



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

JOSÉ BELARMINO DOS SANTOS NETO

**MODELAGEM E ANÁLISE DE DINÂMICA DE VOO PARA VANT
QUADRIRROTOR COM APLICAÇÃO DE CONTROLE PID**

PAU DOS FERROS - RN
OUTUBRO DE 2024

JOSÉ BELARMINO DOS SANTOS NETO

**MODELAGEM E ANÁLISE DE DINÂMICA DE VOO PARA VANT
QUADRIRROTOR COM APLICAÇÃO DE CONTROLE PID**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
a Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito parcial para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia de Computação.

Orientador: Prof. Dr. Petrucio Ricardo Tavares
de Medeiros.

PAU DOS FERROS - RN
OUTUBRO DE 2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S237m SANTOS NETO, JOSÉ BELARMINO DOS.
MODELAGEM E ANÁLISE DE DINÂMICA DE VOO PARA
VANT QUADRIRROTOR COM APLICAÇÃO DE CONTROLE PID /
JOSÉ BELARMINO DOS SANTOS NETO. - 2024.
74 f. : il.

Orientador: Petrucio Ricardo Tavares de
Medeiros.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia de
Computação, 2024.

1. Modelagem. 2. Análise. 3. Controle. 4.
VANT. 5. Sistema Embarcado. I. Medeiros, Petrucio
Ricardo Tavares de, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

JOSE BELARMINO DOS SANTOS NETO

**MODELAGEM E ANÁLISE DE DINÂMICA DE VOO PARA VANT
QUADRIROTOR COM APLICAÇÃO DE CONTROLE PID**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito parcial para obtenção do título de
Bacharel em Engenharia de Computação.

Defendida em: 25/10/2024.

BANCA EXAMINADORA

Petrúcio Ricardo Tavares de Medeiros, Prof. Dr (UFERSA)
Presidente

Pedro Thiago Valério de Souza, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Cecílio Martins de Sousa Neto, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelo dom da vida, pela força que me sustenta, pela luz que me guia.

Agradeço aos meus familiares, por todo suporte, amor e paciência.

Agradeço ao meu Professor e Orientador, Dr. Petrócio Ricardo, por sua paciência, dedicação e generosidade em compartilhar seu conhecimento e tempo em favor do desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço a Banca Examinadora por suas contribuições.

Agradeço a todos os professores do curso, que contribuíram significativamente para a minha formação e que tanto servem-me como fonte de inspiração.

Agradeço aos meus amigos, colegas de curso, que estiverem junto a mim durante toda a jornada.

A todos estes, dedico este trabalho.

"Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino."

Leonardo Da Vinci.

RESUMO

O estudo aplicado à modelagem e ao controle de sistemas dinâmicos, como em Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), promovem a inovação e estimulam o desenvolvimento em ciência e tecnologia. Entretanto, a ausência de teoria como base para o estudo prático de VANTs limita o aprendizado aplicado, comprometendo a equidade e o acesso igualitário a oportunidades educacionais nas áreas de engenharia e controle de sistemas. Neste trabalho, tratamos da modelagem matemática e análise de dinâmica de voo, bem como da aplicação de controle PID para um VANT quadricóptero. A modelagem matemática foi realizada com base em equações dinâmicas e matrizes de rotação, relacionando as velocidades angulares no referencial inercial e na estrutura da aeronave, enquanto que o controlador foi obtido através da análise do Lugar Geométrico das Raízes (LGR). Os resultados indicam que a modelagem e controle do sistema pode ser empregado em ambientes educacionais, promovendo o aprendizado prático de conceitos de robótica e controle de sistemas e contribuindo para o desenvolvimento de trabalhos que possam abordar a aplicação de controle e construção de VANTs.

Palavras-Chave: Modelagem, Análise, Controle, VANT, Sistema Embarcado.

ABSTRACT

Applied studies in modeling and control of dynamic systems, such as Unmanned Aerial Vehicles (UAVs), drive innovation and foster advancements in science and technology. However, the lack of foundational theory as a basis for practical UAV studies limits applied learning, affecting equity and equal access to educational opportunities in engineering and control systems. In this work, we address the mathematical modeling and dynamic analysis of flight, as well as the application of PID control for a quadrotor UAV. The mathematical modeling is based on dynamic equations and rotation matrices, relating angular velocities between the inertial frame and the aircraft structure, while the controller is designed through Root Locus analysis. The results indicate that the system's modeling and control can be used in educational environments, supporting hands-on learning of robotics and control concepts and enabling further work on UAV construction and control applications.

Keywords: Modeling, Analysis, Control, UAV, Embedded System.

LISTA DE FIGURAS

2.1	VANT militar em modelo de Asa Fixa.	21
2.2	VANT em modelo quadrimotor.	21
2.3	VANT em modelo hexacoptero.	22
2.4	exemplo de VANT em modelo híbrido.	22
2.5	VANT em modelo híbrido.	23
2.6	VANT Pelicano usado para pulverização.	25
2.7	Topologias Positiva e Cruzada em Quadricópteros.	28
2.8	Diagrama de corpo livre de um quadricóptero	29
2.9	<i>Roll, pitch</i> e <i>yaw</i> para os angulos de Euler	30
2.10	Diagrama de blocos geral para espaços de estados	37
2.11	Sensor giroscópio e acelerômetro MPU6050.	42
2.12	Dados para configuração de filtro passa-baixa no MPU6050.	43
2.13	Diagrama de planta com Controlador PID.	45
3.1	Motor E-MAX CF2822.	48
3.2	Esquema básico para o VANT.	49
3.3	Deslocamentos no voo pairado.	50
3.4	Velocidades nos eixos X e Z para voo pairado.	50
3.5	Voo somente no eixo Z	51
3.6	Velocidade nos eixos X e Z para o voo em Z	51
3.7	Deslocamentos nos eixos X e Y para voo em X	52
3.8	Velocidade nos eixos X e Z para o voo em X	52
3.9	Deslocamento nos eixos para o voo simultâneo em X e Y	53
3.10	Velocidade nos eixos para o voo simultâneo em X e Y	53
3.11	Deslocamento para voo em simultâneo X e Z com arrasto.	54
3.12	Velocidades para X e Y simultâneo com arrasto.	54
3.13	Diagrama básico da planta do VANT.	57
3.14	Diagrama da planta sem controle com TFs para translação em Z	58
3.15	LGR para a translação em z sem controle.	58
3.16	Resposta instável para a translação em z	59
3.17	LRG para a dinâmica de translação com controle em Z	59
3.18	Resposta ao degrau para a translação em Z com controle.	60
4.1	Resposta com controle simulada para translação em Z	61
4.2	Resposta com controle com adição de sinal degrau na estrada.	62
4.3	Resposta do sinal com controle ao sofrer um sinal degrau como distúrbio.	63
4.4	LGR do sistema sem controle para variação de velocidade linear em z	63
4.5	Resposta ao degrau do sistema sem controle para a variação linear da velocidade em z	64
4.6	Resposta simulada com controle para variação da velocidade linear em Z	65
4.7	Resposta com controle e adição de sinal degrau.	65
4.8	Resposta com controle após aplicação de sinal degrau como distúrbio.	66

4.9	LGR do sistema sem controle para o movimento de rolagem.	66
4.10	Resposta do sistema sem controle para o movimento de rolagem.	67
4.11	Resposta com controle para o movimento de rolagem.	68
4.12	Resposta simulada com controle para o movimento de rolagem.	68
4.13	Resposta do sistema com controle com adição de um degrau à entrada. . .	69
4.14	Resposta do sistema com controle com aplicação de um distúrbio.	69

LISTA DE TABELAS

2.1	Descrição das variáveis do sistema dinâmico	37
2.2	Comparação entre controladores PD e PI.	44
3.1	Comparação de trabalhos sobre controle e modelagem de VANTs.	47
3.2	Tabela de Cenários de voo.	49
3.3	Valores usados como parâmetros.	55
3.4	Valores dos ganhos do controlador $G_{C_1}(s)$	60
4.1	Valores dos ganhos do controlador $G_{C_2}(s)$	64
4.2	Valores dos ganhos do controlador $G_{C_3}(s)$	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANAC	Agência Nacional de Aviação Civil
APM	<i>Application Performance Monitoring</i>
CC	Corrente Contínua
CT	Cinemática Translacional
CR	Cinemática Rotacional
DT	Dinâmica Translacional
DR	Dinâmica Rotacional
FAA	<i>Federal Aviation Administration</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
IA	Inteligência Artificial
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
RP	Regime Permanente
STEM	<i>Science, Technology, Engineering and Mathematics</i>
UFJF	UNiversidade Federal de Juiz de Fora
UVA	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
VANT	Veículo Aéreo Não Tripulado

LISTA DE SÍMBOLOS

C_e	Coeficiente de empuxo
F	Força
F_m	Soma da Força dos rotores
f_c	frequência de corte
g	Força da gravidade
I_x, I_y, I_z	Momentos de inércia
K_{mot}	Constante do motor
M	Massa do VANT
M_p	Sobressinal ou <i>Overshoot</i>
N	Newton
Ta	Tempo de acomodação
V	Volts
X, Y, Z	Eixos Ortogonais
Ω	Omega (Componentes de velocidade angular)
ρ	Rho (Densidade do ar)
θ, ϕ, ψ	Theta, Phi, Psi, (Ângulos de Euler)

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	15
1.2 MOTIVAÇÕES	16
1.3 OBJETIVOS	16
1.3.1 Objetivos Gerais	16
1.3.2 Objetivos Específicos	16
1.4 ESTADO DA ARTE	17
2 REFERENCIAL TEÓRICO	20
2.1 VEÍCULOS AÉREOS NÃO TRIPULADOS	20
2.1.1 Modelos	20
2.2 APLICAÇÕES	23
2.2.1 Militar	23
2.2.2 Agricultura	24
2.2.3 Serviços de <i>Delivery</i>	26
2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA	26
2.3.1 Topologia e modelo base de um Quadricóptero	27
2.3.2 Matrizes de rotação	29
2.3.3 Dinâmica	32
2.3.4 Representação em Espaços e Matrizes de Estado	36
2.3.5 Linearização do sistema	38
2.4 MOTOR	41
2.5 SENSOR	42
2.6 CONTROLADORES PID	43
3 METODOLOGIA	46
3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	46
3.2 MODELAGEM	47
3.2.1 Dinâmica de voo e obtenção das Funções de Transferências (FT)	49
3.2.2 Estabilidade e Controle	57
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
4.1 TRANSLAÇÃO EM Z ($F(s)$, $z(s)$)	61
4.2 VARIAÇÃO NA VELOCIDADE LINEAR EM Z ($F(s)$, $\omega(s)$)	63
4.3 MOVIMENTO DE ROLAGEM ($T_\theta(s)$, $\theta(s)$)	66
5 CONCLUSÃO	70
5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	72

1 INTRODUÇÃO

A introdução de tecnologias avançadas nos ambientes educacionais, especialmente nas escolas públicas e centros de pesquisa, tem um papel fundamental no desenvolvimento de habilidades técnicas e no estímulo à inovação. Dentre as tecnologias emergentes, os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) têm se destacado não só em suas aplicações práticas, mas também como uma rica ferramenta de estudo, especialmente nas áreas de modelagem matemática, controle dinâmico e análise de sistemas complexos.

Estudar a dinâmica de voo e desenvolver modelos para VANTs proporciona aos alunos a oportunidade de aplicar conceitos fundamentais de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) em um ambiente com mais aplicações práticas e dinâmicas. Esses modelos permitem o entendimento de fenômenos físicos, como a aerodinâmica e o comportamento rotacional, além de serem a base para a criação de sistemas de controle robustos que mantêm a estabilidade e o desempenho dos VANTs. Dessa forma, o aprendizado se torna mais significativo e alinhado às demandas tecnológicas do mundo contemporâneo, preparando os alunos para o mercado de trabalho e para enfrentar desafios de engenharia complexos [Junior & De Melo, 2021].

1.1 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O presente trabalho está dividido em 5 Capítulos cuja organização e descrição é apresentado a seguir:

- No Capítulo 1, é apresentado a introdução em que é descrito um pouco sobre o tema abordado no trabalho, apresentação de trabalhos correlacionados, os objetivos a serem alcançados, a motivação para realização do trabalho bem como as contribuições proporcionadas pelo mesmo;
- No Capítulo 2, é apresentado o referencial teórico, tratando dos pontos referentes aos conceitos e metodologias abordados e utilizados no desenvolvimento do trabalho;
- No Capítulo 3, é apresentada a metodologia do trabalho;
- No Capítulo 4, são apresentados os resultados obtidos;
- Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões finais do trabalho.

1.2 MOTIVAÇÕES

A modelagem e o controle de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) são essenciais para o avanço de pesquisas nas áreas de dinâmica de voo e controle automático, além de servirem como base para o desenvolvimento de novas tecnologias e sistemas autônomos. No entanto, o estudo prático desses sistemas ainda enfrenta limitações, especialmente nas instituições educacionais e de pesquisa com menores recursos, devido ao alto custo dos componentes necessários, como sensores e controladores, e à complexidade dos sistemas de voo.

A ausência de acesso a materiais e dispositivos adequados para a modelagem e o controle de VANTs restringe o aprendizado dos estudantes e o avanço de pesquisas em sistemas dinâmicos. Além disso, essa escassez compromete a formação técnica e prática em áreas críticas como a de controle de sistemas não lineares e a aplicação de algoritmos PID, essenciais para a estabilidade e o desempenho em voo de dispositivos aéreos.

Diante desse cenário, surge a necessidade de desenvolver alternativas acessíveis e eficazes que permitam estudar a modelagem e análise matemática, bem como o controle de VANTs, especialmente utilizando o controle PID. A criação de modelos dinâmicos que sejam representativos e o uso de controladores PID embarcados em microcontroladores de baixo custo oferecem uma base prática valiosa para que alunos e pesquisadores compreendam a estabilização e o controle de quadricópteros e outros VANTs.

Dessa forma, o desenvolvimento de projetos focados em modelagem matemática, análise e controle PID para VANTs contribui não apenas para o desenvolvimento técnico ou acadêmico, mas também para a democratização do acesso a tecnologias.

1.3 OBJETIVOS

Com o intuito de oferecer uma solução para a problemática apresentada na seção anterior, este trabalho tem como objetivos principais alcançar os seguintes resultados:

1.3.1 Objetivos Gerais

Modelar e analisar matematicamente a dinâmica de voo de um VANT quadrrrotor e aplicar um controle PID no sistema, como finalidade de fornecer de base para trabalhos destinados a construção e estudo de VANTs.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar levantamento bibliográfico sobre trabalhos relacionados;

- apresentar trabalhos semelhantes, elencar pontos fortes e fracos de cada um deles e planejar o trabalho buscando preencher prováveis lacunas;
- apresentar algumas aplicações de VANTs;
- estudar e aplicar técnicas de modelagem matemática para VANTs;
- realizar a modelagem para dinâmica de voo;
- obter funções de transferência relacionadas;
- projetar um controle PID para a dinâmica de voo.

1.4 ESTADO DA ARTE

Com o intuito de obter uma visão do estado da arte, realizamos o levantamento de alguns trabalhos relacionados ao tema, dentre os quais destacamos os mais relevantes:

- O trabalho de [Pinho, 2022] utiliza a abordagem dos quatérnions para modelar e, consequentemente, projetar o controle da atitude (orientação) de um quadricóptero. A ideia principal da autora é mostrar que, com quatérnions, é possível evitar algumas complicações matemáticas (chamadas de singularidades) que surgem ao usar ângulos de Euler. O trabalho fez uso do *software* MATLAB e de sua ferramenta *Simulink* para realizar simulações e análises. Após definir a planta, foram realizados testes comparando a abordagem de modelagem por ângulos de Euler com a dos quatérnions, e notou-se que o controlador com quatérnions conseguiu manter a estabilidade em diferentes condições de operação, enquanto o controlador baseado em ângulos de Euler começou a perder precisão em ângulos maiores. Apesar de descrever bem a modelagem, tanto em quatérnions quanto em ângulos de Euler, a autora não entra em detalhes sobre o projeto do controlador PID proposto.
- O trabalho [Sarmiento et al., 2019] discute o desenvolvimento e a evolução de um protótipo de VANT criado pelo grupo PET Elétrica para fins de estudo e aplicação prática na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF). O trabalho se trata da retomada um projeto anterior que foi descontinuado, onde o grupo retomou a construção de um quadricóptero com a intenção de utilizá-lo para gravações aéreas e monitoramento ambiental. Com o intuito de economizar recursos, optaram por reconstruir um VANT antigo, levando em conta que adquirir um modelo comercial, seria mais custoso. Os autores realizaram o desenvolvimento do VANT em duas

etapas: primeiro como um veículo teleoperado, e posteriormente, com planos para automação completa. A reconstrução envolveu a montagem de componentes estruturais e eletrônicos básicos, como motores *brushless*, um controlador APM, e sensores de GPS. Os resultados demonstram que, embora a aeronave desenvolvida pelo grupo tenha apresentado desempenho inferior aos modelos comerciais, ele foi capaz de atingir os objetivos propostos com um custo consideravelmente menor. O trabalho conclui com a recomendação de continuar os desenvolvimentos no sentido de automação do voo e inclusão de novos sensores.

