



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO – UFERSA
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS – CMPF

JOSÉ URBANO GONÇALVES DE MACÊDO JÚNIOR

**ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADOS À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO
LINEARES**

PAU DOS FERROS – RN
2017

JOSÉ URBANO GONÇALVES DE MACÊDO JÚNIOR

**ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADOS À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO
LINEARES**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profa. Dra. Náthalee Cavalcanti de Almeida Lima

Co-orientador: Prof. Me. Francisco Carlos Gurgel da Silva Segundo

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

M141a Macedo Junior, Jose Urbano Goncalves.
Algoritmos Genéticos aplicados à solução de
equações não lineares / Jose Urbano Goncalves
Macedo Junior. - 2017.
42 f. : il.

Orientadora: Dra. Náthalee Cavalcanti de
Almeida Lima.

Coorientador: Me. Francisco Carlos Gurgel da
Silva Segundo.

Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2017.

1. Algoritmos Genéticos. 2. Equações não
lineares. 3. Método de Newton. I. Cavalcanti de
Almeida Lima, Dra. Náthalee, orient. II. Carlos
Gurgel da Silva Segundo, Me. Francisco, co- orient.
III. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOSÉ URBANO GONÇALVES DE MACÊDO JÚNIOR

**ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADOS À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO
LINEARES**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semiárido como requisito
para obtenção do título de Bacharel em
Ciência e Tecnologia.

Aprovado em: 20/10/2017

BANCA EXAMINADORA

Náthalee Cavalcanti de Almeida Lima
Profa. Dra. Náthalee Cavalcanti de Almeida Lima (UFERSA)
Presidente

Francisco Carlos Gurgel da Silva Segundo
Prof. Me. Francisco Carlos Gurgel da Silva Segundo (UFERSA)
Membro Examinador

Mônica Paula de Sousa
Prof. Me. Mônica Paula de Sousa (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre está ao meu lado, me guiando, me fortalecendo, proporcionando vitórias e mostrando que quando acreditamos em nossa capacidade e nele confiamos, no final, tudo se torna realidade.

Ao meu pai José Urbano, minha mãe Lucilene e a minha irmã Layla Gonçalves por sempre estarem comigo em todos os momentos da minha vida, por nunca terem deixado de acreditar em mim, pelas forças que me davam quando eu já não tinha mais nada e por fazerem de tudo por mim. É por vocês que eu estou aqui!

À toda a minha família e em especial aos meus Avós e minha tia Francisca que foram, em muitos momentos, como uns pais para mim.

A todos os meus professores que contribuíram para a minha formação de forma exemplar, sempre motivando e mostrando dedicação com a profissão.

De modo especial quero agradecer a minha orientadora Profa. Dra. Náthalee Cavalcanti de Almeida Lima, exemplo de profissional, disciplinada e objetiva em tudo o que faz e ao meu co-orientador Prof. Me. Francisco Carlos Gurgel da Silva Segundo, pela calma, força, tranquilidade e conhecimento a mim repassados.

Aos meus amigos que deixei no Piauí, mas que mesmo de longe sempre me incentivaram e me deram forças para ir atrás dos meus sonhos. Em especial, ao grupo Veldri. Vocês são os melhores.

Aos meus companheiros de curso pelos momentos vividos e compartilhados durante três anos. Em especial, à Rosângela por sempre estar ao meu lado em todos os momentos, por sempre me incentivar a ser uma pessoa melhor e me fazer acreditar que tudo iria dar certo. Amizades permanecerão.

RESUMO

Diariamente nos deparamos com problemas que possuem certa complexidade. Funções utilizadas para representar tais problemas reais são, em sua maioria, equações não lineares. Estas equações requerem maior atenção, pois muitas vezes, uma pequena alteração nos dados iniciais ou truncamentos realizados durante sua resolução, acabam levando a um resultado totalmente distante da solução esperada. Desta forma, o estudo de equações não lineares é de suma importância não só para a Matemática, mas para qualquer área que necessite representar dados reais através de funções. Para a resolução destas equações, utilizam-se geralmente os métodos iterativos, tais como o método de Newton, método da Secante, método da Bissecção, entre outros. Contudo, estes métodos podem apresentar problemas de convergência levando a resultados inesperados. O presente trabalho apresenta a aplicação de Algoritmos Genéticos como um método de resolução alternativo para este tipo de equação. Além disso, realiza-se também um estudo comparativo deste método com o método de Newton a fim de demonstrar a eficiência do Algoritmo Genético mesmo em equações que apresentam problemas de convergência no método de Newton.

Palavras chave: Equações não lineares, Algoritmos Genéticos, Método de Newton.

ABSTRACT

Every day we come across problems that have a certain complexity. Functions to represent such real problems are, for the most part, non-linear equations. These equations require more attention, because often a small amount in the initiated data or truncations realized during its resolution, end up leading to a result totally distant from the expected solution. In this way, the study of nonlinear equations is very important, not only for mathematics, but for any area that needs to represent real data through functions. For the solution of these equations is generally used iterative methods such as the Newton method, Secant method, Bisection method and others. However, these methods may present convergence problems leading to unexpected results. The present work presents the application of Genetic Algorithms as an alternative resolution method for this type of equation. In addition, a comparative study of this method is carried out with the method of Newton to demonstrate the efficiency of the Genetic Algorithm even in equations that present problems of convergence in Newton's method.

Keywords: Nonlinear equations, Genetic Algorithms, Newton's method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Passos simplificados de um algoritmo genético em diagrama.....	17
Figura 2.2 – Nomenclatura	18
Figura 2.3 – Método da roleta	19
Figura 2.4 – Método do Torneio.....	20
Figura 2.5 – Cruzamento em um ponto	21
Figura 2.6 – Cruzamento em dois pontos	21
Figura 2.7 – Cruzamento uniforme	22
Figura 2.8 – Mutação.....	23
Figura 3.1 - Representação gráfica dos zeros de uma função	24
Figura 3.2 – Situações com função f contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$	25
Figura 3.3 – Situações com função f contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) > 0$	26
Figura 3.4 – Representação gráfica do método de Newton-Raphson.....	28
Figura 3.5 - Interpretação geométrica do método da Secante	29
Figura 3.6 - Representação gráfica do método da Bissecção.	30
Figura 3.7 - Método da bisseção.....	31
Figura 4.1 – Gráfico da função $f(x)$	34
Figura 4.2 – Gráfico de convergência para raiz de $f(x)$ obtido com o algoritmo genético na execução 1	36
Figura 4.3 – Resultados gráficos da solução da equação não linear de três variáveis.....	39

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Isolamento das raízes	26
Tabela 4.1 – Análise de sinal de $f(x)$	33
Tabela 4.2 – Análise de sinal de $f'(x)$	33
Tabela 4.3 – Dados iniciais para resolução do exemplo 1.....	35
Tabela 4.4 – Resultados obtidos com o Algoritmo genético	35
Tabela 4.5 – Resolução pelo método de Newton	37
Tabela 4.6 – Resultados de $f(x)$ obtidos pelo método de Newton.	37
Tabela 4.7 – Dados iniciais para resolução do exemplo 2.....	38
Tabela 4.8 – Resultados da solução da equação não linear de três variáveis	38

SUMÁRIO

1	CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO.....	10
1.1	PROBLEMATIZAÇÃO	12
1.2	JUSTIFICATIVA	13
1.3	OBJETIVOS	15
1.3.1	GERAL	15
1.3.2	ESPECÍFICOS.....	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	15
2	CAPÍTULO 2: ALGORITMOS GENÉTICOS.....	16
2.1	INTRODUÇÃO	16
2.2	DEFINIÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS	16
2.3	NOMENCLATURA	17
2.4	SELEÇÃO	18
2.5	CRUZAMENTO.....	20
2.6	MUTAÇÃO	22
3	CAPÍTULO 3: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES	24
3.1	INTRODUÇÃO	24
3.2	ISOLAMENTO DAS RAÍZES	25
3.3	MÉTODOS ITERATIVOS.....	27
3.3.1	CRITÉRIOS DE PARADA DOS MÉTODOS.....	27
3.3.2	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	27
3.3.3	MÉTODO DA SECANTE	29
3.3.4	MÉTODO DA BISSEÇÃO	30
4	CAPÍTULO 4: RESULTADOS E DISCUSSÕES	32
4.1	INTRODUÇÃO	32
4.2	ISOLAMENTO DAS RAÍZES PARA O EXEMPLO 1	33
4.3	SOLUÇÃO DO EXEMPLO 1 ATRAVÉS DO ALGORITMO GENÉTICO	34
4.4	SOLUÇÃO DO EXEMPLO 1 PELO MÉTODO DE NEWTON	37
4.5	RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 2 PELO ALGORITMO GENÉTICO	38
5	CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO.....	40
	REFERÊNCIAS.....	41

1 CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

A Inteligência Artificial (IA) é uma das ramificações de pesquisa da Ciência da Computação, que tem por base a criação de sistemas computacionais inteligentes, ou seja, sistemas onde o seu funcionamento se assemelhe ao raciocínio humano, tendo como intuito final, a otimização e resolução de problemas na vida real (FERNANDES, 2003).

Assim, a principal finalidade da IA é levar o raciocínio e conhecimento humano para sistemas computacionais. Para tal, há uma série de metodologias empregadas, tais como os Algoritmos Genéticos (AG). Os AG se baseiam na evolução natural, postulada por Charles Darwin tendo como principal objetivo a otimização de problemas e a busca por soluções ótimas. Desta forma, ela é capaz de encontrar soluções para problemas da vida real que seriam considerados bastante trabalhosos ou complexos (LINDEN, 2012).

Esta técnica constitui-se basicamente de três etapas: seleção, cruzamento (*crossover*) e mutação. Primeiramente, é definido o espaço de busca (onde irá buscar as possíveis soluções do problema) e então gerada uma população inicial de maneira aleatória que seriam as possíveis candidatas a solução. Na seleção, o algoritmo escolhe uma porcentagem de indivíduos da população (possíveis soluções) que estão mais adaptados, no qual estes serão mantidos para participarem da próxima geração, e o restante é descartado. No cruzamento, os indivíduos que foram mantidos irão gerar novos indivíduos (filhos) através do cruzamento entre dois cromossomos pais, e estes, poderão sofrer novas mudanças através da mutação. Assim, estas etapas serão repetidas até que a melhor solução (solução ótima) seja encontrada, obtendo então, os indivíduos melhores adaptados (pontos ótimos) (LAHOZ-BELTRA, 2016).

