



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS-
RN
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

RAVI DA SILVA LINHARES

**TRATAMENTO CIENTÍFICO DOS FENÔMENOS ASSOCIADOS À
DINÂMICA DA BOLA DE FUTEBOL**

Pau dos Ferros-RN

2016

RAVI DA SILVA LINHARES

**TRATAMENTO CIENTÍFICO DOS FENÔMENOS ASSOCIADOS À
DINÂMICA DA BOLA DE FUTEBOL**

Orientador: Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior

Monografia orientada pelo Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior e apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Ciência e Tecnologia, Modalidade: Bacharelado.

Pau dos Ferros-RN

2016

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

L735t Linhares, Ravi da Silva .
Tratamento científico dos fenômenos associados à
dinâmica da bola de futebol / Ravi da Silva
Linhares. - 2016.
46 f. : il.

Orientador: Lino Holanda.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2016.

1. Física. 2. Trajetória. 3. Bola. 4. Futebol.
I. Holanda, Lino, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

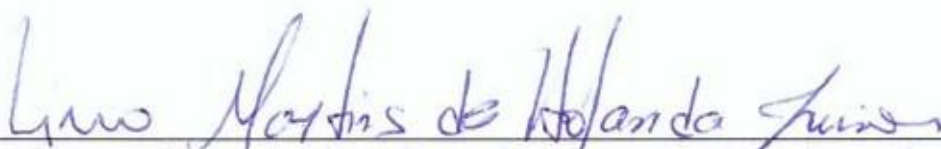
RAVI DA SILVA LINHARES

**TRATAMENTO CIENTÍFICO DOS FENÔMENOS ASSOCIADOS À
DINÂMICA DA BOLA DE FUTEBOL**

Trabalho de Conclusão de
Curso apresentado à
Universidade Federal Rural do
Semi-Árido - UFERSA,
campus Pau dos Ferros, para
obtenção do título de Bacharel
em Ciência e Tecnologia.

APROVADO EM: __09__/_11__/_2016__.

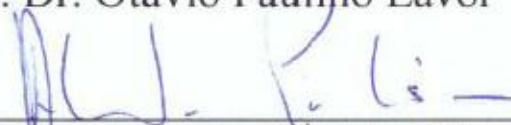
Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Junior (Orientador)



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor



Prof. Dr. Alexandro Pereira Lima

Sumário

1	Introdução	11
1.1	Justificativa	11
1.2	Objetivos	12
1.2.1	Objetivo Geral	12
1.2.2	Objetivos Específicos	12
1.3	História	13
2	Referencial Teórico	16
2.1	O chute	16
2.2	Forças que atuam no pé	18
2.3	Precisão do chute	19
2.4	A bola em voo	19
2.4.1	Força gravitacional	19
2.4.2	Trajetória da bola em voo (Caso ideal)	20
2.4.3	Forças aerodinâmicas	22
2.5	Variação da densidade do ar em função da temperatura e altitude . . .	26
2.5.1	Densidade do ar em função da temperatura	26
3	Metodologia	29
4	Resultados	30
4.1	Definindo as equações de movimento	30

4.2	Trajectoria da bola com arrasto em função do ângulo de chute	33
4.3	Trajectoria da bola com arrasto em função da Temperatura	35
4.4	Trajectoria da bola com arrasto em função da altitude	37
4.5	Efeito Magnus	40
5	Conclusão	43

Lista de Figuras

1.1	(a) Bola de couro mais atinga existente (foto do Museu e Galeria de Artes Stirling Smith na Escócia) e (b) Brazuca, bola usada na copa do mundo de 2014 no Brasil [4].	13
2.1	Representação das forças que atuam no pé durante o chute.	18
2.2	Representação da trajetória da bola em função do ângulo de chute. . .	21
2.3	Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa em função do número de Reynolds [9].	24
2.4	Separação da camada limite em uma esfera [9].	25
2.5	Separação da camada limite em uma bola rotacionada no sentido horário [9].	27
2.6	Densidade do ar em função da temperatura e da pressão em lb/ft^3 [9].	28
4.1	Trajetoória da bola de futebol em função do ângulo de chute θ	34
4.2	Trajetoória da bola com e sem arrasto para os valores do ângulo máximo $\theta = 45^\circ$	34
4.3	Trajetoória da bola com e sem arrasto para os valores do ângulo máximo $\theta = 45^\circ$ simulada em um campo de futebol.	35
4.4	Trajetoória da bola de futebol em função da temperatura T para um ângulo fixo.	36
4.5	Trajetoória da bola de futebol em função da altitude para uma latitude de 45°	38
4.6	Trajetoória da bola de futebol analisada em algumas cidades do mundo.	40

4.7	Representação da trajetória da bola no chute de Roberto Carlos em um jogo da seleção brasileira [14].	41
4.8	Direção da força de arrasto (F_A) e da força Magnus (F_M) para uma bola de futebol em voo sujeita a uma rotação em torno do seu próprio eixo [14].	42

Lista de Tabelas

4.1	Variação da densidade do ar e do parâmetro b em função da temperatura	36
4.2	Variação da densidade do ar e do parâmetro b em função da temperatura	38
4.3	Relação das cidade analisadas com suas respectivas altitudes e latitudes	39
4.4	Parâmetros utilizados na determinação das trajetórias da bola para as diferentes cidades estudadas.	39

Agradecimentos

Agradeço a meu Deus por ter me dado coragem e saúde para enfrentar as dificuldades. Aos meus pais pelo esforço que têm feito para minha formação. À minha namorada pelo carinho e atenção. Ao meu orientador, Prof. Dr. Lino Martins de Holanda Júnior, pelo empenho à elaboração desse trabalho. A todos que contribuíram direta ou indiretamente, o meu muito obrigado.

Resumo

A Física está presente em todos os movimentos do futebol e estudá-la sob o aspecto esportivo pode ser muito proveitoso e estimulante. Neste trabalho estudamos os fenômenos associados à dinâmica da bola de futebol e, para isso, foram determinadas as equações de movimento levando em consideração forças que atuam sobre a bola em voo. Com auxílio dessas equações e variando alguns parâmetros como ângulo de chute, altitude e temperatura foi observado diferenças significativas na trajetória da bola que podem ser aliadas (ou não) de jogadores durante uma partida futebolística. Nossos resultados mostraram a importância de se analisar de maneira mais cuidadosa alguns aspectos referentes às forças, de arrasto e Magnus, que atuam sobre a bola e que podem ser motivos de erros significativos em estudos onde tais forças sejam desprezadas. Nossos resultados mostraram ainda, que variando a temperatura de $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ até aproximadamente $49\text{ }^{\circ}\text{C}$, tem-se uma variação de alcance horizontal da bola, em um chute, de aproximadamente 1 m , já variando a altitude do nível do mar até uma altura vertical de 4090 m , tem-se uma variação de alcance horizontal de aproximadamente 4 m , onde mostra que esses fatores físicos desempenham uma influência muito significativa durante as partidas.

Palavras-chave: Física; Trajetória; Bola, Futebol.

Abstract

Physics is present in all the movements of football and be able to study it in the sporting aspect can be very useful and stimulating. In this work, we study the phenomena associated with the dynamics of football and, therefore, were determined the equations of motion taking into account forces acting on the ball in flight. With the help of these equations and varying some parameters like shooting angle, altitude and temperature, significant differences were observed in the trajectory of the ball that can be combined (or not) players during a football match. Our results showed the importance of analyzing more carefully some characteristics of the forces acting on the ball and can be significant errors reasons in studies where such forces are neglected. Our results also show that varying the temperature from 10°C to about 49°C , there is a horizontal range variation of the ball in a kick of approximately 1 m, varying the altitude from sea level to a height Vertical range of 4090 m, there is a horizontal range variation of approximately 4 m, where it shows that these physical factors play a very significant influence during the games.

Keywords: Physics; Trajectory; Ball, football.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa

O interesse por esse estudo surgiu mediante a admiração do autor pelo futebol, quando praticava o desporto e também quando assistia a diversas partidas de diferentes times. Em especial, se encantou quando assistiu um vídeo com um chute de um jogador brasileiro, Roberto Carlos, em 1997, no jogo entre Brasil e França, torneio preparatório para a copa do mundo de 1998, no qual a bola faz uma curva impressionante e muda a trajetória enganando o goleiro adversário. Com isso, surgiu o interesse de saber quais fenômenos físicos são responsáveis por essa mudança de trajetória da bola, bem como outros relacionados à dinâmica da bola de futebol.

Essas indagações levaram a elaboração do projeto intitulado Tratamento científico dos fenômenos associados à dinâmica da bola de futebol. A partir da leitura sobre o tema, foi observada a importância de uma pesquisa relacionada à física do esporte mais popular do mundo.

A física do futebol possui aplicações práticas significativas e um grande potencial pedagógico. Ela pode ser uma maneira prazerosa de se aprender diferentes tópicos da física. O futebol sendo o esporte mais popular do Brasil, pode dar uma motivação especial para pessoas que não tenham tanta afinidade com a matéria e assim possam se interessar pelo estudo da física.

