum x_n$ converge, então (S_n) converge e conseqüentemente é de Cauchy. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{N}$, mas, pelo que vimos antes, isso implica que $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$.

Reciprocamente, se para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon$, então, $|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| < \varepsilon \Rightarrow (S_n)$ é de Cauchy e, conseqüentemente, convergente. Logo, $\sum S_n$ é convergente. ■

Agora, estamos em condições de voltar ao teorema 2.2.7.

Demonstração do teorema 2.2.7: Seja $\sum x_n$ uma série absolutamnete convergente. Seja $S_n = |x_1| + \dots + |x_n|$ o termo geral da sequência das reduzidas de $\sum |x_n|$. Dado $\varepsilon > 0$, a convergência de (S_n) nos diz que essa sequência é de Cauchy, e portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n > n_0 \Rightarrow \varepsilon > |S_{n+p} - S_n| = ||x_1| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| - |x_1| - |x_2| - \dots - |x_n|| = |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}|,$$

aqui, o módulo foi eliminado por se tratar de uma soma de termos positivos. Agora, a desigualdade triangular fornece

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + \dots + |x_{n+p}| < \varepsilon,$$

pelo teorema 2.2.10. Logo, a sequência das reduzidas de $\sum x_n$ é de Cauchy e, portanto, convergente. Donde, $\sum x_n$ converge. ■

2.3 Sequências e Séries de Funções

Seja X um conjunto de números reais, uma *sequência de funções* $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em X e tomando valores reais.

Em termos de convergência, uma sequência de funções pode convergir de duas maneiras as quais esclareceremos a seguir.

Definição 2.3.1 Dizemos que a sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge simplesmente (ou pontualmente) para a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, quando para cada $x \in X$ a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para o número real $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

A sequência de funções que $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, quando todo $\varepsilon > 0$, dado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$.

Na convergência uniforme, para qualquer $\varepsilon > 0$ é possível obter n_0 que sirva para todos os pontos $x \in X$, ao contrário da convergência pontual, que, como o próprio nome já diz, para cada ponto $x \in X$ obtemos um n_0 .

Exemplo 1: Considere a sequência $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Claro que $f_n(x) \rightarrow 0$, pois dado $\varepsilon > 0$, $\left| \frac{x}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > n_0 = \frac{|x|}{\varepsilon}$. Isso nos diz que o n_0 obtido varia para cada x fixado; e, além disso, quanto maior for $|x|$, maior será n_0 . Logo, a convergência de (f_n) para $f \equiv 0$ não se dá de modo “uniforme” para diferentes valores de x .

Por outro lado, se $k > 0$, restringindo o domínio das funções f_n ao intervalo $[-k, k]$, temos que $\left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|k|}{n} = \frac{k}{n}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 > \frac{k}{\varepsilon}$ segue que para todo $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{k}{n} < \varepsilon$. Observe, agora, que o n_0 obtido não depende do $x \in [-k, k]$.

Geometricamente a convergência uniforme significa que dado $\varepsilon > 0$, a partir de um índice suficientemente grande, todas as funções f_n têm seus gráficos na faixa de raio ε em torno do gráfico de f . O que não acontece na convergência simples.

No exemplo anterior nenhuma faixa de raio ε em todo o eixo x pode conter o gráfico de $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ diferentemente do que ocorre no caso $f_n : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$.

A convergência uniforme vem recheada de boas propriedades, digamos assim, as quais descreveremos no teorema a seguir cuja prova pode ser encontrada em [8].

Teorema 2.3.2 1. O limite uniforme de uma sequência de funções contínuas (todas com o mesmo domínio) é uma função contínua (de mesmo domínio).

2. Se $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é na sequência de funções integráveis e $f_n \rightarrow f$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uniformemente, então, f é integrável e

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

3. Seja (f_n) na sequência de funções deriváveis em um intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a, b]$ para cada função g , então, f_n converge uniformemente em $[a, b]$ para uma função derivável f , tal que, $f' = g$.

Em suma, $(\lim f_n)' = \lim f'_n$ desde que as derivadas converjam uniformemente.

Dada (f_n) uma sequência de funções, todas definidas no mesmo domínio $X \subset \mathbb{R}$, como no caso numérico, faz sentido pensar na soma $f = \sum f_n$, f também definida em X , a qual é novamente um caso particular de um limite de sequência: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, onde $S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$. Como as sequências de funções podem convergir pontualmente ou uniformemente, o mesmo deve ocorrer com $\sum f_n$ no conjunto X .

Assim, a convergência uniforme de uma série de funções num conjunto X significa a convergência uniforme da sequência de suas reduzidas de ordem n , $S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ em X . Portanto, dizer que $\sum f_n$ converge uniformemente para f em X significa que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f(x) - \sum f_n(x)| < \varepsilon \text{ para todo } n > n_0 \text{ e todo } x \in X.$$

Para séries de funções as propriedades do teorema 2.3.2 se expressam como:

Teorema 2.3.3 1. Se $\sum f_n \rightarrow f$ uniformemente e cada f_n é contínua, então f é contínua.

2. Se $\sum f_n \rightarrow f$ uniformemente e cada $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então f é integrável e

$$\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx.$$

3. Se $\sum f'_n \rightarrow f$ uniformemente onde cada $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e se, para algum $c \in [a, b]$, $\sum f_n(c)$ converge, então, $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f'_n$.

A demonstração desse resultado segue imediatamente do teorema 2.3.2 aplicado a sequência (S_n) das reduções de uma série uniformemente convergente $\sum f_n$.

O conceito de sequência de Cauchy no caso numérico, assim como critério de Cauchy para convergência $((x_n))$ converge $\Leftrightarrow (x_n)$ é de Cauchy) se estende de modo natural para sequência de funções. Disso e do teorema 2.2.10, aplicado agora para uma série de funções $\sum f_n(x)$ (f_n todas com mesmo domínio), segue o útil critério abaixo conhecido como *Teste M de Weierstrass*.

