



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DAKSON CÂMARA DA FÉ

**UTILIZAÇÃO DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES E ÁREAS DE
SUPERFÍCIES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO**

MOSSORÓ

2023

DAKSON CÂMARA DA FÉ

**UTILIZAÇÃO DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES E ÁREAS DE
SUPERFÍCIES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Licenciatura em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tony Kleverton Nogueira

MOSSORÓ

2023

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

F288u FÉ, DAKSON CÂMARA DA .
Utilização das integrais no cálculo de volumes
e áreas de superfície de sólidos de revolução /
DAKSON CÂMARA DA FÉ. - 2023.
54 f. : il.

Orientador: Tony Kleverson Nogueira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Licenciatura em
Matemática, 2023.

1. Sólidos de Revolução. 2. Volume e área dos
sólidos de revolução. 3. Método do fatiamento. 4.
Método das cascas. 5. Área de superfície. I.
Nogueira, Tony Kleverson , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva

CRB: 15/120

DAKSON CÂMARA DA FÉ

**UTILIZAÇÃO DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES E ÁREAS DE
SUPERFÍCIES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Licenciatura em
Matemática.

Defendida em: 30 /06 /2023.

BANCA EXAMINADORA

**TONY KLEVERSON
NOGUEIRA**

Assinado de forma digital por
TONY KLEVERSON NOGUEIRA
Dados: 2023.07.14 11:51:55
-03'00'

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira (UFERSA)
Presidente

**Mariana de Brito
Maia**

Assinado de forma digital por
Mariana de Brito Maia
Dados: 2023.07.14 11:52:33 -03'00'

Prof(a). Dr(a). Mariana de Brito Maia (UFERSA)



Documento assinado digitalmente
JAKCNEY LUAN AZEVEDO DE SOUSA
Data: 14/07/2023 11:49:02-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Jackney Luan Azevedo de Souza (UFERSA)
Membro Examinador

*Numa tarde bem tristonha
Gado muge em parar
Lamentando seu vaqueiro
Que não vem mais aboiar
Não vem mais aboiar
Tão dolente a cantar
Manoel Henrique da Câmara (In Memoriam).*

*Quem me apoiou, quem me ajudou, quem me fez
chegar até aqui, eu agradeço de coração. Deus,
família e amigos. Em especial, minha esposa
Janielly Kaline e meu filho Davi Manoel.
(presntes)*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a **Deus**, por todas as vitórias na minha vida. Por me conceder coragem, capacidade e perseverança para conquistar meus sonhos.

Também agradeço a Deus pela bela família que tenho. Obrigado Janielly Kaline pelo seu companheirismo, compreensão, incentivo e amor, com você ao meu lado tudo tem sentido. Obrigado Davi Manoel, você é a luz, a alegria, meu combustível, o motivo e a razão do meu sorriso e da minha vida. Obrigado Linda, obrigado filho. Amo vocês imensamente.

Aos meus pais, Marilene Henrique e Dalgivan Fernandes. A cada conquista, olho para vocês e só tenho a agradecer ao nosso bondoso Deus, por ter pessoas tão maravilhosas ao meu lado. Obrigado pai, obrigado mãe, obrigado Deus por mais esse presente, ser fruto, ser sangue do sangue dessas pessoas integras e amorosas.

Aos meus irmão, onde sempre estamos juntos haja o que houver. União, harmonia e respeito, existe muitos adjetivos para nos definir. Mas, dizer “somos irmãos” já é tudo. Obrigado Douglas, Marlene e Patrícia.

Aos meus sobrinhos Tayson, Lara e Isaac. Vocês são sinônimos de alegria, felicidade e muita diversão. Assim como, Anthony ao qual estamos ansiosos por sua chegada. Esse promete!

As minhas amigas de curso Hingridd Albano e Ceição Linhares. Vocês tiveram uma contribuição significativa nesse curso. Obrigado pela parceria e ajuda. Não esqueçam que Deus ajuda a quem cedo madruga. Grande Abraço.

Ao meu orientador e amigo, Professor Dr. Tony Kleverson, por aceitar me orientar e colaborar para a conclusão desse ciclo. Obrigado também, aos amigos membros da banca, o professor Dr Jackney Luan e a professora Dr Mariana de Brito, agradeço por aceitar o convite e pelas colaborações.

Agradeço a quem me apoiou, quem me ajudou, quem me fez chegar até aqui, eu agradeço de coração. Deus, a instituição, familiares, amigos e quem mais esteve ao meu lado, obrigado.

Estudar a Matemática é multiplicar a sabedoria,
dividir o pensamento, adicionar o raciocínio e
subtrair egoísmo. Porque o saber Matemático é
um saber sistemático.

Daniel Perato Furucuto

RESUMO

Em diversas áreas de estudo se faz necessários realizar modelagens matemáticas para descrever o comportamento de variáveis e comprovar, estatisticamente, descobertas científicas. A matemática esta inclusa em diversas áreas de estudo e atuação, sendo o Cálculo Diferencial e Integral uma das suas principais ferramentas. Com isso, o presente trabalho teve o objetivo principal de desenvolver pesquisa sobre a utilização das integrais na determinação de volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução. Abordando de forma específica, o desenvolvimento histórico das integrais, assim como a importância da utilização das integrais no cálculo de volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução por meio do método do fatiamento, abordando os métodos do disco e anel, e das cascas cilíndricas. Além de abordar sobre a determinação de áreas de superfície de revolução. Para isso, foi realizado uma pesquisa sobre o tema nas principais literaturas da matemática, contextualizando de forma simples e interativa as principais definições que desse suporte ao estudo das aplicações das integrais. Ao final, apresentamos de forma esclarecedora alguns exemplos sobre as aplicações de cálculo de volume e áreas usando as integrais. Ao final do trabalho, os objetivos foram alcançados, onde tentou-se produzir um material completo sobre aplicações de integrais no cálculo de volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução.

Palavras-chave: Sólidos de Revolução. Volume e área dos sólidos de revolução. Método do fatiamento. Método das cascas. Área de superfície.

ABSTRACT

In several areas of study, it is necessary to carry out mathematical modeling to describe the determination behavior and statistically verify scientific discoveries. Mathematics is included in several areas of study and performance, with Differential and Integral Calculus being one of its main tools. With this, the present work had as main objective to develop research on the use of integrals in the leadership of volumes and surface areas of solidity of revolution. Specifically addressing the historical development of integrals, as well as the importance of using integrals in calculating volumes and surface areas of a solid surface of revolution through the slicing method, addressing the disk and ring methods, and cascades cylindrical. In addition to addressing the experience of surface areas of revolution. For this, a research was carried out on the subject in the main mathematical literature, contextualizing in a simple and interactive way the main definitions that would support the study of the applications of integrals. At the end, we present in a way, we explain some examples about the applications of calculating volume and areas using integrals. At the end of the work, the objectives were achieved, where a material was produced with a wealth of information about applications of integration in the calculation of volumes and surface areas of solids of revolution.

Keywords: Solids of Revolution. Volume and area of solids of revolution. Slicing method. Shell method. Surface area.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Aumento do número de polígonos do método da exaustão.....	17
Figura 2	–	Área do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$	18
Figura 3	–	Aproximação da área do gráfico de $y = f(x)$ com o aumento de n	19
Figura 4	–	Gráfico da função $y = f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$	25
Figura 5	–	Partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos.....	25
Figura 6	–	Retângulos da região entre $y = f(x)$ e o eixo x	26
Figura 7	–	Sólido de revolução gerado em torno do x	32
Figura 8	–	Sólido de revolução gerado em torno do y	33
Figura 9	–	Sólido de revolução conhecidos.....	33
Figura 10	–	Diferentes formas de Fatias dos sólido de revolução.....	34
Figura 11	–	Fatias finas do sólido S	35
Figura 12	–	Discos perpendiculares ao eixo x	36
Figura 13	–	Discos perpendiculares ao eixo y	37
Figura 14	–	Anel perpendiculares ao eixo x	38
Figura 15	–	Anel perpendiculares ao eixo y	39
Figura 16	–	Sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo y	40
Figura 17	–	Casca cilíndrica obtido pela rotação da região R em torno do eixo y	40
Figura 18	–	Sólido formado por n cascas cilíndricas concêntricas em torno do eixo y	41
Figura 19	–	Cascas cilíndricas formadas por faixas retangulares.....	41
Figura 20	–	Área S de uma superfície de revolução.....	42
Figura 21	–	Formação da área S de uma superfície de revolução e tronco de cone.....	43
Figura 22	–	k -ésimo tronco de cone do segmento de reta do polígono.....	43
Figura 23	–	Sólido formado pelo método do disco.....	47
Figura 24	–	Sólido formado pelo método do anel.....	48
Figura 25	–	Sólido formado pelo método das cascas cilíndricas.....	50
Figura 26	–	Superfície de um sólido de revolução.....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Valores da área em função do aumento do número de polígonos.....	18
Tabela 2	–	Integrais imediatas.....	22

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	15
2.1	RESGATE HISTÓRICO DAS INTEGRAIS.....	15
2.2	O PROBLEMA DA ÁREA E O MÉTODO DA EXAUSTÃO.....	17
2.3	ESTUDO DAS INTEGRAIS.....	19
2.3.1	Antiderivadas.....	19
2.3.2	Integral indefinida.....	20
2.3.2.1	Propriedades das integrais indefinidas.....	21
2.3.2.2	Integrais imediatas.....	22
2.3.3	Integração por substituição.....	23
2.3.4	Integral pela Soma de Riemann.....	24
2.3.5	Integral definida.....	26
2.3.5.1	Propriedades das integrais definidas.....	28
2.3.6	Teorema Fundamental do Cálculo	29
3	VOLUMES E ÁREAS DE SUPERFÍCIE DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	32
3.1	VOLUME DE SÓLIDOS POR FATIAMENTO.....	33
3.1.1	Método do Disco.....	36
3.1.2	Método do Anel (Arruelas).....	37
3.2	VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS.....	39
3.3	ÁREAS DE SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO.....	42
4	APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES E ÁREAS DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO.....	46
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	53
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência de extrema importância para a sociedade, visto que suas aplicações e atribuições são inúmeras e indispensáveis para o mundo contemporâneo e para o desenvolvimento das ciências e tecnologia. Cotidianamente, nos deparamos com diversos problemas em diversas áreas do conhecimento que envolve fatos matemáticos e cujas suas soluções estão agregadas a métodos matemáticos.

De acordo com Silva (2016), ensinar e aprender matemática é processo contínuo e que demanda tempo para a sua eficácia, onde um dos grandes desafios no ensino da matemática é tornar a sua contextualização lógica a partir da sua aplicabilidade no cotidiano das pessoas. Muitos estudantes aprendem a desenvolver formular e fazer contas, contudo o entendimento daquilo que foi executado não é explicado pelos mesmos, em função de não conhecer as áreas de atuação da matemática.

Um dos principais temas discutidos pela matemática é o cálculo diferencial e integral. Essa ferramenta é utilizada em diversas áreas de estudo das ciências exatas, biológicas e naturais, tais como: física, química, economia, engenharia, medicina e outras áreas cujos os problemas correlatados possam ser modelados matematicamente. Por esse motivo, o ensino do cálculo diferencial e integral é ensinado em diversos cursos de graduação, como por exemplo o curso de licenciatura em matemática (CARVALHO; MACÊDO; LOPES, 2021).