Apesar de existir vários artigos sobre a física de esportes como o beisebol, o golfe, o tênis, existem poucos sobre a física do esporte que é a paixão dos brasileiros. O futebol é rico em conteúdos de física, por isso não se pode justificar tal abandono [1]. Espera-se que esse trabalho possa ajudar na elaboração de projetos futuros sobre o tema, deixando de lado um pouco do abandono que se dá à física do esporte mais popular do Brasil.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Estudar os fenômenos associados à aerodinâmica da bola de futebol e determinar quais são as influências desses fenômenos na trajetória da bola. Analisar qualitativamente e quantitativamente a trajetória da bola em voo sob diferentes condições climáticas e em posições geográficas distintas. Nosso trabalho dará informações valiosas para jogadores que se preocupam com a precisão em seus chutes. Mostraremos que pequenos detalhes, como uma variação na temperatura do ar, pode alterar as forças aerodinâmicas que atuam na bola e, conseqüentemente, alterar sua trajetória.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar as forças aerodinâmicas que atuam na bola de futebol.
- Determinar a influência da altitude e da temperatura na trajetória da bola sem rotação.
- Determinar qual a função da força de arrasto e sua influência na trajetória da bola sem rotação.
- Verificar como o efeito Magnus influencia a trajetória da bola quando chutada com rotação.

1.3 História

O futebol é sem dúvidas um dos esportes mais praticados no mundo, e tem despertado o interesse de diferentes gerações. Existem relatos históricos que indicam o jogo há 200 anos A.C na China, onde se chamava “Tsu Chu”. A história também mostra indícios desse jogo sendo praticado por outros povos antigos como gregos e romanos [2]. Porém foi na Inglaterra que as regras e o propósito competitivo foram surgindo e repassados para o mundo [2]. Assim, o futebol foi evoluindo até chegar a forma atual.

Assim como o esporte, a bola também passou por processos de mudanças ao longo do tempo. No início, a bola era constituída por uma bexiga de porco ou boi, envolvida em couro, que era bombeada através de uma abertura na parte de couro e em seguida lacrada (Figura 1.1.a). Apesar de já ser um avanço para a época, os problemas com esse tipo de material foram surgindo, começando por sua fabricação, pois teria que ser feita de uma forma muito cuidadosa e, como consequência, muito material era perdido. Além do processo de fabricação, surgiram problemas no momento da prática do jogo, pois o couro tem a capacidade de reter água. Quando essa característica era combinada com a capacidade de absorver a lama, o peso da bola poderia até duplicar [3].

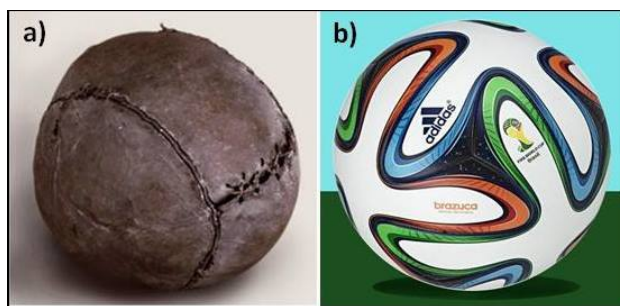


Figura 1.1: (a) Bola de couro mais atinga existente (foto do Museu e Galeria de Artes Stirling Smith na Escócia) e (b) Brazuca, bola usada na copa do mundo de 2014 no Brasil [4].

A bexiga animal foi substituída por borracha, mas o uso do couro persistiu até a década de 1960, no entanto, o sucesso do futebol dependeria da utilização de materiais de extrema qualidade na fabricação da bola. Por isso, no final da década de 1980, foi

introduzido o revestimento de multicamadas e o desenvolvimento de uma forma constituída de material sintético. Esta bola conseguiu resistir à retenção de água e, com isso, manteve sua forma. O invólucro da bola que tem uma boa qualidade é constituído por painéis, que podem ter diferentes formas. Estes painéis são costurados em conjunto por fios que são encerados pra aumentar à resistência a absorção de água. Atualmente a bola é bombeada através de um orifício no revestimento. Esses tipos de bolas são próximos da forma desejada. Ao procurarmos os melhores materiais para a fabricação da bola, os objetivos são claros: a bola não pode ser muito pesada, a ponto de não poder ser chutada, nem muito leve, a ponto de ser movimentada por qualquer intensidade de ventos. Também não deve ser muito grande nem muito pequena. Deve-se procurar um diâmetro eficiente para que não prejudique a prática do esporte [3].

Ao passar dos anos foram feitas bolas com materiais de alta tecnologia e, com isso, chegou-se as formas que usamos atualmente. Hoje quem determina as medidas oficiais da bola é a FIFA (*Federation International of Football Association*), onde estabelece que a bola deve ter massa entre $410g$ e $450g$, pressão entre $60,8kPa$ a $111,5kPa$ e a circunferência entre $68cm$ e $70cm$. Porém, para receber o selo de qualidade da FIFA APPROVED, ela deve ter peso entre $420g$ e $445g$, circunferência entre $68,5cm$ a $69,5cm$ e pressão de teste de $80kPa$ [5]. Um exemplo de uma bola padrão FIFA está representada na Figura 1.1.b.

Com o sucesso do futebol, torna-se muito importante a realização de estudos voltados para a compreensão da ciência que envolve os fundamentos desse esporte. Com isso, este trabalho trata de um assunto ainda pouco explorado, a física do futebol e, em especial, os fenômenos físicos associados à bola desde o momento em que é chutada até o seu destino final. A trajetória da bola pode, muitas vezes, ser modificada por motivos que não dependem de quem a chuta, os quais estão associados à aerodinâmica da própria bola [2]. Um exemplo prático aconteceu com um conhecido jogador brasileiro chamado Valdir Pereira (Didi), no jogo Brasil x França, pela copa do mundo de 1958, no qual ele chutou a bola de “raspão” fazendo-a girar. Nesse chute, ele conseguiu um efeito, até então desconhecido no futebol, que mudou a trajetória da bola e enganou o

goleiro adversário [6]. Esse é somente um exemplo, dentre vários, onde vemos a necessidade de estudarmos as interferências sofridas pela bola após ela ser chutada. Partindo dessas informações, o presente trabalho procura responder algumas questões, como por exemplo, quais são as influências que determinados fenômenos físicos, como a força de arrasto, provocam na trajetória da bola de futebol.

Capítulo 2

Referencial Teórico

2.1 O chute

A bola pode ser chutada de diferentes formas, para conseguir um chute mais lento e de maior precisão, deve-se chutar com a face interior do pé. Para um chute mais forte, acerta-se a bola com a parte superior mais dura do pé. Para um chute em linha reta, geralmente acerta no centro da esfera, porém, pode ser vantajoso acertar de raspão para conseguir uma rotação na bola, o qual resultará em dois efeitos cruciais para a trajetória da bola: o *backspin* e o *slidespin*. O *backspin* é conseguido batendo sob o centro da bola e o *slidespin* acertando o pé na parte lateral da bola [3].

Em chutes como penalidades e cobranças de faltas existem dois elementos cruciais para a mecânica: o primeiro é o movimento da perna para acelerar o pé e o segundo é a rápida interação do pé com a bola. O movimento do pé tem uma duração de um décimo de segundo e o impacto com a bola dura também cerca de um décimo de segundo [3]. Para chutes mais rápidos, precisamos adquirir o máximo de velocidade com o pé, com a objetivo de transferir um grande impulso para a bola. Para conseguir isto, o joelho deve ser dobrado e o pé levado até próximo do quadril. Esse movimento permite que o pé seja acelerado através do maior percurso possível para produzir uma grande velocidade final e, conseqüentemente, transmiti-la à bola [3].

Se a interação da bola com o pé for perfeitamente elástica, sem perdas de energia

por atrito, a velocidade transmitida à bola seguirá duas leis de conservação, a lei de conservação de energia e do momento angular [7, 8]. Essas leis podem determinar a diminuição de velocidade do pé quando acontece o impacto bem como a velocidade resultante da bola [3].

A mecânica do chute é muito complexa mas podemos simplificá-la assumindo que durante o contato com a bola, a perna gira apenas sobre o quadril. Quando o pé atinge a velocidade máxima, acontece o processo de transferência de impulso da perna para bola. Se o conjunto “perna+pé” tem um momento de inércia I em relação ao quadril, o momento angular no início do impacto será dado por $I\Omega_0$, onde Ω_0 é a velocidade angular inicial da perna. Na parte final do impacto, a velocidade angular da perna é reduzida para Ω_1 e o momento angular é $I\Omega_1$. Assim, o momento angular perdido é transferido para a bola, a qual adquire um momento angular em relação ao quadril dado por mlv_b , em que m é a massa da bola, l é o comprimento da perna e v_b é a velocidade inicial adquirida pela bola. Assim, pela conservação do momento angular, temos

$$I(\Omega_0 - \Omega_1) = mlv_b \quad (2.1)$$

escrevendo a velocidade inicial do pé como $v_0 = \Omega_0 l$, e a velocidade do pé depois do impacto como $v_1 = \Omega_1 l$, a equação 2.1 fica

$$I(v_0 - v_1) = ml^2 v_b \quad (2.2)$$

Perdas por atrito durante o impacto, devido a deformação da bola, causam uma redução adicional na velocidade. A redução pode ser representada por um coeficiente de restituição “ e ” dado por

$$e = \frac{\text{velocidade depois do impacto}}{\text{velocidade antes do impacto}} \quad (2.3)$$

Assim, descrevendo o salto da bola ao deixar o pé em termos do coeficiente de restituição, temos

$$(v_b - v_1) = ev_0 \quad (2.4)$$

Agora, isolando v_1 na equação (2.4) e substituindo na equação (2.2), obtemos a velocidade transmitida à bola em termos da velocidade inicial do pé

$$v_b = v_0 \frac{1 + e}{1 + (ml^2/I)} \quad (2.5)$$

Sendo a massa da perna muito maior que a da bola, I é muito maior que ml^2 e assim ml^2/I é menor que o coeficiente “ e ”, fazendo com que a velocidade transmitida à bola seja maior do que a velocidade do próprio pé [3].