Teorema 2.3.4 (Teste M de Weierstrass) Suponha $|f_n(x)| \leq M_n$, onde (f_n) é uma sequência de funções num conjunto X , para todo $x \in X$, e $\sum M_n$ uma série numérica convergente. Então, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em X .

Demonstração: A prova segue imediatamente do critério de Cauchy para Séries. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$, $n > n_0 \Rightarrow |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \varepsilon$. ■

Exemplo 2: A série $\sum \frac{\sin nx}{(n+1)n!}$ converge uniformemente em toda reta pois ela é dominada pela série $\sum \frac{1}{n!}$. Portanto, ela define na função contínua f . Além disso, a série das derivadas também converge uniformemente. Assim, f é derivável e

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n+1)(n-1)!}.$$

No exemplo acima temos uma função f definida por uma série de funções, veremos mais casos desse tipo na seção 3 quando estivermos resolvendo alguns tipos de equações diferenciais.

Dentre as séries de funções destacam-se as chamadas *séries de potências*, que são as do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

aqui x_0 e os coeficientes a_n são constantes. Uma série desse tipo é conhecida como uma *série de potências em torno de x_0* ou *centrada em x_0* .

Sem qualquer perda de generalidade, podemos considerar, o caso centrado em 0, ou seja, $x_0 = 0$ e as séries de potências na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

O caso geral reduz-se a esse com a mudança de variável $y = x - x_0$. Os resultados obtidos para as essas últimas séries são facilmente adaptados para as séries $\sum a_n(x - x_0)^n$.

O primeiro ponto importante a se saber sobre a série de potência $\sum a_n x^n$ é para quais valores de x ela converge.

Teorema 2.3.5 Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe um número $r > 0$ (podendo ser $r = +\infty$) tal que, a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r a série pode convergir ou divergir, dependendo do caso.

É possível provar que $\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

A demonstração desse resultado utiliza objetos não abordados nesse texto, tais como o *supremo* de um subconjunto limitado superiormente de números reais, e portanto, será omitida. A referência [8] faz a devida prova.

Definição 2.3.6 O número r introduzido no teorema anterior é chamado o *raio de convergência*⁵ da série. O intervalo $(-r, r)$ chama-se *intervalo de convergência da série* $\sum a_n x^n$.

A convergência de uma série de potências centrada num ponto x_0 pode muitas vezes ser determinada por (um corolário do) *teste da razão*.

⁵Essa terminologia se justifica pelo fato de que o domínio de estudo das séries de potência é o plano complexo, e quando x varia no plano complexo, o conjunto $|x| < r$ é uma bola (aberta) de centro na origem e raio r . Prova-se, então, que a série converge no interior da bola e diverge no seu exterior. Contudo, mesmo considerando apenas x real em nossos estudos, continuaremos a utilizar essa denominação para o número r .

Teorema 2.3.7 (Teste da Razão) Se existe o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x - x_0|$ então, se esse limite for menor que 1 a série $\sum a_n(x - x_0)^n$ será (absolutamente) convergente e seu raio de convergência é dado por,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Teorema 2.3.8 Toda série de potências $\sum a_n x^n$, com raio de convergência $r > 0$ (podendo ser $r = +\infty$), converge uniformemente em todo intervalo $[-s, s]$, onde $0 < s < r$.

Segue desse resultado que a função $f(x) = \sum a_n x^n$, definida por uma série de potências cujo domínio é o intervalo de convergência da série, digamos com $r > 0$ será, então, contínua, ademais integrável, e ainda diferenciável em $(-r, r)$. Além disso, $f'(x)$ e $\int f(x)$ podem ser calculadas segundo os teoremas a seguir os quais são adaptações para séries de potências do teorema (2.3.3).

Teorema 2.3.9 (Integração termo a termo) Se a série de potências $\sum a_n x^n$ converge em todos os pontos do intervalo fechado $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$, onde $(-r, r)$ é o intervalo de convergência da série, então

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum a_n x^n \right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1} (\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Teorema 2.3.10 (Derivação termo a termo) A função $f(x) = \sum a_n x^n$ é derivável em cada ponto x de seu intervalo de convergência $(-r, r)$. Ademais

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e a série de potências da derivada também tem raio de convergência r .

Corolário 2.3.11 A função $f(x) = \sum a_n x^n$ possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo. Assim, para $x \in (-r, r)$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrários, tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, de modo que a série de potências que converge para $f(x)$ em $(-r, r)$ é a série de Taylor de x em torno de 0.

Evidentemente, se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ convergem no mesmo intervalo $(-r, r)$, então, a soma $g(x) + f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ também converge nesse intervalo. E o produto? A resposta é dada pelo:

Teorema 2.3.12 Se as séries $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ convergem para todo $x \in (-r, r)$, então, pondo $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, para cada x nesse intervalo, então, a série $\sum c_n x^n$ é convergente e

$$\sum c_n x^n = \left(\sum a_n x^n \right) \left(\sum b_n x^n \right).$$

O compilado de resultados acima exige um pouco mais de análise para a sua devida demonstração do que o que temos aqui, por isso, as omitimos. Sugerimos a leitura [8], capítulo X.

Exemplos:

3. Dada a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n}$, temos que (x_n) é a sequência cujo termo geral é $x_n = \frac{1}{2^n n}$.

Assim, $x_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$. Lembrando que $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}$, temos

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n n} 2^{n+1} (n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n} \right) = 2.$$

Logo a série converge absolutamente para $|x-3| < 2$, ou seja, $-2 < x-3 < 2 \Rightarrow 1 < x < 5$. No extremo $x = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Segue do critério de Leibniz que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente pois $b_n = \frac{1}{n}$ é monótona não-crescente. No extremo $x = 5$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Série Harmônica) a qual é divergente. Portanto, o intervalo de convergência da série é $[1, 5)$.