As equações não lineares são funções que não podem ser resolvidas apenas com operações aritméticas, tais como subtração, soma, multiplicação e divisão. Elas estão presentes no nosso dia a dia, podem ser encontradas em diversas áreas e podem ser utilizadas para representar dados e problemas reais. Para sua resolução são, geralmente, utilizados os métodos iterativos tais como método da Bissecção, método da Posição Falsa, método do Ponto Fixo, método de Newton-Rapson, método da Secante, entre outros. Contudo, nem sempre é possível determinar as soluções através destes métodos, devido a deparar-se com problemas de convergência em algumas funções (RIBEIRO, 2012).

Desta forma, a resolução de equações não lineares é um estudo bastante abordado na Ciência e Engenharia. Na maioria dos processos utilizados para sua resolução, o processo é considerado bastante lento e a taxa de convergência baixa. Dentre os métodos citados, o método

mais recomendado para a solução destas equações, é o método de Newton (POURRAJABIAN *et al.*, 2013).

Diante da limitação dos métodos citados acima, o Algoritmo Genético (AG) surge como forma alternativa para solução destes problemas. A equação não linear é transformada numa função objetivo com o uso de manipulações elementares, e a partir daí o algoritmo genético é utilizado para minimizar ou maximizar a função e convergir para uma solução ótima ou solução aproximadamente ótima dentro de um intervalo estabelecido (POURRAJABIAN *et al.*, 2013).

1.1 PROBLEMATIZAÇÃO

Problemas em que os erros se propagam de maneira mais significativa são denominados de problemas mal condicionados. O cálculo de raízes de equações não lineares é um problema relevante na Ciência e Engenharia devido aos seus resultados serem, muitas das vezes, mal condicionados, resultante de erros devido a aproximações e aos truncamentos que necessitam ser realizados durante a resolução do problema. Ou seja, são sistemas onde uma pequena mudança nos coeficientes de uma equação, geram alterações significantes no seu resultado (JUSTO *et al.*, 2017).

Além disso, têm-se problemas de convergência quando utilizados alguns métodos iterativos tradicionais. Estes problemas podem levar a uma solução totalmente distante do resultado esperado. Outro ponto a se destacar é que muitas vezes a solução de equações não lineares por estes métodos podem ser bem complexas, devido ao cálculo de algumas derivadas, resultando assim, em maior perda de tempo.

Desta forma, é necessária uma maior atenção e tempo ao se trabalhar com sistemas não lineares, pois devem ser apurados com o máximo de precisão possível. Portanto, a implementação de AG para determinar zeros de equações não lineares mostra-se como uma alternativa bastante satisfatória, pois a partir daí, pode-se determinar, dentro de um intervalo pré-estabelecido, uma solução ótima para estas equações de maneira rápida e eficaz, devido aos processos iterativos tradicionais muitas vezes não garantirem isto.

Assim, fica nítida a importância dos AG para a determinação de raízes em equações não lineares, pois a partir deles é possível obter soluções que podem apresentar problemas de convergência nos métodos tradicionais e também a utilização deles para solução de equações com mais de uma variável.

1.2 JUSTIFICATIVA

Os AG vem sendo aplicados em diversas áreas, principalmente em problemas de busca e otimização. Eles são geralmente empregados à problemas com várias restrições ou condições incapazes de serem retratadas matematicamente e com grandes espaços de busca (LINDEN, 2012).

No trabalho de Theodoro, Peretta e Yamanaka (2016), foi aplicado os AG ao problema de reserva de salas de aula da Universidade Federal de Uberlândia. Este é um problema considerado um tanto trabalhoso devido à responsabilidade de alocar um número finito de salas, para um número também finito de aulas em diferentes espaços de tempo, respeitando diversas restrições e preferências. Esta atividade pôde ser tratada por uma ferramenta baseada em AG, onde foi obtido como resultado uma diminuição em 75% do esforço dos administradores de espaços para realizar tal tarefa. Assim, a atividade que levava meses para ser realizada, pôde ser desenvolvida em menos tempo e com menos esforços.

Martins e Silva (2017) realizaram a aplicação de algoritmos genéticos na resolução do problema de rodízio de tripulações do sistema de transporte público urbano. Este problema dá-se em atribuir uma sequência de jornadas de trabalho aos funcionários de uma empresa, com o intuito de minimizar seus custos totais. O problema foi dividido em duas etapas, onde a primeira consistiu em gerar os padrões de folga e a segunda consistiu em alocar as jornadas que devem ser realizadas por cada tripulação. Estas etapas foram realizadas aplicando um AG e comparadas à escala utilizada anteriormente pela empresa. Foi obtido como resultado um menor número de tripulação (55%) para execução das rotas, e menor quantidade de horas extras e ociosas no período de trabalho, resultando então em uma minimização de gastos.

Já Souza (2003) utilizou AG na identificação de tumores cerebrais. Seu trabalho consta de uma investigação de um método já utilizado (*snakes*) em conjunto com AG. Como resultado do seu trabalho, obteve-se a comprovação da eficiência do AG, obtendo resultados mais rápidos e soluções mais adequadas, quando comparadas com as realizadas sem o AG.

Diver (1999) aplicou AG à solução de equações diferenciais ordinárias. O algoritmo genético solucionou as equações de forma semelhante ao aplicado neste trabalho, através de um mecanismo de busca pelas melhores soluções de um conjunto inicialmente estimado. Como resultado do seu trabalho, foi mostrado que os AG eram capazes de solucionar tanto equações lineares como equações não lineares.

Portanto, visto a importância, as diversas possibilidades de aplicação dos AG e os problemas de convergência encontrados nos métodos iterativos tradicionais, a realização deste

trabalho dá-se pelo intuito de realizar um estudo acerca desta área, e com isso, aplicá-los na obtenção de zeros de equações não-lineares, visando poder contribuir e apregar futuramente os conceitos aqui adquiridos em diversas áreas do conhecimento.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 GERAL

- Desenvolver e apresentar a aplicação de algoritmos genéticos na determinação de soluções de equações não lineares;

1.3.2 ESPECÍFICOS

- Aprender a manipular o *software* MatLab;
- Desenvolver um AG para busca de solução ótima de equações não lineares;
- Entender como funciona e como manipular um algoritmo genético;
- Aplicar os conceitos de algoritmo genético na área da Matemática;
- Avaliar o desempenho do algoritmo genético na busca pela solução ótima.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No Capítulo 1 apresenta-se uma breve introdução acerca dos Algoritmos Genéticos e equações não lineares.

O Capítulo 2 aborda um maior aprofundamento sobre Algoritmos Genéticos, discutindo as etapas iniciais e as etapas de seleção, cruzamento e mutação. Assim como os principais métodos utilizados em cada etapa.

O Capítulo 3 trata-se de uma introdução acerca de equações não lineares e os principais métodos iterativos utilizados para sua resolução.

O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos na resolução de equações não lineares através do Algoritmo Genético e através do método de Newton.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais do trabalho.

2 CAPÍTULO 2: ALGORITMOS GENÉTICOS

2.1 INTRODUÇÃO

A Inteligência Artificial (IA) trata-se de uma área da ciência, onde seu desenvolvimento possui inspiração na Natureza e na inteligência humana (LINDEN, 2012). Seu surgimento deu-se no verão de 1956 no Dartmouth *College* em Hanover, New Hampshire, USA, durante um seminário que durou dois meses, contando com a atuação de 10 participantes (RUSSELL E NORVIG, 2013).

O desenvolvimento da IA tenta assemelhar-se ao pensamento humano, permitindo ao computador solucionar problemas de forma inteligente, onde a intervenção humana seja mínima. Com o passar do tempo, a IA foi evoluindo e ganhando técnicas também inspiradas na natureza, porém, com algumas peculiaridades. Dentre elas, pode-se destacar as Redes Neurais Artificiais inspiradas nos neurônios biológicos, os Algoritmos Genéticos inspirados na evolução biológica, e os Sistemas Especialistas inspirados na inferência humana (LINDEN, 2012; PACHECO, 1999).

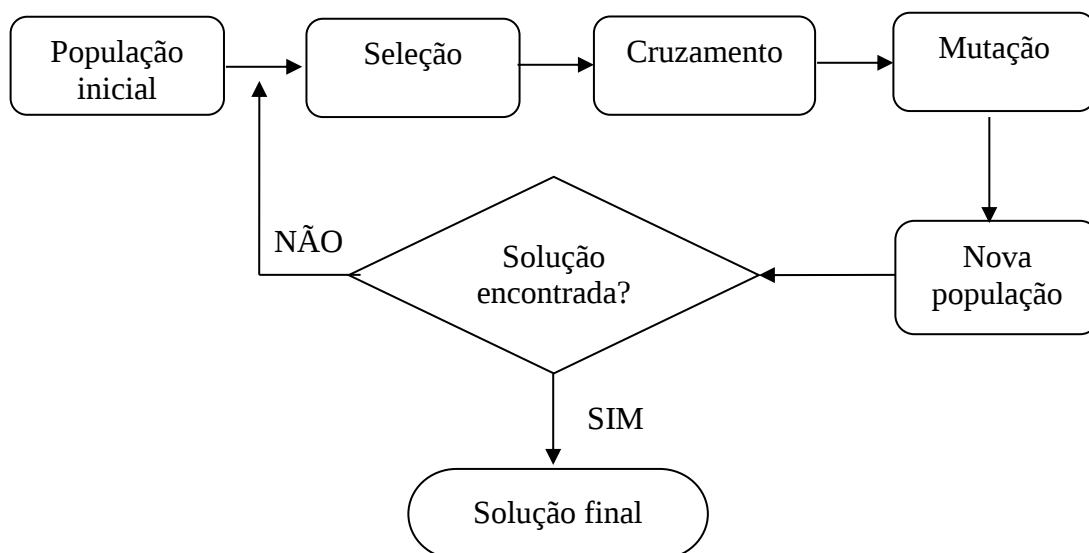
2.2 DEFINIÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS

Os Algoritmos Genéticos (AG) são uma das ramificações da inteligência artificial e foram inicialmente propostos pelo professor da Universidade de Michigan, nos Estados Unidos da América, John Holland (1975). Esses algoritmos tratam de métodos de busca e otimização que vem sendo amplamente estudados e aplicados em diversas áreas, tais como química, elétrica, automotiva, entre outras. Sua lógica foi baseada na seleção natural postulada por Darwin e em mecanismos genéticos presentes nos organismos. De forma mais sucinta, são algoritmos baseados na evolução natural e evolução genética (RUSSELL E NORVIG, 2013).