2.2 Forças que atuam no pé

Durante o chute existem 3 forças que atuam no pé, como é mostrado na Figura 2.1. Uma é a força centrífuga, pois o pé oscila através de um arco tendo o quadril como referência, outra é a força transmitida pela perna para o pé com o objetivo de acelerá-lo até a bola e a terceira é a força de reação da bola devido o choque com o pé, dada pela terceira lei de Newton [7, 8], na hora do impacto do chute [3].

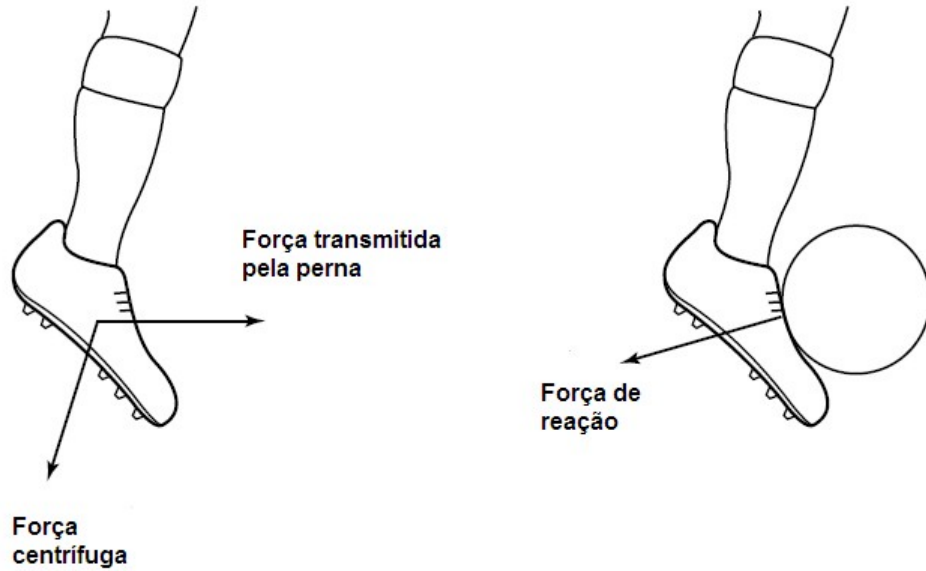


Figura 2.1: Representação das forças que atuam no pé durante o chute.

2.3 Precisão do chute

A precisão de um chute é medida através do ângulo entre a direção que se chuta e a direção que desejaria ter tomado. Assim, existem duas fontes de erro para o chute que dependem da aplicação da força no pé. A primeira é devido a aplicação da força no local errado e a segunda é devido a aplicação na direção errada, mesmo que seja no ponto certo. O chute com a parte interna do pé tem uma maior precisão pois assim elimina a chance de aplicação da força no local errado, restando somente o erro devido a direção que se chuta. Por isso, quando o objetivo é um chute mais preciso, ou até mesmo um passe curto, é preferível o toque com a “*palma*” do pé, ou seja, a parte interna [3].

2.4 A bola em voo

Quando a bola sai do pé do jogador e entra em voo, ela estará sob ação de forças aerodinâmicas e da força gravitacional. Para entender como a bola se comporta em movimento no ar, deve-se estudar como cada uma dessas forças atuam sobre a bola e, conseqüentemente, como elas irão influenciar a sua trajetória [9].

2.4.1 Força gravitacional

A força gravitacional $\vec{P}$ é constante durante toda a trajetória da bola, tem direção vertical para baixo e é definida como:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \quad (2.6)$$

onde m é a massa da bola e $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade. Ao nível do mar, o módulo da aceleração gravitacional vale aproximadamente $9,81 \text{ m/s}^2$ [9].

No entanto, a aceleração da gravidade não é constante sobre toda a superfície da terra, ela pode variar em função da altitude h ou da latitude λ do local onde a medimos, segundo a equação

$$g_{h,\lambda} = g_0(1 + \beta \sin^2 \lambda)(1 - 2h/r_t) \quad (2.7)$$

em que r_t é o raio da terra, e β é um fator numérico adimensional que leva em consideração a rotação terrestre em torno de seu eixo e o achatamento polar devido a essa rotação. O valor do raio é aproximadamente $r_t \approx 6,371 \times 10^6 m$ e o fator β vale $5,3 \times 10^{-3}$ [10].

2.4.2 Trajetória da bola em voo (Caso ideal)

Para se determinar a trajetória da bola em voo, sem a força de arrasto, recorreremos as equações dos movimentos da física clássica [7, 8]. Para a posição horizontal em função do tempo utiliza-se a equação

$$X = X_0 + v_{0x}t \quad (2.8)$$

e para a posição vertical, levando em consideração somente a ação da força gravitacional nessa direção, utiliza-se a equação

$$Y = Y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.9)$$

Sem perda de generalidade, podemos admitir que o chute ocorre na origem do sistema de coordenadas cartesiano, ou seja, temos que $X_0 = 0$ e $Y_0 = 0$. As velocidades iniciais da bola nas direções x e y , serão dadas por $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$, respectivamente. Com essas suposições, podemos isolar o tempo t da equação (2.8) e substituí-lo na equação (2.9) para obtermos

$$Y = \tan \theta \cdot X - \frac{g}{2v_0^2(\cos \theta)^2}X^2 \quad (2.10)$$

que é a equação da trajetória da bola sem arrasto. É importante observar que o domínio para o ângulo θ é um intervalo de 0° até 90° , aberto em 90° . A explicação para esse domínio vem do fato de que $\cos(90^\circ) = 0$ o que dá uma indeterminação na equação (2.10).

Como exemplo, podemos atribuir alguns valores aos parâmetros iniciais da equação (2.10) para determinarmos a trajetória da bola em alguns casos específicos. Tomando

a velocidade inicial da bola como $v_0 = 10 \text{ m/s}$ e a gravidade $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, podemos determinar a trajetória da bola (sem arrasto) para diferentes ângulos de chutes com o auxílio do programa **Wolfram Mathematica 9.0**. Utilizando os ângulos $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ e $\theta_3 = 60^\circ$ obtemos as seguintes trajetórias representadas na figura 2.2.

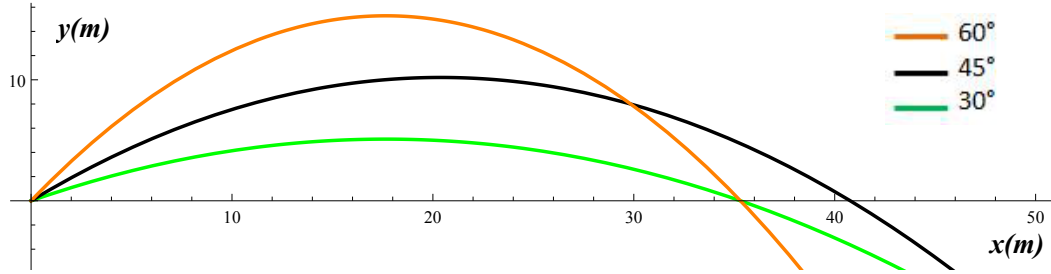


Figura 2.2: Representação da trajetória da bola em função do ângulo de chute.

Pode-se observar, analisando o gráfico, que a trajetória da bola sem arrasto segue como uma parábola perfeita, o que pode ser encontrado em livros de física básica [7, 8]. Podemos observar ainda que o ângulo onde a bola alcançou a maior distância horizontal foi $\theta_2 = \pi/4$, que representa a trajetória de cor preta. Isso pode ser verificado encontrando o tempo de voo, substituindo-o na equação (2.8) para a distância horizontal e maximizando-a em relação ao ângulo θ . O tempo de voo é encontrado fazendo $dy/dt = 0$ e multiplicando por 2, já que uma parábola é simétrica em relação ao ponto de máximo, assim

$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt_s = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_{0y}}{g} \quad (2.11)$$

Com isso, a distância horizontal para um determinado ângulo θ será

$$X = v_{0x} \cdot \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (2.12)$$

Agora, fazemos

$$\frac{dX}{d\theta} = \frac{2v_0^2 \cos(2\theta_{max})}{g} = 0 \quad (2.13)$$

para encontrarmos o ângulo no qual a distância será máxima, ou seja

$$[\cos(2\theta_{max}) = 0 \Rightarrow 2\theta_{max} = \frac{\pi}{2}] \quad (2.14)$$

$$\theta_{max} = \frac{\pi}{4} \quad (2.15)$$

O que está de acordo com nossos resultados da figura (2.2).

As trajetórias dos ângulos $\theta_1 = \pi/6$ e $\theta_3 = \pi/3$ estão representadas pelas cores verde e laranja, respectivamente. Para esses chutes, apesar de serem em ângulos diferentes, observamos a mesma distância horizontal devido a complementariedade desses ângulos e, conseqüentemente, resultando na simetria observada.

2.4.3 Forças aerodinâmicas

No mundo real, existem diversos fatores que influenciam o movimento dos corpos, como por exemplo, forças de atrito, de arrasto do ar etc, fazendo com que o tratamento da dinâmica desses corpos seja um pouco mais complicado. No caso em que nos propomos a estudar, temos que levar em consideração as forças de arrasto (ou forças de resistência do ar) as quais a bola está submetida ao viajar através do ar. A resistência do ar pode ser sentida em diferentes situações do dia, como por exemplo, objetos que caem de uma certa altura mas que seguem trajetórias diferentes. Folhas de papel, estando uma amassada e a outra aberta, caindo de uma mesa seguem caminhos totalmente diferentes pois o ar tem total influência sobre elas.