4. Na seção 3 faremos várias vezes algo que discutiremos nesse exemplo. Vamos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 6c_n x^{n+1}$ como uma única série. Observe primeiro que essa soma pode ser escrita como

$$2c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 6c_n x^{n+1}.$$

Precisamos, aqui, que os expoentes de x em cada uma dessas séries sejam os mesmos, isso nos permitirá agrupar termos correspondentes aos mesmos expoentes, como no caso da soma de polinômios de grau finito. Para isso, fazemos $k = n-1$ na primeira série e $k = n+1$ na segunda, isso não deve causar confusão alguma visto que os elementos em cada série serão absolutamente os mesmos, tanto os coeficientes, como as potências de x , o que muda é apenas a notação de n para k . Assim, a soma anterior se torna

$$2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(k+1)c_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 6c_{k-1}x^k.$$

Somando, agora, termo a termo, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 6c_n x^{n+1} = 2c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [2(k+1)c_{k+1} + 6c_{k-1}]x^k,$$

como queríamos.

Para finalizar essa seção daremos uma importante definição que será usada na seção seguinte.

Definição 2.3.13 Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ aberto, chama-se analítica quando é de classe C^∞ e, para todo, $x_0 \in I$, existe $r > 0$ tal que $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in I$ e que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,$$

isto é, o valor de uma função analítica, em cada ponto, é dado por uma série de potências.

Já vimos que toda função representada por uma série de potências é de classe C^∞ , e se $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ então $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, isto é, toda série de potências é uma série de Taylor (derivação termo a termo, teorema 2.3.10 e seu corolário). Pode-se, então, simplificar a definição anterior e dizer que uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ aberto, é analítica quando para cada $x_0 \in I$, existe $r > 0$, com $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$, é uma série de potências $\sum a_n(x-x_0)^n$ tal que, para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, vale $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$.

Em suma, uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é analítica quando, na vizinhança de cada ponto $x_0 \in I$, o valor de f é dado por uma série de potências do tipo $\sum a_n(x-x_0)^n$.

Somas e produtos de funções analíticas são ainda analíticas.

Os exemplos mais conhecidos de funções analíticas talvez sejam as funções trigonométricas seno e cosseno, e a função exponencial, conhecidas desde os cursos iniciais de cálculo. É possível mostrar que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}; \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Veja o capítulo 16 de [6].

3 Equações Diferenciais com Coeficientes Variáveis

Nos cursos iniciais de equações diferenciais ordinárias aprendemos que a *solução geral* de uma equação linear de segunda ordem depende de se encontrar um *conjunto fundamental* de soluções da equação homogênea, e, na grande maioria das vezes, fazemos isso no caso em que os coeficientes da equação são constantes. No entanto, quando os coeficientes da equação são funções da variável independente, precisamos buscar soluções além das funções elementares. A ideia básica é utilizar funções dadas em séries de potências estudadas anteriormente.

No caso simples da equação

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \quad (1)$$

podemos “separar as variáveis” e escrever

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx$$

e daí, $\ln |y| = x^2 + c_1 \Rightarrow y = ce^{x^2}$, com c constante (observe que $c = \pm \exp(c_1)$) é a solução geral para a essa equação.

Fazendo $c = 1$, temos que $y = e^{x^2}$ é a solução para (1). Agora, desde que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, temos que $e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$. Logo, $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ é uma solução para (1) em termos de série de potências (essa série tem raio de convergência infinito).

A busca pela função y , solução de (1), em termos de uma série de potências de x , foi facilitada nesse caso porque já conhecíamos previamente a solução $y = ce^{x^2}$ de uma forma explícita.

Vamos tentar, a seguir, encontrar a solução para essa mesma equação sem estarmos de posse da solução $y = ce^{x^2}$. A ideia é parecida com o chamado *métodos dos coeficientes indeterminados* estudados em cursos elementares de *Equações Diferenciais Ordinárias*.

O que fazemos, em geral, é supor que a equação admite uma solução em série de potências e depois, usando os teoremas vistos na seção anterior - derivação termo a termo, propriedade operatórias (soma, produto) de séries de potências, (teoremas (2.3.10) e (2.3.12)) da seção 2.3 - encontrar os coeficientes de modo a satisfazer a equação, e por fim, algum tipo de padrão sobre esses coeficientes.

Exemplo 1: Vamos encontrar uma solução para

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

na forma de uma série de potências em x .

Pois bem, tentamos uma solução na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2)$$

e procedemos do seguinte modo: Podemos determinar os coeficientes c_n tais que a série (2) convirja para uma função que satisfaça (1)? (Ainda não conhecemos nada a cerca do raio de convergência dessa série).

Derivamos (2) termo a termo para obter $\frac{dy}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^{n+1} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1}.$$

Nosso interesse agora é escrever a soma acima como um único somatório. Como nos exemplos ao final da seção 2.3, precisamos fazer com que ambos os somatórios tenham a mesma indexação nos expoentes para depois poder somar termo a termo. Isto posto, fazemos $k = n - 1$ e $k = n + 1$ na primeira e segunda série respectivamente, e isso fornece

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)c_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)c_{k+1} - 2c_{k-1}]x^k.$$

Para essa igualdade ser 0 devemos ter $c_1 = 0$ e $(k+1)c_{k+1} - 2c_{k-1} = 0$, para $x = 1, 2, 3, \dots$. Assim, $c_{k+1} = \frac{2c_{k-1}}{k+1}$. O que nos dá, $k = 1 \Rightarrow c_2 = c_0$; $k = 2 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{3}c_1 = 0$; $k = 3 \Rightarrow c_4 = \frac{2}{4}c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{1}{2!}c_0$; $k = 4 \Rightarrow c_5 = \frac{2}{5}c_3 = 0$; $k = 5 \Rightarrow c_6 = \frac{2}{6}c_4 = \frac{1}{3!}c_0$ e assim por diante.