Para obter a solução, durante o seu processo de busca, os algoritmos genéticos executam as seguintes etapas: seleção, cruzamento (*crossover*) e mutação, na qual em cada geração, os indivíduos são avaliados por uma função de aptidão (função *fitness*), permanecendo apenas os mais adaptados, que seriam as possíveis soluções do problema (BARRA, 2007; GIUDICE; PAOLA E FORTE, 2017). Estas soluções são armazenadas em matrizes que são denominadas de cromossomos, o número de variáveis do problema são denominados de gene e, cada elemento do gene, de alelo. Geralmente, o algoritmo apresenta um conjunto inicial de possíveis

soluções que são gerados aleatoriamente (LAHOZ-BELTRA, 2016). A Figura 2.1 apresenta um esquema de como se dá os passos de um algoritmo genético.

Figura 2.1 – Passos simplificados de um algoritmo genético em diagrama.



Fonte: Adaptado de N ia *et al.* (2013)

Os AG podem ser utilizados tanto para espaços discretos como para espaços contínuos. Assim, possuem menor dependência do ponto do espaço onde inicia-se a busca. Isso decorre do fato dele ser um método iterativo, ou seja, realizam diversas buscas pelas melhores soluções e findam-se apenas quando atinge o seu critério de parada. Além disso, não fazem estimativa de continuidade e diferenciabilidade acerca da função a ser utilizada, tornando assim um método bastante versátil em vários domínios. Desta forma, encontram-se na família dos métodos de otimização globais (BARRA, 2007).

2.3 NOMENCLATURA

Os AG utilizam uma nomenclatura específica, baseada na biologia, para tratar os seus dados. Desta forma, deve-se deixar claro os seus conceitos para quem deseja usar este método (BARRA, 2007).

Cromossomos: têm também chamados de indivíduos, são as possíveis soluções do problema.

População: conjunto de cromossomos, onde eles irão passar pelos processos de seleção, cruzamento e mutação.

Geração: cada ciclo completo de seleção, cruzamento e mutação.

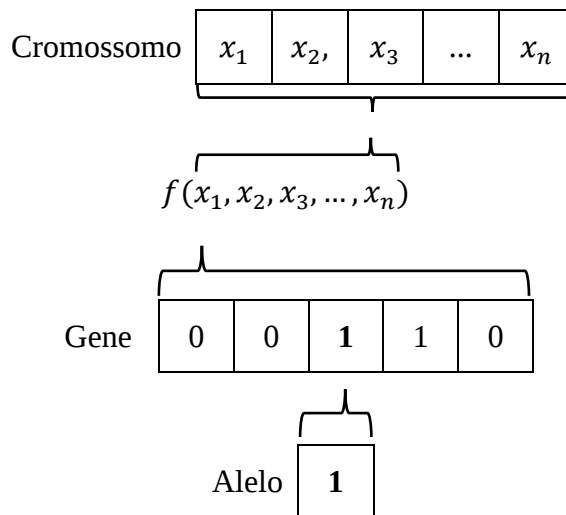
Gene: o gene representa um valor dentro da possível solução do problema, que seria por exemplo, o valor de x_1 , conforme Figura 2.2.

Alelo: o alelo representa a parte mais “simples”, seria uma posição do vetor binário.

Pais ou genitores: cromossomos escolhidos no processo de *crossover* para passar parte do seu código genético para novos cromossomos, os filhos.

A Figura 2.2 a seguir exemplifica melhor a nomenclatura.

Figura 2.2 – Nomenclatura



Fonte: Autoria própria (2017).

Como pode ser observado na Figura 2.2, o gene, e consequentemente o cromossomo, está representado com valores de zeros e uns (forma binária), contudo, a representação do AG depende de sua aplicação, mas usualmente utiliza-se em grande escala a forma binária, concebida por Holland (1975), mas pode-se encontrar diversos trabalhos onde tem-se o ponto flutuante como forma de representação (BARRA, 2007).

Na forma binária, o gene é codificado em vetores binários de zeros e uns (0, 1). Define-se o tamanho fixo para o gene, ou comprimento m do gene, de acordo com a precisão requerida para o problema (BARRA, 2007).

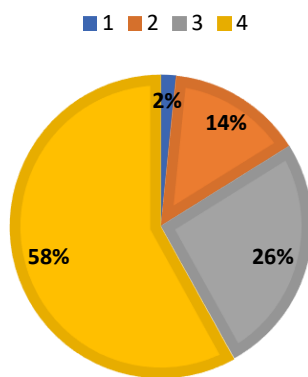
2.4 SELEÇÃO

A seleção corresponde à etapa onde serão selecionados os indivíduos para a reprodução (cruzamento). Cada gene será analisado de acordo com o seu valor de aptidão. Este valor é dado a partir da função *fitness* ou função de aptidão, no qual os indivíduos com maior valor, tendem a sobreviver e passar o seu material genético para as gerações futuras. Já os indivíduos com os menores valores, tendem a ser descartados da população, assemelhando-se ao processo de seleção natural. Para realizar esta etapa existem diversos métodos, onde destacam-se dois, são

eles: método da roleta e o método do torneio (PACHECO, 1999; KRAUS E FERNANDES, 2010).

O método da roleta é o mais utilizado. Nele, seus indivíduos são organizados em uma roleta de acordo com os valores da função de aptidão, na qual, quanto maior seu valor, maior será o espaço que ele irá ocupar na roleta. A seleção dos indivíduos é feita de forma aleatória, onde a cada rodada (a quantidade de rodadas depende do tamanho da população necessária), seleciona-se um indivíduo. Este método garante chegar mais rápido à uma solução. O método pode ser melhor entendido pela Figura 2.3, onde para exemplificar, foi utilizado uma função *fitness* $f(x) = x^2$. Assim, o valor da fração ocupado por cada indivíduo é calculado pelo quociente entre o valor *fitness* de cada indivíduo pela soma total dos valores (BARRA, 2007; LINDEN, 2012).

Figura 2.3 – Método da roleta



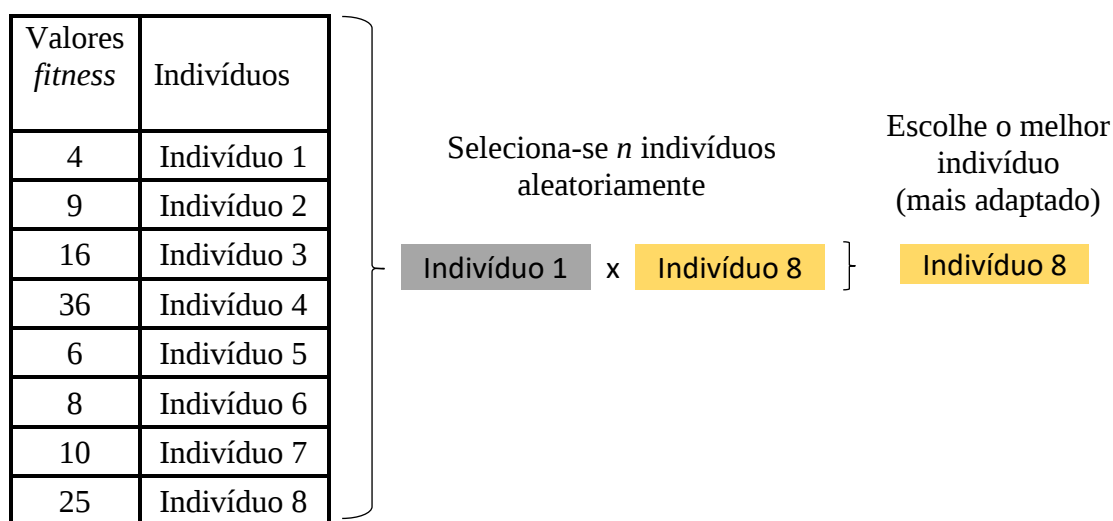
Número	Indivíduo	<i>Fitness</i>	Pedaço da roleta (%)
1	0001	1	1.61
2	0011	9	14.51
3	0100	16	25.81
4	0110	36	58.07
Total		62	100

Fonte: Adaptado de Linden (2012); Souza (2003).

No método do torneio, é criada uma subpopulação de n cromossomos, onde seus indivíduos são escolhidos de forma aleatória. Ao realizar a escolha, estes indivíduos irão realizar disputas entre si, no qual o cromossomo com maior valor *fitness* vence o torneio e será selecionado para a reprodução. A quantidade de torneios a serem realizados depende da quantidade requerida de indivíduos para reproduzirem-se. Neste método, a diversidade da população é maior que no método da roleta e os cromossomos com baixos valores *fitness* possuem maior probabilidade de serem escolhidos.

O método pode ser melhor entendido pela Figura 2.4, onde na exemplificação, tem-se que foi escolhida aleatoriamente uma subpopulação de 2 cromossomos. O indivíduo 8 é o vencedor devido possuir o maior valor de *fitness* em relação ao outro indivíduo escolhido para o torneio (BARRA, 2007; PACHECO, 1999; SOUZA 2003).

Figura 2.4 – Método do Torneio



Fonte: Adaptado de Barra (2007)

O método de seleção utilizado para este trabalho foi o método da roleta devido ser o método mais utilizado na implementação de algoritmos genéticos, não só isso, mas também pelo fato de poder chegar mais rápido à solução do problema.

2.5 CRUZAMENTO

Também chamado de *crossover* ou reprodução, esta etapa consiste na criação de um par de novos indivíduos (filhos) a partir de um par de cromossomos genitores (pais). Neste processo, será combinado parte de informações de um indivíduo com outra parte de outro indivíduo, gerando um novo indivíduo (filho), assemelhando-se ao processo de reprodução de genes em células. Ou seja, serão escolhidos pares de cromossomos, de acordo com sua aptidão, que irão gerar pares de novos indivíduos, seus descendentes. Os descendentes diferenciam-se dos seus genitores, mas possuem material genético dos dois. Dentre os tipos de operadores de cruzamento existentes, destacam-se três, são eles: cruzamento em um ponto, dois pontos e uniforme (BARRA, 2007; GIUDICE; PAOLA E FORTE, 2017; SOUZA, 2003).