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2013) a apresentação dos conceitos de cálculo ocorreu na ordem inversa daquelas que é, corriqueiramente, apresentada nos livros de cálculo e nas disciplinas das universidades. As primeiras aparições das integrais surgiram com a utilização em processos ligados ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos. Posteriormente, criada bem mais tarde, surgiram diferenciação que resultou de problemas sobre a tangente e curvas e questões envolvendo máximos e mínimos de funções. Ficando comprovado que a integração e a diferenciação estão relacionadas entre si, sendo uma operação inversa da outra (EVES, 2011).

Muitos matemáticos antigos, das civilizações primitivas, conheciam as fórmulas utilizadas para determinar áreas de polígonos com geometria definida como retângulos, triângulos, quadrados e trapézios. Porém, quando se tratava de figuras geométricas com contornos curvilíneos, como o círculo, os matemáticos primitivos se deparavam com grandes dificuldades para encontrar as devidas fórmulas para determinar suas áreas e volumes. Com

isso, o primeiro progresso veio com Arquimedes, que de forma geral, obteve um método para determinar áreas de regiões delimitadas por arcos de círculos, paraboloides e espirais e vários outros tipos de curvas por meio do método da exaustão (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Diante disso, fica evidente a importância de estudar métodos para calcular áreas e volumes de elementos com geometria não definida, onde um dos principais meios desenvolvidos e utilizados é o uso do cálculo da integral. Assim, o objetivo geral do presente trabalho é realizar uma abordagem mais ampla sobre a utilização das integrais na determinação do cálculo de volume e áreas de superfície de sólidos de revolução. Abordando de forma específica o método do fatiamento para calcular volumes de sólidos, com ênfase no método do disco e no método do anel. Assim como também, a utilização do método das cascas cilíndricas na determinação de volumes de sólidos de revolução e como calcular áreas de superfície de sólidos de revolução. De forma que o trabalho possa servir como material de apoio para disciplinas de cálculo diferencial e integral e também para trabalhos futuros.

Para conseguir os objetivos apresentados, o trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 é apresentada a fundamentação teórica, fazendo um resgate histórico das integrais, falando sobre o problema da área e o método da exaustão, assim como as integrais indefinidas e definidas. No capítulo 3 abordamos sobre os métodos utilizados para calcular volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução. Já no capítulo 4 encontra-se as aplicações das integrais no cálculo de volumes e áreas de sólidos de revolução. Enquanto no capítulo 5 tem-se as considerações finais do trabalho. Por fim, no capítulo 6 é apresentado as referências bibliográficas utilizados na escrita do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 RESGATE HISTÓRICO DAS INTEGRAIS

O século XVII foi extremamente importante para o desenvolvimento da matemática, graças a grande quantidade de novas pesquisas elaboradas. Contudo, a realização matemática de maior destaque foi o surgimento do cálculo, próximo do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Leibniz (EVES, 2011). Já para MAOR (2003), é aos gregos que se deve a ideia que dá sustentação ao cálculo. Pois, de acordo com o autor, a ideia de que o cálculo foi inventado por Newton e Leibniz durante a década de 1665 – 1675, não é inteiramente verdade. A ideia central do cálculo de usar limites para derivar resultados sobre objetos comuns e finitos, recua até a época dos antigos gregos e chega a Arquimedes.

Arquimedes de Siracusa era um lendário cientista cuja invenções teriam desafiado os invasores romanos de sua cidade durante mais de três anos, e ele teria sido um dos primeiros a usar o conceito de limites para calcular a área e o volume de várias formas planas e sólidas (MAOR, 2003). Arquimedes de Siracusa, juntamente com Newton e Gauss são considerados os três grandes matemáticos da história. Uma das suas principais invenções matemáticas está no método da exaustão, utilizado para calcular áreas e volumes, utilizado para encontrar áreas limitadas por parábolas e espirais e volumes cilíndricos, segmentos de esferas e paraboloides. Onde para tal finalidade, utilizou procedimentos para aproximar os valores para π . Dentre os trabalhos que mais orgulhava Arquimedes, destacamos o método utilizado para determinar o volume de uma esfera, onde o mesmo demonstrou que o volume de uma esfera era $\frac{2}{3}$ do volume do menor cilindro que a contém. Esse feito era tão significativo para Arquimedes que o mesmo pediu para que fossem gravados na lápide de seu túmulo a figura de uma esfera e um cilindro (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Boyer (2010) afirma que o primeiro registro de uma possível estimativa de determinação do cálculo de uma área de uma superfície curva, encontra-se no Papiro Egípcio de Moscou, que foi escrito por volta de 1890 a.C., onde o escriba utiliza uma fórmula semelhante a integração para determinar a área da superfície de um cesto. O mesmo Papiro ainda apresenta outros problemas matemáticos envolvendo a área de uma pirâmide e o volume de um tronco de pirâmide.

Para Eves (2011), outra grande contribuição ao problema da área foi utilização da quadratura do círculo. De acordo com o autor, era possível exaurir a diferença existente entre a área de um círculo e um polígono regular inscrito nele mesmo. Para tanto, era necessário realizar sucessivas duplicações do número de lados do polígono, e sendo possível construir um quadrado com área de mesmo módulo à do círculo. Tal abordagem, se assemelha ao conhecido método da exaustão de Arquimedes.

Ainda de acordo com Eves (2011) os gregos antigos tinham conhecimento para calcular áreas de triângulos, círculos e demais áreas de figuras de geometria conhecida. Contudo, calcular áreas de outras figuras de geometria desconhecida era considerado um problema sem solução. Até que Arquimedes, desenvolveu o método do equilíbrio para calcular a área de regiões limitadas por esperais, parábolas e outras curvas. Arquimedes utilizava o método do equilíbrio para se auxiliar de um corpo para determinar o cálculo da área ou volume, e em seguida usava o método da exaustão para conseguir demonstrar de forma rigorosa os seus resultados.

Boyer (2010) afirma que o método da exaustão é o equivalente do cálculo integral, ao qual foi creditado por Arquimedes a Eudoxo. O autor ainda afirma que uma grandeza pode ser subdividida infinitamente. Já de acordo com Eves (2011), pode-se subtrair de uma grandeza qualquer, uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte que não seja menor que sua metade, e assim sucessivamente, até chegar a uma grandeza menor que qualquer outra predominantemente da mesma espécie.

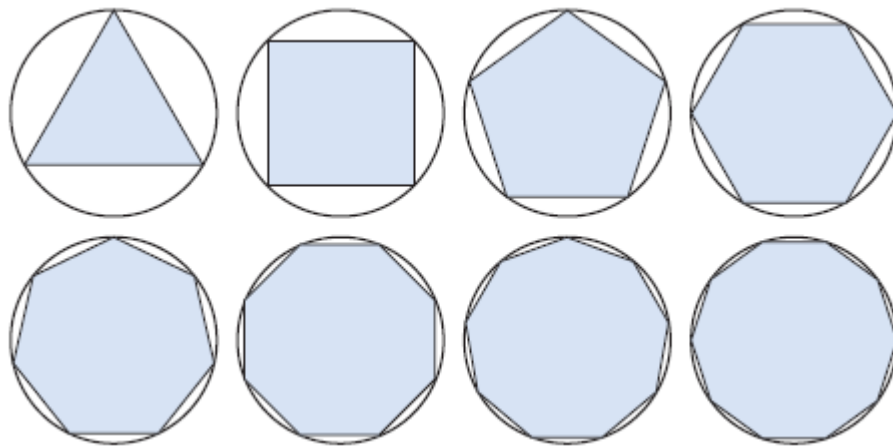
Entre todos os matemáticos antigos, Arquimedes foi quem chegou mais próximo ao atual modelo de integração, para tanto o mesmo foi quem melhor utilizou o método da exaustão. Com isso, Arquimedes conseguiu chegar a resultados semelhantes a muitas integrais definidas atualmente utilizadas para determinação do cálculo de áreas e volumes (EVES, 2011)

Torre e Giraffa (2009) afirmam que outros matemáticos também contribuíram bastante para o nascimento do cálculo, a exemplo de Fermat e Johan Bernoulli, onde o primeiro desenvolveu técnicas para determinar áreas de parábolas maiores, através da aritmética do infinito. Já o segundo, foi quem criou o nome de “cálculo integral”, sendo o seu livro publicado mais tarde pelo seu irmão mais velho Jaques Bernoulli, em 1960. Atualmente o cálculo de integrais é bastante usado em diversas áreas do conhecimento científico e com aplicações diversas na economia, engenharia, astronomia, química, física e medicina.

2.2 O PROBLEMA DA ÁREA E O MÉTODO DA EXAUSTÃO

A determinação de áreas de figuras com geometria definida ficou simples de executar após as definições dos matemáticos primitivos. Contudo, o problema de encontrar áreas de figuras com perfil geométrico curvilíneos ainda persistiu. Até que Arquimedes, de maneira genial, desenvolveu o método da exaustão. Onde esse método, quando aplicado ao círculo, consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares dentro do próprio círculo, permitindo que o número de lados do polígono cresça de forma indefinida, como apresentado na Figura 1. A medida que cresce o número de lados do polígono, a área do mesmo tende a igualar com a área do círculo, pois os polígonos tendem a exaurir a região delimitada pelo círculo (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Figura 1: Aumento do número de polígonos do método da exaustão.



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014)

Para entender melhor a funcionalidade do método da exaustão, considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio igual a 1 (uma) unidade de medida, e tomemos por $A(n)$ a área desse polígono regular. A medida em que os valores de n aumentam, os valores correspondentes de $A(n)$ se aproximam de π (unidades de área), conforme apresentado na Tabela 1, a seguir.

Tabela 1: Valores da área em função do aumento do número de polígonos.

n	$A(n)$
100	3,13952597647
200	3,14107590781
300	3,14136298250
400	3,14146346236
500	3,14150997084
1.000	3,14157198278
2.000	3,14158748588
3.000	3,14159035683
4.000	3,14159136166
5.000	3,14159182676
10.000	3,14159244688

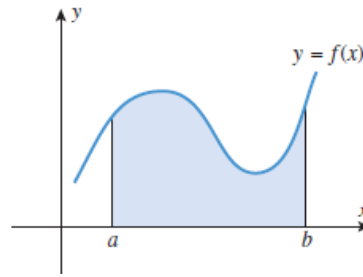
Fonte: Adaptado de Anton, Bivens e Davis (2014)

Dessa forma, para um círculo de raio 1, o método da exaustão equivale a uma equação do tipo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n) = \pi \quad (1)$$

Simmons (1987) relata que os matemáticos gregos tinham muitas dúvidas quanto ao conceito de infinito e evitavam seu uso. Ficando para Newton e Leibniz os créditos da descoberta de um método matemático utilizado para determinar as áreas que utilizavam a noção de limites. Tal método se resume no problema geral de encontrar a área sob o gráfico de uma região delimitada por uma função $y = f(x)$ e duas retas $x = a$ e $x = b$, conforme apresentado na Figura 2.