Daí, sendo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ obtemos

$$y = c_0 + 0 + c_0 x^2 + 0 + \frac{1}{2!} c_0 x^4 + 0 + \frac{1}{3!} c_0 x^6 + 0 + \dots = c_0 [1 + x^2 + \frac{1}{2!} x^4 + 0 + \frac{1}{3!} x^6 + \dots].$$

Logo, $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$. Como c_0 é uma constante, temos que y é a solução geral para a equação (1), o que era de se esperar pelo que vimos no começo dessa seção.

Nem sempre os problemas são tão simples como no exemplo anterior. Vamos dividir a busca por soluções da equação (3) (ou equivalentemente, (4)) em duas situações, cada uma das quais tratadas nas duas seções a seguir.

3.1 Soluções em torno de pontos não-singulares

Considere, agora, a equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (3)$$

onde os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, são funções da variável independente x . Consideraremos apenas o caso homogêneo. Vamos escrever (3) na forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (4)$$

onde $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$.

Vários problemas em física ou matemática levam a equações desse tipo, por exemplo a *equação de Bessel*, estudada com maiores detalhes na seção 3.2.1, ou a *equação de Legendre*⁶

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

onde n é uma constante.

Definição 3.1.1 Dizemos que x_0 é um ponto não-singular (ou ordinário) de (4) se $P(x)$ e $Q(x)$ são analíticas em x_0 . Caso contrário, dizemos que x_0 é um ponto singular.

Exemplos:

- Como vimos no final da seção 2, a função seno possui a seguinte expansão em séries de potência $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Assim $Q(x) = \frac{\sin x}{x}$ possui o desenvolvimento em série de potências em torno de $x = 0$ dado por,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots$$

portanto, $x = 0$ um ponto não-singular para a equação diferencial $xy'' + (\sin x)y = 0$.

- O ponto $x = 0$ é um ponto singular de $y'' + (\ln x)y = 0$ porque $Q(x) = \ln x$ não tem desenvolvimento em séries de potências centrada em $x = 0$.

Observe que se x_0 é um ponto não-singular da equação (4), então, as funções P e Q são analíticas nesse ponto, em particular, elas são contínuas, logo, pelos teoremas gerais de existência e unicidade de soluções, existe uma única solução da equação (4) (ou (3)) satisfazendo as condições $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ para constantes arbitrárias y_0 e y'_0 .

Embora, a teoria geral possa ser construída independente da natureza dos coeficientes da equação (basta que eles sejam funções analíticas), consideraremos apenas o caso em que tais coeficientes são polinomiais. Uma consequência da definição 3.1.1 e da definição de função analítica, é que quando $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ são polinômios *sem fatores comuns*, um ponto $x = x_0$ é:

⁶Adrien Marie Legendre (1752-1833). Matemático francês, Legendre é mais conhecido por gastar quase 40 anos de sua vida estudando integrais elípticas. Porém, as particulares soluções polinomiais da equação que leva seu nome foram encontradas em seus estudos sobre gravitação.

- i) Um ponto singular se $a_2(x_0) = 0$;
- ii) Um ponto não-singular se $a_2(x_0) \neq 0$.

Por exemplo, os pontos singulares de $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 6y = 0$ são raízes de $x^2 - 1 = 0$, ou seja, $x = \pm 1$. Todos os outros pontos são não-singulares. Evidentemente, pontos singulares não precisam ser *Reais*. As raízes de $x^2 + 1 = 0$ são $x = \pm i$ e portanto esses são os pontos singulares de $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$. Todos os outros pontos (reais ou complexos) são não-singulares.

Teorema 3.1.2 (Teorema de Fuchs) *Se $x = x_0$ for um ponto não-singular de (4) podemos sempre encontrar duas soluções linearmente independentes na forma de série de potências centradas em x_0 :*

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \quad (5)$$

A série converge para uma solução em $|x - x_0| < r$ onde $r > 0$ é a distância do ponto x_0 ao ponto singular mais próximo (real ou complexo).

A demonstração deste resultado é devida a Fuchs⁷ e não é algo elementar, sugerimos as referências [11] e [3] para mais detalhes.

Em vez disso, provar o teorema, nos concentraremos no fato de que existe uma solução (5) e o raio de convergência dado no teorema (3.1.2). Em seguida, tentaremos desenvolver um método prático para determinar tais séries e tais raios de convergência.

Uma solução para a equação diferencial (3) na forma dada em (5) é chamada uma *solução em torno do ponto não-singular* x_0 ou em uma vizinhança do ponto x_0 . A distância r dada no teorema é o valor mínimo do raio de convergência da série.

Para resolver um equação como em (3), colocamos ela na forma padrão (4) e encontramos duas soluções em série de potências distintas $y_1(x)$ e $y_2(x)$, em torno do mesmo ponto não-singular x_0 . O procedimento é supor uma solução do tipo (5) e, então, determinar os coeficientes c_n . A solução é, portanto, $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Sem perda de generalidade, podemos supor um ponto não-singular em $x_0 = 0$, caso contrário, basta fazer a mudança de variáveis $t = x - x_0$ para trazer o ponto não-singular para a origem.

Exemplo 4: Considere a equação diferencial $y'' - 2xy = 0$. Ora $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 0$, $a_0(x) = -2x$ então $a_2(0) = 1 \neq 0$ portanto $x = 0$ é um ponto não singular. Como não há pontos singulares o teorema (3.1.2) garante duas soluções em série de potências $y = \sum c_n x^n$ convergentes em $|x| < \infty$.