O cruzamento em um ponto é o operador de cruzamento mais simples e consiste em selecionar aleatoriamente um ponto de corte no qual a parte da esquerda de um dos cromossomos pai, vai para um filho, e a outra parte (à direita), vai para o outro filho. O primeiro descendente é composto pela concatenação da parte à esquerda do primeiro pai com a parte à direita do segundo pai. O segundo descendente é composto pela concatenação das partes que sobraram, ou seja, a parte esquerda do segundo pai com a parte direita do primeiro pai. O método pode ser melhor exemplificado pela Figura 2.5, onde G1 e G2 representam os genitores

1 e 2, respectivamente, e D1 e D2 representam os descendentes 1 e 2, respectivamente (BARRA, 2007; PACHECO, 1999).

Figura 2.5 – Cruzamento em um ponto

	Ponto de corte aleatório					
G1	1	1	1	0	0	0
G2	0	0	0	1	0	0
D1	1	1	1	1	0	0
D2	0	0	0	0	0	0

Fonte: Adaptado de Pacheco (1999)

No cruzamento em dois pontos, serão escolhidas duas posições de corte aleatoriamente nos cromossomos pais. Os filhos serão gerados pela combinação das partes, sendo o primeiro filho gerado pela junção das partes da extremidade do primeiro pai, com a parte central do segundo pai. O segundo filho é gerado pela junção das partes restantes, ou seja, as partes da extremidade do segundo pai, com a parte central do primeiro. O método pode ser melhor exemplificado pela Figura 2.6 (LINDEN, 2012; MARTINS E SILVA, 2017).

Figura 2.6 – Cruzamento em dois pontos

	Pontos de corte aleatórios					
G1	1	1	1	0	0	0
G2	0	0	0	1	0	0
D1	1	1	0	1	0	0
D2	0	0	1	0	0	0

Fonte: Adaptado de Pacheco (1999).

No cruzamento uniforme, cada bit do cromossomo filho tem a possibilidade de sofrer influência do pai 1 ou do pai 2, e esta influência irá depender de uma espécie de padrão. Assim, para cada bit do cromossomo filho, é realizada uma escolha de qual genitor contribuirá. Por exemplo, se o valor padrão for 0, escolhe-se o bit do genitor 2 para o filho 1 e o bit do genitor

1 para o filho 2. Já se o valor padrão for 1, escolhe-se o bit do genitor 1 para o filho 1 e o bit do genitor 2 vai para o filho 2 (BARRA, 2007; PACHECO, 1999). A Figura 2.7 exemplifica melhor o método de cruzamento uniforme.

Figura 2.7 – Cruzamento uniforme

Padrão	1	0	0	1	1	0
G1	1	1	1	0	0	0
G2	0	0	0	1	0	0
D1	1	0	0	0	0	0
D2	0	1	1	1	0	0

Fonte: Adaptado de Martins e Silva (2017).

O método utilizado neste trabalho foi o cruzamento em um ponto. A escolha deste método se deu por ser um método mais simples de aplicação e por também proporcionar bons resultados.

2.6 MUTAÇÃO

Esta etapa tem como objetivo aumentar a diversidade da população. Nela, os cromossomos filhos poderão sofrer uma mudança no seu código genético de acordo com a probabilidade de mutação fixa (p_m) inicialmente e a probabilidade de mutação gerada aleatoriamente (p_{mr}). Assim, esta etapa dá-se da seguinte forma: caso o número gerado aleatoriamente entre 0 e 1 for menor que p_m , inverte-se o bit do cromossomo filho de 0 para 1 ou vice-versa, (BARRA, 2007; PACHECO, 1999; MARTINS E SILVA, 2017).

A Figura 2.8 exemplifica melhor a etapa de mutação, onde no cromossomo com valor de probabilidade randômica menor que a probabilidade fixada inicialmente, houve alteração no seu bit.

Figura 2.8 – Mutação

	$p_m = 0,1$					
p_{mr}	0,5	0,2	0,005	0,3	0,12	0,22
Indivíduo	1	1	1	0	0	0
Novo Indivíduo	1	1	0	0	0	0

Fonte: Adaptado de Martins e Silva (2017).

Neste capítulo foram tratadas as etapas de seleção, cruzamento e mutação de um algoritmo genético. Não só isso, mas também foram apresentadas algumas desvantagens e vantagens na utilização dos Algoritmos Genéticos, um pouco da sua história e como surgiu e vocabulário específico utilizado.

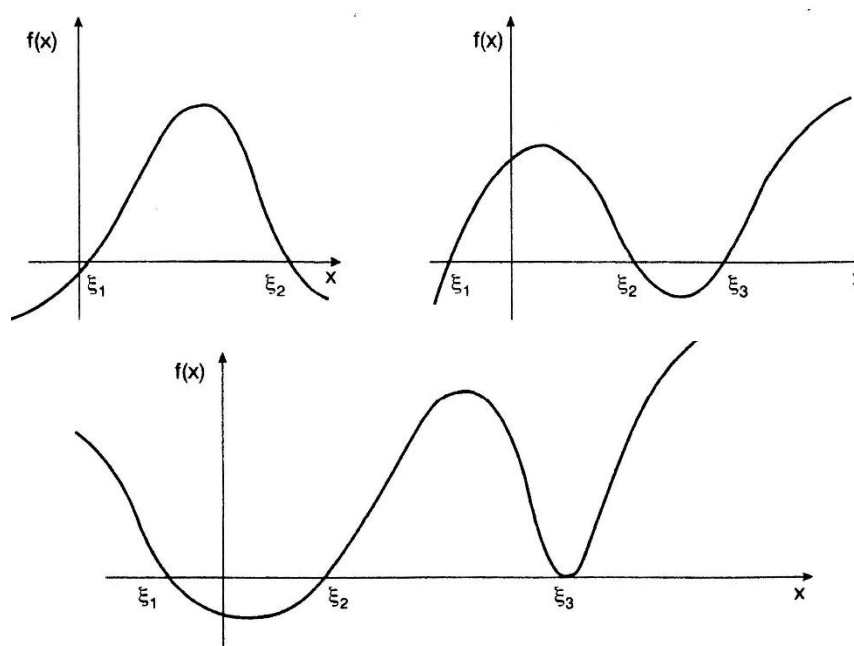
3 CAPÍTULO 3: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

3.1 INTRODUÇÃO

Equações usadas para representar problemas e dados reais são, em sua maioria, equações não lineares. Equações não lineares são problemas, em geral, quase impossíveis de se resolver apenas com operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação, divisão e comparação. Nos deparamos constantemente com estes tipos de problemas, envolvendo uma grande quantidade de restrições e certo grau de complexidade na sua resolução, e para isto, necessitamos de uma grande quantidade de tempo e atenção. Desta forma, o estudo e a criação de métodos ou modelos numéricos para resolução deste tipo de problema vem crescendo constantemente (ALMEIDA, TEIXEIRA E ROCHA, 2013; RIBEIRO, CÂMARA E SILVA NETO, 2015; SOUZA, 2015).

As equações não lineares não apresentam fórmulas explícitas e podem, ou não, convergir para uma solução desejada, dependendo do valor ou intervalo inicial adotado. Sua solução é quase impossível de ser determinada analiticamente e costuma-se fazer a utilização de métodos numéricos iterativos para determinar os zeros da função. O zero de uma função $f(x)$ ou raiz de uma equação $f(x) = 0$ nada mais é do que um número real ξ , tal que $f(\xi) = 0$ (RUGGIERO E LOPES, 1996). Os zeros de uma função são representados graficamente pelos pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas, sua representação gráfica é dada pela Figura 3.1.

Figura 3.1 - Representação gráfica dos zeros de uma função



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

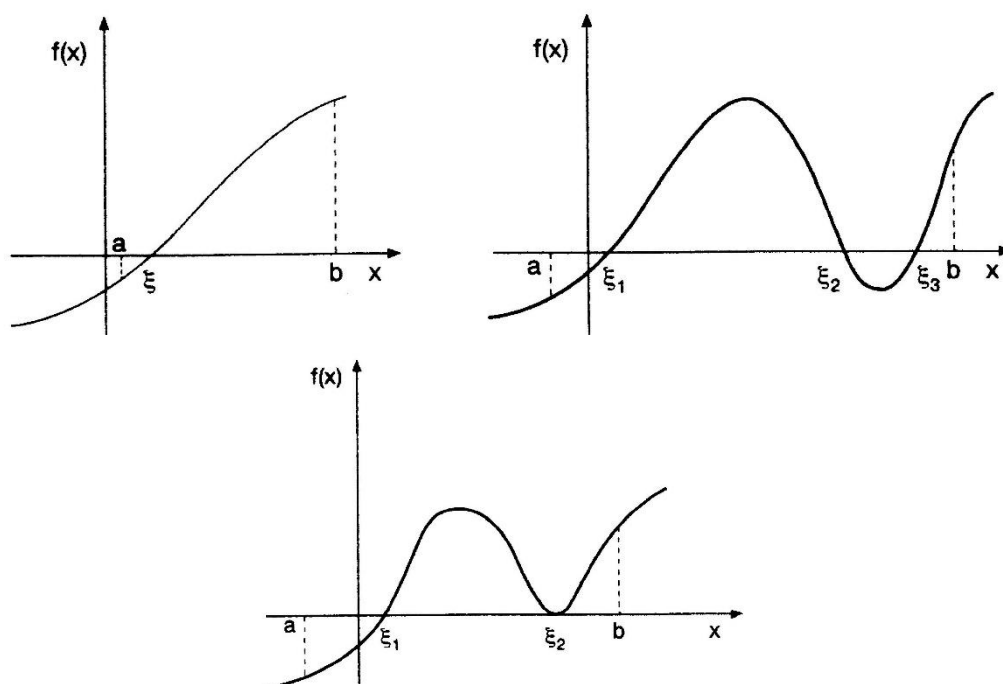
Os métodos iterativos são utilizados para chegar à uma aproximação da solução do problema, visto que a solução exata é quase impossível, daí parte-se de uma aproximação inicial para a raiz e passa-se a refiná-la. Estes métodos são utilizados para solucionar problemas em diversas áreas, tais como: Engenharia, Física, Administração, Transporte, entre outras (ALMEIDA, TEIXEIRA E ROCHA, 2013). Dentre os métodos existentes, destacam-se os métodos de Newton Raphson, método da Secante e o método da Bissecção. Todos formados pela localização das raízes (isolamento) seguido de seu refinamento.