- [Barna et al., 2019] realizaram uma análise matemática do trajeto de voo de VANTS, focando em como as equações de movimento podem ser aplicadas para prever e ajustar a trajetória desses dispositivos. O estudo apresenta uma modelagem detalhada da dinâmica do voo, dando ênfase na relação entre o controle de estabilidade e a precisão da trajetória. Os autores fizeram uso de técnicas matemáticas, como sistemas de equações diferenciais para modelar e simular o comportamento dos VANTs em cenários de voo controlado. Um dos pontos principais da pesquisa foi a análise de como pequenos ajustes nos parâmetros de controle podem impactar de forma significativa o desempenho em rotas que são pré-definidas, destacando a importância de um controle preciso para aplicações que demandam alta precisão, como a entrega de pacotes e a inspeção de infraestruturas. O artigo contribui significativamente para a área de modelagem de voo de VANTs, fornecendo uma boa abordagem teórica e modelos que podem ser aplicados em sistemas de controle de trajetória, servindo como base para outros trabalhos.
- O trabalho de [Baltazar, 2023], oferece uma análise detalhada da modelagem dinâmica e do controle de um quadricóptero de pequeno porte, com o objetivo de aplicar técnicas de controle moderno a um VANT que já é comercialmente disponível, o quadricóptero *Parrot Rolling Spider*.

Inicialmente, o autor apresenta a modelagem matemática do VANT, considerando forças e momentos, além de aplicar as equações de movimento baseada pela segunda lei de Newton e das equações de Euler para rotações. A modelagem detalha a dinâmica de translação e rotação do quadricóptero, levando em conta a estrutura simplificada, a fim de facilitar a implementação de controladores. O trabalho também se dedica à implementação de controladores, particularmente o controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID), que é utilizado para garantir a estabilidade do sistema e a resposta eficiente aos comandos de atitude. A análise do autor sugere que o controle PID é uma solução viável para quadricópteros de pequeno porte, uma

vez que oferece boa estabilidade e resposta rápida às perturbações.

Em suma, o trabalho contribui para a literatura de controle de VANTs, ao aplicar técnicas de controle moderno em uma plataforma acessível como o *Parrot Rolling Spider*.

- Em seu trabalho, [Silva et al., 2021] faz uso de uma combinação de técnicas de controle clássico com métodos de otimização inteligente para o desenvolvimento de um controle para VANTs. O foco do estudo é a aplicação de algoritmos genéticos para ajustar os parâmetros de um controlador PID, visando melhorar a resposta do quadricóptero em tarefas de voo autônomo. Inicialmente, ele se contempla à modelagem dinâmica do VANT quadricóptero, utilizando as equações de movimento baseadas nas leis de Newton-Euler para descrever o comportamento translacional e rotacional do sistema.

No que diz respeito ao planejamento de movimentos, o autor busca otimizar o trajeto que o veículo deve seguir em missões autônomas, fazendo o uso de algoritmos que buscam eficiência energética e a precisão no deslocamento.

O diferencial do trabalho está na sintonia do controlador, feita por meio de algoritmos genéticos. Normalmente, a sintonia de um controlador PID é feita com base em experimentação e em técnicas de tentativa e erro, no entanto, ao aplicar os algoritmos genéticos, o autor automatiza esse processo.

Como pode ser observado, a literatura recente tem explorado extensivamente o tema da modelagem e controle de VANTs, abordando diversos aspectos técnicos e práticos que são fundamentais para o avanço dessa tecnologia. No decorrer do trabalho, iremos discutir de forma mais detalhada as contribuições e descobertas mais relevantes apresentadas no tema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo abordaremos os principais conceitos teóricos e técnicos relacionados ao tema do trabalho, como por exemplo, uma visão geral sobre VANTs, seus modelos, aplicações e características técnicas. E, por fim, apresentaremos conceitos relacionados à modelagem matemática de VANTs, representação em espaço de estados e controle PID.

2.1 VEÍCULOS AÉREOS NÃO TRIPULADOS

Os Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), ou conhecidos mais popularmente como drones surgiram no início do século XX e devido a característica da ausência de tripulação rapidamente ganharam grande interesse e popularidade no campo militar. Após um período predominantemente sendo explorado para fins militares, em 2006, os VANTs passaram a ser introduzidos no mercado civil com a autorização da *Federal Aviation Administration* (FAA), órgão governamental dos Estados Unidos encarregado de regulamentar a aviação civil. Isso resultou em uma disseminação da tecnologia, tornando-se comum em diversas áreas, como no monitoramento e pesquisa de terrenos e da atmosfera, por exemplo [[Afxentiou, 2018](#)].

Esses tipos de aeronaves não possuem piloto, pelo menos não da forma tradicional, ou seja, com pilotos humanos a bordo. Em outras palavras, quem pilota o VANT, realiza o controle da aeronave de forma remota [[Li et al., 2018](#)]. Em alguns casos o controle da aeronave pode ser realizado até mesmo de forma autônoma, uma vez que esse tipo de dispositivo pode ser equipado com diferentes tipos de sensores avançados e ainda fazer uso de sistemas inteligentes para definições e reconhecimento de rotas de voo. Logo, devido a característica da inexistência de um piloto a bordo aliada as vantagens relacionadas aos custos de produção, essas aeronaves expandiram um horizonte de possibilidades para suas aplicações e, com diferentes aplicações acabaram surgindo diferentes modelos de VANTs com o passar do tempo.

2.1.1 Modelos

- *Fixed-Wings* (modelo de Asa Fixa) é um dos modelos mais conhecidos, principalmente por ser muito utilizado na área militar. Esse tipo de VANT possui uma estrutura semelhante à dos aviões convencionais, que possuem asas fixas e que podem ser retas ou envergadas. Normalmente esse modelo de aeronave possui maior velocidade de voo e autonomia em comparação com outros tipos. É amplamente utilizado para fins militares, como no monitoramento do espaço aéreo ou de grandes

áreas de terra, em missões de reconhecimento de longa distância ou em operações de bombardeio e ataque a alvos. Um exemplo desse tipo de modelo pode ser visto na Figura 2.1.



Figura 2.1. VANT militar em modelo de Asa Fixa.

Fonte: Google Imagens.

- Os quadricópteros, também conhecidos como quadrimotores ou quadricópteros, são os modelos mais populares. Esses tipos de VANTs, possuem quatro rotores e são muito populares devido à sua estabilidade e manobrabilidade. São amplamente utilizados em diversas aplicações que vão desde atividades recreativas à atividades profissionais como a realização de fotografias aéreas, videografia, competições esportivas, entre outras. A Figura 2.2 apresenta um exemplo desse modelo de VANT.



Figura 2.2. VANT em modelo quadrimotor.

Fonte: Google Imagens.

- Hexacópteros: Possuem seis rotores, o que proporciona maior estabilidade e capacidade de carga em comparação com os quadricópteros. São frequentemente

utilizados em aplicações industriais e comerciais, como inspeções de infraestrutura e agricultura de precisão. Esse modelo é ilustrado na Figura 2.3.



Figura 2.3. VANT em modelo hexacoptero.

Fonte: Google Imagens.

- Octocópteros: Com oito rotores, oferecem ainda mais estabilidade e capacidade de carga do que os hexacópteros. Esses modelos são comumente usados em aplicações profissionais que exigem equipamentos mais robustos, como em aplicações de filmagens cinematográficas e levantamentos topográficos. Na Figura 2.4, apresentada a seguir, encontra-se um exemplar deste modelo.



Figura 2.4. exemplo de VANT em modelo híbrido.

Fonte: Google Imagens.

- Híbridos: Alguns VANTs são projetados com características de diferentes modelos, como quadricópteros com capacidade de transição para voo de asa fixa, por exemplo, dessa forma uma combinação desse tipo pode proporcionar uma versatilidade ainda maior, pois possui, nesse exemplo, a dinâmica dos multirotores aliado a eficiência energética das aeronaves de asa fixa. Apresentamos na Figura 2.5 um representante deste modelo.



Figura 2.5. VANT em modelo híbrido.

Fonte: Google Imagens.

2.2 APLICAÇÕES

Desde sua criação, os VANTs tornaram-se, ao longo do tempo, cada vez menores e mais leves devido a diversos avanços tecnológicos, o que possibilitou seu uso em uma ampla gama de propósitos. Dentre essas aplicações, podemos mencionar: uso militar, agricultura, engenharia civil e mais recentemente em sistemas de *delivery*.

2.2.1 Militar

Originalmente, esses dispositivos foram concebidos para fins militares, sendo utilizados principalmente para reconhecimento de terreno e patrulha. O início da utilização de VANTs em conflitos armados teve um grande impacto na história, principalmente porque oferece um meio seguro de coleta de informações, permitindo a realização de operações sem colocar em risco a vida de pilotos humanos.

Os avanços tecnológicos, tanto em hardware quanto em inteligência artificial (IA), possibilitaram o desenvolvimento de sistemas autônomos. Esses progressos resultaram em custos mais baixos, maior acessibilidade e redução de erros, aprimorando a eficiência em inteligência, navegação, detecção, vigilância e reconhecimento. Dispositivos controlados por IA, especialmente os VANTs, oferecem veículos não tripulados com maior velocidade e a capacidade de operar em ambientes sem a necessidade de conexões de dados, tornando-se, assim, menos suscetíveis a interferências de sistemas adversários [Longpre et al., 2022].

A primeira utilização documentada de um drone em combate efetivo, além do uso em reconhecimento e vigilância, aconteceu em novembro de 2001, na campanha do Afeganistão,

onde um drone dos Estados Unidos abateu Mohammed Atef, um dos comandantes militares da organização terrorista Al-Qaeda. Desde então, o número de ataques com drones (principalmente VANTs) realizados em operações militares aumentou constantemente, somente entre os anos de 2008 e 2012, foram registrados mais de 900 ataques com drones por parte do exército norte-americano, durante o conflito no Afeganistão [Yuna, 2016].

Além disso, o conflito recente entre Rússia e Ucrânia foi além do uso tradicional dos VANTs em combate. A guerra trouxe drones menores, em maior quantidade e mais baratos ao campo. Por serem capazes de operar em baixa altitude, VANTs mais simples, são usados principalmente pelas forças terrestres, fornecendo vigilância; apoio de artilharia e aumentando a precisão das operações em terra, em contraponto com VANTs maiores e mais caros, que são bem menos utilizados no espaço aéreo tão disputado por aeronaves e mísseis [Kunertova, 2023].

Dessa forma, é possível notar que VANTs militares estão transformando a maneira como os conflitos estão sendo conduzidos, trazendo vantagens táticas e financeiras consideráveis, onde a capacidade de realizar operações sem colocar vidas humanas em risco é uma das principais justificativas, além do status de superioridade tecnológica.

2.2.2 Agricultura

A agricultura de precisão, segundo [Saraiva et al., 2000], utiliza tecnologias para otimizar a produção agrícola, gerindo a variabilidade espacial e reduzindo impactos ambientais.

Nesse contexto, o uso de tecnologias, como máquinas avançadas, tem impulsionado cada vez mais a produtividade no campo, conforme afirma [de Jesus & Peres, 2023] apud [EMBRAPA, 2020].

Logo, os drones ou VANTs têm sido instrumentos de revolução na agricultura, pois fornecem monitoramento preciso das safras e possibilitam recursos para o controle de pragas, problemas no plantio, além de auxiliar em processos de fertilização e semeadura [de Jesus & Peres, 2023].

O agronegócio, que atualmente vem se mostrando tão importante para a economia brasileira, tem sido bastante resiliente durante crises, como a pandemia, por exemplo. Para [Bruzza et al., 2022] a agricultura de precisão é uma importante peça nesse contexto, ao promover o desenvolvimento sustentável por meio de inovações. Essas inovações permitem uma agricultura mais eficiente e com princípios de responsabilidade ambiental, o que são pontos alinhados ao conceito de agricultura 4.0, em que a utilização digital de dados e informação proporciona maior eficiência na produção, na gestão de recursos e redução de

impactos no meio ambiente.

Conforme apontado por [Junta & Cavichioli, 2016], o mercado de drones apresenta perspectivas promissoras, com o agronegócio podendo ser amplamente beneficiado, a médio e longo prazo. Entre os impactos esperados estão a expansão do mercado, a criação de novas carreiras, como a de "piloto de drones", por exemplo; o desenvolvimento de tecnologias inovadoras; a oferta de cursos especializados por instituições de educação no país, sobretudo; a substituição de tecnologias como satélites para fotometria aérea na agricultura, como já vem acontecendo, além do desenvolvimento de softwares específicos para diversas aplicações agrícolas.

Um dos modelos de VANTs que mais tem se destacado na agricultura é o Pelicano (Figura 2.6) por sua tecnologia avançada, que permite pulverizações com grande precisão. Sua capacidade de reduzir em até 60% o uso de defensivos, quando comparado aos métodos convencionais, é um dos seus principais benefícios. Além disso, o Pelicano pode carregar até 10 litros de produtos químicos e alcançar alturas de 500 metros, sendo recomendado operar entre dois e três metros acima da plantação para garantir mais precisão e evitar a dispersão indesejada de defensivos, inclusive em áreas vizinhas [Junta & Cavichioli, 2016].



Figura 2.6. VANT Pelicano usado para pulverização.

Fonte: Autor.

Desse modo, o uso de VANTs como o Pelicano, por exemplo, traz uma revolução para a agricultura, uma vez que aumenta a eficiência, reduz custos e possibilita uma aplicação mais precisa e segura de defensivos agrícolas, especialmente em áreas de difícil acesso. Essa tecnologia promete transformar o agronegócio, substituindo métodos tradicionais e trazendo novas oportunidades profissionais.

Com tudo isso, o agronegócio brasileiro se fortalece, assegurando maior competitividade no mercado global e promovendo a sustentabilidade a longo prazo.

2.2.3 Serviços de *Delivery*

A utilização de VANTs para entregas tem ganhado destaque como uma alternativa inovadora e eficiente no setor de logística, especialmente no contexto em que envolve os pontos finais da entrega, ou "última milha", que corresponde à fase final e mais cara da cadeia de distribuição [Pugliese et al., 2020].

Empresas como Amazon, Walmart, Google, por meio de projetos como o Amazon Prime Air e o Google Wing, estão à frente desse movimento, testando sistemas automatizados de entrega para reduzir os tempos de envio e até mesmo como mecanismos de minimização dos impactos ambientais. Essas empresas enxergam nessa modalidade não somente o fator de agilidade no processo das entregas, mas também diminuição de custos operacionais envolvidos, uma vez que o uso de VANTs elimina a necessidade de veículos de grande porte e operadores humanos para entregas menores e que ocorrem em áreas urbanas densas e principalmente em locais com acesso dificultado [André Almeida, 2024].

O trabalho de [Scalea et al., 2019] explora a possibilidade de utilizar VANTs para o transporte de órgãos destinados a transplantes. Publicado no *American Journal of Transplantation* em 2019, o estudo surge como resposta aos desafios atuais no transporte de órgãos, como o aumento do tempo de isquemia fria e os altos custos associados ao uso de aviões privados. A pesquisa feita pelos autores acompanhou o transporte de um rim de doador por um VANT, registrando dados em tempo real sobre vibração, temperatura e pressão. Os resultados mostraram que o transporte reduziu significativamente as vibrações em comparação ao transporte em aeronaves convencionais, demonstrando que essa tecnologia pode oferecer um meio mais eficiente e menos prejudicial para o transporte de órgãos.