Vamos supor $y = \sum c_n x^n \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ e $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$. Assim,

$$y'' - 2xy = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 2c_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1}.$$

Fazendo $k = n - 2$ na primeira série e $k = n - 1$ na segunda, temos

$$y'' - 2xy = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k = 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}]x^k = 0.$$

Daí, $2c_2 = 0$ e $c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

A iteração nos dá,

$$c_3 = \frac{2c_0}{3 \cdot 2}, c_4 = \frac{2c_1}{4 \cdot 3}, c_5 = 0, c_6 = \frac{2c_3}{6 \cdot 5} = \frac{2^2 c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, c_7 = \frac{2c_4}{7 \cdot 6} = \frac{2^2 c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}, c_8 = 0,$$

e assim por diante. É claro que c_0 e c_1 são arbitrários. Daí,

$$\begin{aligned} y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + \dots \\ &= c_0 + c_1 x + 0 + \frac{2c_0}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{2c_1}{4 \cdot 3} x^4 + 0 + \frac{2^2 c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^6 + \frac{2^2 c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 + 0 + \dots \end{aligned}$$

⁷Imanuel Lazarus Fuchs (1833-1906) foi estudante e, mais tarde, professor na Universidade de Berlim. Provou o teorema 3.1.2 em 1886. Sua pesquisa mais importante foi sobre pontos singulares de equações diferenciais lineares.

$$= c_0 \left[1 + \frac{2c_0}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{2^2 c_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} x^6 + \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{2c_1}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{2^2 c_1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} x^7 + \dots \right].$$

Escrevendo em forma de somatório e usando as propriedades do fatorial, podemos escrever

$$y_1(x) = c_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k [1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)]}{(3k)!} x^{3k} \right] \text{ e } y_2(x) = c_1 \left[x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k [2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)]}{(3k-1)!} x^{3k+1} \right].$$

3.2 Soluções em torno de pontos singulares

Como acabamos de ver, embora possa ser um procedimento enfadonho, é possível encontrar uma solução na forma de séries de potência para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

em torno de um ponto ordinário (não-singular) $x = x_0$. No entanto, os métodos da seção anterior nem sempre funcionam ao tentarmos resolver essa equação numa vizinhança de um ponto singular $x = x_0$. Isso, em geral, ocorre pelo fato de as soluções de (3) não serem analíticas em $x = x_0$ e, conseqüentemente, não podem ser representadas por uma série de potências em torno de $x - x_0$.

Observe que as singularidades da equação de Bessel são as raízes de $a_2(x) = x^2$, ou seja, $x = 0$, enquanto que as da equação de Legendre são $x = \pm 1$, que são as raízes de $a_2(x) = 1 - x^2$. Todos os outros pontos são ordinários. Essa fato é geral, ou seja, as singularidades de uma equação diferencial são poucas, na maioria dos casos; uma para a equação de Bessel, duas para a equação de Legendre. Então, porque simplesmente não ignoramos esses pontos singulares já que sabemos conseguir soluções em torno de pontos não-singulares? Na verdade isso não é possível pois é na vizinhança das singularidades que temos as principais características das soluções de um sistema modelado por uma equação diferencial. As singularidades dizem muito sobre o comportamento das soluções, elas podem crescer em módulo, ou podem ficar cada vez mais próximas umas das outras, ou cada vez mais dispersas. Sendo assim, embora sejamos levados a querer estudar as equações nos casos mais simples onde a equação possui apenas pontos não-singulares, é exatamente nos pontos onde a equação tem singularidades que devemos ter mais atenção.

Essa parte da matemática chama-se *Teoria dos Sistemas Dinâmicos* ou, simplesmente, *Sistemas Dinâmicos* e está longe de ser tarefa simples adentrar nesse mundo. As referências [3], [11] e [10] trazem mais sobre o assunto.

Exemplo 1: A equação diferencial

$$x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$$

tem um ponto singular em $x = 0$. É imediato verificar que $y_1 = \frac{1}{x}$ e $y_2 = \frac{1}{x^3}$ são soluções linearmente independentes da equação e que nenhuma delas é analítica em $x = 0$. De fato, toda solução (não-nula) da equação torna-se ilimitada quando $x \rightarrow 0$.

Nosso objetivo é estender o método utilizado na seção anterior para soluções da (3) em torno de pontos não-singulares para que ele também possa ser utilizado em uma vizinhança de um ponto singular. Com este fim vamos classificar uma singularidade de duas maneiras diferentes.

Definição 3.2.1 Dizemos que um ponto singular $x = x_0$ da equação (3) é um ponto singular regular (ou singularidade regular) se $(x - x_0)P(x)$ e $(x - x_0)^2 Q(x)$ são analíticas em x_0 . Um ponto singular que não é regular é chamado de ponto singular irregular (ou singularidade irregular) da equação.

As singularidades regulares também são conhecidas como "singularidades fracas", elas, de certo modo, dizem até onde uma singularidade seria aceitável. Discutiremos aqui somente o caso de uma singularidade regular, o caso irregular é mais delicado e pode ser encontrado nas referências já citadas no início dessa seção.

Novamente, quando os coeficientes de (4) são polinomiais sem fatores comuns, a definição (3.2.1) equivale a:

Seja $a_2(x_0) = 0$, reduzimos $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$. Se o fator $(x - x_0)$ aparecer no denominador de $P(x)$ com multiplicidade menor ou igual a 1 e no de $Q(x)$ com multiplicidade menor ou igual a 2, então, $x = x_0$ será um ponto singular regular.

Exemplos:

2. Os pontos $x = -2$ e $x = 2$ são singulares da equação

$$(x^2 - 4)^2 y'' + (x - 2)y' + y = 0.$$

Dividindo a equação por $(x^2 - 4) = (x - 2)^2(x + 2)^2$, encontramos

$$P(x) = \frac{1}{(x - 2)(x + 2)^2} \text{ e } Q(x) = \frac{1}{(x - 2)^2(x + 2)^2}.$$

Agora, testamos $P(x)$ e $Q(x)$ em cada ponto singular.