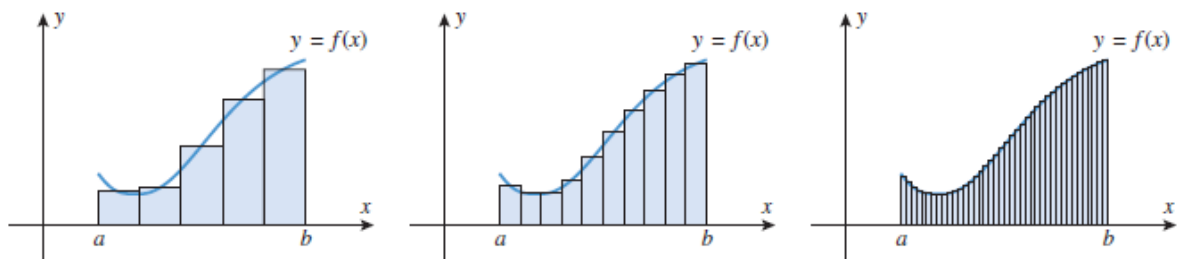
Figura 2: Área do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$.



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014)

Esse é o método dos retângulos para calcular áreas, que consiste em dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos igualmente espaçados, e em cada um deles construir um retângulo que vai do eixo até algum ponto da curva $y = f(x)$. Dessa forma, a área dos retângulos pode ser interpretada como uma aproximação da área exata sob a curva e acima do intervalo $[a, b]$, ou seja, a medida que n aumenta, as aproximações da área torna-se cada vez melhor como apresentado na Figura 3.

Figura 3: Aproximação da área do gráfico de $y = f(x)$ com o aumento de n .



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014)

A soma das áreas dos retângulos tende a área exata do gráfico da função como um limite. Dessa forma, se denotarmos A a área exata da função $y = f(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$, e A_n for a aproximação de A para subdivisão de n intervalos, logo:

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \quad (2)$$

é chamado de método dos retângulos para o cálculo da área A .

2.3 ESTUDO DAS INTEGRAIS

2.3.1 Antiderivadas

De acordo com Thomas, Weir e Hass (2013), existe dois modos para encontrar uma função $f(x)$ a partir de seus valores já conhecidos e também de sua derivada $f'(x)$. Um dos

processos é encontrar uma fórmula que forneça todas as funções que poderiam ter a função f como derivada, sendo essas funções chamadas de primitivas de f , que é a fórmula que as fornece elas, chamada de integral indefinida de f . Já o segundo procedimento é utilizar o valor conhecido para determinar a primitiva associada a partir daquelas na integral indefinida. Com isso, se podemos encontrar ao menos uma primitiva, então podemos determinar todas possíveis.

Leithold (1994) define as primitivas da seguinte forma:

Definição 1: Uma função F será chamada de antiderivada (ou primitiva) de uma função f num intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Segundo Guidorizzi (2008), sendo F uma primitiva de f em I , então, para toda constante C , $F(x) + C$ também é uma primitiva de f . Contudo, se duas funções possuem derivadas iguais num intervalo, elas podem diferir entre si por uma constante nesse intervalo, como apresentado no teorema a seguir:

Teorema 1: Se f e g forem duas funções, tais que $f'(x) = g'(x)$ para todo x no intervalo I , então haverá uma constante C , tal que $f(x) = g(x) + C$, para todo x em I .

Assim, segue que as primitivas de f em I são as funções dadas da forma $F(x) + C$, com C constante.

2.3.2 Integral indefinida

O processo utilizado para encontrar as antiderivadas é chamado de antidiferenciação, ou ainda de antiderivação, ou ainda de integração. Sendo esse último, o mais usual na literatura. Dessa forma, considere a equação:

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x) \quad (3)$$

integrando a função $f(x)$, obtemos uma antiderivada na forma $F(x) + C$. Para enfatizar tal processo, reescrevemos a equação (3) usando a notação de integral.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (4)$$

onde devemos interpretar que C é uma constante qualquer. Ressalta-se que as expressões (3) e (4) são representações distintas, contudo, expressam o mesmo fato.

Perceba que, se derivarmos uma antiderivada de $f(x)$, iremos volta a obter a função $f(x)$ (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014). Ou seja,

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x) \quad (5)$$

Da expressão (4) sabemos que C é chamada de constante de integração. O símbolo $\int$ é denominado de sinal de integração, já a expressão $f(x)$ é chamado de integrando e x é a variável de integração. Também podemos dizer que a função $f(x)$ está sob o sinal da integral na expressão $\int f(x) dx$. Assim, concluímos que o processo utilizado para calcular a expressão $\int f(x) dx$, ou seja, encontrar $F(x) + C$, é denominada de integração indefinida. Onde, a palavra indefinida é usada em função da constante C , poder assumir qualquer valor e não poder ser determinada pela função $f(x)$. Assim, devido a natureza arbitrária que a constante de integração C assume, a expressão $\int f(x) dx$ é chamada de integral indefinida (MUNEM; FOULIS, 1982).

2.3.2.1 Propriedades das integrais indefinidas

Sempre que derivarmos uma função, esta pode ter seu processo invertido e a função ser reescrita na forma de integral. Podemos exemplificar com a regra da potência, onde

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1} \quad (6)$$

torna-se,

$$\int nx^{n-1} dx = x^n \quad (7)$$

ou seja, podemos reescrever a equação (7) na forma integral mais padrão e usual na literatura, da seguinte forma:

Teorema 2: Regra da Potência - Se n for um número racional,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \quad (8)$$

para integrar uma função potência, some ao expoente uma unidade e divida a nova potência pelo novo expoente (LEITHOLD, 1994).

Dessa forma, Leithold (1994) apresenta outros teoremas com regras básicas para as integrais indefinidas.

Teorema 3: Regra da homogeneidade – Se a é uma constante, então

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx \quad (9)$$

Teorema 4: Regra da adição - Se f_1 e f_2 estão definidas no mesmo intervalo, então

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \quad (10)$$

Teorema 5: Regra da linearidade - Se $f_1, f_2, \dots, f_n$ estão definidas no mesmo intervalo e $a_1, a_2, \dots, a_n$ e são constantes, então

$$\int [a_1f_1(x) + a_2f_2(x)]dx = a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \dots + a_n \int f_n(x)dx \quad (11)$$

2.3.2.2 Integrais imediatas

Flemming e Gonçalves (2006) afirmam que o processo de encontrar as integrais indefinidas é muito intuitivo, partindo do pressuposto que conhecemos apenas as derivadas. Dessa forma, pode-se obter uma tabela de integrais, que são chamadas de imediatas, a partir das derivadas das funções elementares, como apresentado na Tabela 2.

Tabela 2: Integrais imediatas

Integral indefinida	Formula que a originou
1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n$
2. $\int dx = \int 1 dx = x + C$	$\frac{d}{dx} (x) = 1$
3. $\int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$	$\frac{d}{dx} \left(-\frac{\cos kx}{k} \right) = \sin kx$
4. $\int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin kx}{k} \right) = \cos kx$

5. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \sec^2 x$
6. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\frac{d}{dx} (-\operatorname{cotg} x) = \operatorname{cosec}^2 x$
7. $\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$	$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \operatorname{tg} x$
8. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$	$\frac{d}{dx} (-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
9. $\int e^{kx} \, dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{k} e^{kx} \right) = e^{kx}$
10. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \quad x > 0$	$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$
11. $\int a^x \, dx = \left(\frac{1}{\ln a} \right) a^x, \quad a > 0, a \neq 1$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln a} a^x \right) = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$
12. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$	$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$	$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{sen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arc} \operatorname{sec} x + C, \quad x > 1$	$\frac{d}{dx} (\operatorname{arc} \operatorname{sec} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

Fonte: Adaptado de Thomas, Weir e Hass (2013)

2.3.3 Integração por substituição

Existe algumas situações em que não é possível encontrar a integral de uma função aplicando as integrais imediatas, sendo necessário utilizar outras estratégias para tal finalidade. O método da substituição, também conhecido como mudança de variável para integração, é um recurso apropriado para tal situação, sendo utilizado para determinar integrais de funções compostas. Para Flemming e Gonçalves (2006) o método da substituição é análogo à regra da cadeia para as derivadas de funções compostas, sendo possível encontrar a integral de uma função aplicando as integrais imediatas depois de ser realizada uma mudança de variável.

Stewart (2010), afirma que o método da substituição funciona sempre que tivermos uma integral escrita da seguinte forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Veja que se $F' = f$, e utilizando a regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) \quad (12)$$

teremos a expressão,

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (13)$$

Sendo $F' = f$, e fazendo a mudança de variável, ou substituição, $u = g(x)$ e sua forma diferencial $du = g'(x)dx$, na equação (13), temos

$$\int f(u)du = F(u) + C \quad (14)$$

Assim, conseguimos provar a Regra da Substituição, que pode ser melhor definido pelo teorema a seguir:

Teorema 6: Regra da Substituição – Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja a imagem é um intervalo I e f for continua em I , então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad (15)$$

O processo de calcular integral de uma função composta, consiste em converter a expressão (13) na expressão (14), com a substituição de $u = (g(x))$ e $du = (g'(x)dx)$ denominado Método da Substituição. Onde, a interpretação do uso da expressão $du = g'(x)dx$ não se faz necessário, pois essa notação diferencial tem por finalidade servir como uma forma viável e conveniente para aplicar o método da substituição (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

2.3.4 Integral pela Soma de Riemann

Uma das maneiras de calcular áreas, volumes e distâncias é utilizando as somas finitas. Onde, os termos das somas são obtidos por meio do produto entre os valores das funções trabalhadas $f(x_k^*)$, pelos comprimentos dos intervalos Δx (THOMAS; WEIR; HASS, 2013). Stewart (2010), apresenta a seguinte expressão para essa afirmativa:

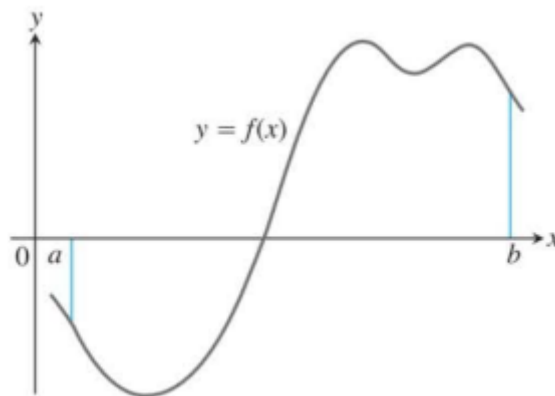
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*)\Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] \quad (16)$$

Contudo, Thomas, Weir e Hass (2013) se interessaram em verificar o comportamento do limite da soma, quando os comprimentos dos intervalos se tornarem infinitamente pequenos e sua quantidade infinitamente grande. Essas somas são chamadas de somas de Riemann, em

homenagem ao matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) (STEWART, 2010).

Introduzir o conceito de soma de Riemann é de suma importância para o entendimento da integral definida. Dessa forma, considere uma função f definida em um intervalo fechado $[a, b]$, podendo assumir valores positivos e negativos, conforme apresentado na Figura 4.

Figura 4: Gráfico da função $y = f(x)$ definida no intervalo $[a, b]$.



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2013).