Em 2020, a empresa de *delivery* *iFood* tornou-se pioneira no Brasil ao realizar entregas por VANTs, após a autorização da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC). A operação foi realizada em parceria com a *Speedbird*, uma fabricante nacional de aeronaves e drones. O projeto inicial passou por uma fase de testes em Campinas por dois anos, mas foi encerrado em 2021, no entanto, a empresa começou a realizar entregas regulares com VANTs em Sergipe, no final de 2021, incluindo até mesmo operações de entregas entre municípios [André Almeida, 2024].

2.3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Para [Meerschaert, 2013], o processo de modelagem matemática pode ser comparado à busca de uma solução para uma pergunta. Primeiro, reflete-se sobre a questão e a traduz para uma linguagem formal (matemática). Em seguida, desenvolve-se uma série de

etapas para alcançar uma solução específica. Por fim, a resposta é reinterpretada em uma linguagem compreensível. Assim, pode-se dizer que a modelagem matemática funciona como uma ponte entre a matemática e o mundo real.

Em outras palavras, podemos dizer que a modelagem matemática é o processo de traduzir situações ou problemas do mundo real para uma linguagem matemática, no intuito de entender, analisar e resolver problemas do cotidiano ou relacionados a fenômenos naturais, por exemplo. Nesse processo, os fenômenos e características pertinentes do problema são representados através de equações, funções ou outros elementos matemáticos, permitindo que se possam fazer previsões ou soluções otimizadas.

O processo de modelar problemas matematicamente é amplamente utilizado em diversas áreas, como física, engenharia, economia, biologia e até mesmo nas ciências sociais. Segundo [Meerschaert, 2013], esse processo costuma seguir as seguintes etapas:

- **Definição do problema:** identificar a questão ou o fenômeno a ser estudado e entender os fatores principais.
- **Formular um modelo:** traduzir o problema para termos matemáticos, como variáveis, funções, equações diferenciais ou sistemas de equações.
- **Resolver o modelo:** aplicar ferramentas matemáticas e computacionais para encontrar soluções.
- **Interpretar os resultados:** traduzir as soluções matemáticas de volta para o contexto do problema original, verificando se fazem sentido no mundo real.
- **Validar e ajustar o modelo:** comparar os resultados com dados reais para verificar a precisão e ajustar o modelo, caso seja necessário.

2.3.1 Topologia e modelo base de um Quadricóptero

Quando nos referimos a topologia de um quadricóptero, estamos falando especificamente sobre a posição e orientação em que se encontram os motores e as hélices em relação à estrutura da aeronave. Podemos encontrar duas principais topologias para VANTs quadricópteros: topologia positiva e a topologia cruzada, como podemos observar na Figura 2.7.

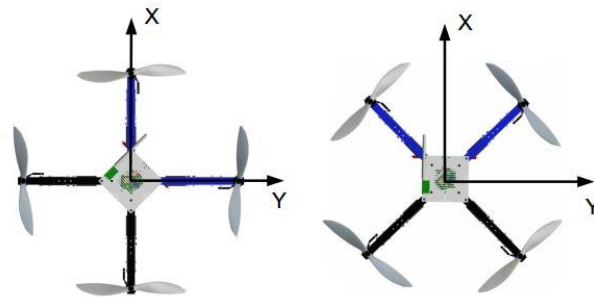


Figura 2.7. Topologias Positiva e Cruzada em Quadricópteros.

Fonte: Autor.

Na topologia positiva (ou '+'), os quatro motores são dispostos em um padrão semelhante a uma cruz, como o símbolo '+', quando vistos de cima, o que justifica o nome 'positiva'. Nesse arranjo, dois motores ficam alinhados na direção frontal e traseira, enquanto os outros dois se posicionam à esquerda e à direita da aeronave. Essa configuração pode impactar a estabilidade no eixo de inclinação (*pitch*) e no eixo de rotação lateral (*roll*), uma vez que dois motores estão diretamente alinhados com o eixo longitudinal, exigindo um esforço maior do sistema de controle para manter um equilíbrio adequado. Embora apresente uma resposta eficiente para movimentos lineares, a capacidade de realizar manobras rápidas pode ser um pouco mais limitada em comparação com a topologia cruzada.

Na topologia cruzada, os motores são dispostos como se fossem nos vértices de um quadrado, o que possibilita a formação de um padrão em "X", quando visto do topo. Essa é a configuração mais comum em VANTs do tipo quadricóptero modernos, incluindo os que são usados tanto para fins comerciais, quanto recreativos.

A topologia cruzada proporciona uma melhor estabilidade em todos os eixos, uma vez que os motores trabalham de maneira mais homogênea para manter o equilíbrio em voo. Como o centro de massa está igualmente distante de cada motor, o sistema de controle precisa fazer menos ajustes para estabilizar o quadricóptero em situações dinâmicas.

Ao utilizarmos a topologia positiva como exemplo, podemos representar o diagrama de corpo livre de um quadricóptero por meio da Figura 2.8. Onde, (w_1, w_2, w_3, w_4) são os rotores do VANT, (F_1, F_2, F_3, F_4) são as forças de empuxo geradas pelos rotores, F_g é a força da gravidade e θ é o ângulo de rotação em torno do eixo y .

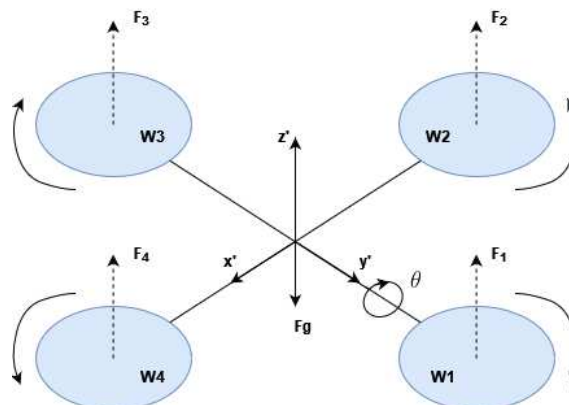


Figura 2.8. Diagrama de corpo livre de um quadricóptero

Fonte: Autor.

2.3.2 Matrizes de rotação

As matrizes de rotação são amplamente utilizadas em aplicações tridimensionais, principalmente na computação gráfica, robótica e modelagem 3D. Elas servem de suporte matemático para descrever como objetos podem ser rotacionados em torno de pontos ou eixos no espaço tridimensional.

Para [Alves, 2023] apud [Van Verth & Bishop, 2016], embora seja um *array* bidimensional de valores, uma matriz carrega em si o poder de realizar transformações lineares. Com operações simples, ela pode ser usada para transformar vetores, como rotacioná-los, escalá-los ou fazer com que sejam transladados. Além disso, a combinação de duas matrizes de transformação resulta em uma única matriz com o mesmo efeito das duas originais. Assim, quando rotacionamos um vetor, estamos alterando sua direção ao redor de um eixo fixo sem mudar seu tamanho. No espaço tridimensional, esse eixo é conhecido como o eixo de rotação.

Segundo o teorema de Euler de 1775, qualquer rotação em 3D ocorre ao redor de uma linha específica de pontos que não se movem. Esse eixo permanece fixo, e a rotação ocorre em torno dele em um certo ângulo [Alves, 2023] apud [Van Verth & Bishop, 2016].

Uma matriz de rotação é uma matriz ortogonal com determinante igual a 1 que, quando multiplicada por um vetor, rotaciona esse vetor em torno de um dos eixos do sistema de coordenadas. No espaço tridimensional, utilizam-se matrizes 3×3 para descrever rotações, uma vez que estamos lidando com três coordenadas (x, y, z) .

Com base no diagrama da Figura 2.8, identificam-se os seis graus de liberdade necessários para descrever o sistema. Sendo estes, três graus para os movimentos de translação nos eixos x' , y' e z' , e mais três para os movimentos de rotação em torno de

cada um desses eixos.

Ao considerarmos um referencial inercial e um referencial fixo ao corpo, podemos relaciona-los por meio da seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Onde R^T , é a matriz de rotação.

Com isso, foi estabelecida a matriz de transformação de base para descrever as rotações no espaço tridimensional Euclidiano. Essa transformação utiliza os três ângulos de Euler, conhecidos como *roll* (θ), *pitch* (ϕ) e *yaw* (ψ) conforme a convenção de Tait-Bryan [Craig, 2005], como podemos observar na Figura 2.9. No português, conhecemos esses movimentos como rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

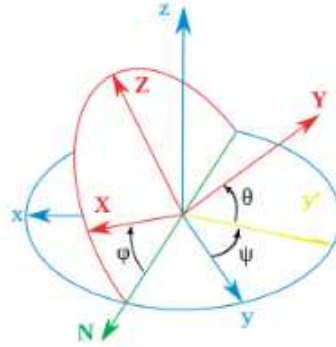


Figura 2.9. Roll, pitch e yaw para os ângulos de Euler

Fonte: Autor.

Aplicando-se essa ideia, para os eixos (x, y, z), obtemos as seguintes matrizes transpostas de rotação [Lima et al., 2014]:

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

Que é a matriz referente a rotação de ângulo no eixo x .

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}^T \quad (2.3)$$

Sendo a matriz referente à rotação de ângulo no eixo y .

Já a matriz referente à rotação de ângulo no eixo z , é,

$$R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

A partir das matrizes 2.2, 2.3 e 2.4, obtidas, podemos realizar um produto entre estas, obtendo assim uma matriz de rotação composta que descreve a orientação final do corpo rígido.

Com isso, conseguimos estabelecer como o sistema de coordenadas que está fixo ao corpo (referencial que acompanha os movimentos e rotações do corpo) se orienta em relação ao sistema de coordenadas inicial e inercial, ou seja, fixo em relação ao solo e que não é influenciado pelas movimentações do corpo.

Logo, o produto das matrizes resulta em:

$$R^T = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Tomando as relações de posição podemos obter as relações de velocidades, por meio de [Lima et al., 2014]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Onde, os termos u, v, w referem-se às componentes das velocidades lineares do corpo rígido em um sistema fixo ao corpo. A matriz R^T realiza a transformação dessas velocidades para o sistema inercial, ou seja, ela converte as velocidades (u, v, w) para as velocidades $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, que são referentes ao sistema inercial.

Para descrever a cinemática rotacional do corpo rígido, é necessário relacionar as

velocidades angulares no referencial fixo ao corpo (p, q, r) com as velocidades angulares inerciais $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ [Lima et al., 2014]. É importante ressaltar que (p, q, r) representam as taxas de variação dos ângulos de rotação do corpo rígido em torno de seus eixos principais. Essa relação é estabelecida por meio da utilização da matriz de rotação demonstrada na Equação 2.7.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (R(x, \phi))^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \left((R(y, \theta))^{-1} (R(x, \phi))^{-1} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Nesta equação, $R(x, \phi)$ e $R(y, \theta)$ são as matrizes de rotação associadas às rotações nos eixos x e y, que são fixos ao corpo. Elas são usadas para transformar as velocidades angulares de um referencial para o outro [Lima et al., 2014].

A equação inversa, que permite calcular as velocidades angulares no referencial inercial $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ a partir das velocidades angulares do corpo (p, q, r) , é expressa pela Equação 2.9 [Lima et al., 2014], onde ω é a velocidade angular do corpo rígido com relação ao referencial fixo ao corpo, W_n é a matriz de Euler e $\dot{n}$ é a velocidade angular em relação ao referencial inercial.

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi \sec\theta & \cos\phi \sec\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\omega = W_n \dot{n} \quad (2.9)$$

2.3.3 Dinâmica

Devemos considerar a atuação da força gravitacional exclusivamente no eixo Z do referencial inercial. Assim como, o arrasto aerodinâmico como proporcional à velocidade do ar em torno do quadricóptero, podendo auxiliar ou dificultar os movimentos. Dessa forma, as forças são representadas vetorialmente, como apresentado na Equação 2.10, [Huang et al., 2009].

$$\begin{cases} \vec{F}_g = (0, 0, -f_g) \\ \vec{F}_a = (F_{ax}, F_{ay}, F_{az}) \end{cases} \quad (2.10)$$

Onde, o arrasto aerodinâmico $\vec{F}_a$, para todos os eixos é obtido por:

$$F_{ai} = \frac{1}{2} C_D \rho A V_i^2 \quad (2.11)$$

A densidade do meio (ρ) é constante em todas as direções, o coeficiente de arrasto é denotado por C_D , A representa a área frontal e V_i é a velocidade do ar nas coordenadas do sistema.

A movimentação do quadricóptero é impulsionada pela força gerada pelos motores (que chamaremos aqui de F_m), que produzem empuxo vertical em relação ao sistema fixo ao corpo. A soma das forças de todos os motores resulta na propulsão total do quadricóptero, conforme representa a equação 2.13, [Cavallaro, 2019].

$$\vec{F}_m = \left(0, 0, \sum F_i\right) \quad (2.12)$$

$$F_i = C_e \cdot \frac{4\rho r_h^4}{\pi^2} \Omega^2 \quad (2.13)$$

Onde, C_e é o coeficiente de empuxo, r_h é o raio da hélice, ρ a densidade do ar e Ω a velocidade angular do motor.

Podemos, então, estabelecer a relação entre as acelerações nos três eixos do referencial inercial, as quais estão intimamente ligadas às forças atuantes no sistema pela expressão 2.14, onde M é a massa do VANT [Cavallaro, 2019].

$$\begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_g \end{bmatrix} + [R^T] \frac{1}{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum F_i \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Com isso, são definidas as matrizes de velocidade linear V e velocidade angular Ω , que descrevem o movimento do quadricóptero ao longo do tempo.

Essas matrizes são expressas como:

$$\begin{cases} V = \begin{bmatrix} u, v, w \end{bmatrix}^T \\ \Omega = \begin{bmatrix} p, q, r \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (2.15)$$

Além disso, é possível modelar a matriz que representa as forças principais atuantes no sistema:

$$F = \begin{bmatrix} -Mg \sin\theta - F_{arr,x} \\ Mg \sin\phi \cos\theta - F_{arr,y} \\ -Mg \cos\phi \cos\theta - F_{arr,z} + F_m \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Onde Mg é a força peso.

Assim, F_m , conforme descrito na Equação 2.12, pode ser expressa como a soma das

forças de empuxo geradas pelos 4 motores do quadricóptero.

Onde o torque aplicado em cada motor pode ser expresso por [Flores et al., 2021]:

$$\dot{\Omega} = \tau_i - \tau_{\text{arr}}, \text{ onde } i \in [1, 4] \quad (2.17)$$

e o torque devido o arrasto (τ_{arr}) é expresso por:

$$\tau_{\text{arr}} = \frac{1}{2} R \rho A C_e V^2 \quad (2.18)$$

Onde R é o raio da hélice do rotor.

Ao substituímos $V = \omega R$, como relação da velocidade linear com a angular na expressão anterior e agrupando os termos constantes $\left(\frac{1}{2}, R, \rho, A, C_e\right)$ em uma constante K_b , ficamos com a simplificação:

$$\tau_{\text{arr}} = \frac{1}{2} R^3 \rho A C_e \omega_i^2 = K_b \omega_i^2 \quad (2.19)$$

Além disso, podemos fazer mais algumas simplificações, tendo em vista que o quadricóptero em geral realiza manobras com baixa velocidade de rotação [Flores et al., 2021].

Nesse contexto, assume-se que o torque gerado pelo motor é aproximadamente igual ao torque gerado pelo arrasto, ou seja, $\tau_i \approx \tau_{\text{arr}}$, onde $i \in [1, 4]$.

Essa suposição simplifica a análise, já que podemos ignorar as variações e, da mesma forma feita anteriormente, podemos condensar os valores fixos da expressão da força de empuxo em uma única constante K_m [Flores et al., 2021], conforme:

$$F_i = K_m \Omega_i^2, \text{ onde } i \in [1, 4] \quad (2.20)$$

Com isso, podemos construir a matriz de torque como sendo [Raffo, 2011]:

$$T = \begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_3 - F_1) \cdot r_h \\ (F_2 - F_4) \cdot r_h \\ \tau_3 - \tau_4 + \tau_1 - \tau_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$T = \begin{bmatrix} K_m \cdot r_h \cdot (\Omega_3^2 - \Omega_1^2) \\ K_m \cdot r_h \cdot (\Omega_2^2 - \Omega_4^2) \\ K_b \cdot (\Omega_1^2 - \Omega_2^2 + \Omega_3^2 - \Omega_4^2) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Onde os torques $(T_\phi, T_\theta, T_\psi)$, são correspondentes aos movimentos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

Outra análise que devemos considerar é do equilíbrio de forças em que a dinâmica do sistema está envolvido, que podemos iniciar pela seguinte expressão:

$$F = M \cdot \frac{dV}{dt} \quad (2.23)$$

Por se tratar de uma equação diferencial, podemos aplicar a derivada na equação por meio da regra da cadeia, onde obteremos a seguinte relação:

$$\sum F = M (\dot{V} + \Omega \times V) \quad (2.24)$$

Além do mais, a equação 2.24 considera a variação da velocidade, incluindo não apenas a variação linear, mas também a variação devido à rotação do sistema.

