



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO BACHAREL EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PEDRO HENRIQUE PINTO TÔRRES VIANA

**PROPOSTA PARA MELHORAMENTO DE BANCADA EXPERIMENTAL DE
FLAMBAGEM**

CARAÚBAS - RN

2019

PEDRO HENRIQUE PINTO TÔRRES VIANA

**PROPOSTA PARA MELHORAMENTO DE BANCADA EXPERIMENTAL DE
FLAMBAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Bacharelado em
Ciência e Tecnologia da Universidade
Federal Rural do Semi-Árido - Campus
Caraúbas como requisito para obtenção
do título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Aracelle de
Albuquerque Guimarães.

Co-orientador: Prof. Andersson
Guimaraes Oliveira.

CARAÚBAS - RN

2019

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)

Setor de Informação e Referência (SIR)

V614p Viana, Pedro Henrique.
PROPOSTA PARA MELHORAMENTO DE BANCADA
EXPERIMENTAL DE FLAMBAGEM / Pedro Henrique Viana.
- 2019.
44 f. : il.

Orientadora: Aracelle Guimarães.
Coorientadora: Andersson Oliveira.
Relatório (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2019.

1. Bancada Experimental. 2. Flambagem. 3.
Colunas de Euler. I. Guimarães, Aracelle,
orient. II. Oliveira, Andersson, co-orient. III.
Título.

Bibliotecário-Documentalista

Nome do profissional, Bib. Me. (CRB-15/10.000)

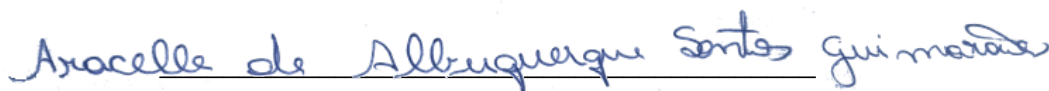
PEDRO HENRIQUE PINTO TÔRRES VIANA

**PROPOSTA PARA MELHORAMENTO DE BANCADA EXPERIMENTAL DE
FLAMBAGEM**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Bacharelado em
Ciência e Tecnologia da Universidade
Federal Rural do Semi-Árido - Campus
Caraúbas como requisito para obtenção
do título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia.

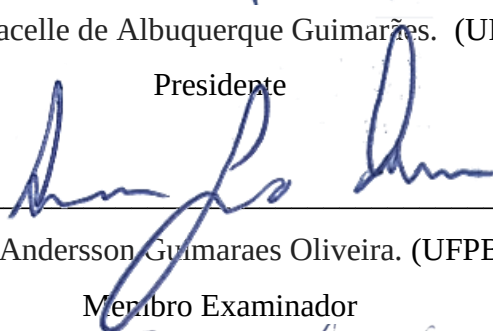
Defendida em: 18 / 03 / 2019.

BANCA EXAMINADORA



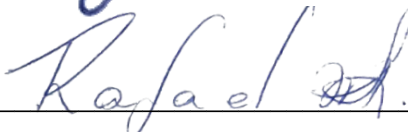
Prof. Dr. Aracelle de Albuquerque Guimarães. (UFERSA)

Presidente



Prof. Andersson Guimaraes Oliveira. (UFPB)

Membro Examinador



Prof. Rafael Bezerra Azevedo Mendes (UFERSA)

Membro Examinador

Aos meus pais por toda motivação e
incentivo.

DEDICO

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por me dá forças e sabedoria para concluir essa etapa de minha vida e me ajudar a conquistar meus objetivos.

Agradeço à minha família por todo o apoio, em especial ao meu pai Francisco Alcides Viana Sobrinho, minha mãe Maria de Fátima Tôrres Viana e meu irmão Luis Eduardo Pinto Tôrres Viana, que nunca mediram esforços e sempre lutaram comigo para que meus objetivos fossem alcançados.

Agradeço a minha namorada, Iracilda Nazareno Paiva de Medeiros, por toda a paciência e por se fazer presente em todos os momentos.

Aos amigos que a universidade me apresentou, em especial os participantes do “Grupo é Grupo”, Amanda, Aline, Naiane, Nilton, Leandro, William, Ailton e Jardel, além de Anderson, Gineton, Danrley, Rafaela, Vinicius, Joice, Diego e Italo, obrigada por todo o companheirismo e por tornar a caminhada mais leve e divertida.

Agradeço à minha orientadora Aracelle de Albuquerque Guimarães e ao seu marido Andersson Guimaraes Oliveira por todos os ensinamentos e dedicação para que fosse possível concluir este trabalho.

“No começo do Mundo venciam os mais Fortes. Depois os mais audazes. Hoje só vencem os mais preparados”.

Autor: Michael Franco Muzzolon

RESUMO

Este estudo teve como objetivo promover melhorias de uma bancada experimental construída artesanalmente por um aluno da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, campus Caraúbas, a fim de melhorar a metodologia de ensino/aprendizado em sala de aula da disciplina de Resistência dos Materiais II. O trabalho foi desenvolvido baseado nos conceitos de flambagem de colunas de Euler, assunto esse presente na ementa da disciplina, e sua principal motivação foi permitir que os alunos pudessem compreender o assunto na prática, através de experimentos utilizando a bancada didática experimental envolvendo os conteúdos apresentados em sala de aula, despertando o interesse do aluno pelo conteúdo e melhorando o aprendizado. Quando foi executada, buscavam facilitar a visualização e entendimento dos alunos quanto ao fenômeno de flambagem de colunas, submetidas a diferentes configurações de apoio. Porém, a fim de diminuir os erros experimentais existentes no primeiro projeto, tais como, aumento no atrito devido a oxidação das peças de apoio, erros nas medições devido folgas suportes de apoio das colunas de ensaio, buscou-se neste trabalho meios para o aprimoramento desta máquina, aumentando a precisão e a qualidade desses experimentos, auxiliando melhor o professor no repasse dos conhecimentos de forma prática e intuitiva.

Palavras-chave: Bancada Experimental. Flambagem. Colunas de Euler.

ABSTRACT

This study aimed to promote improvements of an experimental bench constructed by a student of the Federal Rural Semi-Arid Federal University - UFERSA, Caraúbas campus, in order to improve the methodology of teaching / learning in the classroom of the discipline of Resistance of Materials II. The work was developed based on the concepts of buckling of columns of Euler, subject present in the menu of the discipline, and its main motivation was to allow the students to understand the subject in practice, through experiments using the didactic experimental group involving the presented contents in the classroom, arousing the student's interest in content and improving learning. When it was executed, they sought to facilitate the visualization and understanding of the students regarding the phenomenon of buckling of columns, submitted to different configurations of support. However, in order to reduce the experimental errors existing in the first design, such as increase in friction due to oxidation of the support pieces, errors in measurements due to clear support supports of the test columns, we sought in this work means for the improvement of this machine, increasing the precision and the quality of these experiments, helping the teacher better in the transfer of knowledge in a practical and intuitive way.

Keywords: Experimental Bench. Bending. Euler columns.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
1.1 JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES	12
3 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS	14
3.1 OBJETIVOS GERAIS	14
3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	14
4 REVISAO TEORICA	15
4.1 FLAMBAGEM DE COLUNAS	15
4.2 ÍNDICE DE ESBELTEZ.....	15
4.3 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO	16
4.4 CARGA CRÍTICA	18
4.4.1 EQUILÍBRIO ESTÁVEL	19
4.4.2 EQUILÍBRIO INSTÁVEL.....	20
4.4.3 EQUILÍBRIO NEUTRO	20
4.5 - COLUNA IDEAL COM APOIOS DE PINOS.....	21
4.8 EFEITO DO ATRITO NA MÁQUINA DE ENSAIO	35
5 METODOLOGIA.....	37
7 CONCLUSÃO.....	41
8 TRABALHOS FUTUROS.....	42
9 REFERÊNCIAS	43

1 INTRODUÇÃO

A busca pelo conhecimento pleno dos materiais e pela compreensão dos seus comportamentos em algumas condições estruturais, faz parte do aprimoramento de técnicas de estudos, para isto, necessita-se usar tecnologias, máquinas e equipamentos em geral tornando mais fácil e clara a análise de tais materiais.