Dividindo o intervalo $[a, b]$ em subintervalos, não necessariamente na mesma magnitude, em $n - 1$ pontos que satisfaçam a condição

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

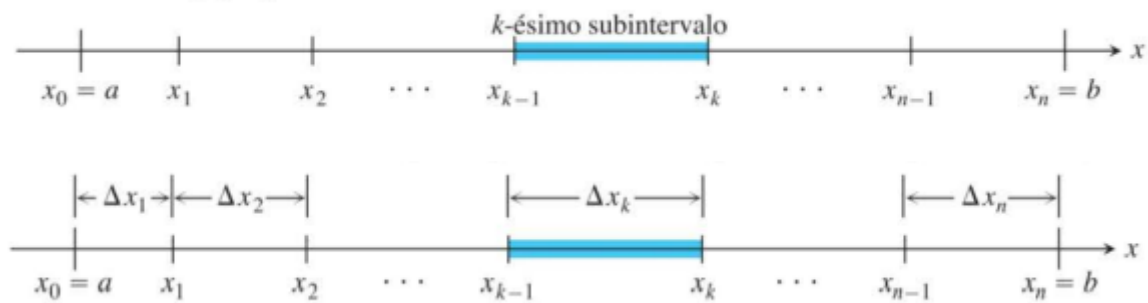
ou ainda, de forma mais consistente podemos indicar $a = x_0$ e $b = x_n$, e escrevemos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

assim, o conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ é denominado partição de $[a, b]$ (SIMMONS, 1987).

O comprimento da largura do primeiro subintervalo é dado por $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, a largura do segundo subintervalo é dado por $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, e a largura do k -ésimo subintervalo é representado por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, conforme representado pela Figura 5, sendo k um número inteiro entre 1 e n (THOMAS; WEIR; HASS, 2013).

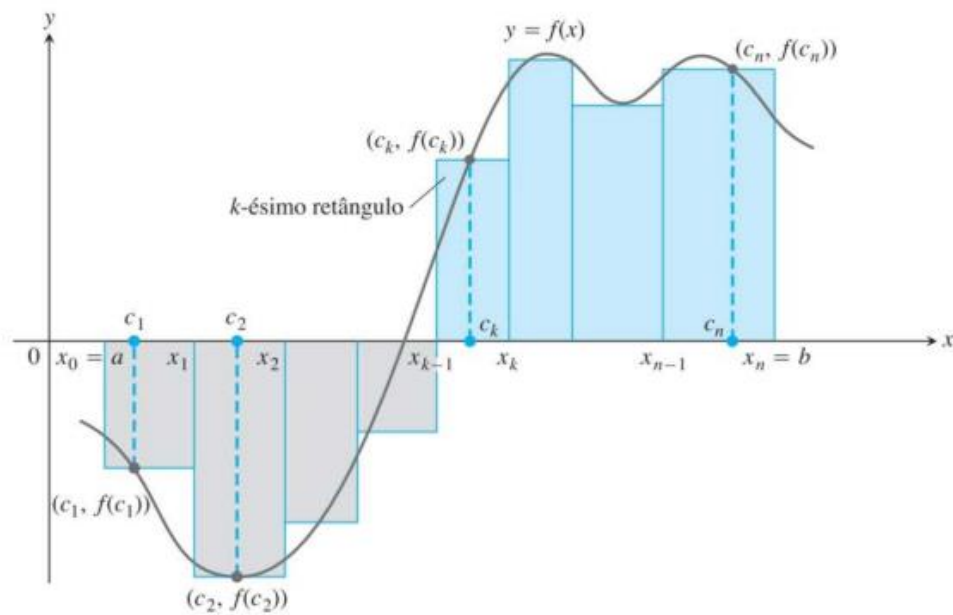
Figura 5: Partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos.



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2013).

Em cada subintervalo selecionamos um ponto c_k arbitrário, onde c_k está contido no k -ésimo subintervalo. Construindo retângulos compreendidos entre o eixo x e gráfico da função $y = f(x)$, podendo os retângulos estarem acima ou abaixo do eixo x , dependendo do valor de $f(c_k)$ ser positivo ou negativo, conforme o gráfico da Figura 6.

Figura 6: Retângulos da região entre $y = f(x)$ e o eixo x .



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2013).

Formando o produto $f(c_k)\Delta x_k$, podendo o resultado ser positivo se $f(c_k) > 0$, se negativo se $f(c_k) < 0$, ou nulo se $f(c_k) = 0$, somando todos os produtos, obtemos:

$$S_P = \sum_{k=1}^n f(c_k) * \Delta x_k \quad (17)$$

onde, a soma S_P é chamada de soma de Riemann para a função f no intervalo $[a, b]$. Caso os intervalos tenham larguras iguais, escrevemos

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} \quad (18)$$

podendo estreitar a largura dos intervalos com o aumento do número de n . Se a largura das partições tenderem a zero, com $n \rightarrow \infty$, teremos uma precisão cada vez maior do resultado esperado (THOMAS; WEIR; HASS, 2013).

2.3.5 Integral definida

O cálculo utilizando a soma de Riemann com o aumento do número de partições, com a expressão $n \rightarrow \infty$, não garante que as larguras de todos os intervalos tendam a zero. Para tanto, utiliza-se a expressão $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, ao qual indica que a maior norma das partições tendera a zero. Dessa forma, espera-se que a área compreendida entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ satisfaça a equação (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014):

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) * \Delta x_k \quad (19)$$

De acordo com Anton, Bivens e Davis (2014) o limite contido na expressão (19) é de extrema importância para conceituar a fundamentação do cálculo integral, constituindo a base da definição da integral definida, dada a seguir:

Definição 2: Dizemos que uma função f é integrável em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite da expressão (19) existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos c_k nos subintervalos. Assim, apresentamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) * \Delta x_k \quad (20)$$

que é denominado integral definida de f de a até b . Os números a e b são denominados de limite de integração inferior e superior, respectivamente, e $f(x)$ é denominado integrando.

De acordo com Stewart (2010), foi Leibniz que introduziu o símbolo $\int$ e o denominou de sinal de integral. O sinal de integral é uma letra S alongada e foi escolhida pelo fato da integral ser um limite de uma soma. O símbolo dx não tem um significado oficial, indicando apenas que x é a variável de integração, podendo usar qualquer outra letra sem mudar o valor da integral.

O resultado da integral definida é um número, e representa a área líquida com sinal entre o gráfico da função e o intervalo $[a, b]$. Assim, Anton, Bivens e Davis (2014) apresentam o seguinte teorema:

Teorema 7: Se uma função f for contínua e um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$ e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ será

$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (21)$$

Normalmente, quando utiliza um intervalo $[a, b]$, supõe-se que $a < b$, para os limites de integração. Dessa forma, Flemming e Gonçalves (2006), apresenta uma definição em que o limite inferior é maior que o limite superior.

Definição 3:

a) Se $a > b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Se a integral à direita existir.

b) Se $a = b$ e $f(a)$ existir, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2.3.5.1 Propriedades da integrais definidas

Flemming e Gonçalves (2006) destaca que é de extrema importância saber quais funções são integráveis. Sendo as funções contínuas em um intervalo específico $[a, b]$, as mais usadas para o cálculo de integração. A partir desse ponto de vista, pode-se apresentar algumas propriedades da integral definida, por meio das proposições a seguir:

Proposição 1: Se f é integrável em $[a, b]$ e k é uma constante real arbitrária, então kf é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Proposição 2: Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então $f + g$ é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Proposição 3: Se $a < c < b$ e f é integráveis em $[a, c]$ e em $[c, b]$, então f é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposição 4: Se f é integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Proposição 5: Se f e g são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Proposição 6: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Proposição 7: Se f é uma função contínua em $[a, b]$, existe um ponto c entre a e b tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(c)$$

2.3.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Através do teorema fundamental do cálculo pode-se afirmar que as operações de diferenciação e integração são inversas uma da outra, ou seja, o processo de diferenciação de uma determinada função, desfaz o processo de integração e vice-versa (MUNEM e FOULIS, 1982). O teorema fundamental do cálculo, também estabelece uma relação entre as integrais indefinidas e definidas em duas partes, sendo que a primeira parte do teorema descreve a relação entre os métodos dos retângulos e da antiderivada com o cálculo de área, enquanto a segunda

parte estabelece um método das integrais definidas usando antiderivadas (ANTON, BIVENS e DAVIS, 2014).

Suponha que f seja uma função contínua e não negativa em um intervalo $[a, b]$, em que A é a área sob um gráfico de f acima do intervalo $[a, b]$ dada pela expressão (21) da integral definida, ou seja $A = \int_a^b f(x)dx$. O método da antiderivada sugere que, se $A(x)$ é a área sob o gráfico de f de a até x , onde x varia entre $[a, b]$, logo, podemos propor que:

- I. $A'(x) = f(x)$
- II. $A(a) = 0$
- III. $A(b) = A$

A fórmula (II) implica dizer que a área sob uma curva que vai de a até a é a área sob um ponto, ou seja, é igual a zero. Em (III), afirma-se que a área sob uma curva de a até b é igual a A . Já a fórmula (I) diz que $A(x)$ é uma antiderivada de $f(x)$, dessa forma podemos afirmar que qualquer antiderivada de $f(x)$ no intervalo fechado $[a, b]$ pode ser obtido pelo acréscimo de uma constante a $A(x)$. Assim, considere que

$$F(x) = A(x) + C \quad (22)$$

seja uma antiderivada de $f(x)$. Subtraindo $F(a)$ de $F(b)$, teremos

$$F(b) - F(a) = [A(b) + C] - [A(a) + C] \quad (23)$$

$$F(b) - F(a) = A(b) - A(a) \quad (24)$$

$$F(b) - F(a) = A - 0 \quad (25)$$

$$F(b) - F(a) = A \quad (26)$$

De posse das informações obtidas em (26), podemos apresentar a parte 1 do Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 8: (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1) Se uma função f for contínua e um intervalo $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (27)$$

A equação (27) implica dizer que a integral definida pode ser obtida encontrando uma antiderivada do integrando e, em seguida, realizando uma subtração dos valores da antiderivada do limite superior de integração pelo valor da antiderivada do limite inferior de integração.

Com base no argumento apresentado que conclui que $A'(x) = f(x)$, podemos dizer que $A(x)$ pode ser expressa como uma integral definida dada na forma,

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (28)$$

Em que a mudança da variável de integração é usada para evitar confusão com o x do limite superior da integral em (28). Com base na expressão (28) a relação $A'(x) = f(x)$ pode ser apresentada como

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x) \quad (29)$$

Dessa forma, tem-se a parte 2 do Teorema Fundamental do Cálculo, apresentado no teorema a seguir.

Teorema 9: (Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2) Se uma função f for contínua e um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (30)$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo, ou seja, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo.

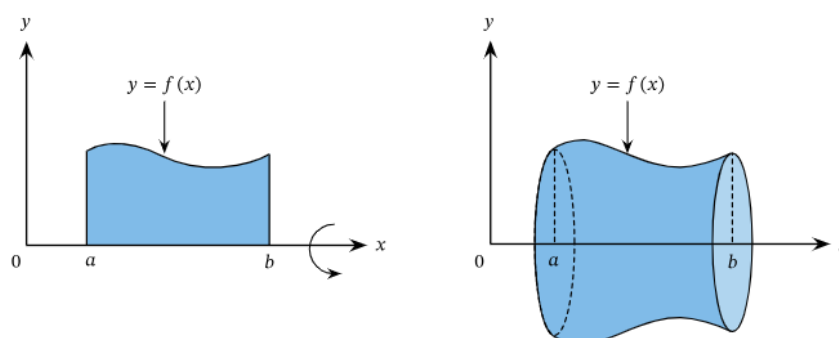
Dizemos que se uma integral definida tiver um limite de integração superior variável, um limite inferior constante e um integrando contínuo, logo a derivada da integral em relação ao seu limite superior é igual ao valor do integrando calculado somente com o limite superior (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

3 VOLUMES E ÁREAS DE SUPERFÍCIES DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

As integrais definidas são amplamente utilizadas para determinar áreas de regiões planas. Contudo, existe diversas aplicações em problemas do cálculo de volumes de regiões tridimensionais, sendo esses denominados de sólidos de revolução. O primeiro contato com estudos dos sólidos de revolução dar-se, ainda, no ensino médio ao estudar figuras geométricas de sólidos cilíndricos, também chamados de corpos redondos, tais como: esferas, cones e cilindros. Já no ensino superior, estes estudos ocorrem de forma mais complexa nas disciplinas de cálculo diferencial e integral, ao abordar conteúdos de volumes de sólidos de revolução e áreas de superfície de revolução. Flemming e Gonçalves (2006) destaca que, um sólido de revolução é obtido fazendo uma região plana girar em torno de uma reta no plano, chamada eixo de revolução.