A equação 2.24 mostra que a força resultante é igual ao valor da massa (M) multiplicada pela soma da variação linear da velocidade ($\dot{V}$) e a contribuição da rotação do sistema, que é o produto vetorial representado por ($\Omega \times V$).

E assim, as forças podem ser decompostas da seguinte forma [Flores et al., 2021]:

$$M \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Mg \sin \theta - F_{arr,x} \\ Mg \sin \phi \cos \theta - F_{arr,y} \\ -Mg \cos \phi \cos \theta - F_{arr,z} + F_m \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Onde o produto vetorial $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$,

é a contribuição da rotação referente a variação da velocidade do sistema.

De forma semelhante, ao considerarmos a matriz de momentos de inércia de um sólido em relação a um referencial inercial como sendo [Cavallaro, 2019]:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

De acordo com [Cavallaro, 2019], podemos simplificar a matriz, já que podemos considerar que o quadricóptero é simétrico onde os eixos principais de inércia são os eixos do referencial móvel em relação a gravidade. Dessa forma, ficamos com:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Ao aplicar o equilíbrio de momentos do sistema, correlacionando a matriz de torque com a matriz de momentos de inércia, definimos a equação do momento como:

$$T = \frac{dH}{dt} \quad (2.28)$$

Assim como fizemos para a equação 2.23, de forma análoga podemos aplicar a regra da cadeia, obtendo-se:

$$\sum T = I\Omega + \Omega \times I\Omega \quad (2.29)$$

E assim, podemos definir o vetor $(T_\phi, T_\theta, T_\psi)$, como sendo:

$$\begin{bmatrix} T_\phi \\ T_\theta \\ T_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.3.4 Representação em Espaços e Matrizes de Estado

A representação em espaços de estado é um conceito muito utilizado nos campos de análise e controle de sistemas dinâmicos. Utilizamos esse tipo de representação para descrever sistemas lineares e não lineares em tempo contínuo e discreto, permitindo uma compreensão mais profunda (e ainda assim direta) da dinâmica de um sistema. A representação em espaços de estado consiste em descrever o sistema dinâmico por meio de um conjunto de equações diferenciais [Nise, 2020].

Um sistema dinâmico linear pode ser representado na forma de espaço de estado através da Equação 2.31.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Na Equação 2.31, o vetor de estado $x(t)$ representa as variáveis internas do sistema, enquanto o vetor de entrada $u(t)$ corresponde às forças ou sinais aplicados ao sistema. O vetor de saída $y(t)$ refere-se às variáveis de interesse que queremos medir ou controlar. A matriz A é a matriz de estado, que descreve a dinâmica do sistema, enquanto a matriz B é a matriz de entrada, que estabelece a relação entre as entradas do sistema e suas dinâmicas. A matriz C é a matriz de saída, conectando o vetor de estado às saídas do sistema, e a matriz D é a matriz de transmissão direta, que relaciona a entrada diretamente à saída [Nise, 2020].

Uma forma gráfica de representar um modelo geral em espaços de estado por ser vista

por meio da Figura 2.10.

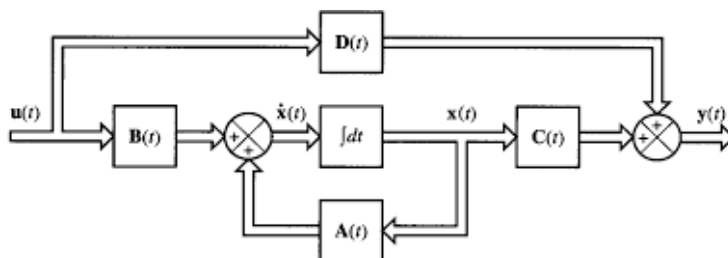


Figura 2.10. Diagrama de blocos geral para espaços de estados

Fonte: Autor.

O modelo matemático do quadricóptero, derivado das equações diferenciais linearizadas, pode ser representado de forma matricial, relacionando um conjunto de variáveis de entrada e saída. Esse modelo será fundamental para o desenvolvimento do controle do sistema.

Podemos descrever o comportamento do VANT quadricóptero por meio de 12 variáveis de estado, que juntas relacionam as principais dinâmicas do veículo. Essas variáveis são descritas por meio da Tabela 2.1:

Tabela 2.1. Descrição das variáveis do sistema dinâmico

Símbolo	Descrição
x	Deslocamento Linear em X
y	Deslocamento Linear em Y
z	Deslocamento Linear em Z
u	Velocidade Linear em X
v	Velocidade Linear em Y
w	Velocidade Linear em Z
ϕ	Deslocamento Angular em X
θ	Deslocamento Angular em Y
ψ	Deslocamento Angular em Z
p	Velocidade Angular em X
q	Velocidade Angular em Y
r	Velocidade Angular em Z

Dessa forma, essas variáveis podem ser representadas por meio da seguinte matriz:

$$X = \begin{bmatrix} x & y & z & u & v & w & \phi & \theta & \psi & p & q & r \end{bmatrix}^T \quad (2.32)$$

A matriz U , conforme apresentada na Equação 2.33, representa o vetor de entradas do sistema. Os três primeiros elementos da matriz são referentes aos torques aplicados nos

ângulos ϕ , θ e ψ , respectivamente. A entrada F refere-se a uma força aplicada ao sistema, enquanto a entrada unitária é incluída para contabilizar constantes físicas relacionadas, como a gravidade [Flores et al., 2021]. Ao considerarmos como simplificação o movimento apenas no plano vertical XZ, só teremos variação em θ , assim ficamos com U :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & T_\theta & 0 & F & 1 \end{bmatrix}^T \quad (2.33)$$

2.3.5 Linearização do sistema

Considerando as relações já descritas e analisadas, podemos construir 4 sistemas base relacionados a dinâmica do sistema, que são as: cinemática translacional (CT), cinemática rotacional (CR), dinâmica translacional (DT) e dinâmica rotacional (DR). Esses sistemas são matematicamente descritos da seguinte forma [Cavallaro, 2019]:

Para a cinemática translacional (CT):

$$\dot{x} = u(\cos \theta \cos \phi) + v(\sin \phi \cos \theta) - w(\sin \theta) \quad (2.34)$$

$$\dot{y} = u(\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi) + v(\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi) + w(\sin \phi \cos \theta) \quad (2.35)$$

$$\dot{z} = u(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi) + v(\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) + w(\cos \phi \cos \theta) \quad (2.36)$$

Para a cinemática rotacional (CR):

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (2.37)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (2.38)$$

$$\dot{\psi} = \sec \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \quad (2.39)$$

Para a dinâmica translacional (DT):

$$\dot{u} = -\frac{1}{M} \rho A C_e u^2 - g \sin \theta + (rv - qv) \quad (2.40)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{M}\rho AC_e v^2 + g \sin\phi \cos\theta + (pw - ru) \quad (2.41)$$

$$\dot{w} = -\frac{1}{M}\rho AC_e w^2 + g \cos\phi \cos\theta + \frac{F}{M} + (qu - pv) \quad (2.42)$$

Onde, A se refere área de referência do quadricóptero, C_e ao coeficiente de empuxo, M a massa e ρ a densidade do ar.

Para a dinâmica rotacional (DR):

$$\dot{p} = \frac{1}{I_{xx}} [T_\phi + (I_{yy} - I_{zz})qr] \quad (2.43)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} [T_\theta + (I_{zz} - I_{xx})pr] \quad (2.44)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{I_{zz}} [T_\psi + (I_{xx} - I_{yy})pq] \quad (2.45)$$

Ao considerarmos apenas a variação de movimento em θ , como hipótese simplificadora, podemos linearizar o sistema para as condições em que esse movimento ocorre.

Fazendo uso das séries de Taylor para expansão em segunda ordem,

$$\begin{aligned} f(x, u) = f(x_0, u_0) &+ \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{x_0, u_0} (x - x_0) \\ &+ \left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{x_0, u_0} (u - u_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial x^2} \right]_{x_0, u_0} (x - x_0)^2 \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial x \partial u} \right]_{x_0, u_0} \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2} \right]_{x_0, u_0} (u - u_0)^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

E com a linearização de cada uma das equações sendo realizada em torno u_0 , ω_0 e θ_0 , ficamos com um novo conjunto de representações [Cavallaro, 2019].

Para a CT:

$$\dot{x} = u \cos\theta_0 - w \sin\theta_0 - \theta(u_0 \sin\theta_0 + w_0 \cos\theta_0) + \theta_0(w_0 \cos\theta_0 + u_0 \sin\theta_0) \quad (2.47)$$

$$\dot{z} = u \sin \theta_0 + w \cos \theta_0 + \theta(u_0 \sin \theta_0 - w_0 \cos \theta_0) + \theta_0(w_0 \cos \theta_0 - u_0 \sin \theta_0) \quad (2.48)$$

Para a CR:

$$\dot{\theta} = q \quad (2.49)$$

Para a DT:

$$\dot{u} = -\frac{2u_0 u \rho A_x C_d x}{M} - \theta g - q w_0 + \frac{u_0^2 \rho A_x C_d x}{M} \quad (2.50)$$

$$\dot{w} = -\frac{2w_0 w \rho A_z C_d z}{M} - \theta g \sin \theta_0 + q u_0 + \frac{w_0^2 \rho A_z C_d z}{M} + g \theta_0 \sin \theta_0 + g \cos \theta_0 + \frac{F}{M} \quad (2.51)$$

E para a DR:

$$\dot{q} = \frac{T_\theta}{I_{yy}} \quad (2.52)$$

Assim, a partir das variáveis de estado e as entradas do nosso sistema e considerando as simplificações já discutidas, podemos então definir as matrizes X , U , A , B , C e D como sendo [Flores et al., 2021]:

$$X = [x \ z \ u \ w \ \theta \ q]^T \quad (2.53)$$

$$U = [T_\theta \ F \ 1]^T \quad (2.54)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 & -(u_0 \sin \theta_0 + w_0 \cos \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_0 & \cos \theta_0 & (u_0 \sin \theta_0 - w_0 \cos \theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2u_0 A_x C_d x \rho}{M} & 0 & -g & -w_0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2w_0 A_z C_d z \rho}{M} & -g \sin \theta_0 & u_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_0(w_0 \cos \theta_0 + u_0 \sin \theta_0) \\ 0 & 0 & \theta_0(w_0 \cos \theta_0 - u_0 \sin \theta_0) \\ 0 & 0 & \frac{u_0^2 A_x C_d x \rho}{M} \\ 0 & 1 & \frac{w_0^2 A_z C_d z \rho}{M} + g \theta_0 \sin \theta_0 + g \cos \theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$D = [0] \quad (2.58)$$

2.4 MOTOR

Um motor de corrente contínua (motor CC) é composto por duas partes principais: o estator e o rotor. O estator fornece um campo magnético, enquanto o rotor (ou armadura) contém o enrolamento que gera a força motriz quando uma corrente elétrica é aplicada. A direção e a velocidade do motor podem ser controladas alterando a tensão ou a corrente na armadura [Nise, 2020].

Devido a característica de ser controlado por armadura, a velocidade angular (ω) de um motor pode ser obtida pela seguinte expressão [Domingues, 2009]:

$$\omega = K_{\text{mot}} V \quad (2.59)$$

Onde, V é a tensão aplicada e K_{mot} é a constante do motor.

É comum que uma função de transferência de um motor de corrente contínua (CC) apresente dois polos reais, onde cada polo está associado às constantes de tempo elétrica e mecânica, respectivamente. A dinâmica do sistema é predominantemente mais afetada pela constante mecânica, pois o polo associado a ela está mais próximo do eixo imaginário (considerando o Lugar das Raízes do sistema), em contraste com o polo associado à constante elétrica. Assim, o motor pode ser modelado como um sistema de primeira ordem [Domingues, 2009].

$$G_1(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \quad (2.60)$$

Onde, τ é a constante de tempo do motor.

Em alguns casos, é possível encontrar os parâmetros do motor em seus *datasheets* (folhas de dados) fornecidas por seus fabricantes, no entanto quando os parâmetros do motor não são conhecidos diretamente, é possível obtê-los por meio de testes experimentais.

2.5 SENSOR

O MPU6050 é um sensor amplamente utilizado, integrando um acelerômetro de 3 eixos e um giroscópio de 3 eixos em um único chip. Reconhecido como um dos sensores de movimento mais populares, ele é empregado em uma variedade de aplicações, incluindo sistemas embarcados, robótica, drones e outros projetos que envolvem controle de movimento. A Figura 2.11 mostra um exemplo de placa de um sensor MPU6050.

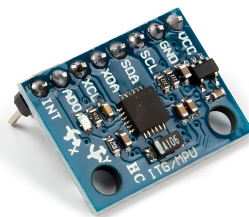


Figura 2.11. Sensor giroscópio e acelerômetro MPU6050.

Fonte: Google Imagens.

O giroscópio mede a taxa de rotação angular de cada um dos três eixos X, Y e Z, em outras palavras, *pitch*, *roll* e *yaw*. Os valores medidos são expressos em graus por segundo ($^{\circ}/s$) e são usados para calcular mudanças de orientação ao longo do tempo. A leitura do giroscópio é usada para estimar o ângulo de rotação em cada um dos eixos por meio de integração numérica das taxas de rotação, onde o resultado da integração ao longo do tempo fornece a orientação angular acumulada [InvenSense, 2013].

O MPU6050 pode ser representado como uma FT (função de transferência) de um filtro passa-baixa no domínio da frequência de primeira ordem, que pode ser representada por [Domingues, 2009]:

$$G_s = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (2.61)$$

Onde, $\omega_c = 2\pi f_c$. Com f_c sendo a frequência de corte.

Segundo a folha de dados do MPU6050 [InvenSense, 2013], o valor da frequência de amostragem do sensor pode ser de até 8 KHz, como podemos ver por meio da Figura 2.12.

Ao considerarmos usar um filtro passa-baixa digital para eliminar ruídos indesejados, com frequência de corte (f_c) de 10 Hz, podemos representar então a função de transferência para a dinâmica do sensor como sendo:

$$G_s = \frac{20\pi}{s + 20\pi} \quad (2.62)$$

DLPF_CFG	Accelerometer (F _s = 1kHz)		Gyroscope		
	Bandwidth (Hz)	Delay (ms)	Bandwidth (Hz)	Delay (ms)	Fs (kHz)
0	260	0	256	0.98	8
1	184	2.0	188	1.9	1
2	94	3.0	98	2.8	1
3	44	4.9	42	4.8	1
4	21	8.5	20	8.3	1
5	10	13.8	10	13.4	1
6	5	19.0	5	18.6	1
7	RESERVED		RESERVED		8

Figura 2.12. Dados para configuração de filtro passa-baixa no MPU6050.

Fonte: [InvenSense, 2013].

2.6 CONTROLADORES PID

Considerando os princípios da teoria de controle clássica, os controladores mais frequentes para sistemas com retroalimentação são os tipos PID (Proporcional, Integral e Derivativo), ou mesmo suas subdivisões P, PD e PI [Lima et al., 2014] Apud [Li et al., 2006].

O controlador PID é uma implementação clássica de controle em malha fechada que combina três componentes principais: a ação proporcional (P), a ação integral (I) e a ação derivativa (D) [Nise, 2020].

- **Ação Proporcional (P):** Esta ação é diretamente proporcional ao erro, que é a diferença entre o valor desejado (*setpoint*) e o valor medido. A ação proporcional busca reduzir o erro instantaneamente, porém pode causar no sistema um estado de erro em RP (regime permanente).

- **Ação Integral (I):** A ação integral atua sobre a soma dos erros ao longo do tempo, permitindo que o sistema elimine o erro em RP. Essa ação é fundamental para corrigir desvios acumulados, mas pode resultar em oscilações se não for ajustada corretamente.
- **Ação Derivativa (D):** A ação derivativa antecipa o comportamento futuro do erro, calculando a taxa de variação do mesmo. Essa componente ajuda a suavizar a resposta do sistema, reduzindo oscilações e melhorando a estabilidade.

Além do mais, essas ações podem ser combinadas em pares, formando os controladores PD (Proporcional Derivativo) e PI (Proporcional Integral).