3.2 ISOLAMENTO DAS RAÍZES

Seja $f(x)$ uma função contínua qualquer. Para se obter um intervalo fechado $[a, b]$ que contenha pelo menos uma raiz da equação, necessita que se faça uma análise gráfica e teórica da função. Para a análise gráfica, realiza-se o esboço do gráfico da função e localiza-se os pontos onde a curva intercepta o eixo das abscissas.

Para a análise teórica utiliza-se o teorema do valor intermediário, no qual diz que: seja $f(x)$ uma função contínua num intervalo $[a, b]$, se $f(a) \cdot f(b) < 0$ existe pelo menos uma raiz da equação entre a e b como mostra a Figura 3.2. Porém, se $f(a) \cdot f(b) > 0$ não podemos afirmar o contrário, pois podem haver várias situações dentro do intervalo como mostra a Figura 3.3 (RUGGIERO E LOPES, 1996).

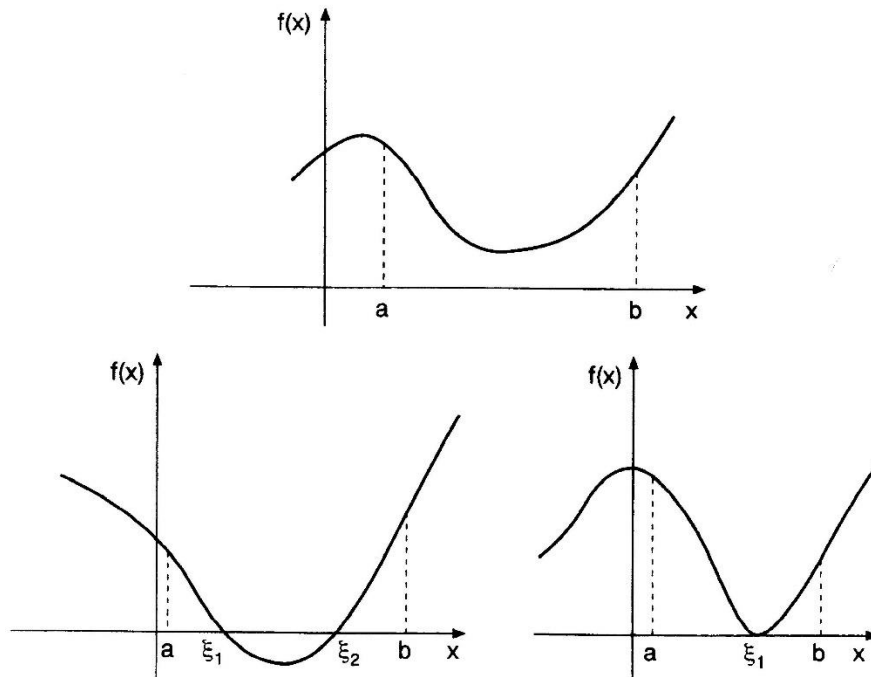
Figura 3.2 – Situações com função f contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

A partir da Figura 3.3 pode ser observado que ao aplicar os valores do intervalo e multiplica-los, obtém-se um resultado positivo, contudo, pode ou não haver raízes dentro deste intervalo.

Figura 3.3 – Situações com função f contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) > 0$



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

Visto o teorema anterior, para saber se a raiz é única dentro do intervalo, analisa-se $f'(x)$ onde, se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo x pertencente a $[a, b]$ a raiz é única. O estudo teórico apresentado pode ser melhor entendido pelo exemplo 1 e a Tabela 3.1.

Exemplo 1: considerando a função f dada por

$$f(x) = x^3 - 9x + 3,$$

e construindo uma Tabela de valores para $f(x)$ considerando os sinais obtidos ao substituir os valores de x , tem-se:

Tabela 3.1 – Isolamento das raízes

x	-100	-10	-5	-3	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-999097	-907	-77	3	11	3	-5	-7	3	31	83
Sinal	-	-	-	+	+	+	-	-	+	+	+

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

Como o exemplo utilizado é uma função de terceiro grau, tem-se 3 raízes, e como encontramos 3 intervalos, para cada intervalo tem-se uma única raiz. As unicidades destas raízes podem ser confirmadas ao realizar o estudo dos sinais para $f'(x)$, onde ao aplicar os valores de $[a, b]$ encontrado em $f'(x) = 3x^2 - 9$, tem-se que $f'(x)$ preserva o sinal para todo x pertencente ao intervalo.

3.3 MÉTODOS ITERATIVOS

3.3.1 CRITÉRIOS DE PARADA DOS MÉTODOS

É necessário estabelecer um critério de parada para as iterações visto que um método iterativo tem instruções (algumas) repetidas em ciclos até atingir um resultado próximo o suficiente do esperado. (RUGGIERO E LOPES, 1996) Para isso, adota-se uma precisão (ε) que, em geral, é um número bem pequeno. Esta precisão é inicialmente fixada e utiliza-se um dos critérios a seguir como parada (SILVA, 2011).

- 1) Análise da função: $|f(x_i)| < \varepsilon$;
- 2) Erro absoluto: $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$;
- 3) Erro relativo: $\left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| < \varepsilon$;
- 4) Limites do intervalo: $\left| \frac{b-a}{2} \right| < \varepsilon$;
- 5) Número de iterações.

Assim, para obter zeros de funções através destes métodos, tem-se uma aproximação inicial da raiz da função que irá passar por várias etapas completando um ciclo, no qual inicia-se novamente este ciclo (iteração) sempre que não atingir o critério de parada ou um resultado suficientemente menor que a precisão (ε).

3.3.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

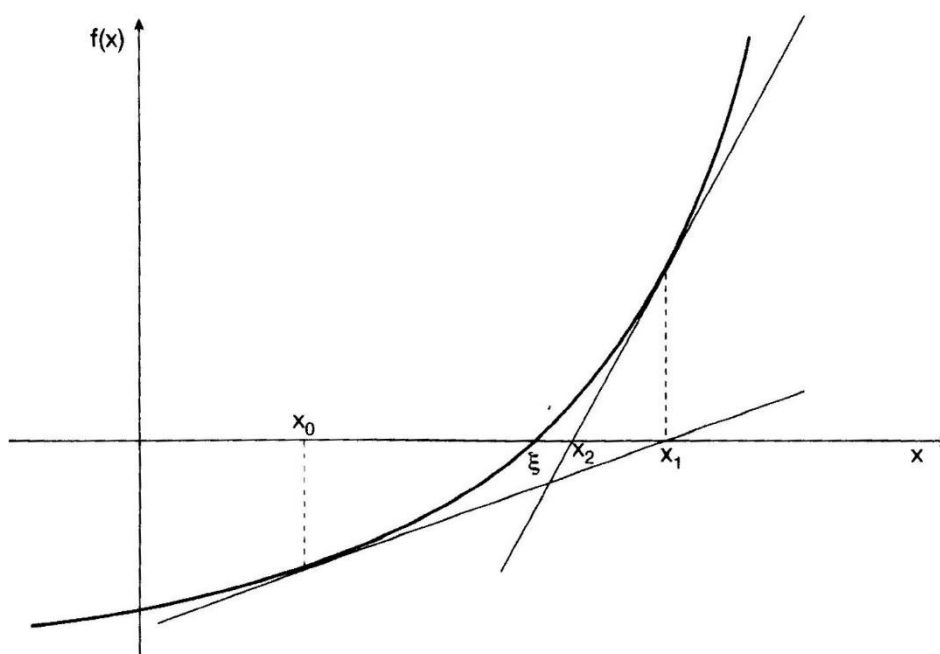
Também conhecido apenas como método de Newton, é o método mais utilizado necessitando que se conheça um intervalo inicial $[a, b]$ que contenha uma possível solução do problema e que a função f a ser analisada seja contínua neste intervalo. Necessita-se também que seja determinada a precisão (ε) que deseja encontrar a solução do problema, o que funcionará como critério de parada para as iterações. Quanto mais o valor inicial ou o intervalo

estiverem próximos da possível solução, maiores serão as chances de convergência e menor será o tempo gasto (ELIAS *et al.*, 2016). Os valores das aproximações de x para a raiz (ξ) da função são dados pela equação 3.1:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3.1)$$

O método de Newton pode ser melhor entendido a partir da sua representação gráfica na Figura 3.4, onde o valor de x_{i+1} é obtido através de uma aproximação inicial x_i . A reta tangente intercepta a função $f(x)$ no ponto $(x_i, f(x_i))$ e, a cada iteração, a reta vai convergindo para a raiz da equação.

Figura 3.4 – Representação gráfica do método de Newton-Raphson



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

Segundo Machado e Alves (2013) para a convergência à uma raiz no intervalo $[a, b]$ no método de Newton, é necessário que $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, $f''(a) \cdot f''(b) < 0$ sejam satisfeitos.

Este foi o método escolhido para comparação com as soluções obtidas pelos Algoritmos Genéticos. A escolha deste método dá-se em razão de ser o mais utilizado para solução de equações não lineares, sua fácil aplicação e melhores resultados quando comparado aos outros métodos citados aqui neste trabalho.

3.3.3 MÉTODO DA SECANTE

O método da secante possui uma vantagem em relação ao método de Newton. No método da secante não é necessário calcular a derivada da função e nem calcular o seu valor numérico a cada iteração (PILLING, 2007). Contudo, são necessárias duas aproximações iniciais para as raízes. Desta forma, para obter a equação de recorrência de x para o método da Secante, substitui-se a derivada da função presente no método de Newton pela equação (3.2):

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.2)$$

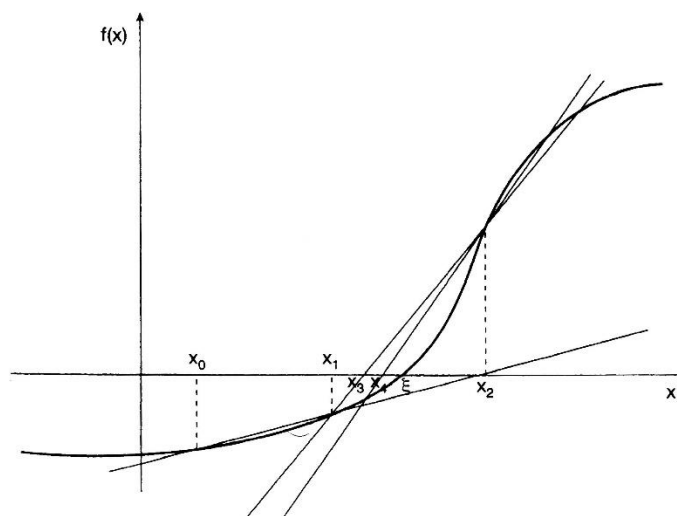
onde x_i e x_{i-1} são possíveis soluções para a equação e raízes iniciais.