Dessa forma, Simmons (1987) diz que, se a região sob uma curva $y = f(x)$ e entre $x = a$ e $x = b$ gira ao redor do eixo x , ele constrói uma figura tridimensional, chamada sólido de revolução, podendo ser visualizado em um gráfico, conforme apresentado na Figura 7.

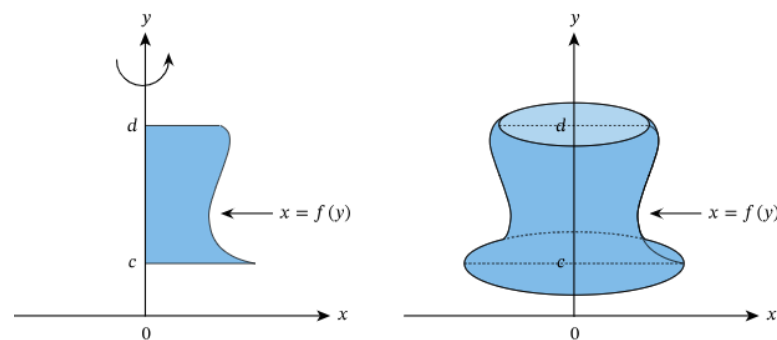
Figura 7: Sólido de revolução gerado em torno do x .



Fonte: Nagwa (2023).

Usando processo análogo, também podemos determinar um sólido de revolução que gira em torno do eixo y . Para tanto, considere uma região compreendida entre a curva $x = f(y)$ e as retas $y = c$ e $y = d$ girando ao redor do eixo y , conforme apresentado na Figura 8.

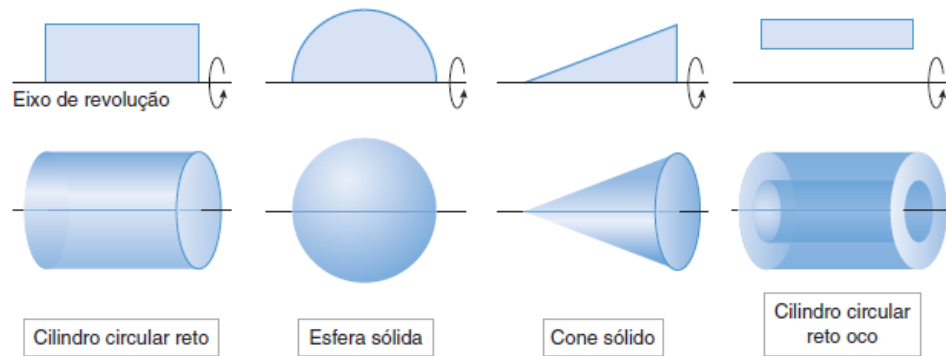
Figura 8: Sólido de revolução gerado em torno do y .



Fonte: Nagwa (2023).

Nos sólidos de revolução o eixo de simetria passa, exatamente, no centro do sólido gerando secções transversais circulares de raio $y = f(x)$, quando x for o eixo de revolução, ou raio $x = f(y)$, quando a revolução for no eixo y . Por esse motivo, os sólidos de revolução são considerados objetos simétricos, sendo o eixo de revolução seu eixo de simetria. Com isso, também são chamados de corpos cilíndricos (MEDEIROS; COSTA, 2020). Anton, Bivens e Davis (2014), destaca que muitos sólidos de revolução conhecidos são tipo: cilindro circular reto, esfera sólida, cone sólido e cilindro circular reto oco, conforme a Figura 9.

Figura 9: Sólido de revolução conhecidos.



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

3.1 VOLUME DE SÓLIDOS POR FATIAMENTO

A determinação de volumes e áreas de sólidos de revolução é visto desde o ensino fundamental e médio em casos particulares e considerados simples, como os sólidos de revolução apresentados na figura 9, onde já existem fórmulas pré-definidas para o devido cálculo. Sabendo que os sólidos de revolução são objetos que podem assumir várias outras formas, as fórmulas utilizadas no ensino fundamental e médio se tornam ineficazes, principalmente quando surge casos como os apresentados na Figura 8. Sendo necessário fazer uso das integrais, ao qual pode-se calcular o volume e áreas de superfície de revolução para qualquer expressão.

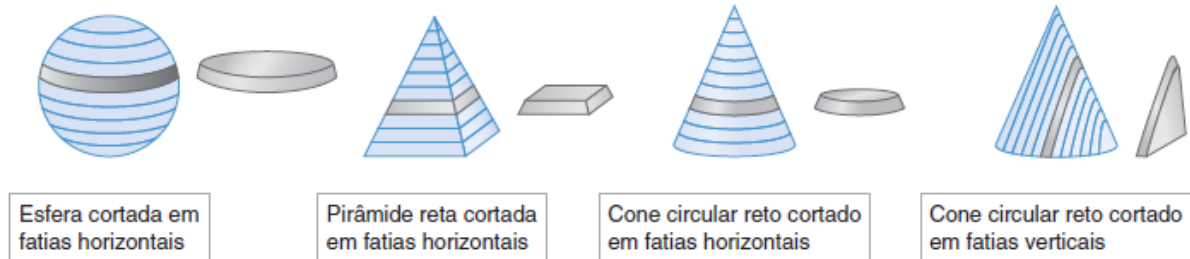
Para Anton, Bivens e Davis (2014), o método do fatiamento é uma forma viável para o cálculo do volume dos sólidos de revolução. Onde o princípio básico desse método consiste em:

- Dividir o sólido em fatias finas;
- Aproximar o volume da cada fatia;
- Somar as aproximações para formar uma soma de Riemann;
- Passa o limite para produzir uma integral para o volume.

O fato das fatias serem bastantes finas, faz com que o método do fatiamento se torne eficaz, uma vez que as secções transversais não sofrem grandes variações no tamanho nem na forma, facilitando a aproximação dos seus volumes, ou seja, quanto mais finas as fatias, menor a variação das secções transversais e maior a aproximação do volume. Com a aproximação dos volumes das secções transversais, podemos forma uma soma de Riemann, onde o limite leva ao resultado do cálculo do volume do sólido de revolução (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

As principais formas das fatias para o cálculo dos sólidos de revolução são apresentadas na Figura 10.

Figura 10: Diferentes formas de Fatias dos sólido de revolução.



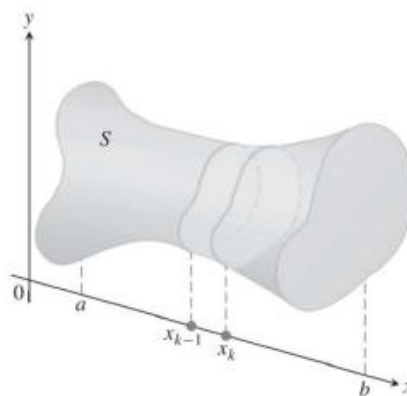
Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

Suponha que queremos determinar o volume de um sólido S , utilizando o método do fatiamento. Considere que A seja a área da base do sólido e h a sua altura. A equação base utilizada para determinar volumes de sólidos cilíndricos ou não-cilíndricos é dado por:

$$V = A * h \quad (31)$$

Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de largura Δx_k e fatiamos o sólido por planos perpendiculares ao longo do eixo x nos pontos de partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Os planos P_{x_k} , perpendiculares ao eixo x nos pontos de partição, dividem o sólido S em fatias, conforme apresentado na Figura 11.

Figura 11: Fatias finas do sólido S .



Fonte: Thomas, Weir e Hass (2013).

Aproximamos o volume da fatia compreendida entre os planos P_{x_k} usando um sólido cilíndrico com área da base $A(x_k)$ e altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. O volume V_k do sólido cilíndrico da k -ésima fatia é:

$$V_k = A(x_k) * \Delta x_k \quad (32)$$

A soma dos volumes cilíndricos corresponde, aproximadamente, ao volume V do sólido inteiro S , ou seja, a soma de Riemann para a função $A(x)$ em $[a, b]$.

$$V \approx \sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n A(x_k) * \Delta x_k \quad (33)$$

Os valores de (33) se aproximam do ideal a medida em que a norma da partição de $[a, b]$ tenda a zero, $\|P\| \rightarrow 0$. Isso ocorre com o aumento no número de subintervalos, ou seja, com $n \rightarrow \infty$. Logo, aplicando o limite, temos (THOMAS; WEIR; HASS, 2013):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A(x_k) \Delta x_k = \int_a^b A(x) dx \quad (34)$$

A integral definida em (34) determina o volume dos sólidos de revolução, por meio da aplicação do limite na soma de Riemann das fatias do sólido cilíndrico. De forma geral, Stewart (2010) define o volume de um sólido de revolução como segue:

Definição 4: Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da seção transversal de S no plano P_{x_k} , passando por x_k e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (35)$$

O resultado é análogo se o eixo de rotação for em y , com seção transversal perpendicular ao eixo y . Assim, temos a definição:

Definição 5: Seja S um sólido que está entre $y = c$ e $y = d$. Se a área da seção transversal de S no plano P_{y_k} , passando por y_k e perpendicular ao eixo y , é $A(y)$, onde A é uma função contínua, então o volume de S é

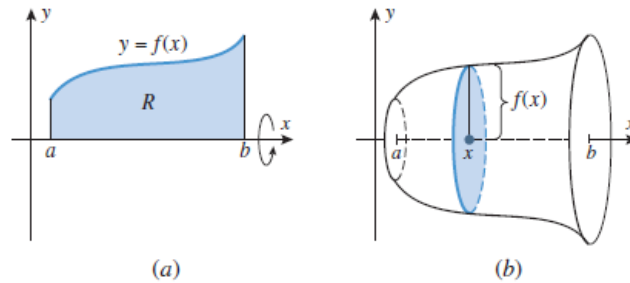
$$V = \int_c^d A(y) dy \quad (36)$$

3.1.1 Método do Disco

Considere o problema de determinar o volume de uma região R de uma função f contínua e não negativa definida em um intervalo $[a, b]$, limitada acima por $y = f(x)$, abaixo

pelo eixo das abscissas e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme apresentado na Figura 12a.

Figura 12: Discos perpendiculares ao eixo x .