As forças conhecidas como fluidodinâmicas aparecem quando um objeto se movimenta dentro do fluido o qual ele está imerso. Se essas forças tiverem características decisivas, como é no caso da bola de futebol, elas irão influenciar de forma muito significativa a trajetória desse objeto. Quando o fluido for o ar, essas forças são chamadas de aerodinâmicas [9].

Essas forças podem ser causadas por diferenças de pressão e também pela viscosidade do meio [9], no nosso estudo focaremos na força de arrasto, antiparalela à velocidade, e na força de sustentação perpendicular à velocidade.

Força de arrasto

A força de arrasto não altera a direção do movimento da bola, isso ocorre por ela ser antiparalela à velocidade do objeto. Ela terá influência sobre a própria velocidade

da bola e apenas vai diminuir o valor dessa velocidade. Com isso, essa força, diferentemente da força gravitacional, não será constante em toda a trajetória e dependerá da velocidade com que o objeto, no nosso caso a bola, se movimenta através do fluido. Características do meio e a geometria do objeto também irão influenciar no arrasto [9].

Em diferentes situações o arrasto pode ter uma dependência linear ou quadrática em relação à velocidade. É através de um coeficiente C_A chamado de coeficiente de arrasto que saberemos como se comportará a dependência da força de arrasto em relação à velocidade. Assim, a força de arrasto é definida como

$$\vec{F}_A = \frac{1}{2} C_A \rho A \vec{V}^2 \quad (2.16)$$

onde ρ é a densidade do ar ($1,225 \text{ kg/m}^3$ ao nível do mar e temperatura em torno de 20°C) e A é a área da seção transversal [9].

Observando o gráfico da Figura 2.3, podemos ver que C_A não é constante e que varia somente em função do número de Reynolds R_e . Esse fator é uma quantidade adimensional e que depende da geometria do objeto, de características do meio e da velocidade do objeto em relação ao meio. Para uma esfera, ele é definido como:

$$R_e = \frac{\rho D V}{\eta} \quad (2.17)$$

em que D é o diâmetro da bola e η é a viscosidade dinâmica do ar ($1.83 \times 10^{-5} \text{ kg/ms}$) [9]. A importância do número de Reynolds está ligada ao fato de que ele é uma medida da razão entre as forças inerciais e viscosas que atuam na bola e, com isso, pode indicar que tipo de escoamento no fluido está acontecendo quando a bola está em sua trajetória. Para números de Reynolds pequenos o escoamento é laminar, números de Reynolds altos indicam escoamento turbulento [9].

Para $R_e \ll 1$, utiliza-se para o coeficiente de arrasto C_A , a fórmula de Stokes

$$C_A = \frac{24}{R_e} \quad (2.18)$$

Neste caso a força de arrasto é proporcional a velocidade V . Se substituirmos a equação (2.18) na equação (2.16), temos

$$F_A = 3\eta\pi D V \quad (2.19)$$

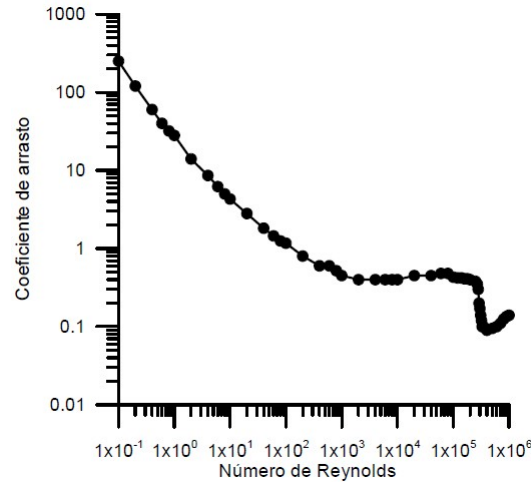


Figura 2.3: Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa em função do número de Reynolds [9].

Fazendo $\alpha = 3\eta\pi D$, a equação (2.19) fica

$$F_A = \alpha V \quad (2.20)$$

que é o arrasto linear encontrado em livros didáticos de física. Como pode ser observado, essa equação só pode ser utilizada para números de $Re \ll 1$, que indica velocidades muito baixas, levando a entender que esse modelo de arrasto não tem aplicação para o futebol, pois no jogo a bola chega a velocidades bem mais altas, o que acarreta em números de Reynolds também altos. Assim, o modelo que tem aplicação para o futebol é o do arrasto da equação (2.16) [9].

Notamos ainda que, no intervalo de $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ o coeficiente de arrasto é aproximadamente $C_A \approx 0.5$. Nesta região a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade. Também pode ser observado que na região onde $Re = 3 \times 10^5$ acontece uma queda no valor de C_A , essa queda é chamada de crise do arrasto. Essa faixa de número de Reynolds equivale a velocidades em torno de 20 m/s , o que vale dizer que as bolas conseguem chegar na região da crise várias vezes em uma partida de futebol, já que os chutes podem atingir velocidades da ordem de 30 m/s [9].

Camada limite

Se uma bola que está inicialmente em repouso começa a se movimentar no ar, com um aumento gradual da velocidade, devido à viscosidade do ar, as moléculas mais próximas aderem a bola e acompanham o seu movimento formando assim uma camada de ar ao seu redor, essa camada é chamada de “*camada limite*”. O arrasto na bola é determinado pelo comportamento desta camada. Para números de Reynolds inferiores a 20, a camada limite envolve toda a superfície da bola, o escoamento é laminar e as camadas de fluido próximas à camada limite deslizam sobre esta produzindo uma força de arrasto devido à viscosidade. Já para valores maiores de Re , a camada limite separa-se da bola na parte posterior gerando uma esteira como na Figura 2.4. Essa separação causa uma queda de pressão na parte de trás da bola e a diferença entre a pressão dianteira e a traseira passa a comandar o arrasto na bola [9].

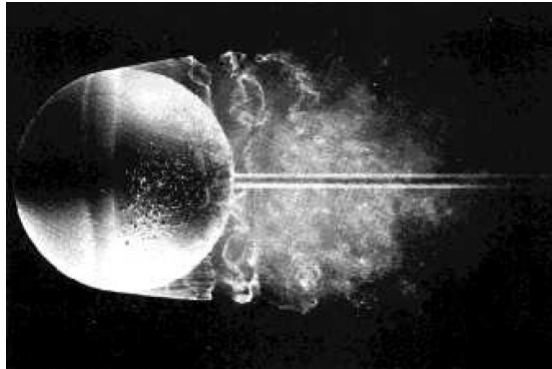


Figura 2.4: Separação da camada limite em uma esfera [9].

A crise do arrasto citada na seção anterior acontece quando a camada limite se torna turbulenta. Essa turbulência permite que a camada resista melhor à tendência de separação e com isso o ponto de deslocamento se move para a parte traseira da bola, onde diminui a área da esteira. A contração da esteira reduz a área da bola que está a baixa pressão, com isso causa uma diminuição na resistência do ar. A rugosidade da superfície também afeta o escoamento na camada limite, assim uma esfera rugosa irá sofrer a crise em um número de Reynolds inferior ao da esfera lisa [9].

Força Magnus

Existem outras forças que podem agir sobre objetos em voo, dependendo das características de seu movimento, ou seja, se o objeto possuir rotação em torno de seu eixo, essa rotação dará origem a uma outra força sobre ele, que chamamos de sustentação aerodinâmica. A força de sustentação aparece devido a um desvio no fluxo de ar através de um objeto, ocasionado pela rotação em torno de seu eixo. Para o nosso problema em questão, devido a simetria esférica da bola, somente uma força de sustentação atuará sobre ela quando estiver girando, será a força Magnus, a qual pode ser definida como

$$\vec{F}_m = \frac{1}{2} C_m \rho A r \vec{\omega} \times \vec{V} \quad (2.21)$$

onde $r = D/2$ é o raio da bola e $\vec{\omega}$ é o vetor velocidade angular. Pode-se notar que essa força é perpendicular à velocidade e ao eixo de rotação. C_m é chamado de coeficiente de Magnus e este é função do número de Reynolds e do parâmetro de rotação, $S = \omega r / V$, e do ângulo γ entre a velocidade e o eixo de rotação [9].

O efeito Magnus na bola de futebol é determinado pelo comportamento da camada limite sob rotação. A Figura (2.5) mostra o fluxo de ar em torno de uma bola que gira em sentido horário. A separação da camada limite é antecipada na parte de baixo da bola, onde a rotação se opõe ao fluxo de ar e adiada na parte de cima onde a rotação acompanha o fluxo de ar. A separação na camada limite empurra o ar atrás da bola para baixo e, pela terceira lei de Newton, a bola sofre uma força em sentido contrário, que dá origem ao efeito Magnus [9].

2.5 Variação da densidade do ar em função da temperatura e altitude

2.5.1 Densidade do ar em função da temperatura

As variáveis temperatura, pressão e densidade do ar podem ser relacionadas pela lei dos gases ideais. Apesar da lei dos gases ter sido deduzida para gases ideais, ela

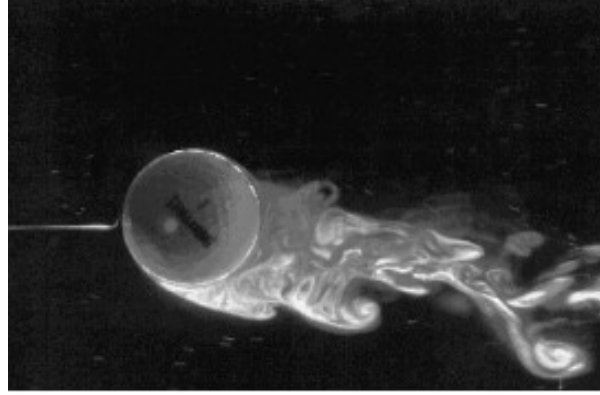


Figura 2.5: Separação da camada limite em uma bola rotacionada no sentido horário [9].

descreve razoavelmente bem o comportamento da atmosfera, que é uma mistura de gases. Essa lei pode ser expressa como:

$$p = \rho RT \quad (2.22)$$

onde p é a pressão, T é a temperatura, ρ é a densidade do ar e R é a constante dos gases, cujo valor é $8,314462 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ [11].