Nos cursos das ciências exatas, existe uma certa dificuldade na observação de comportamentos de fenômenos físicos quando não há experimentos onde os mesmos possam ser vistos na prática. Dessa forma se torna um desafio para o professor repassar de forma clara os conceitos teóricos vistos em sala de aula. Assim, se faz necessário a busca de materiais e métodos diferenciados que facilite o entendimento dos conteúdos ministrados em sala de aula pelos discentes (VITORINO, 2018).

Neste estudo os conceitos abordados serão a flambagem de colunas de Euler, conceito esse abordado na ementa da disciplina de resistência dos materiais. Para Hibbeler (2010), a resistência dos materiais é o ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas que são aplicadas a um corpo deformável externamente, e a intensidade em que as forças internas atuam, abrangendo o cálculo das deformações do corpo e o estudo da sua estabilidade, quando submetido a solicitações externas.

Dentre vários elementos estruturais, as colunas geralmente são responsáveis por suportar as maiores quantidades de esforços, visto que são elementos longos e esbeltos. Associados a essas colunas, existe uma característica de estabilidade, que é a sua capacidade de suportar um carregamento axial sem que haja uma deflexão lateral repentinamente (OLIVEIRA, 1998).

Quando o carregamento axial na coluna, têm seu limite crítico ultrapassado, um regime instável é alcançado, isto é, qualquer perturbação lateral fará com que a coluna carregada axialmente se mantenha numa configuração irreversível mesmo quando retirada a força perturbadora (BUENO, 1999). A carga crítica de flambagem de colunas depende de alguns fatores tais como apoios, momento de inércia e material. (VITORINO, 2018)

Em vista desta teoria, fez-se necessário a construção da bancada experimental para ensaios de flambagem onde buscou-se mostrar na prática como é o comportamento de uma coluna em quatro diferentes configurações de apoio carregada axialmente com uma bancada de fácil manuseio e transporte, podendo ser usada por quem se interessar em estudar e entender na prática o fenômeno de flambagem.

A bancada foi desenvolvida pelo aluno do curso de tecnologia em seu trabalho de conclusão de curso da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, campus Caraúbas. O protótipo estava em funcionamento e o fenômeno de flambagem pode ser observado pelos alunos da disciplina de resistência dos materiais, porém foram observadas imprecisões nos resultados obtidos com o funcionamento da máquina.

Atendendo ao interesse de se obter um equipamento novo para ensaios de flambagem, uma vez que as máquinas em vendas no mercado possui um custo muito elevado, o uso de uma bancada é de suma importância para o melhoramento do ensino e compreensão dos alunos. Sendo assim, quanto mais precisão nos resultados dos estudos e ensaios desenvolvidos, melhor será para o aprendizado dos alunos.

Nessas condições, baseados nos resultados obtidos no trabalho anterior, foi proposto inicialmente neste trabalho a observação dessas condições de operação e o desenvolvimento de projeto com a finalidade de realizar o aperfeiçoamento da bancada experimental didática para testes de flambagem,

1.1 JUSTIFICATIVAS E MOTIVAÇÕES

Nas disciplinas de engenharia o professor muitas vezes sente dificuldades de repassar os conceitos teóricos para os alunos pelo fato de alguns fenômenos serem mais fáceis de compreender se forem demonstrados experimentalmente como ocorre na prática. Porém, para se obter bons resultados se faz necessário o uso de laboratórios e equipamentos, o que se torna difícil para professores, principalmente os do ensino público, devido a dificuldade no investimento em laboratórios e materiais que possam ser utilizados pelos alunos para a produção de experimentos práticos. Com isso buscam outras alternativas para suprir essas necessidades.

As bancadas experimentais são alternativas por serem dispositivos usados didaticamente para prática de conceitos aprendidos em sala de aula. Na engenharia a utilização desses equipamentos é de grande importância para fixar conceitos e aplicações em escala reduzida em diversas áreas de estudo por ser um apoio essencial para atividades de projeto, ensino e pesquisa.

O desenvolvimento de equipamentos didáticos de baixo custo, compatíveis com a capacidade de investimento atual das universidades públicas, porém com ênfase na qualidade didática, é uma alternativa viável para se minimizar a carência existente nos atuais cursos de engenharia dos países em desenvolvimento. Bancadas didáticas

experimentais são equipamentos indispensáveis em atividades educacionais relativas ao estudo de todas as engenharias e apenas com o aumento significativo da relação custo/benefício foi possível o seu desenvolvimento. (AMORIM, 2006).

A bancada experimental para estudo de flambagem, objetivo deste projeto, foi desenvolvida para o atendimento às disciplinas da área de resistência dos materiais. Trata-se de uma estrutura metálica, de fácil transporte que permite a simulação experimental de sistemas, tais como colunas com extremidades presas por pinos, uma extremidade engastada e outra livre, duas extremidades engastadas e uma extremidade engastada e outra presa por pinos.

Frente ao alto custo na compra dos equipamentos disponíveis no mercado, a bancada didática em questão foi criada e construída por alunos do curso da engenharia mecânica, se tratando de um equipamento versátil em termos de operação, facilidade de instalação e transporte, e com um custo menor quando comparado as bancadas do mesmo tipo presentes no mercado.

Porém, o uso contínuo desta bancada, apresentou para os alunos desgastes e imprecisões em medições que motivaram este projeto, buscando o melhoramento desta máquina, na tentativa de tornar mais preciso os resultados experimentais. A motivação dos estudantes aumenta quando tem a oportunidade de aplicar conceitos abstratos em meios concretos, tais como o estudo da flambagem em colunas, que é visto na disciplina de resistência dos materiais II e impulsionou este estudo.

3 OBJETIVOS GERAIS E ESPECÍFICOS

3.1 OBJETIVOS GERAIS

Detectar e propor melhorias para uma bancada experimental de ensaio de flambagem construída artesanalmente.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Avaliar a bancada experimental;

Identificar os possíveis melhoramentos;

Avaliar a possibilidade de fazer o melhoramento;

Projetar os melhoramentos da bancada.

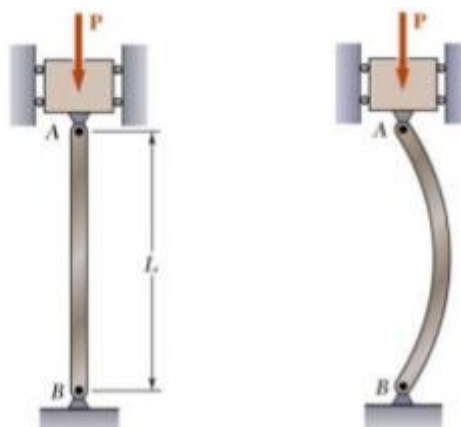
4 REVISAO TEORICA

4.1 FLAMBAGEM DE COLUNAS

Flambagem ou encurvadura pode ser definido como sendo um fenômeno que ocorre em peças onde a área de secção transversal é pequena em relação ao seu comprimento, quando submetida a um esforço de compressão axial. Ocorre quando a peça sofre flexão transversalmente devido a compressão axial e é considerada uma instabilidade elástica, assim, a peça pode perder sua estabilidade sem que o material já tenha atingido a sua tensão de escoamento. Este colapso ocorrerá sempre na direção do eixo de menor momento de inércia de sua seção transversal. A tensão crítica para ocorrer a flambagem não depende da tensão de escoamento do material, mas sim do seu módulo de Young. (MELCONIAN,2000).