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

A resolução do problema pode ser realizada pelo método do fatiamento. Para tanto, percebe-se que a seção transversal do sólido formado perpendicularmente ao eixo x no ponto x , é um disco de raio $f(x)$, conforme visto na Figura 12b. A área de um disco, ou círculo, é dado por:

$$A(x) = \pi r^2 = \pi [f(x)]^2 \quad (37)$$

utilizando a expressão do método do fatiamento (35), dizemos que o volume do sólido é

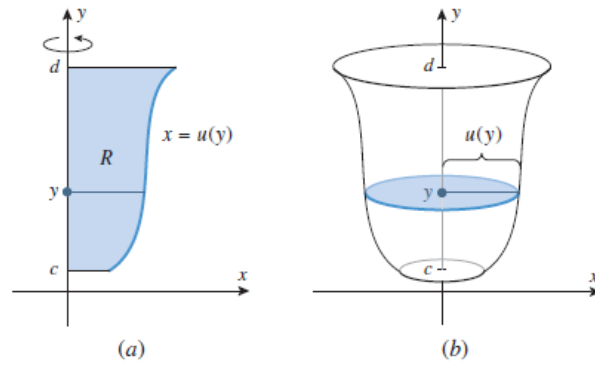
$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx \quad (38)$$

A utilização dessa formula é chamada de “método do disco” em função das seções transversais terem a forma de discos (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Quando as regiões são giradas em torno do eixo y , com seção transversal perpendicular ao eixo y , como apresentado na Figura13, de forma dedutiva a equação (38) é dada por:

$$V = \int_c^d \pi [u(y)]^2 dy \quad (39)$$

Figura 13: Discos perpendiculares ao eixo y .

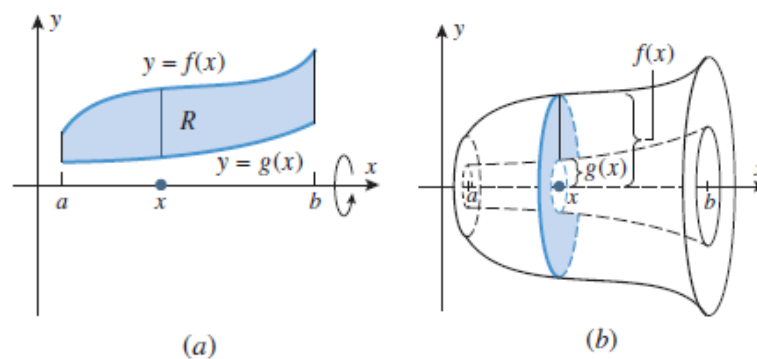


Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

3.1.2 Método do Anel (Arruelas)

Alguns sólidos de revolução não tem a sua região interna totalmente preenchida, sendo que alguns possuem orifícios internos ou canais, que geram superfícies interiores. Dessa forma, temos um problema de determinar o volume de uma região R formada pelas funções f e g , contínuas e não negativas em um intervalo $[a, b]$ e supondo que $f(x) \geq g(x)$ em cada ponto x de $[a, b]$. A região R é limitada acima por $y = f(x)$, abaixo por $y = g(x)$ e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme apresentado na Figura 14a (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Figura 14: Anel perpendiculares ao eixo x .



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

Ao girarmos a região R para gerar o sólido de revolução, teremos a formação de um sólido com um orifício no meio pelo fato da região R não atingir ou atravessar o eixo de revolução, conforme apresentado na Figura 14b. As seções transversais perpendiculares ao eixo de revolução são anéis, também chamadas de arruelas, de raio externo $f(x)$ e raio interno $g(x)$

(THOMAS; WEIR; HASS, 2013). A área $A(x)$ do anel é calculada pela diferença da área do raio externo $R(x)$ pela área do raio interno $r(x)$. A área do anel é

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2 = \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) \quad (40)$$

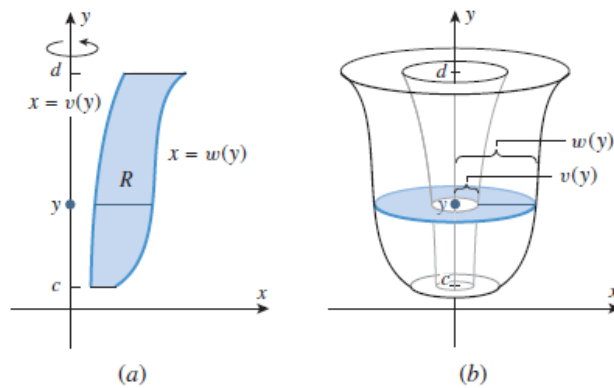
Podemos resolver o problema pelo método do fatiamento, consequentemente, pela definição de volumes, temos

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \quad (41)$$

Como as formas das fatias das seções transversais têm formato de anéis (ou arruelas), a aplicação dessa fórmula para calcular volumes de sólidos de revolução é chamada de método do anel (ou das arruelas) (THOMAS; WEIR; HASS, 2013).

Se a seção transversal das fatias forem perpendiculares ao eixo y , tendo esse como eixo de rotação, a determinação do volume é obtido de modo análogo ao anterior, contudo, integrando em relação a y em vez de x . Sendo os raios interno e externo função de y , como representado na Figura 15 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Figura 15: Anel perpendiculares ao eixo y .



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

A equação dada para determinar o volume dos sólidos de revolução, para esse caso, é dado por

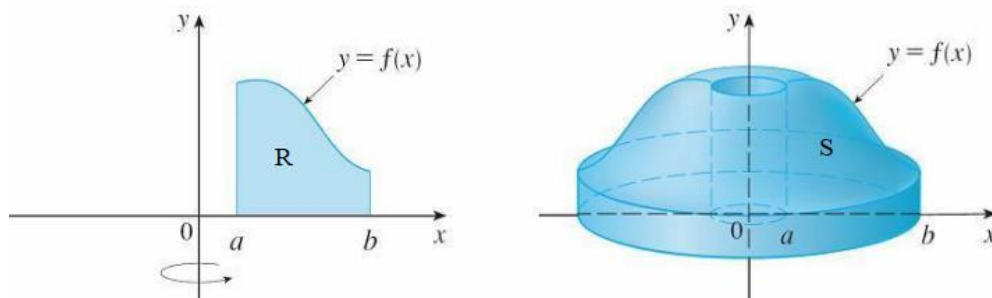
$$V = \int_c^d \pi([w(y)]^2 - [v(y)]^2) dy \quad (42)$$

3.2 VOLUME POR CASCAS CILÍNDRICAS

A aplicação do método do fatiamento, que consiste em encontrar o volume do sólido de revolução, tomando elementos retangulares de área perpendiculares ao eixo de revolução, formando elementos de volume em formas de discos e anéis, não é viável para situações em que determinar a área da seção transversal de um sólido seja difícil. Isso torna o processo de integração muito difícil para determinar o volume do sólido de revolução. Sendo necessário desenvolver novos métodos para o cálculo de volumes, ao qual podemos utilizar o método das camadas cilíndricas, também denominado de método das cascas, que consiste em tomar elementos retangulares de área paralelos ao eixo de revolução (LEITHOLD, 1994).

Considere uma região R delimitada pelo gráfico de uma função contínua e não negativa $y = f(x)$, abaixo pelo eixo x ao longo do intervalo $[a, b]$ ($0 \leq a \leq b$) e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. Suponha que queremos determinar o volume do sólido de revolução S gerado pela rotação de R em torno do eixo y , conforme o esquema apresentado na Figura 16 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

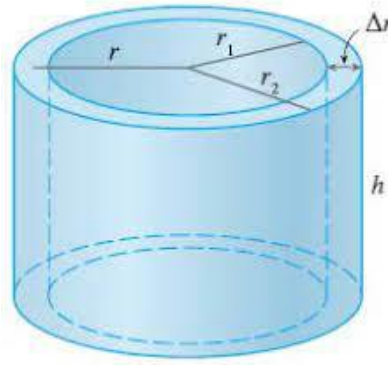
Figura 16: Sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo y .



Fonte: Adaptado Stewart (2010).

Girando o elemento de área em torno do eixo de revolução, iremos obter um invólucro cilíndrico, que é um sólido contido entre dois cilindros de mesmo centro e eixo, conforme apresentado na Figura 17 (LEITHOLD, 1994):

Figura 17: Casca cilíndrica obtido pela rotação da região R em torno do eixo y .



Fonte: Stewart (2010).

onde, r =raio médio da casca, r_1 = raio interno, r_2 = raio externo, Δr =espessura e h =altura. O volume V da casca cilíndrica é dado pela subtração do volume V_1 do cilindro interno do volume V_2 do cilindro externo:

$$V = V_2 - V_1 \quad (43)$$

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \quad (44)$$

$$V = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \quad (45)$$

$$V = 2\pi * \left[\frac{r_2 + r_1}{2} \right] * h * (r_2 - r_1) \quad (46)$$

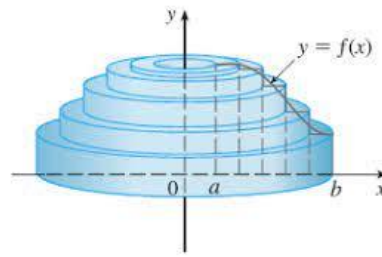
onde, $\frac{r_2 + r_1}{2}$ = raio médio da camada e $r_2 - r_1$ = espessura. Logo, a expressão (46) pode ser escrita como (STEWART, 2010):

$$V = 2\pi r h \Delta r \quad (47)$$

$$V = 2\pi * [\text{raio médio}] * [\text{altura}] * [\text{espessura}] \quad (48)$$

Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, assim a região R estará subdividida em n fatias paralelas ao eixo x . Girando a região R em torno do eixo y , será gerado n sólidos alinhados e concêntricos, formando um único sólido S , cujo volume total é a soma dos n volumes das cascas cilíndricas, conforme apresentado na Figura 18 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

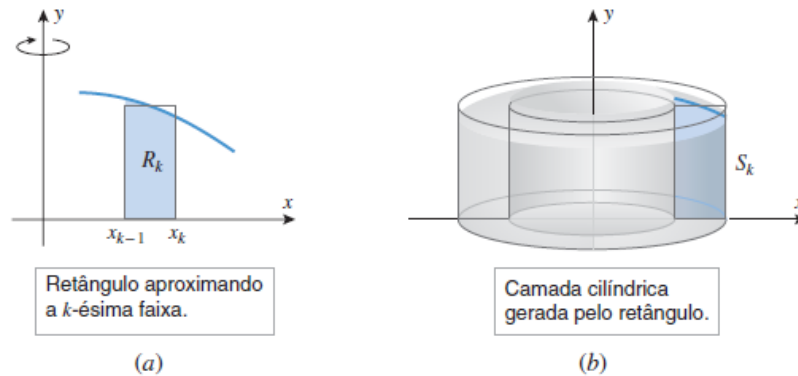
Figura 18: Sólido formado por n cascas cilíndricas concêntricas em torno do eixo y .



Fonte: Stewart (2010).

Sabendo que, na realidade, as cascas cilíndricas terão superfícies superiores curvas, o procedimento que melhor se ajusta para determinar o volume do sólido é se as faixas forem finas, onde poderemos aproximar cada faixa por um retângulo, conforme apresentado na Figura 19a. Girando os retângulos em torno do eixo y , teremos as cascas cilíndricas, ao qual os volumes de aproximam dos volumes das faixas originais, conforme apresentado na Figura 19b (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Figura 19: Cascas cilíndricas formadas por faixas retangulares.