Através da equação (2.22) podemos observar que se mantivermos a pressão constante, a densidade do ar ρ será inversamente proporcional à temperatura T , ou seja, a medida que a temperatura aumenta a densidade do ar diminui. A Figura (2.6) mostra valores da densidade do ar em função da temperatura e da pressão.

Para encontrarmos a densidade do ar em função da altitude, é conveniente adotarmos a aproximação de uma atmosfera isotérmica. Com essa aproximação, a densidade do ar em uma altitude h pode ser representada através da equação:

$$\rho_h = \rho_0 \exp(-\delta h) \quad (2.23)$$

onde $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do ar no nível do mar e $\delta = 0,0001064 \text{ m}^{-1}$ [11].

Temperatura	Pressão manométrica (psi) ⁽²⁾											
(°F)	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
30	0.081	0.109	0.136	0.192	0.247	0.302	0.357	0.412	0.467	0.522	0.578	0.633
40	0.080	0.107	0.134	0.188	0.242	0.295	0.350	0.404	0.458	0.512	0.566	0.620
50	0.078	0.105	0.131	0.185	0.238	0.291	0.344	0.397	0.451	0.504	0.557	0.610
60	0.076	0.102	0.128	0.180	0.232	0.284	0.336	0.388	0.440	0.492	0.544	0.596
70	0.075	0.101	0.126	0.177	0.228	0.279	0.330	0.381	0.432	0.483	0.534	0.585
80	0.074	0.099	0.124	0.174	0.224	0.274	0.324	0.374	0.424	0.474	0.524	0.574
90	0.072	0.097	0.121	0.171	0.220	0.269	0.318	0.367	0.416	0.465	0.515	0.564
100	0.071	0.095	0.119	0.168	0.216	0.264	0.312	0.361	0.409	0.457	0.505	0.554
120	0.069	0.092	0.115	0.162	0.208	0.255	0.302	0.348	0.395	0.441	0.488	0.535
140	0.066	0.089	0.111	0.156	0.201	0.246	0.291	0.337	0.382	0.427	0.472	0.517
150	0.065	0.087	0.109	0.154	0.198	0.242	0.287	0.331	0.375	0.420	0.464	0.508
200	0.060	0.081	0.101	0.142	0.183	0.244	0.265	0.306	0.347	0.388	0.429	0.470

Figura 2.6: Densidade do ar em função da temperatura e da pressão em lb/ft^3 [9].

Capítulo 3

Metodologia

Para o desenvolvimento do projeto, inicialmente fizemos uma pesquisa bibliográfica. Visando um melhor entendimento da temática, levantamos e selecionamos os assuntos publicados e pesquisados em livros, monografias, dissertações e teses.

Após a etapa de pesquisa bibliográfica, deduzimos as equações do movimento levando em consideração diferentes parâmetros e estudamos o comportamento da bola de futebol em diversas situações. Após a dedução das equações, utilizamos o programa **Wolfram Mathematica 9.0** para determinar os resultados gráficos do estudo. Primeiramente, escolhemos a equação do movimento encontrada, sem a força de arrasto, e traçamos o perfil da trajetória da bola em condições ideais. Em seguida, usamos a equação do movimento da bola levando em consideração a força de arrasto, variamos o ângulo de chute e comparamos o alcance máximo obtido nesse teste com o do caso ideal. Depois, com o auxílio do **programa photoshop CS6**, simulamos a comparação dos chutes de maior alcance em um campo de futebol. Após a etapa variando os ângulos, mudamos alguns parâmetros, como por exemplo, altitude ou temperatura e observamos quais foram as mudanças significativas na trajetória da bola. Por fim, analisamos, qualitativamente, alguns chutes sob o aspecto da força Magnus.

Todas as situações foram analisadas levando em consideração as teorias físicas sobre movimento na presença de forças dissipativas e discutidas no intuito de entender a dinâmica da bola sob diversos aspectos.

Capítulo 4

Resultados

Como o foco principal do trabalho é estudar os efeitos na trajetória da bola depois que ela é chutada, nessa seção nos deteremos a analisar a bola no momento que ela está em voo. De início, para determinar a trajetória da bola com arrasto e sem rotação, utilizaremos a definição da força de arrasto dada pela equação (2.16).

4.1 Definindo as equações de movimento

Como foi explicado na seção 2.4.3, a equação (2.20) não tem aplicação para o futebol, pois só se aplica para velocidades muito baixas, tendo em vista que a bola de futebol pode chegar a altas velocidades no decorrer do jogo. A equação da força de arrasto que se aplica ao futebol é a equação (2.16) que, como mostrado na seção 2.4.3, é denida como $\vec{F}_A = \frac{1}{2}C_A\rho A\vec{V}^2$. Sabemos pela segunda lei de Newton que a força resultante atuando sobre um corpo de massa m é definida como

$$\vec{F}_R = m\vec{a} \quad (4.1)$$

onde $\vec{a}$ é a aceleração adquirida pelo corpo devido a atuação da força $\vec{F}_R$. A força de arrasto atua sobre a bola na direção horizontal, definida como eixo x , e é contrária a trajetória da bola, ou seja, $\vec{F}_R = -\vec{F}_A$. Aqui, supomos que não há força de arrasto na

direção y , tem-se

$$-\vec{F}_A = m\vec{a} \quad (4.2)$$

ainda da física clássica, temos que $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, e substituindo na equação (4.2) ficamos com

$$-\vec{F}_A = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (4.3)$$

agora substituindo a equação (2.16) na equação (4.3), obtemos:

$$-\frac{1}{2}C_A\rho A\vec{V}^2 = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (4.4)$$

fazendo $b = \frac{1}{2}C_A\rho A$, a equação (4.4), fica:

$$-b\vec{V}^2 = m \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (4.5)$$

por fim, supondo que $\vec{F}_A = -bV^2\hat{i}$, obtemos:

$$-bV^2 = m \frac{dV}{dt} \quad (4.6)$$

Para determinarmos a equação da trajetória da bola com arrasto e sem rotação, devemos resolver a equação diferencial (4.6). Para isso, usaremos técnicas de resolução de equações diferenciais. Logo, ficamos com

$$-\frac{b}{m} \int_{t_0}^t dt = \int_{v_{0x}}^v \frac{1}{V^2} dV \quad (4.7)$$

resolvendo as integrais da equação (4.7) e supondo $t_0 = 0$, podemos encontrar a seguinte equação para velocidade da bola:

$$v = \frac{mv_{0x}}{m + bv_{0x}t} \quad (4.8)$$

onde v_{0x} é a velocidade inicial da bola na direção horizontal x e t é o tempo. Mas, sabemos que a velocidade pode ser escrita como sendo $v = \frac{dx}{dt}$, portando, usaremos essa definição, junto com a equação (4.8) para escrevermos novamente uma equação diferencial, a qual resolvemos de maneira análoga a situação anterior, ou seja

$$\int_{x_0}^x dx = mv_{0x} \int_{t_0=0}^t \frac{dt}{m + bv_{0x}t} \quad (4.9)$$

assim, resolvendo a equação (4.9) e supondo $x_0 = 0$ em $t_0 = 0$, obtemos

$$x(t) = \frac{m}{b} \ln \left(\frac{m + bv_{0x}t}{m} \right) \quad (4.10)$$

que é a posição x da bola em função do tempo t . Por fim, determinaremos a equação da trajetória da bola com arrasto e sem rotação. Para isso, isolamos o tempo t na equação (4.10), ou seja

$$t = \frac{m}{bv_{0x}} \left(e^{\frac{bx}{m}} - 1 \right) \quad (4.11)$$

e substituímos na equação (2.9), supondo que $y_0 = 0$ e tendo em vista que $v_{0x} = v_0 \cos \theta$ e $v_{0y} = v_0 \sin \theta$. Com essas substituições, a equação que descreve o movimento da bola em voo na presença de arrasto fica

$$y(x) = \frac{m}{b} \tan \theta \left(e^{\frac{bx}{m}} - 1 \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{m}{bv_0 \cos \theta} \right)^2 \left(e^{\frac{bx}{m}} - 1 \right)^2 \quad (4.12)$$

Pode-se ainda determinar qual a altura máxima que a bola pode atingir através da equação (4.12), para isso, faz-se $\frac{dy}{dx} = 0$. Assim, temos

$$x_{max} = \frac{m}{b} \ln \left[\frac{bv_0^2 \sin(2\theta) + 2mg}{2mg} \right] \quad (4.13)$$

que é o valor x na altura máxima. Uma observação interessante aqui é que não podemos encontrar o alcance horizontal máximo multiplicando o resultado da equação (4.13) por 2, pois a trajetória não será parabólica. Caso seja necessário encontrá-lo, precisamos encontrar o tempo t_1 no qual $y(t_1) = 0$ na equação (2.9) e substituímos na equação (4.10), o que notavelmente é bem mais complicado do que no caso ideal e não será abordado aqui. Por hora, determinaremos a altura máxima y_{max} substituindo a equação (4.13) na equação (4.12), ou seja

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \tan \theta}{4g} [2 \sin(2\theta) - 1] \quad (4.14)$$

onde pode-se observar que a altura máxima depende da velocidade inicial da bola, da gravidade e do ângulo do chute.