Segundo Hibeller (2010): “Elementos estruturais longos e esbeltos, e sendo sujeitos a cargas axiais de compressão são denominados de colunas. A deflexão lateral oriunda do carregamento axial de compressão é denominada de flambagem”. Já Beer, 1995 diz que: “Uma coluna pode ser considerada como uma viga colocada em posição vertical e submetida a uma força axial”. Desta forma, o estudo será focado no elemento esbelto submetido a carregamentos axiais de compressão que vai promover o fenômeno de instabilidade elástica a partir de um carregamento crítico que é a maior carga axial que a coluna suporta na eminência de sofrer flambagem.

Figura 1 - Flambagem em torno do eixo mais fraco



Fonte: Beer,1995

4.2 ÍNDICE DE ESBELTEZ

Problemas provenientes da instabilidade de peças pode ser proveniente de seu índice de esbeltez, são alvos de muitos pesquisadores e o avanço já existe nessa área e fornece aos profissionais boas ferramentas para um projeto seguro (BUENO, 1999).

O índice de esbeltez é a razão geométrica entre o comprimento da coluna e o menor raio de giração da mesma Hibeller (2010). Descrito na equação (1).

$$\frac{L}{r} \quad (1)$$

O raio de giração é dado por:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2)$$

Onde:

r = é o raio de giração da seção transversal.

I = é o menor momento de inércia da área da seção transversal da coluna.

A = é a área da seção transversal da coluna.

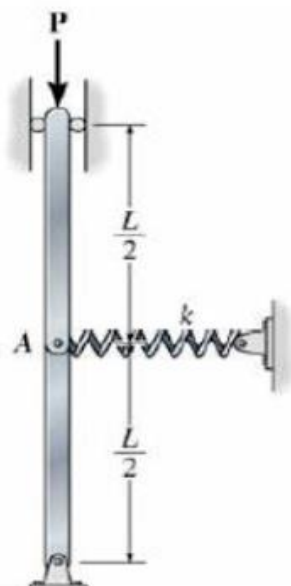
Quanto maior esse índice, maior será a facilidade da coluna em flambar. Os menores índices de esbeltez são obtidos quando se iguala as tensões de escoamentos com as tensões críticas, para valores menores ocorre o escoamento do material. O menor momento de inércia de uma seção transversal, ou eixo mais fraco, é obtido a partir dos cálculos geométricos da seção transversal, e ocorrendo flambagem em torno deste eixo mais fraco, que dependerá do referencial adotado (HIBLER,2010).

4.3 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

Uma coluna é submetida a uma carga axial de compressão, torna-se estável se a carga imprimida for menor que sua carga crítica de flambagem, podendo sofrer deflexão e ainda retornar sua posição inicial. Uma característica para melhor entendimento deste fenômeno, é, qualquer pequena força lateral atribuída a coluna fará com que ela tenha um “empenamento”, que é a deflexão lateral. A coluna está submetida a três tipos de equilíbrio, dependendo da carga que está sendo a ela atribuída. Equilíbrio estável, equilíbrio instável e equilíbrio neutro (JONES, 2006).

A instabilidade a que está sujeita a coluna é melhor explicada com o auxílio de um mecanismo composto de duas barras rígidas, sem peso e presas por pinos nas extremidades, dispostas na vertical, conectadas em A por uma mola de rigidez K não esticada, e uma pequena força P aplicada na vertical como ilustra a figura 2. (HIBELLER, 2010).

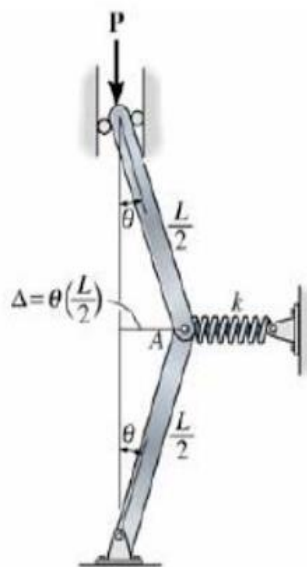
Figura 2 - Mecanismo de duas barras presas por pinos



Fonte: Hibeller, 2010

Ao aplicar uma força perturbadora P nesse sistema, ocorre um pequeno deslocamento do ponto A como mostra a figura 3.

Figura 3 - Mecanismo de duas barras em deflexão lateral



Fonte: Hibeller, 2010

Quando o ponto A é deslocado, a mola produz uma força de restauração $F = K\Delta$, enquanto isso a carga P produz duas componentes na horizontal $P_x = P \tan \theta$, tendendo a empurrar o ponto A ainda mais para fora da posição de equilíbrio. Sendo θ um ângulo pequeno, é possível aproximar $\Delta \approx \theta \left(\frac{L}{2}\right)$ e $\tan \theta \approx \theta$. Sendo assim, a força de restauração que a mola produz torna-se $F = K \cdot \theta \cdot L/2$, e a força perturbadora torna-se $2P_x = 2P \theta$. (VITORINO, 2018)

4.4 CARGA CRÍTICA

Sempre que se projeta um elemento estrutural, é necessário que ele satisfaça requisitos específicos de resistência, deflexão e estabilidade. Os elementos estruturais compridos e esbeltos sujeitos a uma força de compressão axial são denominadas colunas, e a deflexão lateral que ocorre é denominada flambagem. Com muita frequência a flambagem de uma coluna pode resultar em uma falha repentina e dramática de uma estrutura ou mecanismo e, por isso, é preciso dedicar especial atenção ao projeto de colunas para que estas possam suportar com segurança as cargas pretendidas.

Figura 4 - Carga crítica**Fonte: Hibeller, 2010**

A carga axial máxima que uma coluna pode suportar quando está na iminência de sofrer flambagem é denominada carga crítica, P_{cr} . Qualquer carga adicional provocará flambagem na coluna e, portanto, deflexão lateral, como mostra a figura 4.

4.4.1 EQUILÍBRIO ESTÁVEL

Um sistema mecânico é considerado estável quando uma pequena perturbação no sistema resulta numa pequena resposta do mesmo, sendo que o sistema sempre volta a condição de equilíbrio (CAMPOS, 2017).

Segundo Hibeller (2010), se a força de restauração for maior que a força perturbadora, ou seja, $k \cdot \theta \cdot L/2 > 2 \cdot P\theta$ e observando que θ é cancelado, poderemos resolver P , que nos dá a equação (3).

$$P < \frac{kL}{4} \quad (3)$$

Essa é uma condição para equilíbrio estável, visto que a força desenvolvida pela mola seria adequada para devolver as barras a suas respectivas posições verticais.

4.4.2 EQUILÍBRIO INSTÁVEL

Um sistema mecânico é considerável instável quando uma pequena perturbação no sistema resulta em uma grande resposta do mesmo, e o sistema não volta a sua posição de equilíbrio (CAMPOS, 2017).

Se $k \cdot \delta \cdot L/2 < 2 \cdot P \cdot \delta$, temos a equação (4).

$$P > \frac{kL}{4} \quad (4)$$

Na condição de equilíbrio instável, se a carga P for aplicada e houver um deslocamento do ponto A o mecanismo não voltará a posição de equilíbrio quando retirada a força perturbadora (HIBLER, 2010).

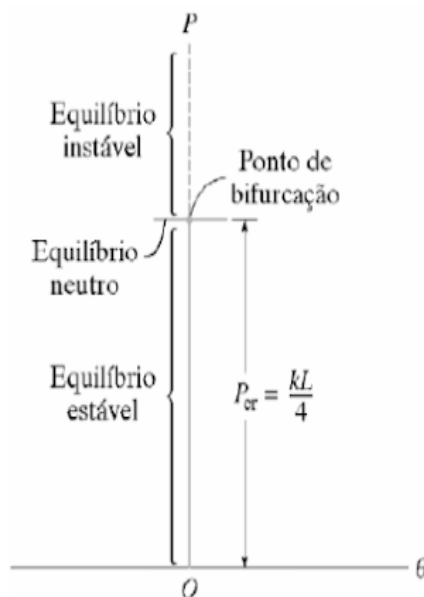
4.4.3 EQUILÍBRIO NEUTRO

Quando a força de perturbação for igual a força de restauração, temos que $k\theta L/2 = 2P\theta$, que resultará na carga crítica dada pela equação (5).

$$P_{cr} = \frac{kL}{4} \quad (5)$$

Esta condição implica a carga crítica quando a coluna está na iminência de flambar, assim em equilíbrio neutro, qualquer incremento de carga resultará na deflexão lateral, e conseqüentemente entrará no equilíbrio instável. Qualquer perturbação não fará com que o mecanismo se afaste mais do equilíbrio, nem que ele retorne a sua posição inicial. Assim sendo, as barras continuarão na posição defletida. Quando a carga P é igual a carga crítica P_{cr} , temos o ponto de bifurcação onde o equilíbrio muda do Neutro para o Instável.