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

O volume total pode ser obtido por uma soma de Riemann, e fazendo o limite das somas de Riemann com $n \rightarrow \infty$, obtemos uma integral que fornece o volume exato V . Para isso, considere x_k^* o ponto médio do intervalo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ de um retângulo de altura $f(x_k^*)$. Fazendo o retângulo girar em torno do eixo y , teremos uma casca cilíndrica de raio médio x_k^* , altura $f(x_k^*)$ e espessura Δx_k . Pela expressão (48), obtemos o volume V_k da casca cilíndrica

$$V_k = 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (49)$$

Pela soma de Riemann, aproximamos o volume V do sólido S pela soma dos volumes das n cascas cilíndricas. Logo,

$$V \approx \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (50)$$

Aplicando o limite na expressão (50) com $n \rightarrow \infty$, fazendo $\max \Delta x_k \rightarrow 0$, temos

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2\pi x_k^* f(x_k^*) \Delta x_k \quad (51)$$

onde, a expressão (51) é a integral definida, dada por

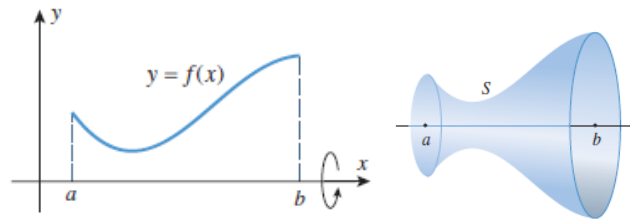
$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx. \quad (52)$$

Sendo a equação (52) é usualmente utilizada para calcular volumes de sólidos de revolução pelo método das cascas cilíndricas.

3.3 ÁREA DE SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

De acordo com Flemming e Gonsalves (2006), quando giramos uma curva plana em torno de uma reta no plano, obtemos uma superfície de revolução. Onde queremos determinar a área S da superfície de revolução, que foi gerada pela rotação de parte de uma curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x , conforme representado na Figura 20.

Figura 20: Área S de uma superfície de revolução.

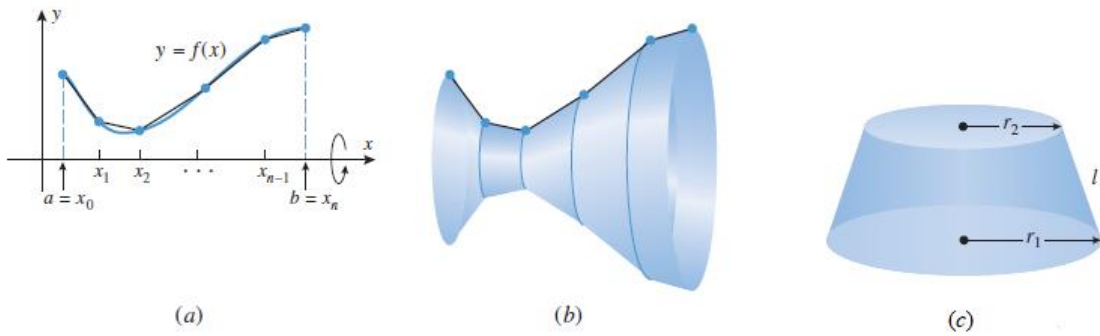


Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014).

Divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos através dos pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Sejam os correspondentes do gráfico que formam um caminho poligonal que aproxima a curva $y = f(x)$ acima de $[a, b]$, conforme apresentado na Figura 21a. Fazendo cada segmento de reta do caminho poligonal girar em torno do eixo x , teremos uma superfície com n partes, sendo cada uma delas troncos de cones circular reto, conforme apresentado na Figura 21b (FLEMMING; GONSALVES, 2006). A área S de cada parte da superfície de um tronco de cone de raios das bases r_1 e r_2 e geratriz (altura inclinada) l , conforme apresentado na Figura 21c, pode ser obtido por

$$S = \pi(r_1 + r_2)l. \quad (53)$$

Figura 21: Formação da área S de uma superfície de revolução e tronco de cone.



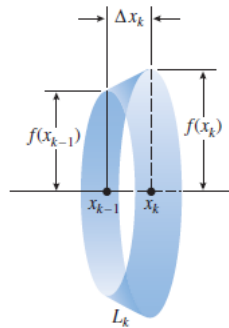
Fonte: Adaptado Anton, Bivens e Davis (2014).

A altura inclinada do cone do k -ésimo intervalo do segmento de reta do polígono é o comprimento L_k , dado por:

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2} \quad (54)$$

onde, $f(x_k)$ e $f(x_{k-1})$ são os raios do tronco cone de altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, conforme representado na Figura 22.

Figura 22: k -ésimo tronco de cone do segmento de reta do polígono.



Fonte: Adaptado Anton, Bivens e Davis (2014).

Com base na equação (53), a área lateral S_k do k -ésimo tronco do cone é dada por:

$$S_k = \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}. \quad (55)$$

Somando todas as áreas, obtemos a aproximação da área S da superfície inteira. Logo,

$$S \approx \sum_{k=1}^N \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}. \quad (56)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio, onde implica dizer que existe um x_k^* entre x_k e x_{k-1} , assim temos que:

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x_k} = f'(x_k^*) \quad (57)$$

dessa forma, escrevemos a expressão (56) como

$$S \approx \sum_{K=1}^N \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(x_k^*) \Delta x_k]^2} \quad (58)$$

que pode ser reescrita como

$$S \approx \sum_{K=1}^N \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})] \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} * \Delta x_k. \quad (59)$$

A continuidade de f e o Teorema do Valor Intermediário comprovam a existência de um ponto x_k^{**} entre Δx_k . Assim, escrevemos

$$\frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} = f(x_k^{**}). \quad (60)$$

Com isso, podemos escrever (59) como

$$S \approx \sum_{K=1}^N 2\pi f(x_k^{**}) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} * \Delta x_k. \quad (61)$$

De forma imediata, a existência de duas variáveis, (x_k^*) e x_k^{**} , impossibilita expressar (61) por uma soma de Riemann. Contudo, pelo Cálculo avançado, sabe-se que a existência as duas variáveis não tem efeito sobre o limite em função da continuidade de f , e dizemos que $x_k^* = x_k^{**}$. Assim, (61) pode ser escrita como

$$S = \lim_{\max \Delta x_k} \sum_{K=1}^N 2\pi f(x_k^*) \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2} * \Delta x_k \quad (62)$$

ou ainda, na forma de integral definida

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (63)$$

A integral definida (63) é comumente utilizada para determinar a área da superfície de revolução gerada pela rotação da parte de uma curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$ em torno do eixo x . A expressão (63) também pode ser apresentada como

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx. \quad (64)$$

Caso tenhamos uma função não negativa do tipo $x = g(y)$ e definida no intervalo $[c, d]$, a superfície gerada por parte da curva $x = g(y)$ entre e as retas $y = c$ e $y = d$ ao rotacionar em torno do eixo y e dado por

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy \quad (65)$$

ou ainda, como

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2} dy. \quad (66)$$

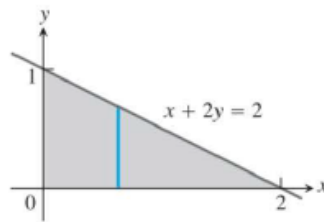
4 APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS NO CÁLCULO DE VOLUMES E ÁREAS DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

A aplicação das integrais é de extrema importância para o entendimento das abordagens teóricas realizadas nos diversos cursos que tem as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral na grade curricular. Dessa forma, neste capítulo, iremos apresentar exemplos vistos na literatura com aplicações das integrais por meio do uso dos métodos utilizados para calcular volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução estudados neste trabalho. Em especial, os métodos do disco, arruelas e cascas cilíndricas para o cálculo de volumes de sólidos de revolução, e também o cálculo de áreas de superfície de revolução.

- **Aplicação das integrais: Método do Disco**

Exemplo 1: Determine o volume do sólido formado pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas retas $x + 2y = 2$, $x = 0$, $x = 2$ e $y = 1$. Esboce a região e o sólido formado (Adaptado de THOMAS, 2013).

Resolução: O esboço da região limitada pelas retas dadas no enunciado é dado a seguir:



Ao rotacionar a região apresentada ao longo do eixo x e fatiar, obtemos um disco de raio $y = 1 - \frac{x}{2}$. Aplicando o método do disco, teremos

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

$$V = \int_0^2 \pi \left[1 - \frac{x}{2}\right]^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4}\right) dx$$

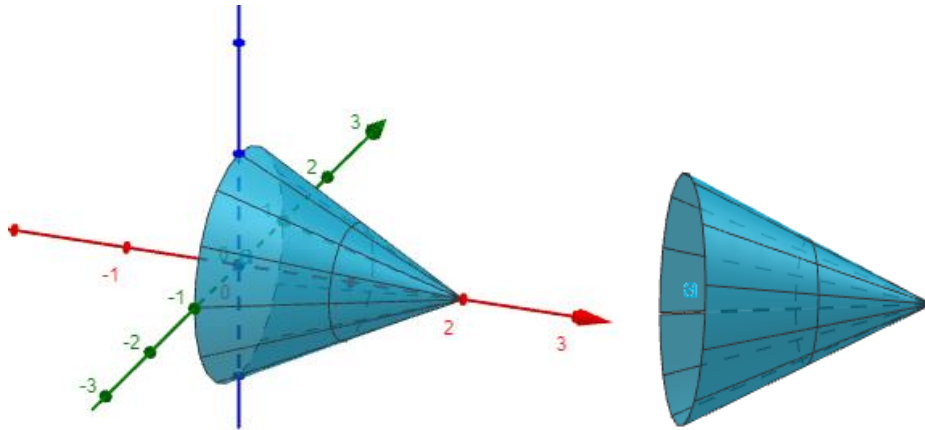
$$V = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} \right]_0^2$$

$$V = \pi \left[\left(2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{20}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{20}\right) \right]$$

$$V = \frac{14}{15} \pi \text{ unidades de volume}$$

Assim, o volume do sólido gerado é $\frac{14}{15} \pi$ unidade de volume, e o sólido formado é apresentado pela Figura 23 a seguir:

Figura 23: Sólido formado pelo método do disco.

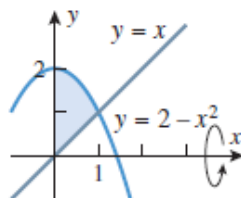


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

- **Aplicação das integrais: Método do Anel**

Exemplo 2: Encontre o volume do sólido resultante da rotação em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = 2 - x^2$ e pelas retas $y = x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 2$. Esboce a região delimitada e o sólido formado no problema (Adaptado de ANTON, BIVENS e DAVIS, 2014).