O controlador PD, combina os efeitos das duas ações que formam o seu nome, onde dessa forma visa atuar na eliminação do erro de forma instantânea e permitir que a resposta do sistema seja suavizada, já que devido a sua ação busca agir rapidamente para contrabalancear oscilações. Porém, devido sua integração do erro ao longo do tempo, o controlador PD sozinho não consegue eliminar o erro em RP.

Já o controlador PI, combina as ações proporcional e integral, onde a ação proporcional responde de forma instantânea ao erro presente, e a ação integral acumula esse erro ao longo do tempo, garantindo que o sistema tenda a eliminar o erro de regime. Essa combinação permite que o controlador PI seja eficaz em sistemas que exigem precisão a longo prazo, corrigindo desvios que persistem ao longo do tempo. No entanto, embora ele diminua em RP, o controlador PI pode ter uma resposta mais lenta e, em certos casos, introduzir oscilações se a ação integral for mal ajustada. A Tabela 2.2 traz um resumo comparativo básico entre os controladores PI e PD. O parâmetro T_a se refere ao tempo de acomodação da resposta do sistema.

Tabela 2.2. Comparação entre controladores PD e PI.

Controlador	Erro em RP	T_a	Resposta	Estabilidade
PD	Presente	Menor	Rápida	Melhora, mas pode oscilar
PI	Busca Eliminar	Maior	Lenta	Melhora, porém mais lento

Um controlador PID reuni todas essas características, logo, é notável que esse tipo de controlador busca resolver todos esses problemas citados e, que normalmente são presentes em sistemas que necessitam de controle. No entanto, a eficácia de um controlador PID depende significativamente dos ganhos K_p , K_i e K_d . A sintonização pode ser realizada através de métodos empíricos, como o método de Ziegler-Nichols, Cohem-Coon, sintonia Lambda, ou mesmo por abordagens modernas, como algoritmos de otimização e IA [Nise,

2020]. Logo, Uma sintonização adequada garante que o sistema alcance um compromisso entre velocidade na resposta, estabilidade e minimização de oscilações.

O diagrama de blocos na Figura 2.13 representa a presença de um controlador PID em uma planta básica com realimentação unitária.

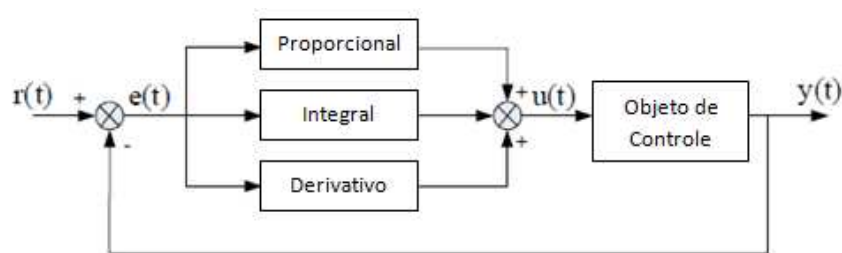


Figura 2.13. Diagrama de planta com Controlador PID.

Fonte: Autor.

3 METODOLOGIA

Esse capítulo, visa descrever a metodologia adotada na construção do trabalho em questão.

3.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A etapa inicial do trabalho foi levantar a bibliografia relacionada á temática em questão, com o objetivo de reunir e analisar trabalhos acadêmicos e científicos relacionados a Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), aplicação e desenvolvimento de controladores PID em VANTs ou drones, bem como sobre à modelagem desses dispositivos. Essa abordagem visa identificar, por meio de uma revisão sistemática, as principais contribuições, desafios e avanços tecnológicos que envolvem o controle PID no contexto da estabilidade e navegação de VANTs.

Para a realização da análise bibliográfica, foram selecionadas bases de dados de relevância científica, como o Portal de Periódicos da CAPES, IEEE Xplore, ScienceDirect, Scielo e Google Acadêmico. A busca nessas plataformas foi conduzida utilizando palavras-chave específicas, tais como: "controle PID", "drones", "VANTs", "modelagem de drones" e "controle de voo". Essas palavras foram combinadas com operadores booleanos para refinar os resultados e garantir que apenas trabalhos pertinentes ao tema fossem considerados, incluindo também buscas em inglês.

Foram estabelecidos critérios de inclusão para garantir a qualidade e relevância dos estudos selecionados. Os artigos analisados deveriam ter sido publicados nos últimos dez anos, uma vez que o campo de controle de VANTs é dinâmico e sujeito a rápidas inovações tecnológicas. Além disso, os trabalhos deveriam apresentar aplicações práticas ou simulações de controle PID, assim como discussões sobre modelagem matemática e controle de estabilidade. Foram excluídos estudos que tratavam de outras formas de controle não relacionadas a controladores PID ou que não apresentavam aplicações diretas no contexto de VANTs. Foram escolhidos a priori 10 trabalhos, após uma melhor filtragem utilizando os critérios já citados, foram considerados 5 trabalhos relevantes.

Os 5 trabalhos escolhidos foram discutidos com mais detalhes no Capítulo 1 desse trabalho, mais especificamente na Sessão 1.4, que contempla o estado da arte.

Um resumo dos trabalhos escolhidos, pode ser visto na Tabela 3.1

Tabela 3.1. Comparação de trabalhos sobre controle e modelagem de VANTs.

Referência	Ano	Assunto	Ponto forte	Diferencial
[Pinho, 2022]	2022	Controle de atitude de quadricóptero usando quatérnions	Evita singularidades de ângulos de Euler	Comparação entre quatérnions e ângulos de Euler
[Sarmiento et al., 2019]	2019	Desenvolvimento de protótipo de VANT para UFJF	Desenvolvimento com baixo custo	Evolução do protótipo com foco em automação
[Barna et al., 2019]	2019	Análise matemática de trajetória de VANTs	Modelagem detalhada da dinâmica de voo	ajuste de controle na precisão da trajetória, detalhe e complexidade na modelagem
[Baltazar, 2023]	2023	Modelagem e controle de quadricóptero Parrot Rolling Spider	Controle PID para estabilidade e resposta	Aplicação de controle moderno em uma plataforma acessível
[Silva et al., 2021]	2021	Controle de quadricóptero com PID sintonizado por algoritmo genético	Otimização do controle com algoritmos genéticos	Sintonia automática de PID com algoritmos genéticos

3.2 MODELAGEM

A partir do estudo dos trabalhos relacionados, foram realizados estudos sobre a modelagem e a dinâmica de VANTs, com o objetivo de construir um modelo dinâmico que descrevesse o comportamento de um quadricóptero, bem como analisar características relevantes, como forças de empuxo e os momentos gerados pelas hélices, e como esses fatores afetam diretamente sua atitude e posição. A partir desse modelo, foram obtidas as equações diferenciais que governam o movimento do VANT.

Pesquisas foram realizadas para determinar a massa dos VANTs, identificando que os valores variam aproximadamente entre 250 g e 1.400 g, com um valor médio em torno de 750 g. Esse valor foi escolhido para consideração no trabalho, pois representa uma expectativa razoável para um quadricóptero de pequeno a médio porte.

Para a modelagem do VANT, foi considerado a escolha do motor modelo E-MAX CF2822. Essa escolha se deu pelo fato desse modelo ser bastante utilizado na construção

de dispositivos desse tipo, além de que muitas informações pertinentes sobre o esse motor são de fácil acesso. O motor pode ser visto por meio da Figura 3.1.

Por meio da ficha técnica do modelo [EMAX, sd], obteve-se a relação de 1200 RPM/V, com um RPM máximo de até 7100. A partir desses valores, considerando a relação para rotações das hélices como sendo $\omega = R_p * V$, onde R_p são os 1200 RPM/V. Dessa forma, considerando um valor de 2 volts, temos uma relação de 2400 rpm.



Figura 3.1. Motor E-MAX CF2822.

Fonte: Google Imagens.

Fazendo uso da expressão apresentada na Equação 2.60, encontramos a FT para o motor E-MAX CF2822 como pode ser observado na Equação 3.1.

$$G_m(s) = \frac{1}{0.03s + 1} \quad (3.1)$$

Segundo [Heisler, 2002], em relação ao empuxo, para um ângulo de ataque de 7° tem-se um valor aproximado de 0,21 para o coeficiente de empuxo (C_e). Porém, vale salientar que os ângulos de ataque para as manobras realizadas pelo VANT, acontecem em torno de 2° (que foi a angulação considerada nesse trabalho). Logo, fazendo uso da expressão 2.13, obteve-se um valor de empuxo máximo aproximado de 8,277 N.

Conforme discutido anteriormente, neste trabalho, consideramos a estrutura do VANT com base na topologia positiva. Essa configuração consiste em uma massa central, acompanhada por quatro massas iguais localizadas nas extremidades de cada eixo, formando ângulos retos entre si, o que contribui para o equilíbrio da estrutura.

Dessa forma pra inércia, podemos calcular o seu momento pela relação [Raffo, 2011]:

$$I = \iiint_V \rho r^2 dV \quad (3.2)$$

E que juntamente com a expressão 2.27 e de acordo a com topologia mencionada, podemos definir os valores de momento de inércia como:

$$\begin{cases} I_{xx} = 2mr^2 = 0.0098 \text{ Kg m}^2 \\ I_{yy} = 2mr^2 = 0.0098 \text{ Kg m}^2 \\ I_{zz} = 4mr^2 = 0.0198 \text{ Kg m}^2 \end{cases}$$

Com m sendo o valor da massa e r , como sendo a distância do ponto do motor ao centro da estrutura ($r \approx 0.08m$). Um esquema básico ilustrando o valor de r pode de ser visualizado por meio da Figura 3.2.

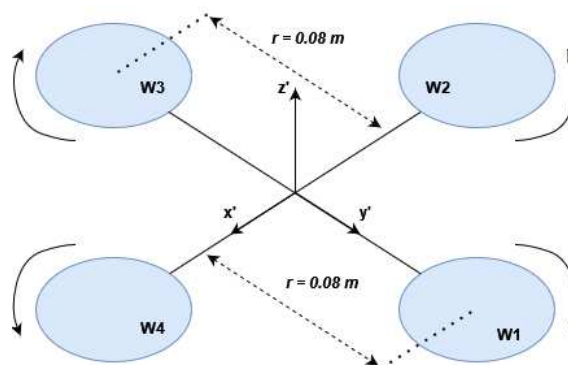


Figura 3.2. Esquema básico para o VANT.

Fonte: Autor.

3.2.1 Dinâmica de voo e obtenção das Funções de Transferências (FT)

Com intuito de se fazer uma análise e descrição do comportamento do voo simulado do VANT, e posteriormente obter as funções de transferências (FTs) correspondentes as dinâmicas de voo, consideramos o cenário em que as situações de voo acontecem em um ambiente *indoor*, ou seja um ambiente fechado, desconsiderando perturbações externas. Os cálculos, as análises e as plotagens foram feitos com o auxílio dos *softwares* matemáticos Scilab e MATLAB.

Para as dinâmicas analisadas foram considerados os parâmetros com seus respectivos valores para cada situação, conforme a Tabela 3.2, a seguir.

Tabela 3.2. Tabela de Cenários de voo.

Voo	u_0	w_0	θ_0	Força dos Motores	Torque
Pairado	0	0	0	Sustentação = 7.4 N	0
Somente em Z	0	0	0	Máxima	0
Somente em X	0	0	1°	$mg \cos(\theta)$	0
Em X e em Z	0	0	2°	Máxima	10^{-4} N/m
Voo com Arrasto	2.8 m/s	5.7 m/s	2°	Máxima	0

Para a situação de voo pairado foi simulado a força de empuxo como sendo a força de sustentação do VANT, ou seja ($Mg = 0,750 \times 9,81 = 7,4N$). Como só houve aplicação do valor de força, as velocidades em suas coordenadas não se alteraram.

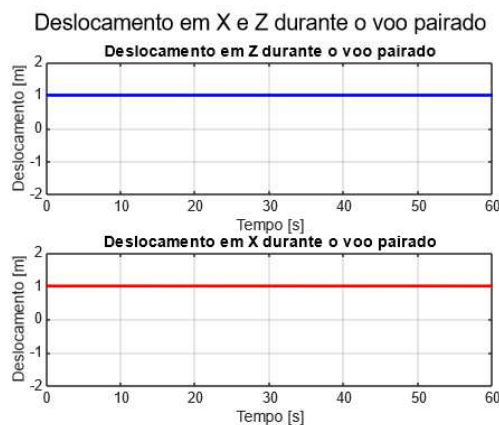


Figura 3.3. Deslocamentos no voo pairado.

Fonte: Autor.

Assim como podemos ver que as velocidades também não se alteram, para ambos os eixos. Conforme pode-se ver pela Figura 3.4.

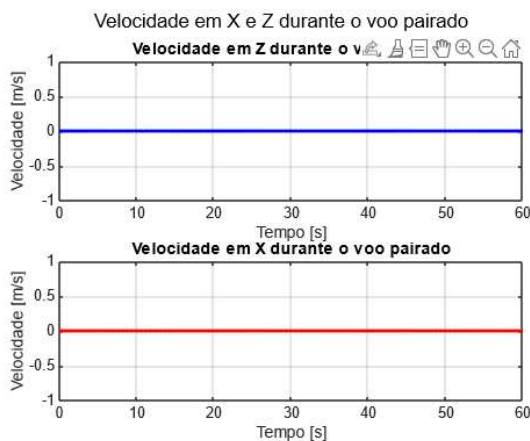


Figura 3.4. Velocidades nos eixos X e Z para voo pairado.

Fonte: Autor.

No caso em que o voo acontece no eixo Z, foi simulado uma força máxima para os motores, que considerando os motores utilizados para a modelagem é de 8,277 N, sendo assim capaz de causar o deslocamento para cima, já que o valor é maior que o valor de sustentação.

Para esse caso, se não tivermos variação θ e desde que se inicie o movimento com grau zero, não teremos variação de torque. Conforme pode ser visto por meio da Figura 3.5.

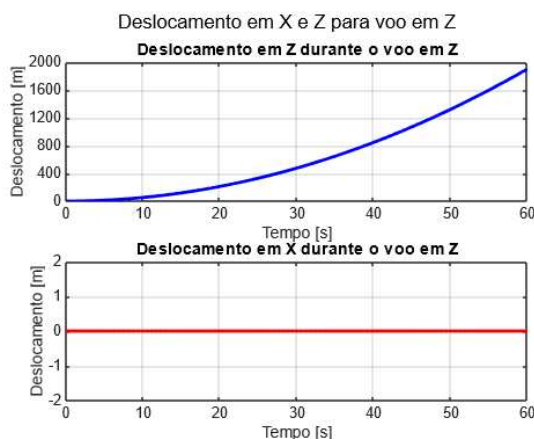


Figura 3.5. Voo somente no eixo Z.

Fonte: Autor.

Para a velocidade em relação aos eixos, temos a seguinte representação (Figura 3.6):

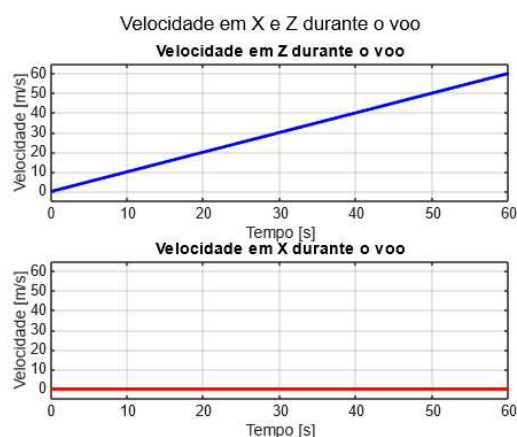


Figura 3.6. Velocidade nos eixos X e Z para o voo em Z.

Fonte: Autor.

Para o voo em X, necessitamos fazer uma variação na angulação ($\theta = 1^\circ$) e calculou-se que a força total de empuxo dos motores deveria ser igual a $mg/\cos(\theta)$, tendo em vista que esse seria o valor da componente do empuxo para a inclinação θ em que se cancelaria com o movimento na vertical (eixo z).

Assim ocorrerá movimento unicamente translacional como observa-se nos gráficos. Como podemos ver por meio da Figura 3.7.