Figura 5 - Representação gráfica dos equilíbrios para o mecanismo

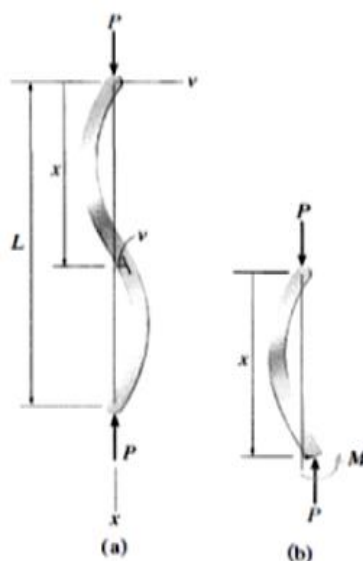


Fonte: Hibeller, 2010

4.5 - COLUNA IDEAL COM APOIOS DE PINOS

Hibeller (2010) diz que, uma coluna ideal é uma coluna perfeitamente reta antes da carga, feita de material homogêneo e na qual a carga é aplicada no centroide da seção transversal. E o material se comporta de uma maneira linear elástica, sofrendo assim flambagem ou flexão em um único plano, como mostra na figura 6.

Figura 6- Coluna ideal presa por pinos defletida



Fonte: Hibeller, 2010

Aplicando a equação que relaciona o momento fletor interno da coluna e sua forma defletida, que é dada pela equação (6):

$$EI \frac{d^2}{dx^2} = M \quad (6)$$

Pelo diagrama temos que a deflexão v e o momento interno M são mostrados na direção positiva segundo critérios adotados para a equação (6). Somando os momentos temos:

$$M = - Pv \quad (7)$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = - Pv \quad (8)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI} \right) v = 0 \quad (9)$$

Como a equação (9) é uma equação diferencial e homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes, sua solução pode ser dada por:

$$v = c_1 \cdot \text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_2 \cdot \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \quad (10)$$

Tanto C_1 quanto C_2 são determinadas pelas condições de contorno nas extremidades da coluna. Onde $v = 0$ em $x = 0$, logo $C_2 = 0$. E $v = 0$ em $x = L$.

$$c_1 \cdot \text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \quad (11)$$

Essa equação será satisfeita se $C_1 = 0$, mas $C_2 = 0$, o que resulta numa solução trivial da equação e exige que a coluna permaneça sempre reta, mesmo que a carga faça a coluna trona-se instável. A outra solução é:

$$\text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \quad (12)$$

Que pode ser satisfeita se:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n \cdot \pi \quad (13)$$

Assim temos:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3 \quad (14)$$

Portanto, o menor valor de P é obtido quando $n = 1$, de modo que a carga crítica para a coluna é:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad (15)$$

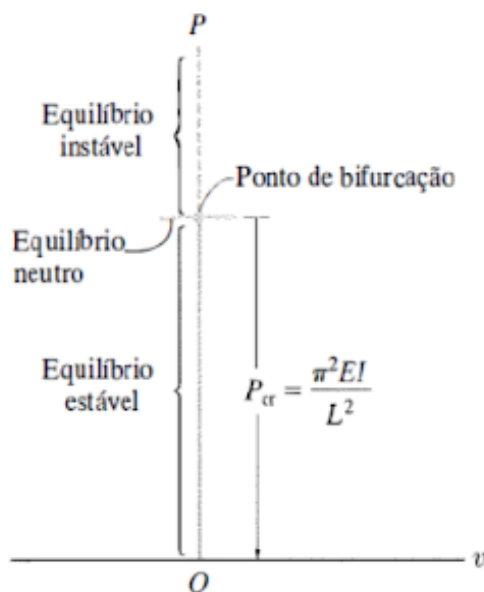
Essa carga é denominada carga de Euler, devido a Leonhard Euler, matemático que resolveu este problema. A forma flambada da coluna é definida por:

$$v = c_1 \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot \lambda}{L} \quad (16)$$

Onde c_1 representa a deflexão máxima, que ocorre no ponto médio da coluna. Considerando a deflexão como sendo pequena.

Como no mecanismo de duas barras, podemos representar as características da deflexão da coluna pelo gráfico da figura (7). Sendo o ponto de bifurcação a representação do equilíbrio neutro.

Figura 7 - Representação gráfica dos equilíbrios de uma coluna presa por pinos



Fonte: Hibeller, 2010

A equação da flambagem para uma coluna carregada axialmente e esbelta apoiada por pinos pode ser reescrita como:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (17)$$

Onde:

P_{cr} - Carga crítica, carga máxima na coluna imediatamente antes de sofrer flambagem.

E - Módulo da elasticidade do material da coluna.

I – Menor momento de inércia da área da seção transversal.

L – Comprimento da coluna sem apoio.

Substituindo $I = Ar^2$, na equação (10), onde A é a área da seção transversal e r é o raio de giração da área de seção transversal, tem-se:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot E \cdot (Ar^2)}{L^2} \quad (17)$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{n^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (18)$$

Ou ainda:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (19)$$

Onde a equação (19) é a tensão crítica de Euler, onde:

σ_{cr} – Tensão crítica, é a tensão média na coluna imediatamente antes de flambar;

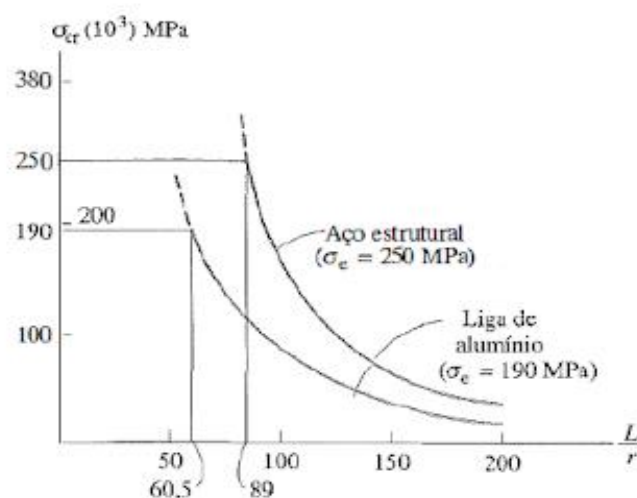
E – Módulo da elasticidade do material da coluna;

L – Comprimento da coluna sem apoio;

r – Menor raio de giração da coluna, determinada pela equação (2).

O gráfico da figura 8 é a representação da equação (19), para as ligas de alumínio e a de aço, tendo a tensão crítica em função do índice de esbeltez. As curvas são hiperbólicas e válidas somente para tensões críticas abaixo do limite de escoamento do material. Tendo em vista que o material deve se comportar elasticamente, para o aço temos que a tensão de escoamento é $(\sigma_e)_{Aço} = 250 MPa$ e $E_{Aço} = 200 GPa$, para o alumínio, $(\sigma_e)_{Al} = 190 MPa$ e $E_{Al} = 70 GPa$. Substituindo $\sigma_{cr} = \sigma_e$ na equação (11), os menores índices de esbeltez para colunas de aço e alumínio são respectivamente $(Lr)_{Aço} = 89$ e $(Lr)_{Al} = 60,5$, com índices abaixo destes ocorrem o escoamento do material antes que seja possível atingir a carga crítica de flambagem. (VITORINO, 2018).