Ao realizar as substituições, a fórmula recorrente para este método pode ser resumida na seguinte equação:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \quad (3.3)$$

O método pode ser melhor entendido pela Figura 3.5, onde apresenta a interpretação geométrica do método. Na Figura, pode ser observado que o ponto x_{i+1} é obtido a partir de outras duas aproximações conhecidas (x_{i-1} e x_i). É possível observar também que a reta secante passa pelo ponto localizado por estas aproximações e seus respectivos valores de y . Assim, a reta secante intercepta os pontos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $(x_i, f(x_i))$. Logo, o valor de x_{i+1} é o ponto da abscissa onde a reta secante intercepta o eixo ox (PILLING, 2007).

Figura 3.5 - Interpretação geométrica do método da Secante



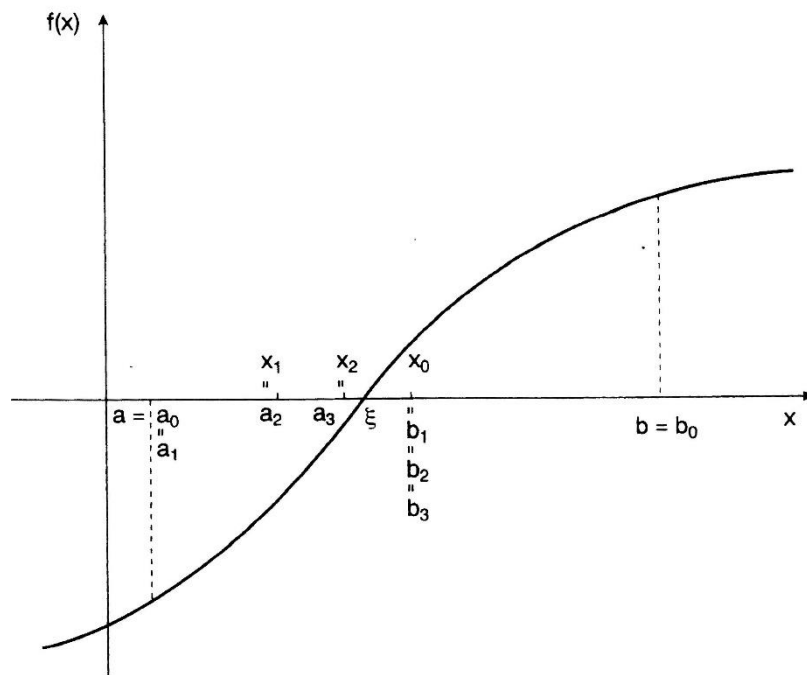
Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

3.3.4 MÉTODO DA BISSEÇÃO

Assim como os métodos anteriores, a função $f(x)$ necessita ser contínua no intervalo $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$. O método funciona da seguinte maneira: divide-se o intervalo a cada iteração com o intuito de diminuir a sua amplitude até chegar na precisão estabelecida inicialmente. Assim, este método irá gerando valores de x cada vez mais próximos da raiz, convergindo para a raiz do problema (PILLING, 2007).

O método pode ser melhor entendido pela sua representação gráfica na Figura 3.6, onde pode-se perceber que a amplitude do intervalo vai diminuindo e o valor de x vai convergindo até aproximar-se da raiz da equação.

Figura 3.6 - Representação gráfica do método da Bissecção.



Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

As iterações deste método seguem a seguinte lógica (Figura 3.7):

Figura 3.7 - Método da bisseção

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{a_0 + b_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{array} \right. \\
 x_1 &= \frac{a_1 + b_1}{2} \left\{ \begin{array}{l} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{array} \right. \\
 x_2 &= \frac{a_2 + b_2}{2} \left\{ \begin{array}{l} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{array} \right. \\
 &\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot \\
 &\quad \cdot \qquad \qquad \qquad \cdot
 \end{aligned}$$

Fonte: Ruggiero e Lopes (1996).

Assim, o valor de x_{i+1} é o ponto médio do intervalo gerado por x_i e b_i tal que $f(b_i)$ tenha sinal oposto ao de $f(x_i)$. Uma desvantagem, conforme Ruggiero e Lopes (1996), é ter uma convergência muito lenta.

4 CAPÍTULO 4: RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 INTRODUÇÃO

Para a realização desta seção, foi utilizada a ferramenta de programação MatLab para implementação do código do algoritmo genético e duas funções que apresentam certo grau de dificuldade na obtenção dos zeros de sua equação a partir dos métodos numéricos citados neste trabalho. Desta forma, para o desenvolvimento da aplicação, foi realizada uma etapa de definições iniciais do AG e as etapas de seleção, cruzamento e mutação, de acordo com o diagrama de blocos da Figura 2.1.

Para a etapa de definições iniciais foram definidos alguns parâmetros, tais como o intervalo em que estará contida a solução, a precisão com que se deseja encontrar a raiz da equação, a quantidade da população inicial, a probabilidade de mutação fixa, a quantidade de variáveis e o critério de parada das iterações, assim como foi discutido no Capítulo 2 e 3 deste trabalho.

Para a implementação da etapa de Seleção foi aplicado o método da roleta. Na etapa de cruzamento foi utilizado o cruzamento em um ponto, e na etapa de Mutação, foi adotada uma probabilidade de mutação fixa igual a 0,01.

O exemplo 1 é uma função não linear de uma única variável x que apresenta certa dificuldade na sua resolução através dos métodos tradicionais. Para este caso, primeiramente foi encontrado o intervalo que contém uma possível solução da função. Em seguida, utilizou-se este intervalo para encontrar a solução através do Algoritmo Genético e através do método de Newton. Ao fim, foi realizada uma análise entre as soluções encontradas nos métodos.

Desta forma, o primeiro passo realizado foi o isolamento das raízes, assim como foi visto na seção 3.2 deste trabalho, esta etapa consiste em encontrar os intervalos em que estão contidas as raízes da equação. Este intervalo encontrado será utilizado tanto para a resolução pelo Algoritmo Genético, quanto para a resolução pelo método de Newton.

Já no exemplo 2 desta seção, foi utilizada uma função com três variáveis (x, y, w) afim de demonstrar a aplicação do algoritmo genético. Neste caso, por ser uma função de três variáveis o intervalo foi definido aleatoriamente e não foi realizada comparação com o método de Newton, pois tem-se como intuito apenas demonstrar sua aplicação para funções com mais de uma variável.

4.2 ISOLAMENTO DAS RAÍZES PARA O EXEMPLO 1

Exemplo 1. Dada a seguinte função $f(x) = e^{-x^2} \cos(3,5 \pi x)$, para $f(x) = 0$. Foi realizado o estudo dos sinais (Tabela 4.1), e a partir dele, foi possível perceber que ao substituir os valores $[0,85, 1,1]$ na função, obtém-se valores de $f(x)$ com sinais opostos, o que nos indica que neste intervalo há a existência de pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$, como foi visto na seção 3.2 deste trabalho. Assim, adotou-se o intervalo $[a, b]$ como sendo $[0,85, 1,1]$.

Tabela 4.1 – Análise de sinal de $f(x)$

x	0,5	0,7	0,85	1,1	1,2	1,25	1,3	1,35
$f(x)$	0.5507	0.0958	-0.4840	0.2657	0.1917	0.0802	-0.0289	-0.1050
Sinal	+		-		+		+	

Fonte: Autoria própria (2017).

Após ser escolhido o intervalo que existe pelo menos uma raiz da equação, deve-se analisar se a raiz é única dentro do intervalo, e para isto verifica $f'(x)$. Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$ para todo x pertencente ao intervalo, a raiz é única. Assim, foi calculada a derivada da função como mostra a equação (4.1) e realizada a análise de sinal para $f'(x)$ (Tabela 4.2).

$$f'(x) = -2 e^{-x^2} x \cos(10,9956 x) - 10,99556 e^{-x^2} \sin(10,9956 x) \quad (4.1)$$

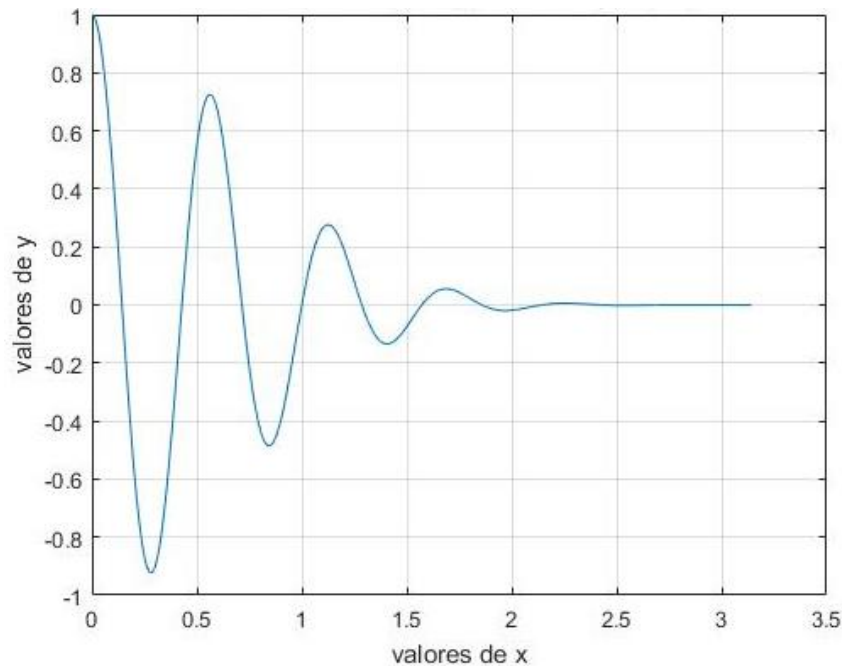
Tabela 4.2 – Análise de sinal de $f'(x)$

x	0,85	0,9	0,95	1	1,05	1,1
$f'(x)$	0.4041	2.9342	4.2048	4.0450	2.7486	0.9039
Sinal	+	+	+	+	+	+

Fonte: Autoria própria (2017).

Como o sinal de $f'(x)$ se conserva no intervalo escolhido, há uma única raiz.