Para que $x = -2$ seja uma singularidade regular, a multiplicidade do fator $x + 2$ no denominador de $P(x)$ tem de ser menor ou igual a 1 e no denominador de $Q(x)$, menor ou igual a 2. Inspecionando $P(x)$ e $Q(x)$, vemos que a primeira condição não é satisfeita. Concluimos, então, que $x = -2$ é um ponto singular irregular.

Para que $x = 2$ seja uma singularidade regular, a multiplicidade do fator $x - 2$ no denominador de $P(x)$ tem de ser no máximo 1 e no denominador de $Q(x)$, no máximo 2. Verificamos que essas condições são satisfeitas. Logo, $x = 2$ é uma singularidade regular.

3. Tanto $x = 0$ quanto $x = -1$ são pontos singulares da equação diferencial

$$x^2(x + 1)^2 y'' + (x^2 - 1)y' + 2y = 0.$$

Inspecionando $P(x) = \frac{x - 1}{x^2(x + 1)}$ e $Q(x) = \frac{2}{x^2(x + 1)^2}$ vemos que $x = 0$ é uma singularidade irregular, pois a multiplicidade do fator $(x - 0)$ no denominador de $P(x)$ é 2. Note, porém, que $x = -1$ é singularidade regular.

Vamos considerar agora o problema de resolver a equação diferencial linear de segunda ordem (3) numa vizinhança de um ponto singular regular. Novamente, vamos supor que a singularidade encontra-se em $x = 0$, caso contrário fazendo a mudança de variáveis $t = x - x_0$.

A teoria geral é devida a Frobenius⁸ e, como no caso anterior, não é das mais simples. Ainda recorrendo ao caso da seção anterior, enunciaremos o teorema de Frobenius e, em vez de prová-lo, vamos supor que existe uma solução da forma dada no teorema e vamos nos concentrar em determinar os coeficientes dessa série.

Teorema 3.2.2 (Teorema de Frobenius) *Se $x = x_0$ for um ponto singular da equação (3) então, existe pelo menos uma solução em série na forma*

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \quad (6)$$

em que o número r é uma constante a ser determinada. A série convergirá pelo menos em algum intervalo $0 < x - x_0 < R$.

O que o método de Frobenius faz é identificar um ponto singular regular x_0 , substituir y dado em (6) na equação diferencial e determinar expoente r e os coeficientes c_n .

Exemplo 4: Como $x = 0$ é uma singularidade regular da equação diferencial $3xy'' + y' - y = 0$ tentamos uma solução na forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Agora,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) c_n x^{n+r-1} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) c_n x^{n+r-2}.$$

Daí, substituindo y'' , y' e y em $3xy'' + y' - y = 0$ temos

$$\begin{aligned} & 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(3n + 3r - 2) c_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \end{aligned}$$

⁸Ferdinand Georg Frobenius (1848-1917). Embora a idéia básica desse método já aparecesse com Euler tempos antes, o matemático e autor alemão Frobenius foi o primeiro a provar o resultado, publicado em 1878. Embora seu nome apareça também em textos de análise, suas contribuições mais significativas na Matemática foram em teoria de grupos.

$$= x^r \left[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2)c_nx^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^{n+r} \right] = 0$$

substituindo no primeiro somatório $k = n - 1$ e no segundo $k = n$ temos

$$x^r \left[r(3r-2)c_0x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k]x^k \right] = 0$$

o que implica $r(3r-2)c_0 = 0$ e $(k+r+1)(3k+3r+1)c_{k+1} - c_k = 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Como fazer $c_0 = 0$ não é de grande proveito, temos

$$r(3r-2) = 0 \quad (7)$$

e

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Os valores que satisfazem (7) são, $r_1 = \frac{2}{3}$ e $r_2 = 0$, quando substituídos em (8) fornecem duas relações de recorrência:

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad r_2 = 0, \quad c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Iterando as relações de recorrências em (9), obtemos respectivamente

$$c_1 = \frac{c_0}{5 \cdot 1}, \quad c_2 = \frac{c_1}{8 \cdot 2} = \frac{c_0}{2! \cdot 5 \cdot 8}, \quad c_3 = \frac{c_2}{11 \cdot 3} = \frac{c_0}{3! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 3}, \dots$$

$$c_n = \frac{c_0}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n+2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e

$$c_1 = \frac{c_0}{1 \cdot 1}, \quad c_2 = \frac{c_1}{2 \cdot 4} = \frac{c_0}{2! \cdot 1 \cdot 4}, \quad c_3 = \frac{c_2}{3 \cdot 7} = \frac{c_0}{3! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7}, \dots$$

$$c_n = \frac{c_0}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, obtemos duas soluções em série

$$y_1 = c_0 x^{\frac{2}{3}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n+2)} x^n \right] \quad \text{e} \quad y_2 = c_0 x^0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)} x^n \right].$$

Pelo teste da razão, pode ser demonstrado que y_1 e y_2 convergem para qualquer x . Como y_1 e y_2 não são múltiplas uma da outra, elas são linearmente independentes. Assim, pelo princípio da superposição,

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) =$$

$$= C_1 \left[x^{\frac{2}{3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n+2)} x^{n+\frac{2}{3}} \right] + C_2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)} x^n \right], \quad |x| < \infty,$$

é outra solução para equação. Em qualquer intervalo que não contenha a origem, essa combinação representa a solução geral para equação diferencial.

A equação (7) é chamada de *equação indicial* do problema, os valores r_1 e r_2 são chamados de *raízes indiciais*, ou *expoentes*, da singularidade.