Figura 8 - Representação gráfica da equação (19) em função do índice de esbeltez

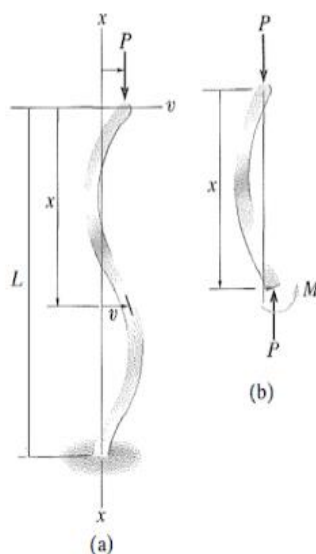


Fonte: Hibeller, 2010

4.6 - COLUNAS COM VÁRIOS TIPOS DE APOIO

Segundo Hibeller (2010) o modo de calcular colunas a determinação da carga crítica de flambagem de uma configuração de apoio engastada na base e livre no topo é análoga a forma de calcular colunas biarticuladas.

Figura 9 – Representação gráfica de uma coluna engastada na base e livre no topo



Fonte: Hibeller, 2010

Pelo diagrama de corpo livre da figura 7, o momento interno na seção é $M=P(\delta-v)$, logo a equação diferencial para a curva de deflexão é dada pela equação (21).

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v) \quad (20)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \quad (21)$$

Essa equação não é homogênea por ter um termo não nulo do lado direito da equação, logo sua solução consiste em uma complementar juntamente com uma solução particular, de modo que:

$$v = c_1 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_2 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \delta \quad (22)$$

As constantes também serão determinadas pelas condições de contorno. Sendo que $x = 0$, $v = 0$, de modo que $c_2 = -\delta$.

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = c_1 \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - c_2 \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} \cdot \sin \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \quad (23)$$

Em $x = 0$, $\frac{d^2 v}{dx^2} = 0$, de modo que $C_1 = 0$. Assim curva de flexão é definida por:

$$V = \delta \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) \right] \quad (24)$$

Considerando que a deflexão no topo da coluna é δ , ou seja, em $x = L$, $v = \delta$, isto exige que:

$$\delta \cdot \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \quad (25)$$

Logo a solução trivial $\delta = 0$, indica que não ocorre flambagem, independente da carga P , para que isso não ocorra tem-se:

$$\cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 0 \quad (26)$$

Ou ainda,

$$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = \frac{n \cdot \pi}{2} \quad (27)$$

A menor carga crítica ocorre quando $n = 1$, isolando P temos:

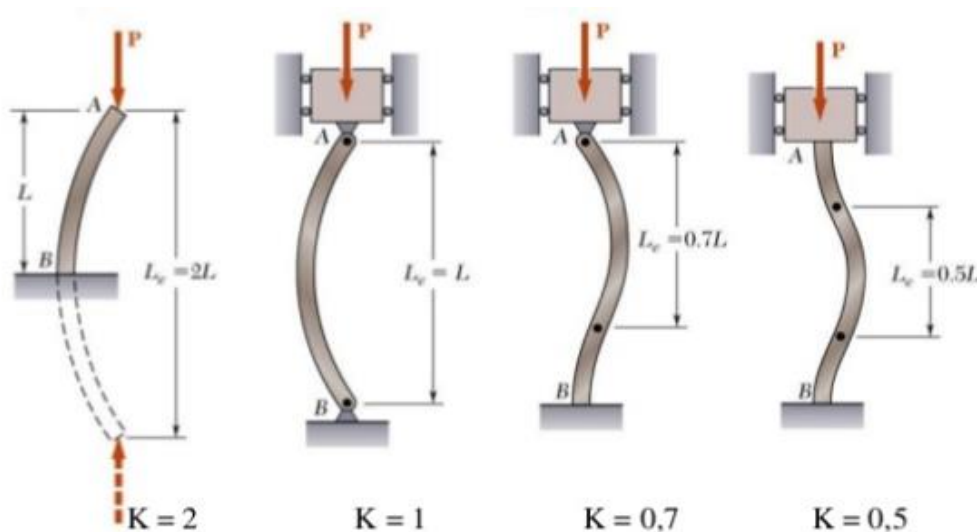
$$P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2} \quad (28)$$

A equação (28) foi desenvolvida com a condição de biarticulada, L representa na equação, a distância entre os pontos de momento nulo. Desse modo outras

configurações de apoio consistem em distâncias diferentes, esta distância é denominada comprimento efetivo da coluna, que é representada por L_e . Como já foi desenvolvido anteriormente, o comprimento efetivo da coluna biarticulada $L_e = L$, e a coluna engastada na base e livre no topo é $L_e = 2L$. (VITORINO, 2018)

Resolvendo as equações diferenciais pelo mesmo método usado anteriormente, tem-se que os comprimentos efetivos das colunas bi - engastadas, engastada na base e articulada no topo serão respectivamente, $L_e = 0,5L$ e $L_e = 0,7L$. (VITORINO, 2018)

Figura 10 - Ilustração de diferentes tipos de apoios



Fonte: Beer,1995

Se a coluna for apoiada de outros modos, então a fórmula de Euler poderá ser usada para determinar a carga crítica, desde que 'L' representa a distância entre pontos de momento nulo. Essa distância é denominada comprimento efetivo da coluna, L_e . (HIBELLER,2010).

Muitos manuais e códigos de projeto atribuem um coeficiente adimensional K denominado fator de comprimento efetivo, que é dado por:

$$L_e = K \cdot L \quad (29)$$

Podemos ainda expressar a fórmula de Euler como:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2} \quad (30)$$

Onde a tensão crítica é dada por:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (31)$$

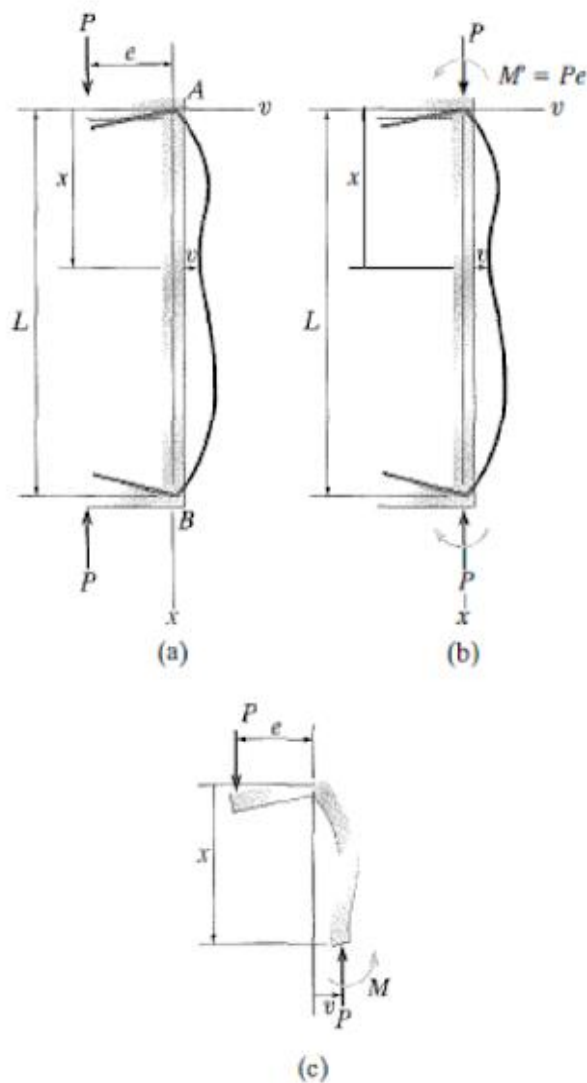
Onde (KL/r) é o índice de esbeltez efetivo da coluna.

4.7 FÓRMULA DA SECANTE

Uma das características da fórmula de Euler é que a carga axial tem que estar centralizada na seção da coluna, e também a coluna deve ser perfeitamente retilínea, mas estas condições não serão atingidas na realidade. Por este motivo a coluna sofre flambagem muito pequenas assim que são carregadas, resultando que o critério de aplicação de carga ficará limitado a uma deflexão específica da coluna ou a não permitir que a tensão máxima na coluna ultrapasse a tensão admissível.