Para verificar a validade da equação (4.12), vamos supor que $b \ll 1$, expandir $y(x)$

em série de Taylor [13] e pegar somente os termos até primeira ordem em x . Para isso, precisamos da expansão da função exponencial

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.15)$$

Portanto, temos

$$y(x) = \frac{m}{b}tg\theta \left[\left(1 + \frac{bx}{m} + \dots \right) - 1 \right] - \frac{g}{2} \left(\frac{m}{bv_0 \cos \theta} \right)^2 \cdot \left[\left(1 + \frac{bx}{m} + \dots \right) - 1 \right]^2 \quad (4.16)$$

Tomando os termos até primeira ordem, ficamos com

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2(\cos \theta)^2}x^2 \quad (4.17)$$

que é igual a equação da trajetória da bola (2.10) definida na seção 2.4.2 para o caso ideal (sem arrasto), o que mostra que nosso resultado apresentado na equação (4.12) é consistente.

4.2 Trajetória da bola com arrasto em função do ângulo de chute

Podemos fazer uma análise semelhante a da seção 2.4.2. Se fixarmos alguns parâmetros na equação (4.12) e variarmos o ângulo de chute θ , poderemos observar qual será a trajetória da bola após o chute. Vimos também que o parâmetro b depende da área da seção reta da bola, da densidade do ar e do coeficiente de arrasto. Como foi explicado na seção 2.4.3, para velocidades praticadas no futebol o coeficiente de arrasto é aproximadamente 0,5, assim, para simplificação dos cálculos adotaremos $C_A = 0,5$. Ainda levando em consideração uma partida ao nível do mar $g = 9,81m/s^2$, e temperatura entre $20^\circ C$ e $25^\circ C$, a densidade do ar é $\rho = 1,225 Kg/m^3$. A área da seção reta da bola é $A = 0,04011 m^2$ e a massa é $m = 0,45 kg$. Assim, substituindo esses valores no parâmetro b e substituindo este na equação (4.12), usando uma velocidade inicial da bola de $20 m/s$ e usando o programa Wolfram Mathematica 9.0, obtemos os seguintes resultados mostrados na Figura (4.1).

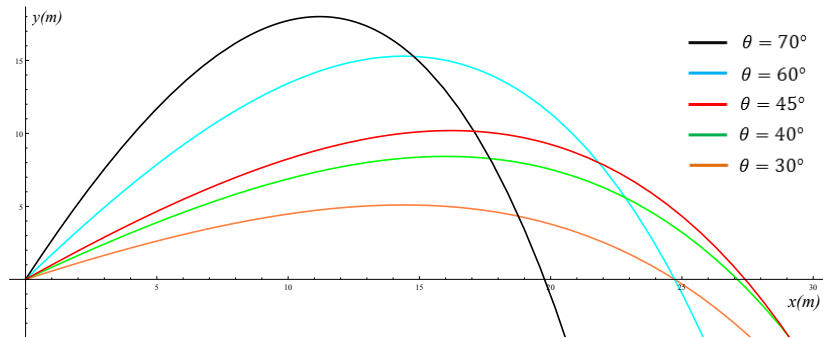


Figura 4.1: Trajetória da bola de futebol em função do ângulo de chute θ .

Já podemos perceber que diferente do caso ideal, agora a trajetória da bola não segue mais uma parábola perfeita, o que é um resultado esperado, já que a bola tem uma força contrária ao seu movimento. Também podemos observar que os chutes para os ângulos de 30° e 60° , representados pelas cores laranja e azul claro, respectivamente, apesar de serem ângulos diferentes têm o mesmo alcance horizontal, como aconteceu no caso ideal. Ainda pode-se observar que o alcance máximo ocorre para o chute com ângulo $\theta = 45^\circ$ semelhante ao caso ideal. Podemos ainda observar que nas outras curvas, quanto mais próximo o ângulo se aproxima de 45° mais a curva se aproxima do alcance máximo, como mostra a trajetória verde, cujo ângulo é $\theta = 40^\circ$.

Assim, podemos “plotar” os gráficos dos chutes de alcance máximo da bola, com arrasto e sem arrasto, e observarmos quais diferenças significantes teremos. Com isso adotando os mesmos parâmetros para as equações (2.10) e (4.12), escolhendo o ângulo de alcance máximo, $\theta = 45^\circ$, considerando o chute ao nível do mar, e usando uma velocidade inicial de $v_0 = 25 \text{ m/s}$, obtemos os resultados mostrados na Figura 4.2.

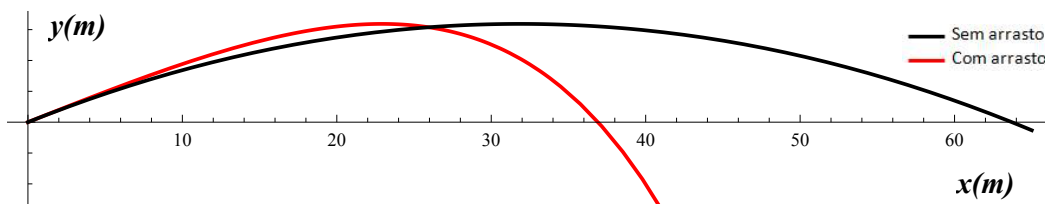


Figura 4.2: Trajetória da bola com e sem arrasto para os valores do ângulo máximo $\theta = 45^\circ$.

De imediato pode-se observar a grande diferença entre os dois modelos, além da

forma da trajetória com arrasto não ser parabólica, a diferença de alcance é muito significativa. Agora com auxílio do programa Photoshop CS6, utilizamos os dois modelos das curvas com arrasto e sem arrasto e simulamos em um campo de futebol. O resultado é o mostrado na Figura 4.3.

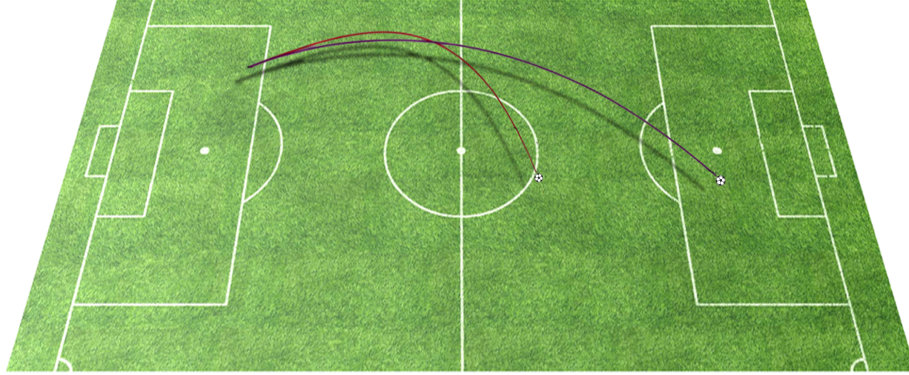


Figura 4.3: Trajetória da bola com e sem arrasto para os valores do ângulo máximo $\theta = 45^\circ$ simulada em um campo de futebol.

É difícil de se imaginar que um jogador na hora da partida, no momento que recebe um passe ou até mesmo na hora de cobrança de faltas, venha a pensar em qual seja o melhor ângulo para se obter um resultado mais efetivo (o mesmo vale para o caso dos goleiros em tiros de meta). Porém, os jogadores que possuem mais habilidades para chutar a bola, têm essa percepção intuitivamente, pois desenvolveram essa capacidade de chutes e passes através de treinamentos aliado com suas técnicas de jogo. Assim, esses jogadores mais técnicos conseguem chutar a bola com uma angulação correta sem mesmo perceber a física envolvida no chute.

4.3 Trajetória da bola com arrasto em função da Temperatura

Como foi mostrado na seção 2.5.1, a densidade do ar ρ pode variar em função da temperatura e, ainda, o parâmetro b da equação (4.12) é função da densidade do ar

ρ . Assim, podemos fazer uma análise levando em consideração a variação de temperatura que pode ocorrer em locais onde ocorrem as partidas de futebol. Sabendo que $b = \frac{1}{2}C_A\rho A$, com auxílio de alguns valores da figura 2.6 e convertendo os valores de temperatura e densidade do ar para $^{\circ}C$ e Kg/m^3 , respectivamente, montamos a tabela 4.1 que relaciona os parâmetros T , ρ e b .