Ao plotar o gráfico da função no MatLab (Figura 4.1) pode-se verificar que dentro do intervalo escolhido, possui realmente, apenas uma raiz.

Figura 4.1 – Gráfico da função $f(x)$ 

Fonte: Autoria própria (2017).

4.3 SOLUÇÃO DO EXEMPLO 1 ATRAVÉS DO ALGORITMO GENÉTICO

Para encontrar o zero da função utilizando algoritmo genético, necessita-se definir alguns valores iniciais. Desta forma, a precisão para as raízes deste problema foi definida para duas casas decimais e, a probabilidade de mutação fixa foi definida como 0.01 devido à maioria dos trabalhos utilizarem este valor, assim como foi dito na seção 2.6 deste trabalho.

O tamanho da população inicial foi fixado com o valor dez devido ter executado o algoritmo com uma menor população e não ter obtido resultados tão bons. O critério de parada utilizado foi ao atingir 2500 iterações (gerações). Há funções mais simples que podem ser utilizados valores bem menores, mas para este caso foi adotado 2500, pois foi possível obter bons resultados com este valor e demanda pouco tempo para realizar as iterações.

A função objetivo, função de adaptação ou função *fitness* é a função que avalia a probabilidade de sobrevivência de cada possível solução do problema. Em outras palavras, é uma função que quanto mais o x se aproximar da solução da equação $f(x) = 0$, maior será o valor de *fitness* do cromossomo. Estes conceitos foram melhor tratados nas seções 2.2 e 2.4 deste trabalho. Desta forma, tendo $f(x) = e^{-x^2} \cos(3,5 \pi x)$, a função *fitness* adotada para este exemplo foi $f_{fit}(x) = \frac{1}{e^{-x^2} \cos(3,5 \pi x)}$, pois quanto mais $f(x)$ se aproximar de zero, maior será o valor de $f_{fit}(x)$.

Para melhor entendimento desta etapa inicial, todos os dados iniciais definidos foram dispostos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Dados iniciais para resolução do exemplo 1

Intervalo [a,b]	Probabilidade de mutação fixa (p_m)	População inicial	Quantidade de gerações	Função $f(x)$	Função objetivo (função <i>fitness</i>)
[0,85, 1,1]	0,01	10	2500	$e^{-x^2} \cos(3,5 \pi x)$	$\frac{1}{e^{-x^2} \cos(3,5 \pi x)}$

Fonte: Autoria própria (2017).

Assim, ao ajustar os dados iniciais e as funções no algoritmo genético, foram realizadas 4 execuções escolhidas aleatoriamente, obtendo quatro aproximações para a raiz de $f(x)$, onde ao substituir o valor da raiz encontrada em cada caso, foi possível obter valores bem próximos de zero, o que demonstra a eficiência do método. Estes resultados são apresentados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Resultados obtidos com o Algoritmo genético

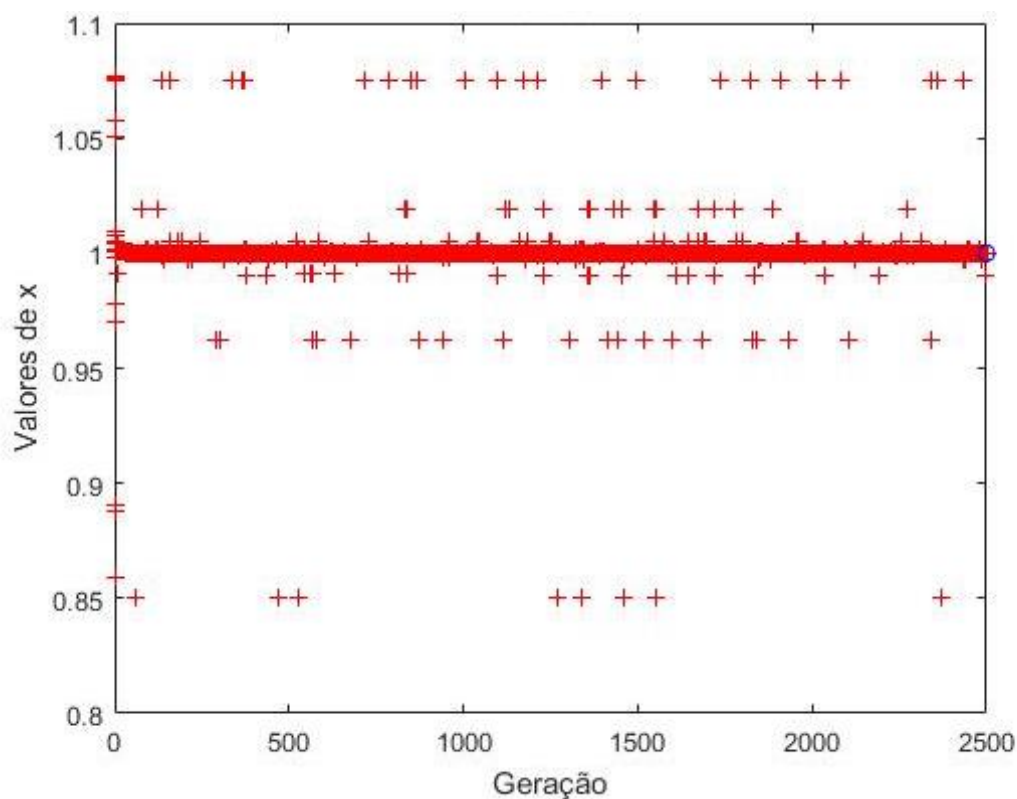
Execução nº	Número de gerações (iterações)	Valor de x (raiz da função)	$f(x)$
1	2500	1	$-0,1577 \cdot 10^{-15}$
2		1	$-0,1577 \cdot 10^{-15}$
3		1.0072	0.0286
4		0.9868	-0.0546

Fonte: Autoria própria (2017).

Na Figura 4.2 tem-se o gráfico de convergência para raiz de $f(x)$ obtido com o algoritmo genético na execução 1. A partir do gráfico é possível verificar que a raiz da função converge para o valor 1.

Na Figura 4.2, no eixo das abcissas (eixo x) tem-se o número de gerações e, no eixo das ordenadas (eixo y) tem o valor das possíveis soluções do problema (valores de x). A evolução da busca pelo zero da equação é representada pelo símbolo de “+” em vermelho e, a partir daí, é possível verificar que a solução convergiu para 1.

Figura 4.2 – Gráfico de convergência para raiz de $f(x)$ obtido com o algoritmo genético na execução 1



Fonte: Autoria própria (2017).

Ainda na Figura 4.2 é possível observar uma pequena desordem nos valores, principalmente nas primeiras gerações. Esta ocorrência pode ser explicada por inicialmente ser adotada uma população criada aleatoriamente que geralmente, são valores um pouco distantes da solução do problema. Ao passar pela primeira geração, estes valores vão sendo refinados pelas etapas do algoritmo genético, onde apenas as melhores soluções passarão para a próxima geração. Assim, ao passar das gerações, as possíveis soluções do problema irão convergindo para a solução ótima dentro daquele intervalo.

Alguns símbolos de “+” que estão bem distantes da linearidade das gerações também podem ser explicados pelas etapas de cruzamento ou de mutação. Nestas etapas, os códigos genéticos dos cromossomos são modificados afim de criar uma maior diversidade para a população, com o intuito de varrer o intervalo estudado e encontrar a solução ótima.

4.4 SOLUÇÃO DO EXEMPLO 1 PELO MÉTODO DE NEWTON

Para este método, foi definido uma tolerância (precisão) de $\varepsilon = 0,0003$ e adotado o erro relativo como critério de parada. Assim, quando o erro relativo for menor que a tolerância adotada, o critério de parada é atingido e a raiz é encontrada.

Para esta resolução, foram utilizados cinco valores de x_0 dentro do intervalo adotado. Este valor representa a aproximação inicial da raiz, é o valor inicial de onde parte as iterações. O intervalo utilizado para os valores iniciais de x_0 foi $[0,85, 1,1]$, definido anteriormente na seção 4.2. Os valores de x dispostos na Tabela 4.6 são os valores das raízes encontradas para $f(x)$ de acordo com cada x_0 inicialmente adotado.

Na Tabela 4.5 tem-se a resolução para o $x_0 = 0,85$. A resolução para os outros valores de x_0 seguem o mesmo raciocínio e todos os resultados estão representados na Tabela 4.6.

Tabela 4.5 – Resolução pelo método de Newton

i	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$	$f(x_i) = e^{-x_i^2} \cos(3,5 \pi x_i)$	$f'(x_i)$	Erro relativo
0	0,85	-0.4840	0.4041	
1	2.0478	-0.0131	0.1367	0.5849
2	2.1433	$4.9255 \cdot 10^{-5}$	0.1110	0.0445
3	2.1429	$4.7748 \cdot 10^{-6}$	0.1114	$2.0036 \cdot 10^{-4}$

Fonte: Autoria própria (2017).

Analisando a Tabela 4.6, é possível verificar a instabilidade do método de Newton, na qual uma pequena mudança no valor do x inicial causaram mudanças significativas na solução final do problema.

A raiz da equação deveria convergir para 1 (um) ou valores próximos de 1. Contudo, em apenas um dos casos ($x_0 = 0,9$) ocorreu a convergência para este valor.

Tabela 4.6 – Resultados de $f(x)$ obtidos pelo método de Newton.

x_0	0,85	0,86	0,88	0,9	1,1
x	2,1429	1,2857	0,4286	1,0000	0,7143
Erro relativo	0,0001997	$1,58353 \cdot 10^{-6}$	$6,9045 \cdot 10^{-8}$	$4,28066 \cdot 10^{-5}$	$5,03255 \cdot 10^{-5}$
Número de iterações	3	5	7	4	6

Fonte: Autoria própria (2017).

4.5 RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 2 PELO ALGORITMO GENÉTICO

Nesta seção é apresentada a solução de uma equação com três variáveis utilizando AG. Basta apenas realizar algumas alterações no código. A seguir tem-se um exemplo de resolução de equação com três variáveis.

Dada a seguinte função de três variáveis: $f(x, y, w) = e^x + y^2 + w^2 - 250$. Para $f(x, y, w) = 0$ foi definido o intervalo $[a, b]$ como $[3, 8]$, escolhido aleatoriamente.