Segundo Hibeller (2010) se aplicarmos uma carga P em uma coluna a uma curta distância excêntrica e em relação ao centróide da seção transversal. Essa carga na coluna é estaticamente equivalente à carga axial P e ao momento fletor $M' = Pe$. Podemos ver na figura que, em ambos os casos, as extremidades A e B são suportadas de modo tal que ficam livres para girar (suportada por pinos). Considerando somente pequenas inclinações e deflexões e o comportamento linear elástico do material. E o plano x-v é um plano de simetria para a área da seção transversal.

Figura 11 - Coluna curta com carga aplicada a uma curta distância excêntrica



Fonte: Hibeller, 2010

Observando o diagrama de corpo livre da figura 8 c, temos que o momento interno na coluna é dado por:

$$M = -P(e + v) \quad (32)$$

Teremos uma equação diferencial para a curva de deflexão, sendo que:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = -P(e + v) \quad (33)$$

Ou ainda,

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI} \cdot v = -\frac{P}{EI} \cdot e \quad (34)$$

Sendo uma equação diferencial que tem uma solução geral que dispõe de solução complementar e particular, sendo ela dada por:

$$v = c_1 \cdot \text{sen} \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} x + c_2 \cdot \cos \cdot \sqrt{\frac{P}{EI}} x + e \quad (35)$$

Para encontrar as constantes novamente recorreremos às condições de contorno. Onde $x = 0$, $v = 0$, portanto $c_2 = e$. Já em $x = L$, $v = 0$, resultando em:

$$c_1 = \frac{e \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) \right]}{\text{sen} \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right)} \quad (36)$$

Como,

$$1 - \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 2 \cdot \text{sen}^2 \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \quad (37)$$

E,

$$\text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) = 2 \cdot \text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \cdot \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \quad (38)$$

Temos:

$$C_1 = \text{tg} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \quad (39)$$

Com isso temos:

$$v = e \left[\text{tg} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) \cdot \text{sen} \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + \cos \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - 1 \right] \quad (40)$$

Para a deflexão máxima devido a simetria da carga, a deflexão máxima e tensão máxima, ocorrem no ponto médio da coluna. Então quando $x = L/2$, $v = v_{\text{máx}}$, logo teremos:

$$v_{\text{máx}} = e \left[\sec \cdot \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2} \right) - 1 \right] \quad (41)$$

Se e tender a zero, $v_{\text{máx}}$ tenderá a zero. Mas se os termos entre colchetes tendem ao infinito quando e tender a zero, então $v_{\text{máx}}$ terá um valor não nulo. Matematicamente falando, isso representaria o comportamento de uma coluna com carga axial no

momento da falha quando sujeita a carga crítica P_{cr} . Logo para determinar a carga crítica é necessário que:

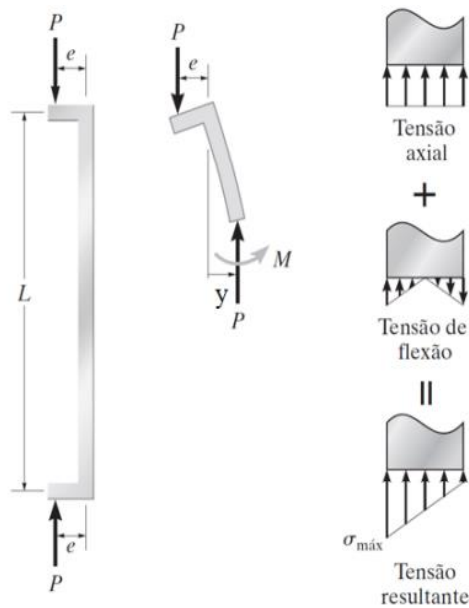
$$\sec \cdot \left(\sqrt{\frac{P_{cr} L}{EI} \frac{L}{2}} \right) = \infty \quad (42)$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr} L}{EI} \frac{L}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad (43)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (44)$$

A tensão máxima como sugere Hibeller (2010), pode ser determinada entendendo-se que ela é provocada pela carga axial juntamente com o momento mostrado na figura 12.

Figura 12 - Representação de uma coluna carregada a uma curta distância excêntrica



Fonte: Hibeller,2010

$$M = -P(e + v) \quad (45)$$

$$M = P \cdot e \cdot \sec \left(\sqrt{\frac{P L}{EI} \frac{L}{2}} \right) \quad (46)$$

Assim temos que a tensão máxima na coluna é de compressão e seu valor é dado por:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \cdot \sec \cdot \left(\frac{L}{2r} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right] \quad (47)$$

Onde,

$\sigma_{\text{máx}}$ – Tensão elástica máxima na coluna;

P – Carga vertical aplicada na coluna. $P < P_{\text{cr}}$ a menos que $e=0$, então

$P = P_{\text{cr}}$;

e – Excentricidade da carga P, medida do eixo neutro da área da seção transversal da coluna até a linha de ação de P;

c – Distância do eixo neutro até a fibra externa da coluna onde ocorre a

$\sigma_{\text{máx}}$;

A – Área da seção transversal da coluna;

L – Comprimento não apoiado da coluna n plano de flexão;

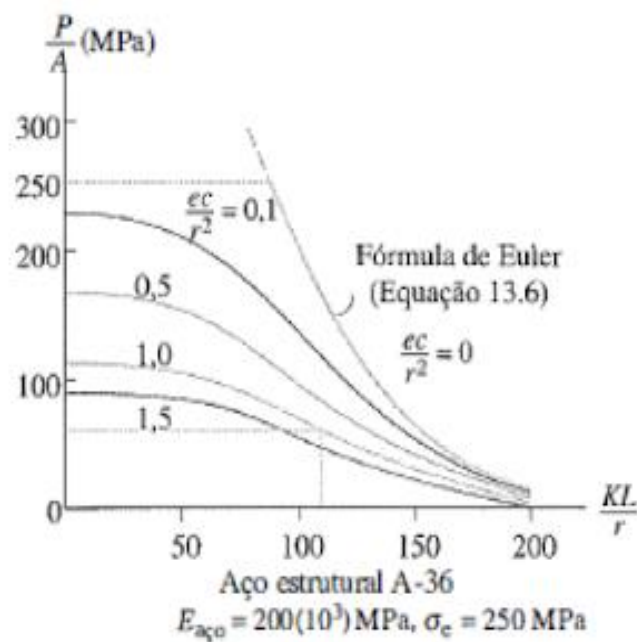
E – Módulo de elasticidade do material da coluna;

r – Raio de giração em torno do eixo neutro ou de flexão.

Para Hibeller (2010), a equação (47) indica uma relação não linear entre a carga e a tensão. Consequentemente o princípio da superposição não pode ser aplicado, e, portanto, as cargas têm que ser somadas antes de determinar a tensão. Por essa relação não linear qualquer fator de segurança deve ser aplicado na carga, e não na tensão.

Para uma tensão $\sigma_{\text{máx}}$, a equação (47) pode ser representada graficamente, como sendo KL/r em relação a P/A para vários valores de excentricidade ec/r^2 . A figura 12 representa um conjunto específico de curvas para o aço estrutural grau A-36 com ponto de escoamento $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_y$, $e = 250\text{MPa}$ e módulo de elasticidade $E_{\text{aço}} = 200\text{GPa}$.

Figura 13- Representação gráfica fórmula de Euler



Fonte: Hibeller, 2010

Quando $e \rightarrow 0$, ou $\frac{ec}{r^2} \rightarrow 0$, e $\sigma_{\text{máx}} = P/A$, onde P é a carga crítica da coluna definida pela fórmula de Euler. Resultando assim na equação (11), estas equações são válidas apenas para cargas elásticas, as tensões mostradas na figura (7) não podem ultrapassar $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$.