O exemplo anterior mostra que se $x = 0$ é uma singularidade regular, então, algumas vezes, existem duas soluções linearmente independentes da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ numa vizinhança desse ponto. Analogamente, se a singularidade regular for em $x = x_0$, podem existir duas soluções linearmente independentes da forma $y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, numa vizinhança de $x = x_0$. No entanto, uma equação mais geral com uma

singularidade regular pode não ter duas soluções desse tipo. Em particular, se as raízes da equação indicial são iguais ou diferem por um inteiro, então, a segunda solução, normalmente, tem sua estrutura mais complicada. Em todo caso, no entanto, o teorema de Frobenius garante a existência de pelo menos uma solução desse tipo. É possível provar que quando existe apenas uma solução (como no teorema de Frobenius), então a segunda

solução contém um termo logarítmo (lembrando o que acontece nas equações de Cauchy-Euler quando as raízes da equação característica são reais e iguais ou complexas, no caso de ordem 2) e esta pode ser obtida através do método de redução de ordem.

Ainda como no caso complexo da equação de Cauchy-Euler, quando as raízes da equação inicial são complexas é possível provar que sempre existem duas soluções (complexas) linearmente independentes da forma descrita no teorema de Frobenius e também podemos obter soluções reais considerando as partes real e imaginária das soluções complexas e usando o princípio da superposição.

No caso geral, se $x = 0$ for uma singularidade regular de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, então as funções $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ obtidas de (4) são analíticas em $x = 0$, isto é, os desenvolvimentos $xP(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots$ e $x^2Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \dots$ são válidos em intervalos de raio de convergência positivo. Substituímos y em (3) e simplificando, vemos que a equação indicial é uma equação quadrática em r . Fazendo a identificação termo a termo obtemos $F(r) = 0$, onde $F(r) = F(r-1) + p_0r + q_0$ que é chamada *Equação Indicial*. Nesse caso mais geral (veja [2]). Como antes, r_1 e r_2 são as *raízes indiciais* ou *expoentes* da singularidade, elas determinam natureza qualitativa das soluções numa vizinhança de uma singularidade regular.

Não é o foco deste trabalho analisar caso a caso com o rigor merecido, contudo dada a importância do tema, faremos breves comentários. No método de Frobenius, normalmente, três situações ocorrem dependendo das raízes da equação indicial. Suponha r_1 e r_2 raízes indiciais com $r_1 \geq r_2$ no caso dessas raízes serem reais.

- Se $r_1 \neq r_2$ e se $r_1 - r_2 \neq n$, para todo inteiro positivo $n \geq 1$, então $F(r_2 + r_1) \neq 0$ e sempre podemos obter duas soluções linearmente independente para a equação (3) do tipo

$$y_1 = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right], \quad x > 0, \quad \text{e} \quad y_2 = x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right], \quad x > 0.$$

Com ambas as raízes tendo raio de convergência positivo. Para obter soluções para $x < 0$ basta, então, fazer $x = -t$, $t > 0$.

- Se $r_1 = r_2$, o método de encontrar uma segunda solução é, essencialmente, o mesmo que estudamos na equação de Cauchy-Euler quando essa tem raízes iguais para a equação característica. Nesse caso obtemos duas soluções linearmente independentes do tipo

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad y_2 = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r}, \quad b_0 \neq 0,$$

para $x > 0$.

- Finalmente, quando $r_1 - r_2 = n$, $n > 0$ um inteiro positivo, temos o caso mais complicado para a obtenção da segunda solução. Nesse caso, obtemos duas soluções linearmente independentes da forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r_1}, \quad c_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad y_2 = C y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}, \quad b_0 \neq 0,$$

onde a constante C pode ser nula, caso em que a solução y_2 não possui termo logarítmico.

Cada uma dessas séries nos caso anteriores convergem pelo menos para $|x| < \rho$, $\rho > 0$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

A dedução dessas fórmulas pode ser encontrada em [2] ou, mais detalhadamente, em [3].

3.2.1 Equação de Bessel

Como exemplo do que vimos na seção (3.2) vamos agora nos preocupar em encontrar uma solução na forma de uma série infinita para a equação de Bessel.

A equação

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{10}$$

onde ν é uma constante, é chamada *equação de Bessel*.

É imediato ver que $x = 0$ é uma singularidade regular dessa equação. Poderíamos ser mais específicos e analisar separadamente os casos $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ e $\nu = 1$, chamadas de *Equações de Bessel de Ordem Zero, Um e Meio*, respectivamente. Aqui vamos analisar de uma maneira mais geral quando $\nu \geq 0$.

Pelo Teorema de Frobenius a equação (10) possui uma solução do tipo $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$, derivando e substituindo na equação temos

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \nu^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$\begin{aligned}
&= c_0(r^2 - r + r - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \\
&= c_0(r^2 - \nu^2)x^r + x^r \sum_{n=1}^{\infty} c_n[(n+r)^2 - \nu^2]x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Dessa última expressão, vemos que a equação indicial é $r^2 - \nu^2 = 0$, portanto, as raízes indiciais são $r_1 = \nu$ e $r_2 = -\nu$. Quando $r_1 = \nu$, (11) torna-se

$$x^\nu \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = x^\nu \left[(1+2\nu)c_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n+2\nu)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \right] = 0.$$

Substituindo no primeiro somatório $k = n - 2$ e no segundo $k = n$, temos

$$x^\nu \left[(1+2\nu)c_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k] x^{k+2} \right] = 0.$$

Logo, $(1+2\nu)c_1 = 0$ e $(k+2)(k+2+2\nu)c_{k+2} + c_k = 0$. Ou ainda, $c_{k+2} = \frac{-c_k}{(k+2)(k+2+2\nu)}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

A escolha $c_1 = 0$ implica $c_3 = c_5 = \dots = 0$. Daí, para $k = 0, 2, 4, \dots$, encontramos, após fazer $k+2 = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, que $c_{2n} = -\frac{c_{2n-2}}{2^2 n(n+\nu)}$. Iterando,

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{2^2 \cdot 1 \cdot 1(1+\nu)}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{2^2 \cdot 2(2+\nu)} = -\frac{c_0}{2^4 \cdot 1 \cdot 2(1+\nu)(2+\nu)}, \dots, \\
c_{2n} &= \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n! (1+\nu)(2+\nu) \dots (n+\nu)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Em geral, escolhemos o valor $c_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}$, onde Γ é a *função Gama*⁹. Como esta função tem a propriedade $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, podemos reescrever (12) do seguinte modo

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! (1+\nu)(2+\nu) \dots (n+\nu)\Gamma(1+\nu)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(1+n+\nu)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Então, uma solução para equação de Bessel é

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1+\nu+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}.$$

Se $\nu \geq 0$, a série converge ao menos em $[0, \infty)$.