Para encontrar o zero da função pelo algoritmo genético, necessita-se definir alguns valores iniciais. Desta forma, a precisão para as raízes deste problema foi definida para duas casas decimais e, a probabilidade de mutação fixa foi definida como 0.01. O tamanho da população inicial foi fixado como quatro e, o critério de parada utilizado foi ao atingir 2500.

Para melhor entendimento desta etapa inicial, todos os dados iniciais definidos foram dispostos na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Dados iniciais para resolução do exemplo 2

Intervalo $[a, b]$	Probabilidade de mutação fixa (p_m)	População inicial	Quantidade de gerações	Função $f(x)$	Função objetivo (função <i>fitness</i>)
[3, 8]	0,01	4	2500	$e^x + y^2 + w^2 - 250$	$\frac{1}{e^x + y^2 + w^2 - 250}$

Fonte: Autoria própria (2017).

Assim, aplicando o AG, foram obtidos os resultados contidos na Tabela 4.8, na qual pode ser verificado que, ao substituir o valor da raiz encontrada, foi obtido um valor bem próximo de zero, o que demonstra a eficiência do método.

Tabela 4.8 – Resultados da solução da equação não linear de três variáveis

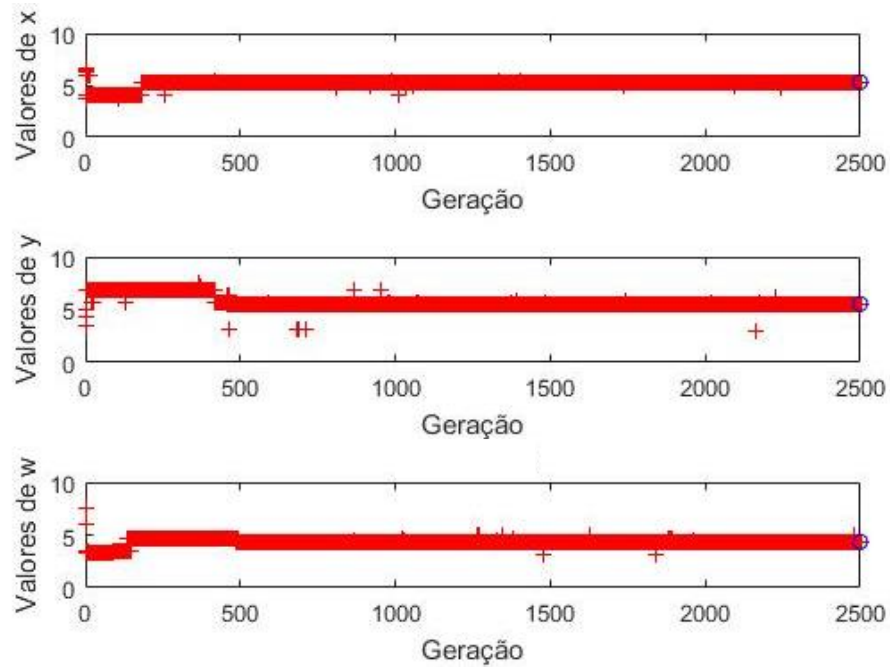
Número de gerações (iterações)	Valor de x	Valor de y	Valor de w	$f(x, y, w)$
2500	5.2994	5.5538	4.3601	0.0718

Fonte: Autoria própria (2017).

Na Figura 4.3 tem-se o gráfico de convergência para a raiz de $f(x, y, w)$ obtido a partir do algoritmo genético com 2500 gerações. Contudo, também foram realizadas execuções com valores inferiores de gerações. Porém, foi possível obter uma melhor solução com 2500 gerações, como pode ser percebido pela Figura 4.3. A partir do valor de 2000 gerações pode-se observar que a desordem nas aproximações das raízes se torna quase inexistente. Assim, a partir

deste gráfico é possível verificar que a raiz da função converge para os valores contidos na Tabela 4.8.

Figura 4.3 – Resultados gráficos da solução da equação não linear de três variáveis



Fonte: Autoria própria (2017).

5 CAPÍTULO 5: CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada a aplicação de algoritmos genéticos para a solução de equações não lineares e a sua comparação com o método de Newton. Para o seu desenvolvimento, foram realizadas as seguintes etapas: estudo prévio da técnica de algoritmos genéticos, estudo de soluções de equações não lineares, estudo do *software* MatLab utilizado como ferramenta de implementação e resolução do problema proposto.

A solução obtida pelo Algoritmo Genético no exemplo 1 deste trabalho foi bastante satisfatória. Seu resultado final foi obtido após 2500 iterações (estabelecidas no código) e teve duração de cerca de 30 segundos. Ao substituir o valor das raízes encontradas na equação, foi obtido valores bem próximos de zero, o que comprova a eficácia do método. Já ao tentar solucionar a mesma equação pelo método de Newton, pequenas mudanças no valor do x_0 inicial, causaram diferenças significativas nos resultados, comprovando assim a instabilidade do método para esta função. O algoritmo genético se apresentou com maior eficiência para este exemplo. Contudo, a utilização do método de Newton não deve ser descartada considerando que o mesmo pode encontrar soluções ótimas com poucas iterações para outros exemplos de funções.

A solução obtida neste trabalho para a equação com três variáveis também foi bastante satisfatória. O resultado final foi obtido após 2500 iterações com duração de cerca de 30 segundos. Ao substituir os valores das variáveis na função, foi obtido o valor de aproximadamente +0.0718, que é um valor bem próximo de zero e um erro consideravelmente pequeno para a finalidade deste trabalho.

Um dos parâmetros mais importantes a se destacar neste trabalho é a possibilidade de aplicação dos algoritmos genéticos, podendo abranger diversas áreas, tais como: Exatas, Saúde, Humanas, entre outras. Desta forma, os algoritmos genéticos se apresentam como um objeto importante de estudo, que dá ao aluno o poder de solucionar problemas de otimização em diversas áreas.

Assim, diante dos resultados obtidos com este trabalho é possível afirmar que os algoritmos genéticos se apresentam como uma alternativa bastante eficaz na busca de zeros de equações não lineares, visto que, foi possível verificar que o algoritmo genético conseguiu encontrar, de forma rápida e eficaz, a melhor solução para a equação dentro do intervalo pré-estabelecido e que, uma vez conhecido o intervalo das raízes, não é necessário realizar considerações de diferenciabilidade da equação para sua resolução.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, K. L., TEIXEIRA, M. T., ROCHA, R. A. **Aplicação de Algoritmos genéticos para ajuste de modelos regressores não lineares com grande número de parâmetros**. Anais V SIMPAC - Volume 5 - n. 1 - Viçosa-MG - p. 15-20, 2013.
- BARRA, T. V. **Um Ambiente Evolutivo para Apoio ao Projeto de Antenas de Microfita**. 2007. 120 f. Dissertação de Mestrado—Universidade Estadual de Campinas – UEC. Campinas-SP, 2007.
- DIVER, D. A. **Applications of genetic algorithms to the solution of ordinary differential equations**. 1999.
- ELIAS, R. W. D.; SILVA, R. M.; ALMEIDA, J. K. B.; VALADARES, D. C. **Comparação de métodos iterativos de resolução de equações não lineares implementados no octave**. Biblioteca Digital de Eventos Científicos da UFPR, I Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia, 2016.
- FERNANDES, A.M.R. **Inteligência Artificial: noções gerais**. Florianópolis, 2003.
- GIUDICE, A. V.; PAOLA, P D.; FORTE, F. **Using Genetic Algorithms for Real Estate**. 2017.
- JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F. SANTOS, M. C.; KONZEN, P. H. A. **Cálculo numérico - um livro colaborativo – versão com scilab**. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/numerico/livro/main.html>, 2017.
- KRAUS, H. M.; FERNANDES, A. M. R. **Ferramenta para ensino da técnica de raciocínio baseado em casos**. 2010.
- LAHOZ-BELTRA, R. **Quantum Genetic Algorithms for Computer Scientists**. Basel, Switzerland, 2016;
- LINDEN, R. **Algoritmos Genéticos** – 3ª ed. – Rio de Janeiro: Brasport, 2012
- MACHADO, I. A. ALVES, R. R. **Método de Newton**; Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia, Edição 4; (2013)
- MARTINS, L.; C. SILVA, G. P. **Aplicação de um algoritmo genético ao problema de rodízio de tripulações do sistema de transporte público urbano**. TRANSPORTES v. 25, n. 1, 2017. ISSN: 2237-1346 (online). DOI:10.14295/transportes.v25i1.1074, 2017.
- NÉIA, S. S. ARTERO, A.O. CANTÃO, L. A. P. CUNHA, C. B. **Roteamento de veículos utilizando otimização por colônia de formigas e algoritmo genético**. Meta-Heurísticas em Pesquisa Operacional, 2013;
- PACHECO, M. A. C. **Algoritmos Genéticos: Princípios e Aplicações**. ICA: Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada, 1999.
- PILLING, S. **Cálculo numérico**. Faculdade de Engenharia, arquitetura e urbanismo da UniVap (Universidade do Vale do Paraíba), são Jose dos Campos, SP, 2007.
- POURRAJABIAN, A. EBRAHIMI, R. MIRZAEI, M. SHAMS, M. **Applying genetic algorithms for solving nonlinear algebraic equations**. 2013;
- RIBEIRO, R. R. J. **Revisão bibliográfica de alguns métodos numéricos para obtenção de zeros reais de funções transcendentais e polinomiais**. 66 p. TCC (Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semiárido. Mossoró - RN, 2012.

RIBEIRO, M. A. C., CÂMARA L. D. T. SILVA NETO, A. J. S. **Validação do método estocástico r2w na obtenção de ótimos globais de funções não-lineares**, 2016.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Calculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

RUSSELL, S. J.; NORVIG, P. **Inteligência artificial**. Tradução: Regina Célia Simille. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2013.

SOUZA, A. M. **Identificação de tumores cerebrais por meio do modelo de contornos ativos e algoritmos genéticos**. Curitiba [Dissertação de mestrado em informática – UFPR], 2003.

SOUZA, E. A. **Métodos iterativos para problemas não lineares**. Dissertação de Mestrado, PPG-MCCT/UFF, 2015.

SILVA I. M. D. **Raízes de Equações Não-lineares**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte Departamento de Engenharia de Computação e Automação, 2011.

THEODORO, G. P., Peretta, I. S., Yamanaka, K. **Utilização de Algoritmos Genéticos para o Problema de Alocação de Salas da Universidade Federal de Uberlândia**. SBC ENIAC, 2016;