Temperatura($^{\circ}C$)	10	15,6	26,7	32,2	48,9
$\rho(Kg/m^3)$	1,25	1,22	1,19	1,15	1,11
b	0,012530	0,012234	0,011933	0,011532	0,011131

Tabela 4.1: Variação da densidade do ar e do parâmetro b em função da temperatura

Pegando os valores de b da tabela 4.1 e substituindo na equação (4.12) podemos simular chutes usando alguns parâmetros escolhidos adequadamente para um caso real, ou seja, $\theta = 45^{\circ}$, $v_0 = 20\text{ m/s}$, $m = 0,45\text{ kg}$ e levando em consideração uma partida ao nível do mar, com $g = 9,81\text{ m/s}^2$. Assim, podemos esboçar a trajetória da bola segundo a equação (4.12) usando o programa Wolfram Mathematica 9.0 para obter os resultados da figura (4.4)

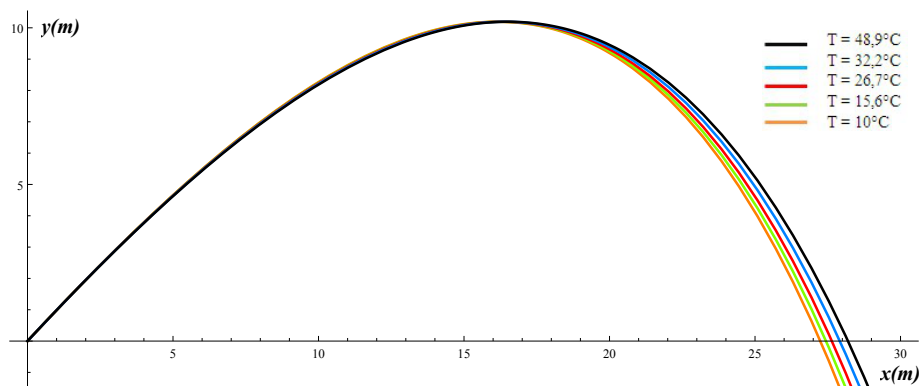


Figura 4.4: Trajetória da bola de futebol em função da temperatura T para um ângulo fixo.

Podemos observar que a medida em que a temperatura aumenta a densidade do

ar diminui e com a diminuição da densidade do ar, a interferência do arrasto na bola também diminui. Consequentemente, para temperaturas mais elevadas, um chute com as mesmas condições iniciais pode ter um alcance maior.

Apesar da variação na distância que a bola alcança ser, a primeira vista, razoavelmente pequena, para o futebol pode ser muito significativa. Da menor temperatura até a maior usada nesse estudo a variação chega em torno de um pouco mais de 1 metro. Essa distância pode ser decisiva se levarmos em consideração tanto a força física e a velocidade que jogadores profissionais conseguem alcançar quanto a habilidade de certos jogadores que, em um curto espaço, podem decidir uma partida.

Assim, jogadores que, por exemplo, jogam em lugares frios como a Rússia (sede da copa do mundo de futebol em 2018) podem sentir a diferença quando chutarem uma bola lá no Qatar (sede da copa de 2022) onde a temperatura pode chegar facilmente aos 45°C ou mais. Com isso, um jogador pode não dimensionar de forma correta um passe ou chute e com isso entregar a bola para o adversário acarretando na derrota da equipe.

4.4 Trajetória da bola com arrasto em função da altitude

Como foi mostrado na seção 2.5.2, a densidade do ar pode variar em função da altitude, assim, é razoável pensar que mudanças significativas na trajetória da bola devam ocorrer a medida que aumentamos a distância vertical em relação ao nível do mar.

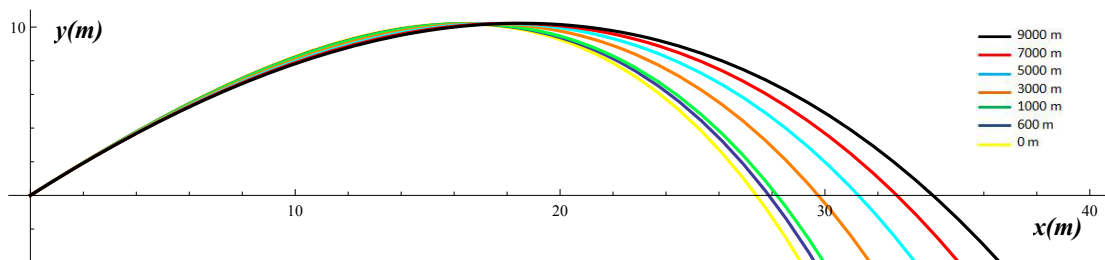
Para fazer a análise levando em consideração a altitude do local da partida, sabendo que o parâmetro b vai variar a medida que a densidade do ar ρ mudar, podemos utilizar a equação (2.23) para encontrarmos valores aproximados da densidade do ar em determinadas altitudes e substituir esses valores no parâmetro b . Com isso, montamos a tabela (4.2) relacionando esses parâmetros

Para determinar a trajetória da bola utilizamos os mesmos parâmetros da seção 4.3 e

Altitude(m)	0	600	1000	3000	5000	7000	9000
$\rho(Kg/m^3)$	1.225	1.1560	1.1117	0.9093	0.7364	0.5900	0.4671
b	0.01228	0.01159	0.01115	0.00912	0.00738	0.00592	0.00468

Tabela 4.2: Variação da densidade do ar e do parâmetro b em função da temperatura

os valores de b apresentados na tabela (4.2). Além disso, como mostrado na seção 2.4.1, a aceleração da gravidade varia em função da altitude e latitude. Portanto, usamos a equação (2.7) para encontrar as respectivas acelerações gravitacionais para os valores de altitude apresentados na tabela 4.2 e latitude fixa ($\lambda = 45^\circ$). De posse desses resultados, substituímos na equação (4.12) para encontrarmos as trajetórias representadas na Figura (4.5)

Figura 4.5: Trajetória da bola de futebol em função da altitude para uma latitude de 45° .

Podemos perceber que a medida que a altitude aumenta, o alcance da bola também aumenta. Isso ocorre devido a densidade do ar diminuir a medida que a altitude aumenta. Para entendermos esse resultado, precisamos observar que a diminuição da densidade do ar acarreta uma diminuição sistemática da intensidade da força de arrasto, pois cada vez menos moléculas de ar contribuem para o arrasto e, com isso, ela terá menos influência na trajetória da bola.

Podemos ainda observar como seria a trajetória da bola em cidades com altitudes elevadas, para isso, escolhemos a cidade Bogotá na Colombia, que tem uma altitude de aproximadamente $2640m$ e latitude de $4^\circ 35' 53''$, Quito no Equador que possui altitude

de $2805m$ latitude de $0^\circ 15' 0''$, Oruro na Bolívia que tem altitude de $3706m$ e latitude de $17^\circ 58' 0''$ e Potosí na Bolívia que tem altitude de $4090m$ e latitude de $19^\circ 33' 0''$. Esses dados estão resumidos na tabela abaixo

Cidade	Bogotá	Quito	Oruro	Potosí
Altitude (m)	2640	2805	3706	4090
Latitude	$4^\circ 35' 53''$	$0^\circ 15' 0''$	$17^\circ 58' 0''$	$19^\circ 33' 0''$

Tabela 4.3: Relação das cidade analisadas com suas respectivas altitudes e latitudes

Para determinar a densidade relativa do ar e a gravidade para cada cidade, usamos as equações (2.7) e (2.23). Os parâmetros iniciais para o chute foram: $v_0 = 20 \text{ m/s}$, $\theta = 45^\circ$ e $m = 0,45 \text{ kg}$. O parâmetro b foi calculado usando a área da bola de $A = 0,04011 \text{ m}^2$, $C_A = 0,5$ e com as densidades do ar de cada cidade. Os resultados obtidos para cada cidade estão descritos na tabela (4.3).

Cidade	Bogotá	Quito	Oruro	Potosí
$g(\text{m/s}^2)$	9,7725	9,7717	9,7738	9,7735
$\rho(\text{Kg/m}^3)$	0,9250	0,9089	0,8258	0,7928
b	0,00928	0,00911	000828	0,00795

Tabela 4.4: Parâmetros utilizados na determinação das trajetórias da bola para as diferentes cidades estudadas.

Assim, usando esses parâmetros na equação (4.12), determinamos as trajetórias da bola em cada cidade estudada os resultados são representados na figura (4.6).

Vemos que, como era de se esperar, a trajetória que consegue o maior alcance é Potosí que tem a maior altitude entre essas cidades (curva vermelha). As cidades de Bogotá e Quito (cores verde e preta, respectivamente) apresentaram curvas bem

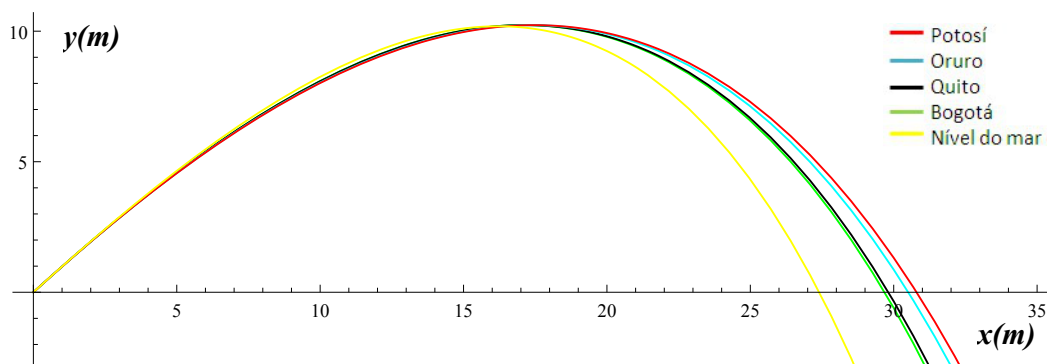


Figura 4.6: Trajetória da bola de futebol analisada em algumas cidades do mundo.

próximas devido a proximidade de suas altitudes.

Os resultados aqui apresentados mostram que, além da dificuldade biológica (dificuldade de respiração) que os jogadores de cidades de baixas altitudes enfrentam quando disputam jogos em cidades de altitudes elevadas, como essas aqui estudadas, também podem sentir dificuldades nos momentos do passe e do chute. Isso sempre será um fator de vantagem para aqueles que estão adaptados a essas situações. Um exemplo bem prático são os depoimentos de jogadores brasileiros quando jogam partidas nessas cidades, onde relatam uma sensação de “*a bola ser mais leve*” quando chutadas e dos passes serem mais rápidos. Essa sensação é devido ao arrasto do ar ser menor por causa dos menores valores de densidade do ar e, com isso, um chute pode ter um alcance bem maior para a aplicação de uma determinada força, se comparada ao nível do mar.