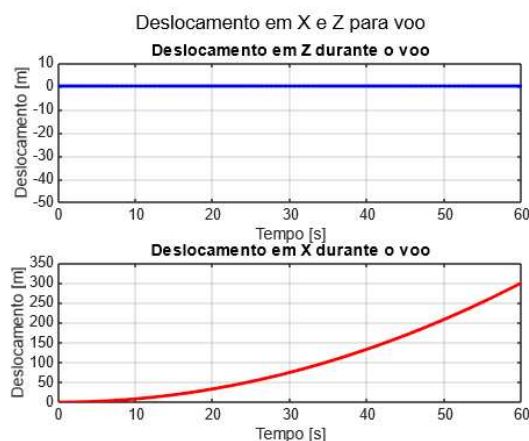


Figura 3.7. Deslocamentos nos eixos X e Y para voo em X.

Fonte: Autor.

A Figura 3.8 representa as velocidade em relação aos eixos, para o voo somente em X.

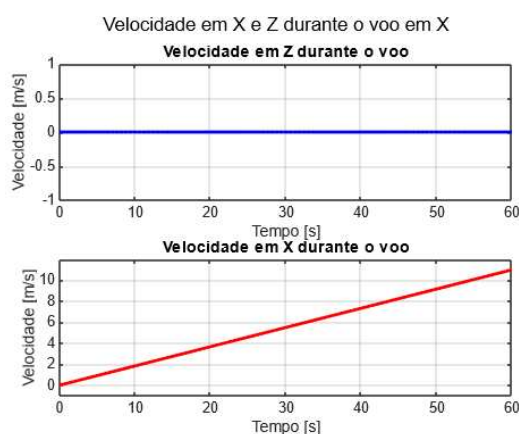


Figura 3.8. Velocidade nos eixos X e Z para o voo em X.

Fonte: Autor.

Analizamos o voo em X e Z ao mesmo tempo quando há ação de um torque de $10^{-4} N/m$ que é decorrente da diferença dos empuxos aplicados pelos motores, essa diferença é responsável pelo movimento de arfagem no VANT. Considerando a entrada da força como o empuxo da rotação máxima dos motores, ocorrendo um deslocamento de translação simultaneamente nos dois eixos. Para essa dinâmica em questão, temos a Figura 3.9 que mostra o deslocamento nos eixos X e Y.

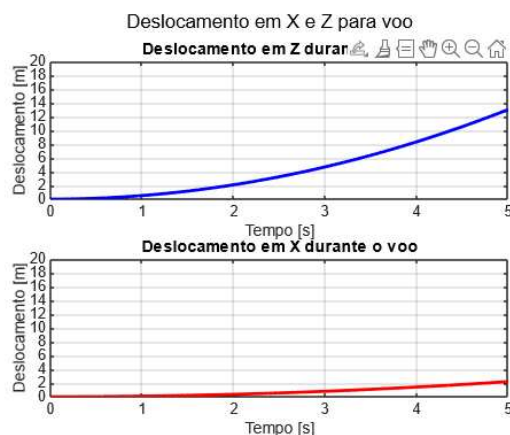


Figura 3.9. Deslocamento nos eixos para o voo simultâneo em X e Y .

Fonte: Autor.

Ao analisarmos as velocidade para essa dinâmica, por meio da Figura 3.10, podemos notar a diferença para os eixos em questão. A curva da velocidade em Z apresenta um padrão linear, enquanto em X ela se comporta de maneira exponencial, com valor consideravelmente maior em Z . Essa diferença pode ser atribuída, em primeiro lugar, aos pequenos ângulos de inclinação. Por outro lado, o comportamento da velocidade em X pode ser entendido pela aceleração resultante da decomposição da força máxima após a inclinação completa.

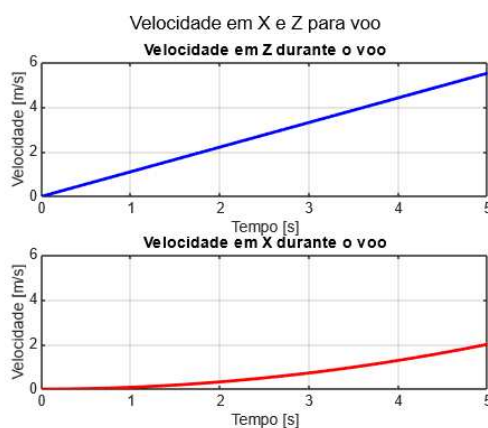


Figura 3.10. Velocidade nos eixos para o voo simultâneo em X e Y .

Fonte: Autor.

Por fim, analisando o voo em simultâneo em X e Y , agora considerando o efeito de arrasto, linearizando o sistema no pontos de operação em que $w_0 = 5,72$ e $u_0 = 2,8 \text{ m/s}$ e $\theta = 2^\circ$. w_0 e u_0 representam 30% das velocidades iniciais.

Podemos ver o comportamento para o deslocamento nas condições em que é utilizado força máxima dos motores, por meio da Figura 3.11.

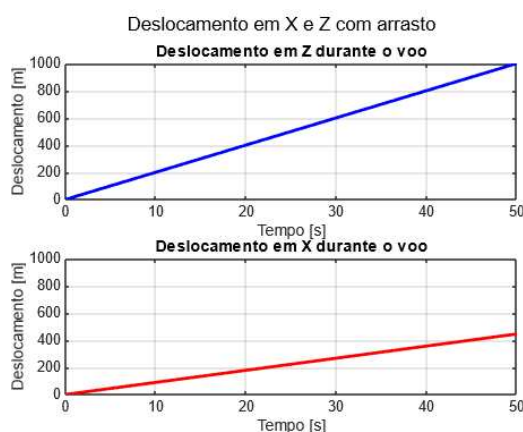


Figura 3.11. Deslocamento para voo em simultâneo X e Z com arrasto.

Fonte: Autor.

De forma análoga, temos o comportamento do voo para velocidade, que pode ser visto por meio d Figura 3.12.

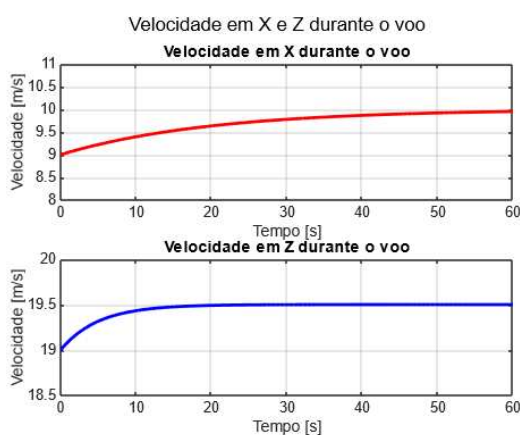


Figura 3.12. Velocidades para X e Y simultâneo com arrasto.

Fonte: Autor.

Analisando as curvas obtidas para a dinâmica de voo simultâneo com arrasto, pode-se perceber que as velocidades tanto para X quanto para Y, iniciando de modo crescente e se estabilizam depois de um certo tempo. Essa estabilização se dá devido ao efeito de arrasto que tende a aumentar de maneira proporcional a medida que a velocidade também aumenta.

Por meio das matrizes de estados apresentadas no Capítulo 2 e utilizando a função "ss2tf()" do Scilab, foi possível obter as funções de transferência relacionadas às entradas e variáveis de estados do VANT. Os valores utilizados, como as áreas, densidade do ar, estão mostrados na Tabela 3.3.

Tabela 3.3. Valores usados como parâmetros.

Parâmetro	Valor
Área Frontal A_x	0.0085 m^2
Área Lateral A_z	0.0133 m^2
Densidade do Ar ρ	1.172 kg/m^3
Gravidade g	9.81 m/s^2

A expressão 3.3 representa as FTs obtidas para a dinâmica do VANT, desconsiderando o efeito de arrasto. Podemos notar 8 funções de transferência não nulas para as 3 variáveis de entrada e 6 de estados.

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ z(s) \\ u(s) \\ w(s) \\ \theta(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49.05}{s^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.31}{0.067s+s^2} & \frac{-9.81}{s^2} \\ \frac{49.05}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1.31}{0.067+s} & \frac{-9.81}{s} \\ \frac{5}{s^2} & 0 & 0 \\ \frac{5}{s} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_\theta(s) \\ F(s) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Ao considerarmos como entrada a variável de força $F(s)$, temos as seguintes funções de transferência para correspondentes as variáveis de estado:

- $F(s)$ e $z(s)$: movimento de translação no eixo Z provocado por F (subida ou descida).

$$G_1(s) = \frac{1.31}{0.067 + s^2} \quad (3.4)$$

- $F(s)$ e $\omega(s)$: mudança na velocidade linear em Z provocado por F.

$$G_2(s) = \frac{1.31}{0.067 + s} \quad (3.5)$$

Para as demais variáveis as FTs são nulas.

Ao considerarmos o torque T_θ :

- $T_\theta(s)$ e $x(s)$: movimento de translação em X.

$$G_1(s) = \frac{49.05}{s^4} \quad (3.6)$$

- $T_\theta(s)$ e $u(s)$: mudança na velocidade linear X.

$$G_2(s) = \frac{49.05}{s^3} \quad (3.7)$$

- $T_\theta(s)$ e $\theta(s)$: movimento de rolagem (*roll*).

$$G_3(s) = \frac{5}{s^2} \quad (3.8)$$

- $T_\theta(s)$ e $q(s)$: variação de velocidade angular em relação a y.

$$G_4(s) = \frac{5}{s} \quad (3.9)$$

Como esperado, não temos efeito em relação as outras variáveis, sendo as FTs nulas. Para a entrada unitária, onde consideramos a ação da gravidade, temos:

- 1 e $z(s)$: translação em z.

$$G_1(s) = \frac{-9.81}{s^2} \quad (3.10)$$

- 1 e $w(s)$: alteração linear da velocidade em z.

$$G_1(s) = \frac{-9.81}{s} \quad (3.11)$$

Para as demais, as FTs são nulas.

Com as FTs relacionadas à dinâmica do VANT, as FTs para o sensor(2.62) e para o motor (2.60), foi possível montar a definição básica da planta, representada pela Figura 3.13.

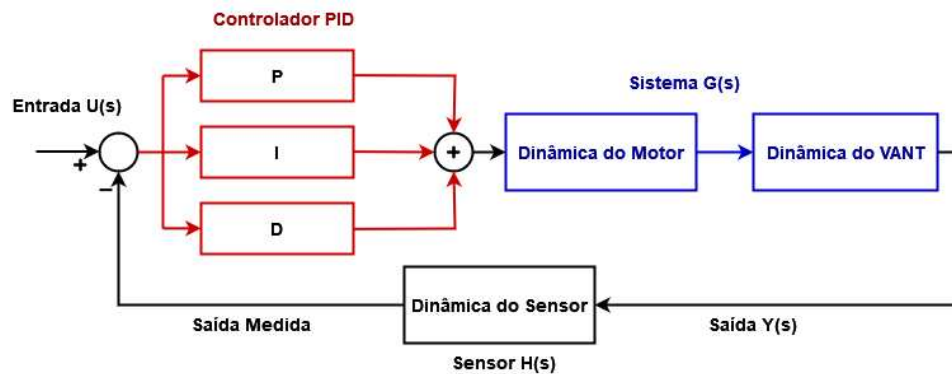


Figura 3.13. Diagrama básico da planta do VANT.

Fonte: Autor.

3.2.2 Estabilidade e Controle

A análise dos pólos de malha fechada e o lugar geométrico das raízes (LGR) são ferramentas cruciais para avaliar a estabilidade e o comportamento dinâmico de sistemas de controle.

Essa investigação se dá por meio da equação característica do sistema em malha fechada, cujas raízes, localizadas no plano complexo, determinam a estabilidade. Segundo [Castrucci et al., 2011], de maneira geral, um sistema é considerado estável quando todos os pólos possuem partes reais negativas, indicando que as respostas do sistema tendem a decair ao longo do tempo. Caso algum polo apresente parte real positiva, o sistema será visto como instável, visto que a resposta tende a crescer exponencialmente. No caso em que não houver raízes com parte real positiva, mas houver pólos localizados sobre o eixo imaginário, o sistema será classificado como marginalmente estável, o que não indica que o sistema seja estável, mas que pode gerar instabilidade, principalmente se sofrer perturbações.

Considerando o caso em que temos como entrada $F(s)$ para um movimento de translação em Z, considerando também as TFs relacionadas, bem como o diagrama exposto na Figura 3.13, a Figura 3.14 representa a configuração da planta para a dinâmica em questão, ainda sem a presença de controle.

Para a análise da estabilidade do sistema e suas características dinâmicas, foi utilizada a ferramenta "rltool" do MATLAB. Esta ferramenta permite a construção do lugar geométrico das raízes (*root locus*), que fornece uma representação gráfica do comportamento dos pólos de malha fechada. Analisando a dinâmica em questão foi possível ver que a resposta do sistema sem controle é instável, pois possui dois pólos situados no eixo imaginário do plano. Conforme pode ser visto por meio das Figuras 3.15 e 3.16, que representam o lugar

das raízes e a resposta do sistema sem controle para uma entrada degrau.

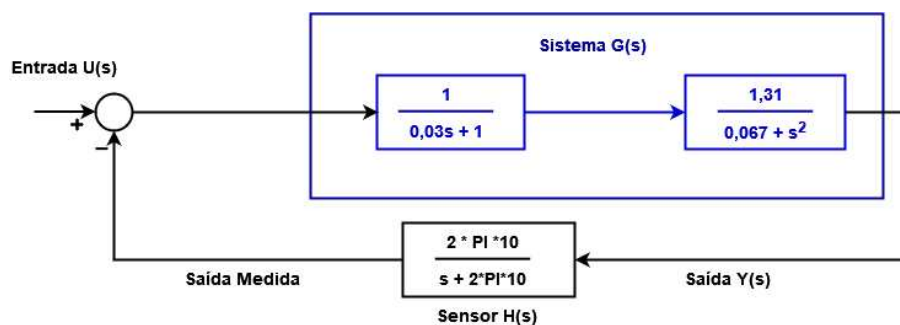


Figura 3.14. Diagrama da planta sem controle com TFs para translação em Z.

Fonte: Autor.

Os pólos do LGR do sistema sem controle representado na Figura 3.15, encontram-se em $(-62.8319 + 0i)$, $(-33.33 + 0i)$ e $(0 \pm 0.2588i)$.

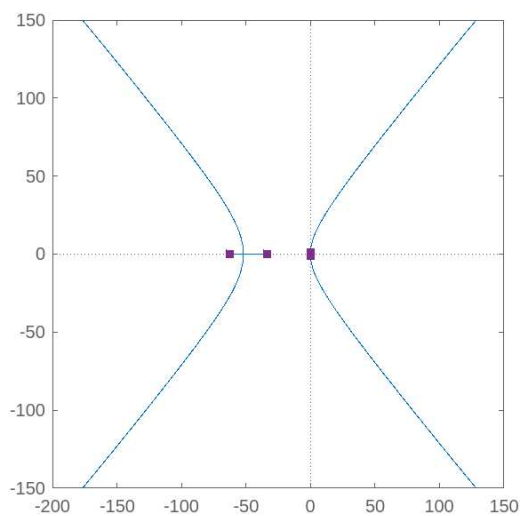


Figura 3.15. LGR para a translação em z sem controle.

Fonte: Autor.

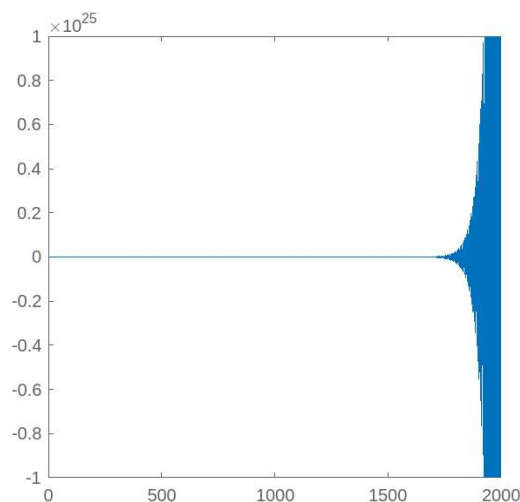


Figura 3.16. Resposta instável para a translação em z .

Fonte: Autor.

Por meio da ferramenta "*PDI Tuner*" do MATLAB é possível fazer a análise do sistema através do LGR obtido, onde, configurando os parâmetros da ferramenta é possível escolher o tipo de controlador (PI, PD ou PID), o tipo de resposta desejada, entre outros parâmetros. Fazendo uso de tal recurso, foi possível obter os ganhos do controlador PID para o sistema em questão. Ao exporta-se os dados do controlador obtido no sintonizador, pode-se obter a sua função de transferência, bem como seus ganhos K_p , K_i e K_d , através da função "piddata". A Figura 3.17 expõe o LGR para o sistema com controle.