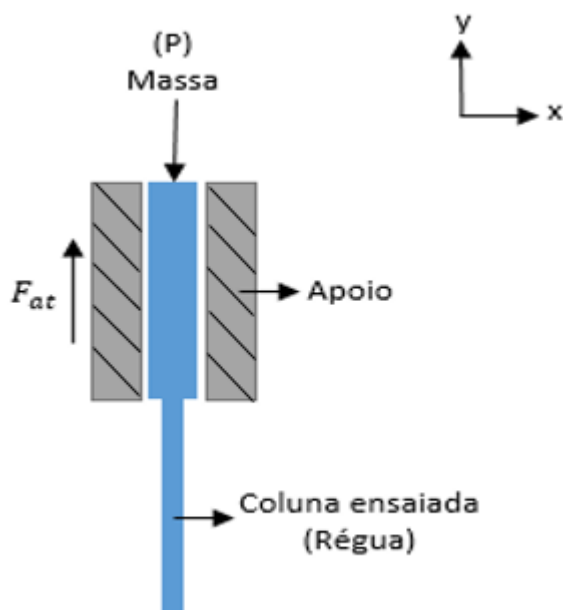
As curvas da figura (13) mostram que a diferença no índice de excentricidade tem efeito marcante na capacidade de carga com índices de esbeltez pequeno. Mas colunas com índices de esbeltez grandes tendem a falhar na carga crítica de Euler, independente do índice de excentricidade. Sendo assim, colunas de alto índice de esbeltez podem ser projetadas usando a fórmula de Euler.

4.8 EFEITO DO ATRITO NA MÁQUINA DE ENSAIO

A rugosidade influencia de maneira significativa na determinação do coeficiente de atrito, que desempenha um importante papel na conformação de metais devido ao movimento relativo e à pressão existente na interface de contato entre as ferramentas e peças. (JÚNIOR et al., 2012)

A teoria de flambagem considera como única carga, a força exercida sobre a coluna a ser ensaiada (HIBBELER, 2010). Contudo, na prática, a carga, oriunda da força peso exercida no ensaio sofre ação da força de atrito cujo sentido é oposto ao do movimento entre a extremidade da viga ensaiada e o mancal de deslizamento que a apoia na estrutura da máquina, conforme esquema da figura 12. Logo, a carga de ensaio passa a ser representada pela expressão (25).

Figura 14 – Efeito do atrito na máquina de ensaio



Fonte: Autoria própria

$$\sum Fy = Fat - P \quad (48)$$

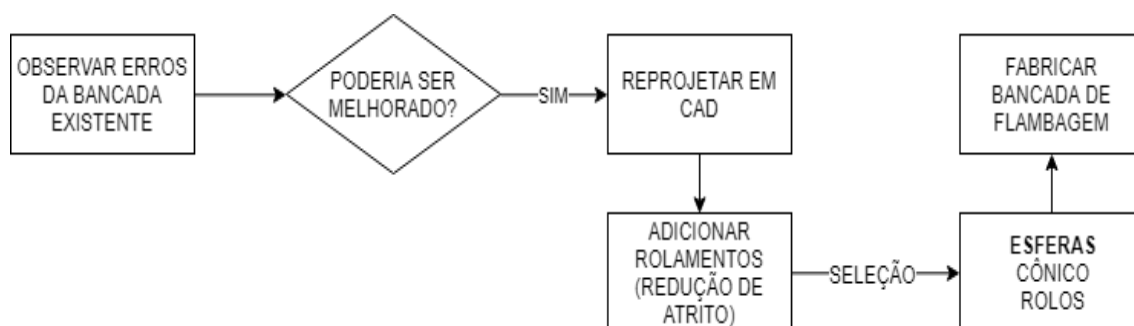
Logo, o efeito da força de atrito contribui para aumento do erro entre o valor teórico e o experimental, por causar características desfavoráveis ao processo como desgaste no ferramental, aumento do consumo de energia associada à deformação, eleva a temperatura de trabalho (JÚNIOR et al., 2012).

Assim, faz-se necessárias alterações no projeto da máquina que minimizem o efeito desse atrito. A primeira delas seria o uso de lubrificantes. Porém, optou-se por uma solução mais limpa e de baixa manutenção: o uso de rolamentos lineares.

5 METODOLOGIA

A metodologia para o desenvolvimento desse projeto partiu primeiramente de um da concepção inicial da bancada tomando como base uma bancada desenvolvida por um aluno de ciência e tecnologia da UFERSA- Campus Caraúbas, onde o mesmo utilizou o conhecimento adquirido na disciplina de resistência dos materiais II para construir artesanalmente uma bancada experimental, porém após alguns testes viu-se que o atrito causado pela oxidação de algumas partes gerava erros nos experimentos.

Figura 15 – Fluxograma de estudo



Fonte: Autoria própria

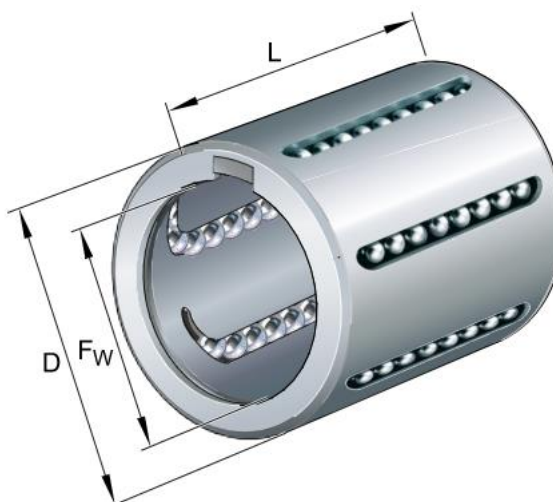
Como mostra a figura 15, com o estudo desse projeto, foi detectada a necessidade de melhorar a sua estrutura com a isenção de rolamentos em algumas partes moveis e o melhor posicionamento dos engastes onde as réguas são fixadas.

Figura 16- Rolamento KH2030



Fonte: Autoria própria

Figura 17- Dimensões do rolamento KH2030



Fonte: (ROLAMENTOS 2019)

O projeto para melhoria da bancada experimental consiste em adicionar rolamentos do tipo linear KH2030 com medidas de $F_w: 20\text{mm} \times D: 28\text{mm} \times L: 30\text{mm}$, como mostra a figura 17, para servir de guia do suporte superior da bancada, a fim de melhorar o deslizamento entre a estrutura da bancada e o suporte, garantindo maior segurança nos resultados.

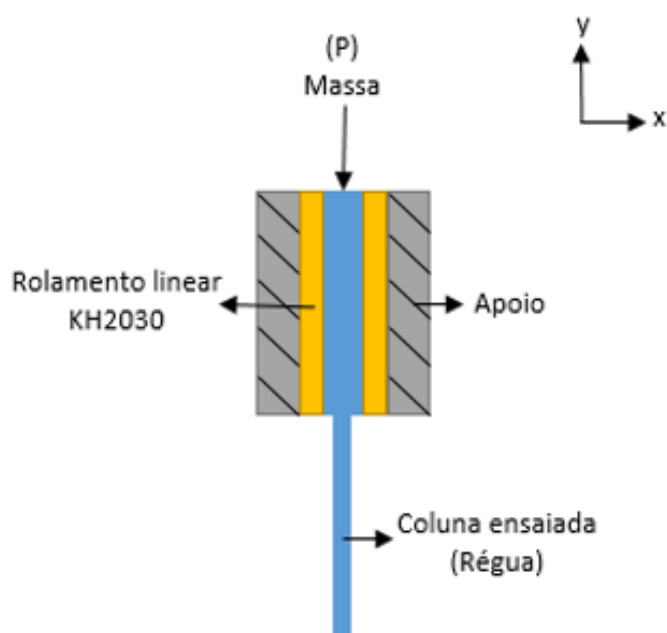
Os rolamentos lineares foram escolhidos para servir como guia do suporte e fazer com que o mesmo se movimente sempre de forma linear e com menor coeficiente de atrito, oferecendo mais precisão ao sistema, outro ponto forte dos rolamentos lineares são a fácil instalação e lubrificação, tornando o sistema mais acessível para o público que irá utilizá-lo. Geralmente os rolamentos lineares são constituídos por dois cilindros, um interno e um externo, e corpos rolantes que podem ser esferas ou rolos, e para o melhoramento da bancada o rolamento usado foi o de esfera.