4.5 Efeito Magnus

Até mesmo aquelas pessoas que não gostam tanto de futebol podem ficar admiradas com aqueles chutes clássicos que jogadores como Roberto Carlos, Rivelino, Branco e outros faziam. Aquele chute em que a bola faz uma curva surpreendente e engana o goleiro. Como nas cobranças de falta de Zico, jogador do Flamengo e da seleção brasileira, em que a bola faz uma curva por cima da barreira e estufa as redes no ângulo do goleiro. Ainda, aqueles que gostam do esporte, observam, seja assistindo uma partida pela televisão ou no estádio, ou então recordando lances em vídeos pela internet, chutes

impressionantes no qual a bola faz curvas extraordinárias e muita gente afirma que aqueles chutes desafiaram as leis da física, como mostra a figura 4.7.

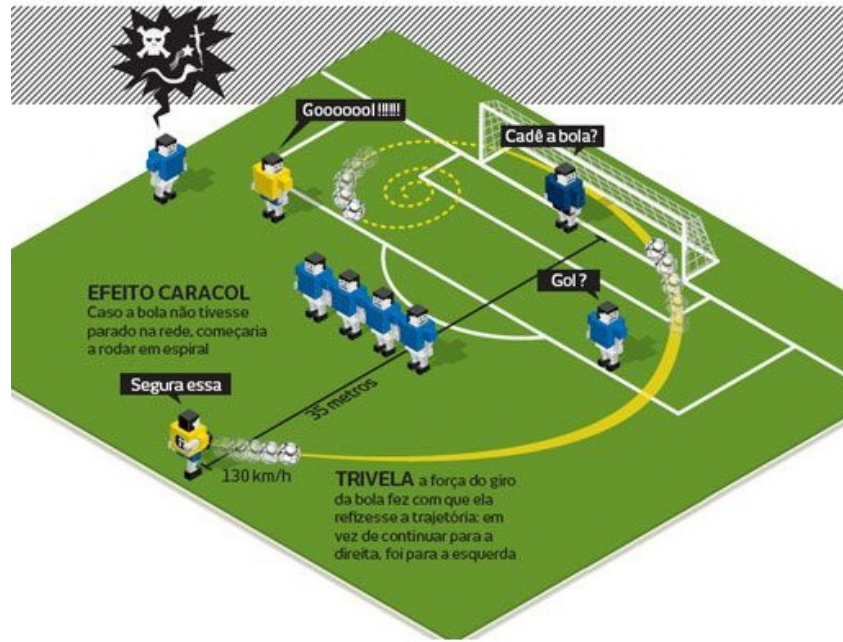


Figura 4.7: Representação da trajetória da bola no chute de Roberto Carlos em um jogo da seleção brasileira [14].

A explicação para esses fenômenos está na equação (2.21), na definição da força magnus. A força magnus é uma força aerodinâmica de sustentação, diferente da força de arrasto, ela não tem influência na diminuição da velocidade da bola mas é responsável por mudanças de percurso na trajetória. O fenômeno causado por essa força é conhecido por efeito Magnus e, como foi mostrado na seção 2.4.3, ele é determinado pelo comportamento da camada limite sob rotação.

Olhando para a equação (2.16), definida por $\vec{F}_m = \frac{1}{2}C_m\rho A r\vec{\omega} \times \vec{V}$, faz todo sentido a mudança de direção da bola nos chutes com rotação. A força Magnus é um produto vetorial de $\vec{\omega}$ e $\vec{V}$ logo, será perpendicular a ambas, como pode ser visto na figura 4.7. Assim, para encontrarmos o sentido da força Magnus nos chutes aqui citados basta olharmos a direção e o sentido dos vetores $\vec{\omega}$ e $\vec{V}$ para, finalmente, usar a regra da mão direita e determinarmos qual percurso a bola irá tomar quando submetida à rotação.

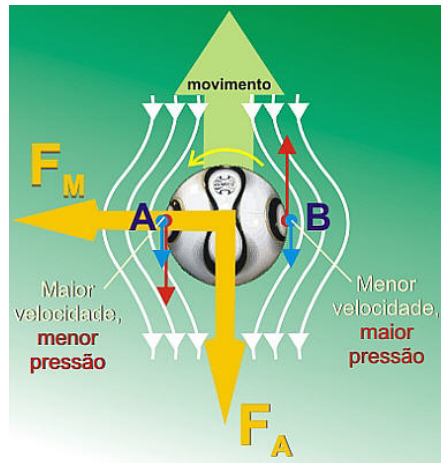


Figura 4.8: Direção da força de arrasto (F_A) e da força Magnus (F_M) para uma bola de futebol em voo sujeita a uma rotação em torno do seu próprio eixo [14].

Assim, o jogador aplica uma rotação na bola e essa rotação causa uma perturbação na camada limite que, pela terceira lei de Newton, aplica uma força de reação na bola. Essa força aplicada sobre a bola pela camada limite é denominada de força Magnus e é ela que leva a bola a mudar de direção.

Capítulo 5

Conclusão

Sabemos que existem vários estudos voltados para o futebol, no que diz respeito a fisiologia dos atletas, buscando cada dia a excelência do corpo físico dos jogadores. Existe também vários artigos sobre ciência de vários esportes, como a física do besebol, do golfe, do tênis e muito pouco sobre a física do futebol, a qual é rica em conteúdos importantes e pode ser estimulantes para alunos e professores.

Nesse trabalho, com o auxílio do programa Wolfram Mathematica 9.0, observamos que a força de arrasto desempenha um papel muito sigficante na trajetória da bola, bem como a importância de se chutar a bola com a angulação correta para ter o máximo alcance. Ainda observamos os efeitos que a temperatura e altitude causam na força de arrasto que atua sobre a bola e, como consequência, as diferenças apresentadas nas trajetórias. Com isso, podemos ver que, analisar o chute sem levar em consideração o arrasto e/ou os efeitos da temperatura e altitude, podem acarretar em erros significantes na análise da dinâmica da bola.

Podemos ver ainda que, o entendimento da física dos fluidos, em especial a ação da força Magnus, pode ser um grande aliado dos jogadores contra os goleiros em lances de média e longa distância, pois ela pode mudar significativamente a trajetória da bola, basta aplicar a rotação correta.

Sabemos que, inegavelmente o futebol é uma paixão mundial e, com isso, esperamos ter mostrado neste trabalho que a física desse esporte é também apaixonante e que

pode nos auxiliar no entendimento científico do jogo.

Como perspectiva futura, desejamos elaborar estudos mais detalhados do efeito Magnus, como uma análise quantitativa da força Magnus, bem como um estudo voltado para estudar os parâmetros em chutes de combranças de faltas de jogadores famosos para saber qual a rotação que esses atletas aplicavam na bola para conseguirem uma influência significativa desse efeito.

Referências Bibliográficas

- [1] RUBINI, C.E. Aguiar, E.G. A aerodinamica da bola de futebol. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 4, p. 297-306, nov. 2004.
- [2] PONTES, R.M. **Simulação computacional do escoamento em torno de uma bola de futebol com e sem rotação**, Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica.FEUP. Julho de 2010.
- [3] WESSON, John. **The science of soccer**. London: IOP Publishing Ltd, 2002. 193 p.
- [4] CAMPEÕES DO FUTEBOL. **A evolução da bola de futebol**. Disponível em: <<http://www.campeoesdofutebol.com.br/evolucaobolafutebol.html>>. Acesso em: 16 ago. 2016.
- [5] IPEMSP. **Futebol - medidas e curiosidades**. Disponível em: <<https://ipemsp.wordpress.com/futebol-medidas-e-curiosidades-metrologicas/>>. Acesso em: 03 set. 2016.
- [6] LEROY, B. O Efeito Folha Seca ; **Revista Brasileira de Física** vol.7 n°3 pgs.693-709, 1977.
- [7] *Fundamentos de Física*, D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, Vol. 1, 9ª edição, LTC editora, Rio de Janeiro (2012).
- [8] *Curso de Física Básica 1 - Mecânica*, Moysés Nussenzveig, Editora Edgard Blucher Ltda, 5ª Ed. (2013).

- [9] RUBINI, G. M. A Dinâmica da Bola de Futebol. 35 f. **Monografia** (Licenciatura em Física) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2003.
- [10] LOPES, Wilson. VARIAÇÃO DA ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE COM A LATITUDE E ALTITUDE. **Cad. Bras. Ens. Fís.**, Guarulhos, v. 5, n. 3, p. 561-568, jan. 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/2175-7941.2008v25n3p561>>. Acesso em: 25 set. 2016.
- [11] FÍSICA UFPR. **A lei dos gases ideais**. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap4/cap4-2.html>>. Acesso em: 26 set. 2016.
- [12] FÍSICA UFPR. **Variação com a altitude**. Disponível em: <http://fisica.ufpr.br/grimm/aposmeteo/cap4/cap4-2.html>>. Acesso em: 26 set. 2016.
- [13] ARFKEN, George; WEBER, Hans. **Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física**. 6 ed. Rio de Janeiro: Elsevier Editora Ltda, 2007. 918 p.
- [14] FÍSICA NA VEIA. **Bola rolando e girando**. Disponível em: http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2006-06-04_2006-06-10.html>. Acesso em: 18 out. 2016.