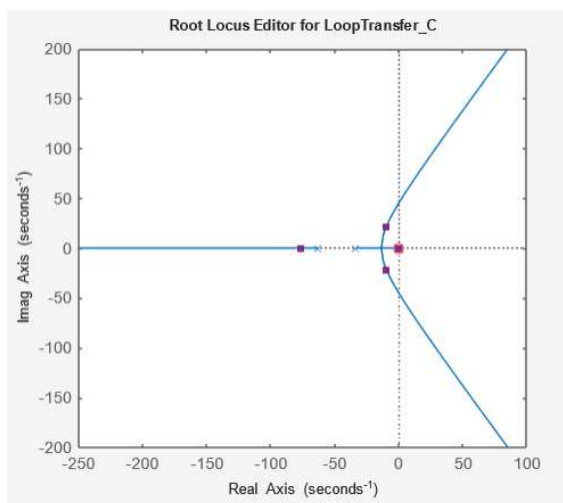


Figura 3.17. LRG para a dinâmica de translação com controle em Z .

Fonte: Autor.

A função de transferência do controlador PID obtido é expressa por:

$$G_{C1}(s) = \frac{15,881(s + 0,0781)^2}{s} \quad (3.12)$$

E os ganhos de $G_{C1}(s)$ encontram-se na Tabela 3.4.

Tabela 3.4. Valores dos ganhos do controlador $G_{C1}(s)$.

Ganho	Valor
K_p	2,4798
K_i	0,0968
K_d	15,8812

Agora com a presença do controlador no sistema, a resposta obtida para um degrau pode ser vista por meio da Figura 3.18, a seguir.

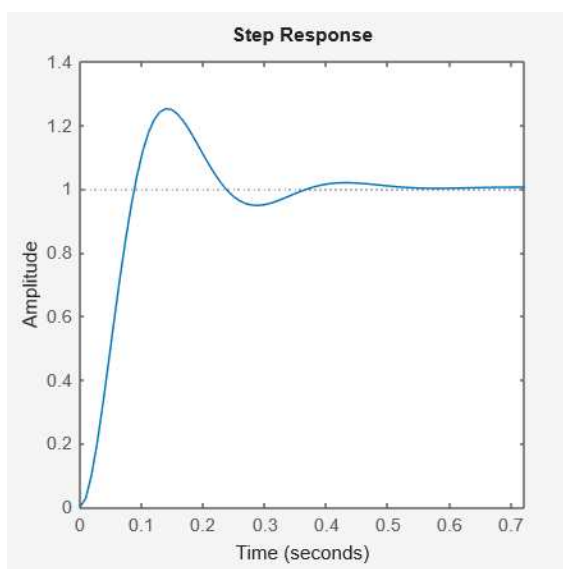


Figura 3.18. Resposta ao degrau para a translação em Z com controle.

Fonte: Autor.

Pode-se ver pelo gráfico um sobressinal (M_p) de 0.24, bem como um tempo de acomodação (T_a) de 0,48 segundos. Ainda sim essa resposta foi considerada satisfatória, uma vez que os valores estão dentro da faixa do aceitável e que a resposta saiu de instável para uma resposta estável e sem erro em RP.

Todo o processo de análise do LGR e sintonização dos parâmetros PID para a obtenção do controlador descrito nessa sessão, foi repetido para outras dinâmicas apresentadas no trabalho e, os resultados obtidos nesses processos, encontram-se no capítulo seguinte.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esse capítulo apresenta os principais resultados obtidos, seguindo como base parte do que foi descrito no Capítulo 3, que trata da metodologia do trabalho em questão. Os resultados se concentram em apresentar os controladores obtidos e aplicados nas dinâmicas de voo do VANT quadrrrotor que foram descritas anteriormente. Todos os resultados de simulações e análises apresentados nesse capítulo foram obtidos por meio do *software* MATLAB e suas ferramentas.

Antes de apresentarmos os resultados, é válido considerar que, por questões de simplificação do projeto, assim como na modelagem, não trataremos dos controladores para yaw (guinada) e pitch (arfagem), concentrando-nos na dinâmica de rolagem. A guinada (yaw), que diz respeito à rotação em torno do eixo Z, geralmente não é o foco central em projetos de controle, pois sua influência na performance do VANT tende a ser menor em comparação com os outros eixos. Quanto à arfagem (*pitch*), não a abordaremos devido à complexidade envolvida, visando a simplificação do projeto.

4.1 TRANSLAÇÃO EM Z ($F(s)$, $z(s)$)

Para a dinâmica de voo que relaciona $F(s)$ e $z(s)$, que descreve um movimento de translação no eixo Z, partiremos do resultado da simulação da resposta do sistema, tendo em vista que a análise do LGR, bem como o processo de obtenção e apresentação do controlador PID já foram expostos no capítulo anterior.

Definido o valores dos ganhos do Controlador PID, apresentados na Tabela 3.4, foi possível montar a malha de simulação usando os recursos da ferramenta *Simulink*. A figura 4.1 apresenta a resposta do sistema quando submetido a um degrau unitário.

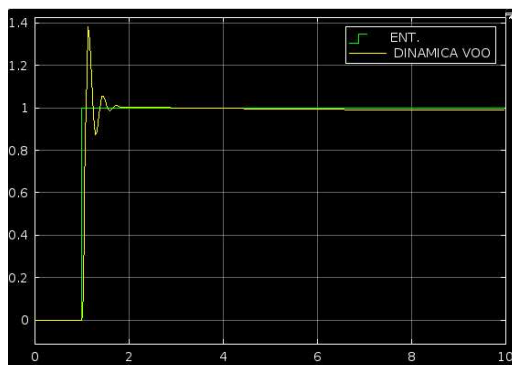


Figura 4.1. Resposta com controle simulada para translação em Z.

Fonte: Autor.

Percebe-se que a resposta obtida na simulação é bastante parecida com a resposta obtida etapa de análise e sintonia do controlador (Figura 3.18). O atraso para a entrada degrau foi com o intuito de facilitar a visualização da resposta.

Outro ponto que pode ser analisado é forma como a resposta vai se comportar para adição de um sinal degrau ao longo do tempo. Conforme pode-se ver por meio da Figura 4.2, a seguir.

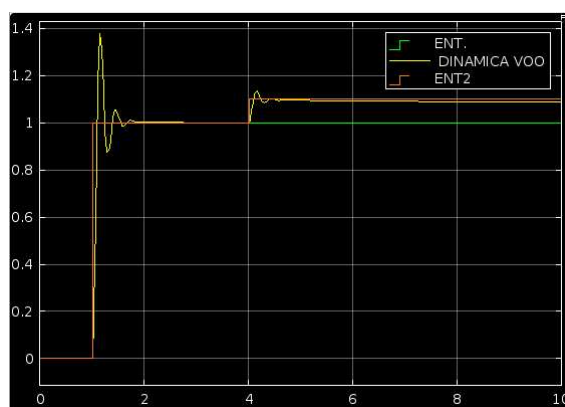


Figura 4.2. Resposta com controle com adição de sinal degrau na estrada.

Fonte: Autor.

Na simulação em questão, foi utilizado um sinal de degrau com amplitude de 0,1 aplicado na entrada no instante $t = 4s$ e somado como o degrau inicial. É possível ver que o sistema responde conforme esperado para a dinâmica em questão: após o primeiro regime transitório, a resposta atinge uma condição de estabilidade, como visto na Figura 4.1. Em seguida, com a aplicação do segundo degrau somando-se ao primeiro, a resposta do sistema volta a experimentar um novo regime transitório, semelhante ao primeiro, estabilizando-se novamente em um novo valor de equilíbrio.

Para o caso em que o sistema sofre a aplicação de um sinal como distúrbio (Figura 4.3), pode-se ver que a resposta do sistema sofre uma alteração em sua estabilidade por um período de tempo entre 4 e 6 segundos aproximadamente, voltando a se estabilizar após isso. O sinal utilizado como distúrbio foi um degrau com amplitude de 0,5 no instante de tempo $t = 4s$.

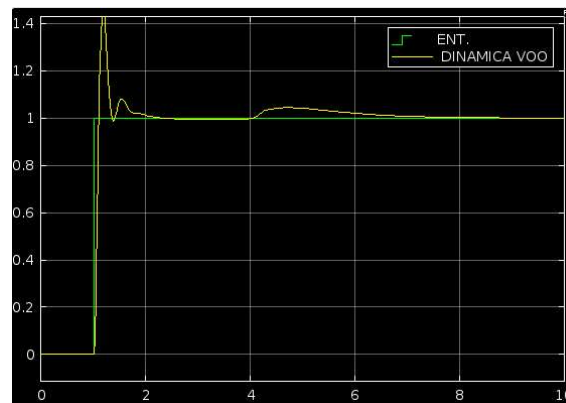


Figura 4.3. Resposta do sinal com controle ao sofrer um sinal degrau como distúrbio.

Fonte: Autor.

Logo, esse comportamento evidencia que o sistema é capaz de responder a perturbações e alterações de entrada sequenciais e retornar ao regime de estabilidade, a medida que cada novo degrau é aplicado ou que uma perturbação ocorra.

4.2 VARIAÇÃO NA VELOCIDADE LINEAR EM Z ($F(s)$, $\omega(s)$)

Utilizando a expressão 3.5, para a dinâmica em questão, ao analisarmos o LGR do sistema encontramos os polos em $(-62.8319+0i)$, $(-33.33+0i)$ e $(-0.0670+0i)$. Conforme podemos ver na Figura 4.4. Como os polos encontram-se todos no semiplano esquerdo (negativo), podemos definir que o sistema é estável.

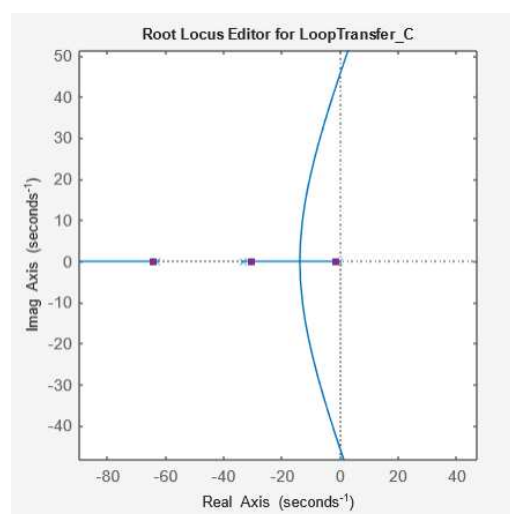


Figura 4.4. LGR do sistema sem controle para variação de velocidade linear em z .

Fonte: Autor.

Além de estável, o sistema para a dinâmica em questão também possui resposta amortecida, como podemos ver por meio da Figura 4.5.

Por mais que o sistema tenha uma resposta estável e amortecida, podemos notar que o tempo de acomodação é considerado alto ($T_a \approx 2,45$ s), considerando a dinâmica de um VANT.

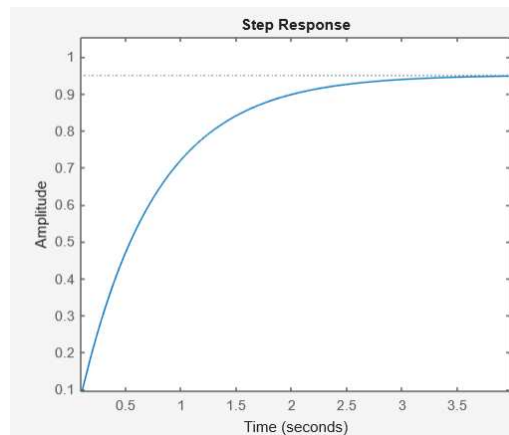


Figura 4.5. Resposta ao degrau do sistema sem controle para a variação linear da velocidade em z .

Fonte: Autor.

Dessa forma, é desejável utilizar um controlador para aprimorar a velocidade de resposta do sistema. Novamente, por meio do "*PID Tuner*", ajustaram-se os parâmetros para obter uma resposta mais adequada, resultando em um controlador com os ganhos listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1. Valores dos ganhos do controlador $G_{C2}(s)$.

Ganho	Valor
K_p	15,425
K_i	44
K_d	0,7659

Obtendo-se a FT do controlador como sendo:

$$G_{C2}(s) = \frac{0,766(s + 16,7)(s + 3,44)}{s} \quad (4.1)$$

Com os valores dos ganhos do Controlador PID, montando a malha de simulação no *Simulink*, obteve-se a seguinte resposta do sistema quando submetido a um degrau unitário, exposta na Figura 4.6.

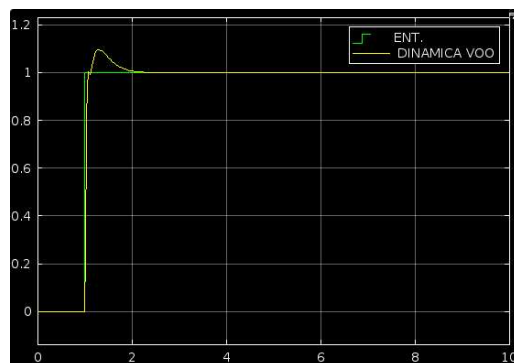


Figura 4.6. Resposta simulada com controle para variação da velocidade linear em Z .

Fonte: Autor.

Apesar de obter uma resposta melhorada em relação a velocidade, com um $T_a = 0,83s$, podemos perceber que a resposta passou a ter um sobressinal de $M_p = 0,09$. Ainda que a ação do controlador tenha inserido esse sobressinal, a resposta é considerada satisfatória, tendo em vista o baixo valor de M_p e a significativa melhora na velocidade da resposta.

No entanto, mais uma vez para o caso em que ocorra uma adição ao sinal degrau, é interessante que se faça uma análise da resposta em decorrência dessa alteração.

Dessa forma, de maneira similar ao que foi realizado na resposta da dinâmica anterior (Seção 4.1), foi aplicado um sinal de degrau de amplitude 0,1 e somado com entrada inicial no instante $t = 4s$. Conforme pode ser visto por meio da Figura 4.7.

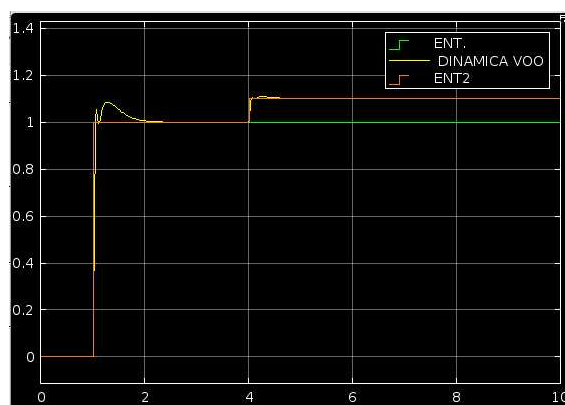


Figura 4.7. Resposta com controle e adição de sinal degrau.

Fonte: Autor.

É possível notar que mais uma vez o sistema consegue fornecer novamente uma resposta estável após passar por um regime transitório proporcionalmente semelhante ao primeiro degrau aplicado.

Analisando a resposta do sinal para o caso em que um sinal degrau de amplitude 0.5 é adicionado como um distúrbio ao sistema (Figura 4.8). Pode-se ver que a resposta consegue ser estabilizada por meio da atuação do controlador após passar por um instante de perda de estabilização muito curto.

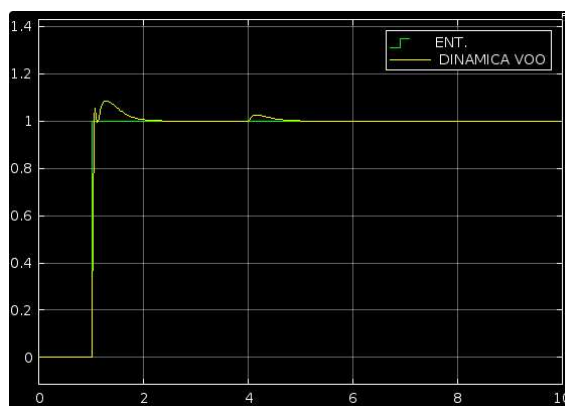


Figura 4.8. Resposta com controle após aplicação de sinal degrau como distúrbio.

Fonte: Autor.

4.3 MOVIMENTO DE ROLAGEM ($T_\theta(s)$, $\theta(s)$)

Para a dinâmica relacionada ao movimento de rolagem, descrito pela expressão 3.8, obteve-se o LGR do sistema sem controle, exposto na Figura 4.9.