Uma parte essencial para o correto funcionamento da bancada são suas relações de apoio, na bancada estão dispostas quatro configurações de apoio diferentes. A primeira consiste em apoios livres superior e engastado inferior, a segunda configuração é pino superior e inferior, a terceira é engastada superior e inferior, e a quarta configuração consiste no engaste na parte inferior e articulada na parte superior. Estes apoios precisam ser melhorados para que quando o sistema for carregado se comporte da maneira como planejada.

6 RESULTADOS

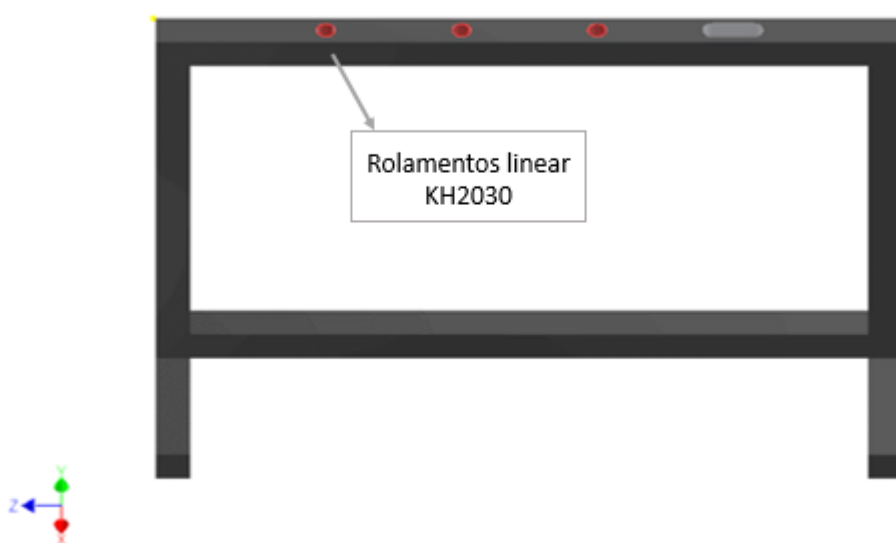
A figura 18 mostra um esquema de instalação dos rolamentos lineares na bancada, com eles o sistema tem um melhor rendimento e os resultados práticos iram ser mais próximos dos teóricos, visto que o sistema terá um pequeno índice de atrito.

Figura 18 – Esquema de instalação do rolamento linear KH2030



Fonte: Autoria própria

Figura 19 – Bancada com rolamentos posicionados

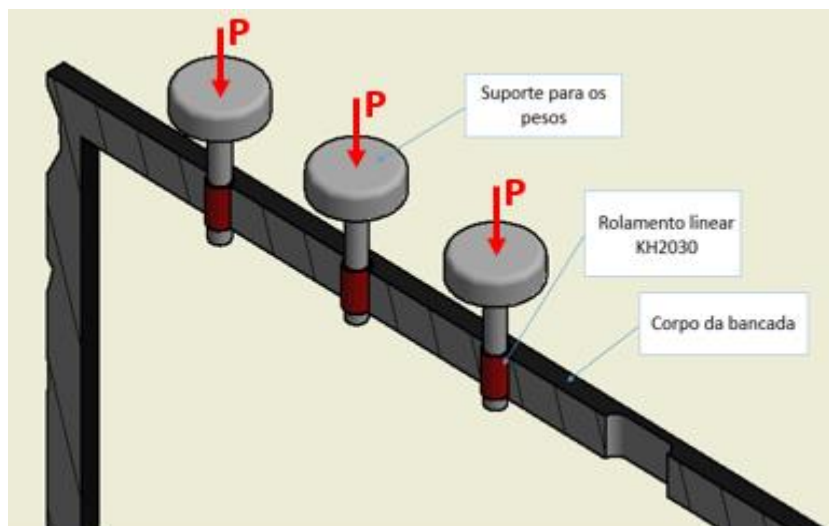


Fonte: Autoria própria

Os rolamentos lineares KH2030 destacados em vermelho na figura 19 devem ser

posicionados de forma que facilitem o deslizamento do suporte na estrutura da bancada, diminuindo o índice de atrito entre as duas partes moveis e assim garantir melhores resultados nos experimentos, além de servir como guia para que o suporte faça sempre uma trajetória linear quando os pesos forem inseridos.

Figura 20 – Detalhe do posicionamento dos rolamentos na bancada



Fonte: Autoria própria

Rolamentos simples também poderiam ser escolhidos para diminuir o índice de atrito, porém seria necessário realizar adaptações para que os mesmos fossem fixados na bancada, o que iria dificultar a instalação e manutenção do sistema.

7 CONCLUSÃO

Com base nas soluções apresentadas, conclui-se que é viável executar as modificações propostas na bancada de ensaio de flambagem, uma vez que são necessárias alterações apenas na região dos mancais de apoio através da adaptação com uso dos rolamentos propostos.

Todas as melhorias propostas tiveram como único fim a diminuição do atrito durante a flambagem.

Tendo em vista contribuir de forma positiva com a universidade, um material didático consiste em atingir tanto a metodologia do professor, quanto o aprendizado dos alunos, sendo assim, de suma importância novos mecanismos para que a universidade melhore ainda mais sua capacidade de formar ótimos profissionais.

8 TRABALHOS FUTUROS

- Utilizar os novos rolamentos para realizar ensaios e comparar com os da primeira versão da máquina.
- Utilizar a máquina em ensaios com geometria da barra modificada
- Utilizar sensores para mensurar deslocamentos laterais das barras.

9 REFERÊNCIAS

- AMORIM, Maurício José. **Desenvolvimento de Bancada Didático-Experimental de Baixo Custo para Aplicações em Controle Ativo de Vibrações**. 2006. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/264102/1/Amorim_MauricioJose_M.pdf>. Acesso em: 31 out. 2018.
- BEER, Ferdinand Pierre; JOHNSTON JR, E. Russel. **Resistência dos materiais**. 3 ed. São Paulo: Pearson Makron books, 1995.
- CAMPOS, Eduardo Felipe de. *Análise numérica e experimental de flambagem em cilindros de paredes finas*. 2017.
- HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 7 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- JONES, R. M. *Buckling of bars, plates, and shells*. Bull Ridge Corporation, 2006.
- MELCONIAN, Sarkis. **Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais**. 10^a edição. São Paulo: Editora Érica, 2000.
- OLIVEIRA, J.C.A., **Estimativa do índice global de esbeltez de edifícios altos de concreto armado**. Dissertação de mestrado em estrutura, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 1998.
- PINHEIRO, Fabio Luiz dos Reis. **A Fórmula de Euler**. 2016. 74 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016. Disponível em: <<http://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/A-F%C3%93RMULA-DE-EULER.pdf>>. Acesso em: 09 nov. 2018.
- VITORINO, Ilkenne Cassio Rodrigues. **PROJETO: BANCADA EXPERIMENTAL DIDÁTICA DE FLAMBAGEM**. 2018. 59 f. TCC (Graduação) - Curso de Bacharel em Ciência e Tecnologia, Ufersa, Caraúbas, 2018.

BOESCH JÚNIOR, Paulo Ricardo et al. Estudo do efeito da rugosidade superficial sobre o coeficiente de atrito no ensaio de compressão do anel. **Estudos Tecnológicos em Engenharia**, Porto Alegre, p.2-2, 1 out. 2012.

ROLAMENTOS lineares. 2019. Disponível em:
<<https://medias.schaeffler.com/medias/pt!hp.ec.br/KH..-PP>>. Acesso em: 24 mar. 2019.