Aqui usamos os métodos de Fuchs e Frobenius para resolver equações diferenciais com singularidades regulares que, apesar da dificuldade, ainda constituem uma situação mais simples, como já mencionado no texto. Assim, foi possível encontrar uma solução para a equação de Bessel em torno da singularidade $x = 0$. Para concluir, queríamos poder dar aplicações dessa equação em outras áreas. A referência [11] faz uma aplicação da equação de Bessel ao problema da *descrição das oscilações de uma membrana cujo contorno é o círculo de raio 1 no plano xy* .

4 Conclusões

Com a realização desse trabalho de pesquisa foi percebido que as Equações Diferenciais tiveram suas origens a partir de observações criando uma modelagem para resoluções que extrapolam as equações elementares. De início as Equações Diferenciais, aplicavam-se as ciências físicas ampliando para outras atividades humanas, como o campo da engenharia, biologia e medicina. Sua aplicação tem se tornado um estudo necessário e enriquecedor.

Aprofundando os conceitos e definições das equações diferenciais, o presente trabalho busca propor solucionar equações através de objetos que vão além das funções elementares do cálculo.

⁹Euler, em seu texto *Institutiones calculi integralis*, (1768) definiu a chamada *função gama*, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$. A convergência da integral requer $x-1 > -1$, ou $x > 0$. A relação de recorrência $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pode ser obtida a partir da integral acima através da integração por partes.

O trabalho, aqui proposto, buscou estudar processos de resoluções de equações diferenciais ordinárias, tendo como ferramenta as séries de potências. Ao longo da pesquisa, apresentam-se definições de sequências e séries com suas proposições e demonstrações, buscando entender um pouco sobre os pré-requisitos para a aplicação dessas séries em uma classe mais geral de equações, a saber, aquelas cujos coeficientes não são constantes.

Referências

- [1] Behling, R. – *A Equação de Kepler por Bessel E Fourier*. 2004. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96666/Roger.pdf>. Acesso em: 28 de outubro de 2019.
- [2] Boyce, W. E. e DiPrima, R. C. – *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ed. Rio de Janeiro, L.T.C.
- [3] Coddington, E. A. e Levinson, N. – *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York, McGraw-Hill, 1955.
- [4] Doering, C. I. e Lopes, A. O. – *Equações Diferenciais ordinárias*. 2ed. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.
- [5] Figueiredo, D. G. - *Análise I*. Rio de Janeiro, L.T.C., 1974.
- [6] Guidorizzi, H. L. – *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. 5ed. Rio de Janeiro, L.T.C., 2001.
- [7] Lima, E. L. – *Análise Real - Funções de Uma Variável*, vol. 1. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2006.
- [8] Lima, E. L. – *Curso de Análise*, vol. 1. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [9] Nóbrega, D. D. – *Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações*. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ensino Superior do Seridó - Campus Caicó., Caicó - RN, 2016. Disponível em: http://monografias.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/2777/6/Equa%C3%A7%C3%B5es%20diferenciais%20ordin%C3%A1rias%20e%20algumas%20aplica%C3%A7%C3%B5es.Monogr%C3%A1fia_N%C3%B3brega.pdf. Acesso em: 28 de Outubro de 2019.
- [10] Palis, J. e Melo, W. – *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, CNPq, 1978.
- [11] Sotomayor, J. – *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [12] Zill, D. G. e Cullen, M. R. – *Equações Diferenciais*, vol. 1. São Paulo, PEARSON, 2007.



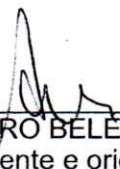
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

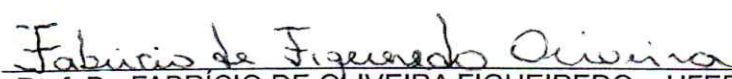
Às 10h horas do dia 06 de fevereiro de dois mil e vinte, na sala 7 da central de aulas V da UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria do aluno **LIAN FIDELIS DE SOUSA NOGUEIRA**, aluno do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula 2016020634, com o título **“SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS VIA SÉRIES DE POTÊNCIAS. A EQUAÇÃO DE BESSEL”**. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Msc. ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Dr. FABRÍCIO DE OLIVEIRA FIGUEIREDO e Prof. Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES, como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, tendo o aluno obtido as seguintes notas: 10; 10; 10. Apuradas as notas verificou-se que o aluno foi aprovado com média geral 10. E para constar, eu, ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 06 de fevereiro de 2019.

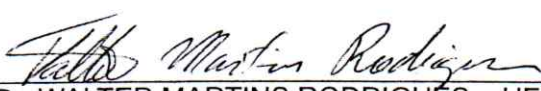
Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



Prof. Msc. ALEXSANDRO BELÉM DA SILVA – UFERSA
Presidente e orientador



Prof. Dr. FABRÍCIO DE OLIVEIRA FIGUEIREDO – UFERSA
Primeiro Membro



Prof. Dr. WALTER MARTINS RODRIGUES – UFERSA
Segundo Membro