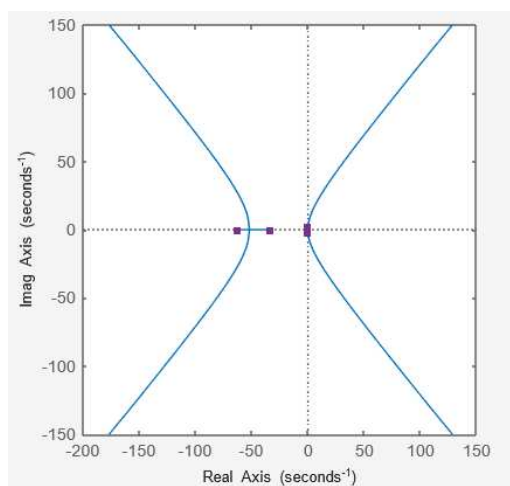


Figura 4.9. LGR do sistema sem controle para o movimento de rolagem.

Fonte: Autor.

O LGR para o sistema sem controle encontram-se em $(0 + 0i)$, $(0 + 0i)$, $(-62.8319 + 0i)$,

$(-33.3333+0i)$. Como podemos verificar pela resposta para o sistema sem controle exposta na Figura 4.10, o sistema é considerado instável, justificado pela presença de polos na região marginal de estabilidade.

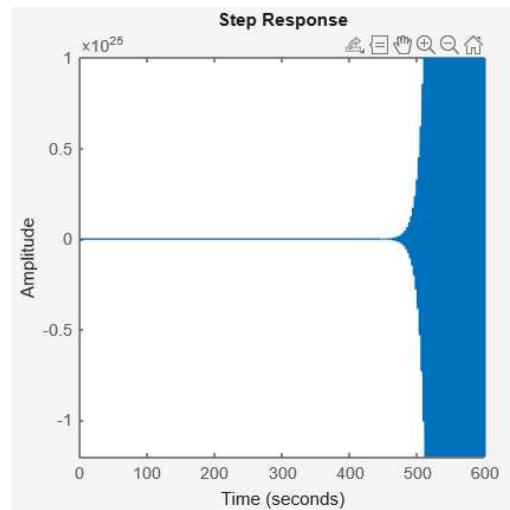


Figura 4.10. Resposta do sistema sem controle para o movimento de rolagem.

Fonte: Autor.

Fazendo a configuração dos parâmetros da ferramenta para sintonia do PID, obteve-se o controlador com os seguintes ganhos expostos na Tabela 4.2:

Tabela 4.2. Valores dos ganhos do controlador $G_{C3}(s)$.

Ganho	Valor
K_p	8,463
K_i	5,67
K_d	3,158

A equação da FT do controlador obtido para a dinâmica é dada pela expressão 4.2, abaixo:

$$G_{C3}(s) = \frac{3,158s^2 + 8,463s + 5,679}{s} \quad (4.2)$$

A resposta para o sistema com controle obtida é exposta na Figura 4.11, que apresenta um $T_a = 0,81$ s, com um sobressinal de $M_p = 0,32$. Apesar do sobressinal ser um pouco alto, a resposta ainda se mostra dentro do aceitável.

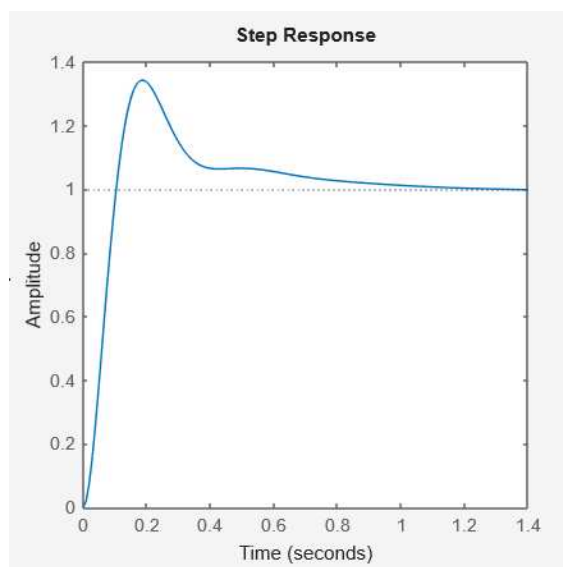


Figura 4.11. Resposta com controle para o movimento de rolagem.

Fonte: Autor.

Com os valores dos ganhos do Controlador PID, montando a malha de simulação no *Simulink*, obteve-se a seguinte resposta do sistema quando submetido a um degrau unitário, exposta na Figura 4.12.



Figura 4.12. Resposta simulada com controle para o movimento de rolagem.

Fonte: Autor.

Mais uma vez, considerando a capacidade do sistema responder a uma adição de sinal a entrada, aplicou-se novamente um degrau de amplitude 0,1 em $t = 4s$ e somado ao degrau inicial, conforme ilustrado na Figura 4.13.

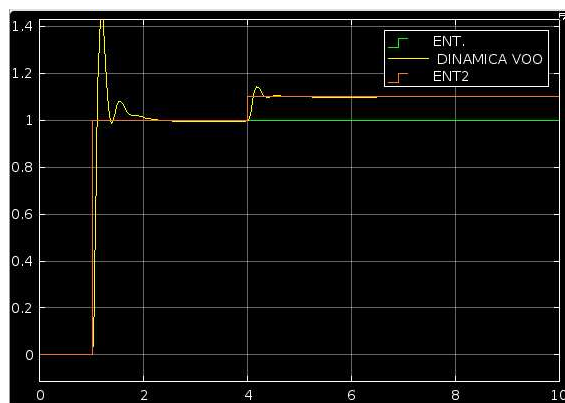


Figura 4.13. Resposta do sistema com controle com adição de um degrau à entrada.

Fonte: Autor.

A resposta do sistema, similar ao caso analisado anteriormente, apresenta um regime transitório curto e em seguida se estabiliza, o que indicando a capacidade do controlador de responder a uma adição de degrau a entrada.

De forma análoga às dinâmicas anteriores, a análise do comportamento da resposta com controle frente a uma perturbação (Figura 4.14) mostra que o controlador atua de maneira eficaz na estabilização do sistema. Após a aplicação de um degrau de amplitude 0,5 como sinal de perturbação, observa-se que o sistema retorna à estabilidade de forma satisfatória.

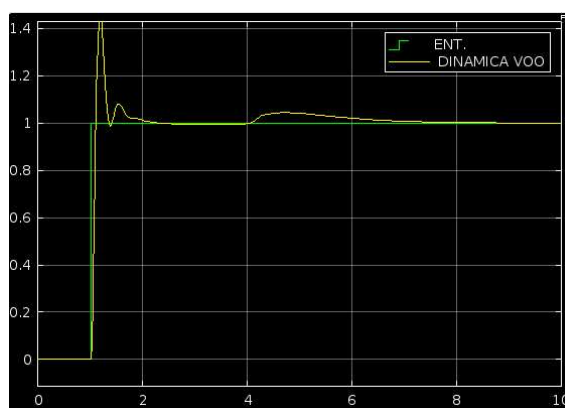


Figura 4.14. Resposta do sistema com controle com aplicação de um distúrbio.

Fonte: Autor.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou a modelagem e o projeto de um controle PID para um VANT quadricóptero, com o objetivo de fornecer uma base sólida para o desenvolvimento de drones utilizando materiais acessíveis. A robótica educacional é um campo em crescimento que promove a aprendizagem prática e a aplicação de conceitos teóricos em diversas disciplinas, como matemática, física e engenharia. Ao integrar a robótica nas salas de aula e, principalmente em escolas menos favorecidas, torna possível estimular o interesse dos alunos por ciência e tecnologia, além de desenvolver habilidades fundamentais, como resolução de problemas e trabalho em equipe.

A modelagem é uma área de estudo rica em aplicações práticas, sobretudo com é relacionada a VANTs. Visto isso, este trabalho apresentou um modelo que ainda que simplificado, conseguiu alcançar resultados satisfatórios. O controle PID desenvolvido e simulado demonstrou-se eficaz na regulação da dinâmica do quadricóptero com respostas satisfatórias, permitindo que o sistema respondesse de forma adequada às variações nas condições de voo. Essa abordagem não apenas aprofundou nosso conhecimento teórico, mas também forneceu uma visão geral sobre as complexidades da modelagem e controle de VANTs, o que é de grande valia para quem deseja explorar essa área.

Além disso, o uso de materiais acessíveis na construção do VANT permite que esse conhecimento seja compartilhado, democratizando o acesso à tecnologia. A construção de um VANT físico utilizando esses princípios pode servir como um projeto prático para estudantes, conectando a teoria à prática. A capacidade de criar um VANT funcional com recursos limitados abre portas para a experimentação e o aprendizado prático, fundamentais para a formação de novos profissionais na área de engenharia e tecnologia.

5.1 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Deixamos aqui como sugestão para trabalhos futuros, a exploração das dinâmicas que não foram contempladas neste trabalho, como a implementação de controle para as dinâmicas de *yaw* (guinada) e *pitch* (arfagem).

Além disso, a realização de um projeto que envolva a construção de um VANT físico poderia não apenas validar os resultados obtidos, mas também oferecer uma experiência prática enriquecedora aos alunos. Essa construção poderia ser complementada com a implementação sistemas de comunicação e controle autônomo, expandindo as funcionalidades do VANT.

Por fim, esperamos que este trabalho inspire novos projetos e pesquisas na área de robótica educacional, promovendo a disseminação do conhecimento em tecnologia acessível.

Ao fomentar a criatividade e o interesse dos alunos por ciência e tecnologia, contribuímos para a formação de uma nova geração de profissionais capacitados e apaixonados por inovação. A combinação da teoria com a prática não apenas enriquece o aprendizado, mas também prepara os estudantes para enfrentar os desafios do futuro, tornando-os agentes de mudança em suas comunidades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Afxentiou, 2018] Afxentiou, A. (2018). A history of drones: moral (e) bombing and state terrorism. *Critical Studies on Terrorism*, 11(2):301–320.
- [Alves, 2023] Alves, W. R. (2023). Otimizando matrizes de rotação e quatérnions com simd.
- [André Almeida, 2024] André Almeida (2024). Inovativos. Acesso em: 15 de julho de 2024.
- [Baltazar, 2023] Baltazar, P. C. R. (2023). Modelagem e controle de um quadricóptero parrot rolling spider.
- [Barna et al., 2019] Barna, R., Solymosi, K. J., & Stettner, E. (2019). Mathematical analysis of drone flight path. *AGRÁRINFORMATIKA/JOURNAL OF AGRICULTURAL INFORMATICS*, 10(2):15–27.
- [Bruzza et al., 2022] Bruzza, A., Paulus, M., Modolo, R. C. E., & Schmidt, V. (2022). Uso de drones no agronegócio: uma revisão sistemática. *Revista Ibero-Americana de Ciências Ambientais*, 13(6):140–153.
- [Castrucci et al., 2011] Castrucci, P. d., Bittar, A., & Sales, R. M. (2011). *Controle automático*. LTC.
- [Cavallaro, 2019] Cavallaro, S. L. H. (2019). *Modelagem, simulação e controle de um VANT do tipo quadricóptero*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [Craig, 2005] Craig, J. J. (2005). *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition.
- [de Jesus & Peres, 2023] de Jesus, L. C. & Peres, W. L. R. (2023). Os impactos da utilização de drones na agricultura. *Revista Contemporânea*, 3(11):22713–22736.
- [Domingues, 2009] Domingues, J. M. B. (2009). Quadrotor prototype. *Instituto superior técnico*, 5.
- [EMAX, sd] EMAX (s.d.). *Emax CF2822 motor specification*. "https://roboeq.ir/files/id/2073/name/Emax
- [Flores et al., 2021] Flores, J. P. S., Guerreiro, J. A. S., da Silva Junior, S. A., & e Silva, W. M. (2021). Modelagem dinâmica de um quadricóptero. Technical report, Universidade de São Paulo, Escola Politécnica da USP, São Paulo. Modelagem de Sistemas Dinâmicos.
- [Heisler, 2002] Heisler, H. (2002). *Advanced vehicle technology*. Elsevier.

- [Huang et al., 2009] Huang, H., Hoffmann, G. M., Waslander, S. L., & Tomlin, C. J. (2009). Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive maneuvering. In *2009 IEEE international conference on robotics and automation*, pages 3277–3282. IEEE.
- [InvenSense, 2013] InvenSense (2013). *MPU 6000 and MPU 6050 Register Map and Descriptions*. Inven Sense Inc, 1197 Borregas Ave, Sunnyvale, CA 94089 U.S.A., 4.2 edition. <https://www.alldatasheet.com/datasheet-pdf/view/1132807/TDK/MPU-6050.html>.
- [Junior & De Melo, 2021] Junior, I. L. V. & De Melo, J. C. (2021). Utilizando as tecnologias na educação: possibilidades e necessidades nos dias atuais. *Brazilian Journal of Development*, 7(4):34301–34313.
- [Junta & Cavichioli, 2016] Junta, R. & Cavichioli, F. A. (2016). Revolução dos drones na agricultura. *Simpó Nacional de Tecnologia em Agronegócio*, (8).
- [Kunertova, 2023] Kunertova, D. (2023). The war in ukraine shows the game-changing effect of drones depends on the game. *Bulletin of the atomic scientists*, 79(2):95–102.
- [Li et al., 2018] Li, F., Zlatanova, S., Koopman, M., Bai, X., & Diakit , A. (2018). Universal path planning for an indoor drone. *Automation in Construction*, 95:275–283.
- [Li et al., 2006] Li, Y., Ang, K. H., & Chong, G. C. (2006). Pid control system analysis and design. *IEEE Control Systems Magazine*, 26(1):32–41.
- [Lima et al., 2014] Lima, G. V., Souza, R., Moraes, A., & Moraes, J. (2014). Modelagem dinâmica de um veículo a reo n o tripulado do tipo quadricóptero. In *XII CEEL-Confer ncia de Estudos em Engenharia El trica*.
- [Longpre et al., 2022] Longpre, S., Storm, M., & Shah, R. (2022). Lethal autonomous weapons systems & artificial intelligence: Trends, challenges, and policies. *Edited by Kevin McDermott. MIT Science Policy Review*, 3:47–56.
- [Meerschaert, 2013] Meerschaert, M. (2013). *Mathematical modeling*. Academic press.
- [Nise, 2020] Nise, N. S. (2020). *Control systems engineering*. John Wiley & Sons.
- [Pinho, 2022] Pinho, B. C. B. (2022). Controle de atitude em quatérnions para quadrotores.
- [Pugliese et al., 2020] Pugliese, L. D. P., Guerriero, F., & Macrina, G. (2020). Using drones for parcels delivery process. *Procedia Manufacturing*, 42:488–497.
- [Raffo, 2011] Raffo, G. V. (2011). *Robust control strategies for a quadrotor helicopter: An underactuated mechanical system*. PhD thesis, Universidad de Sevilla.
- [Saraiva et al., 2000] Saraiva, A. M., Cugnasca, C. E., & Hirakawa, A. R. (2000). Aplicação em taxa variável de fertilizantes e sementes. *BORÉM, A.; GI DICE, MP; QUEIROZ, DM; MANTOVANI, EC*, pages 109–145.

- [Sarmiento et al., 2019] Sarmiento, P. P. S., FONSECA, E. O., & BASDAO, J. H. (2019). Projeto de um drone de baixo custo: Estudos e desenvolvimento. *Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia*.
- [Scalea et al., 2019] Scalea, J. R., Restaino, S., Scassero, M., Bartlett, S. T., & Wereley, N. (2019). The final frontier? exploring organ transportation by drone. *American Journal of Transplantation*, 19(3):962–964.
- [Silva et al., 2021] Silva, W. d. S. et al. (2021). Modelagem, planejamento de movimentos e controle pid sintonizado com algoritmo genético de um veículo aéreo autônomo do tipo quadrrorotor.
- [Van Verth & Bishop, 2016] Van Verth, J. M. & Bishop, L. M. (2016). *Essential mathematics for games and interactive applications*. CRC Press, 3^a edition.
- [Yuna, 2016] Yuna, J. (2016). *A Study on the Conformity of the US Drone Attacks to the International Law of War: A Case of Combat Drones in Pakistan, 2004 to 2013*. PhD thesis, Graduate School of International Studies Seoul National University Seoul, Republic of Korea.