Resolução: O esboço da região limitada pela curva e pelas retas dadas no enunciado é dado a seguir:



Ao rotacionar a região apresentada ao longo do eixo x e fatiar, obtemos um anel de raio externo $y = 2 - x^2$ e raio interno $y = x$. Aplicando o método do disco, teremos

$$V = \int_a^b \pi([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

$$V = \int_0^1 \pi[(2 - x^2)^2 - (x)^2] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4) dx$$

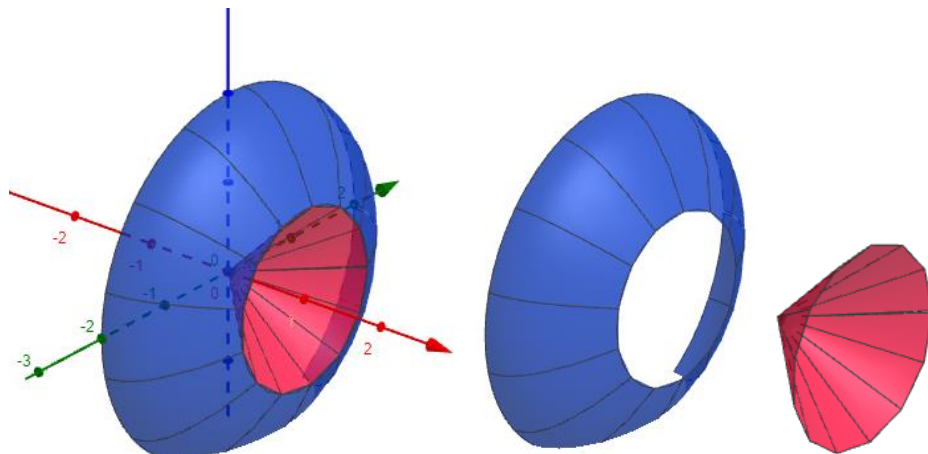
$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right]_0^1$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{1^5}{5} - \frac{5 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1 \right) - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{5 \cdot 0^3}{3} + 4 \cdot 0 \right) \right]$$

$$V = \frac{38}{15} \pi \text{ unidades de volume}$$

Assim, por meio do método do anel, o volume do sólido gerado é $\frac{38}{15} \pi$ unidade de volume, e o sólido formado é apresentado pela Figura 24 a seguir:

Figura 24: – Sólido formado pelo método do anel.

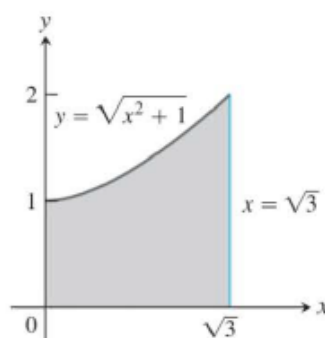


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

- **Aplicação das integrais: Método do Cascas Cilíndricas**

Exemplo 3: Use o método das cascas cilíndricas para determinar o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região limitada pelas retas $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ e $y = 2$. Esboce a região e o sólido formado (Adaptado de THOMAS, 2013).

Resolução: O esboço da região limitada pelas retas dadas no enunciado é dado a seguir:



Ao rotacionar a região sombreada apresentada ao longo do eixo y , obtemos uma casca. Aplicando o método das cascas cilíndricas, teremos

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

$$V = \int_0^{\sqrt{3}} 2\pi x \sqrt{x^2 + 1} dx.$$

Usando o método da substituição, temos

$$u = x^2 + 1, \frac{du}{dx} = 2x \text{ ou ainda } \frac{du}{2} = x dx.$$

Alterando os intervalos de integração, temos que

- Para $x = 0$, $u = 0^2 + 1 = 1$
- Para $x = \sqrt{3}$, $u = (\sqrt{3})^2 + 1 = 4$

Assim, podemos reescrever a expressão das cascas cilíndricas da seguinte forma,

$$V = \int_1^4 2\pi \sqrt{u} \frac{du}{2}$$

$$V = \pi \int_1^4 \sqrt{u} du$$

$$V = \pi \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^4$$

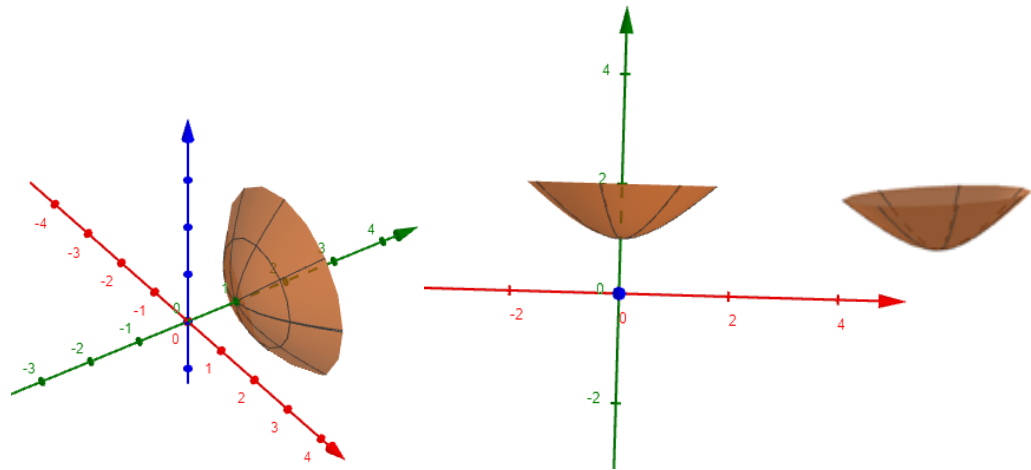
$$V = \frac{2}{3} \pi [\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}]$$

$$V = \frac{2}{3} \pi [8 - 1]$$

$$V = \frac{14}{3} \pi \text{ unidades de volume.}$$

Assim, por meio do método das cascas cilíndricas, o volume do sólido gerado é $\frac{14}{3} \pi$ unidade de volume, e o sólido formado é apresentado é pela Figura 25 a seguir:

Figura 25: – Sólido formado pelo método das cascas cilíndricas.

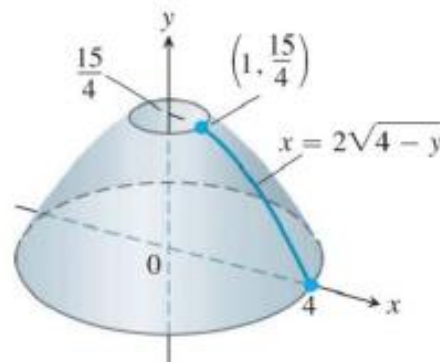


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

- **Aplicação das integrais: Áreas de Superfície de Revolução**

Exemplo 4: Determine a área da superfície gerada pela rotação da curva $x = 2\sqrt{4-y}$, para $0 \leq x \leq \frac{15}{4}$ em torno do eixo y . Esboce o gráfico forma pela curva e o sólido formado pela revolução (Adaptado de THOMAS, 2013).

Resolução: O esboço gráfico da região formada pela curva dada no enunciado é dado a seguir:



Ao rotacionar a curva $x = 2\sqrt{4-y}$ apresentada ao longo do eixo y , obtemos uma superfície de revolução, cuja a área queremos determinar. Usando a expressão apropriada, temos

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left[\frac{dx}{dy}\right]^2} dy$$

Uma vez que $x = 2\sqrt{4-y}$, temos que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\sqrt{4-y}}$$

Logo, temos escrevemos a integral

$$S = \int_0^{15/4} 2\pi[2\sqrt{4-y}] \sqrt{1 + \left[\frac{-1}{\sqrt{4-y}}\right]^2} dy$$

$$S = 4\pi \int_0^{15/4} [\sqrt{4-y}] \sqrt{1 + \frac{1}{4-y}} dy$$

$$S = 4\pi \int_0^{15/4} [\sqrt{4-y}] \sqrt{\frac{5-y}{4-y}} dy$$

$$S = 4\pi \int_0^{15/4} [\sqrt{4-y}] \frac{\sqrt{5-y}}{\sqrt{4-y}} dy$$

$$S = 4\pi \int_0^{15/4} \sqrt{5-y} dy$$

Integrando a expressão acima, temos

$$S = 4\pi \left[\frac{1}{2\sqrt{5-y}} \right]_0^{15/4}$$

Simplificando e aplicando os intervalos de integração, temos

$$S = 2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{5-\frac{15}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{5-0}} \right]$$

$$S = 2\pi \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

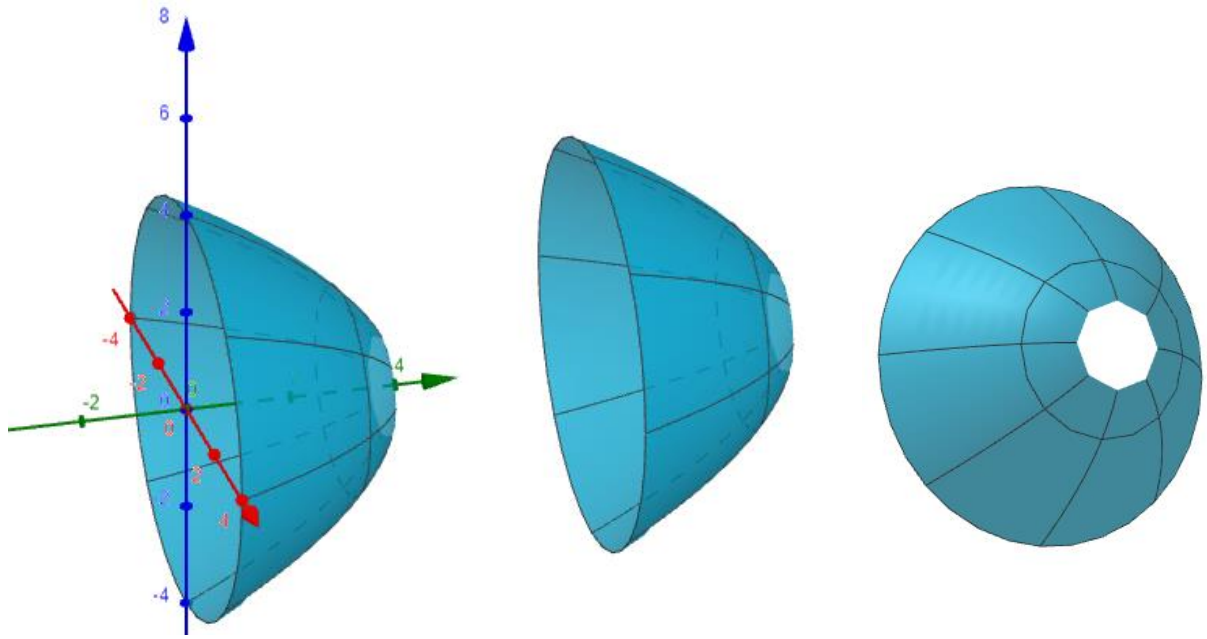
$$S = 2\pi \left[\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right]$$

$$S = 2\pi \frac{1}{\sqrt{5}} * \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{2\sqrt{5}}{5} \pi \text{ unidades de área.}$$

Assim, a área da superfície do sólido de revolução é $\frac{2\sqrt{5}}{5}\pi$ unidade de área, e o sólido formado é apresentado é pela Figura 26 a seguir:

Figura 26: – Superfície de um sólido de revolução.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente trabalho possibilitou uma abordagem ampla sobre as definições e aplicações das integrais no campo da matemática e demais área de ensino. Observou-se, em meio ao resgate histórico da matemática, que a evolução da integral ocorreu de forma peculiar e lenta ao longo dos anos, em função das dificuldades dos antigos matemáticos em calcular áreas de figuras geométricas com geometria não definida. Levando em consideração a importância do estudo das integrais no ensino da matemática no âmbito universitário, apresentamos as principais definições, proposições e desenvolvimento de expressões matemáticas utilizadas para determinar volumes e áreas de superfície de sólidos de revolução. Tal explanação teórica, foi fundamental para realizar as devidas aplicações dos métodos do fatiamento, em especial o método do disco e anel. Assim como também, o método das cascas cilíndricas para o cálculo de volumes, e também a determinação de áreas de superfície de sólidos de revolução. Sendo apresentado, ao final de cada exemplo, os sólidos formados pelas funções dadas, possibilitando um maior entendimento das aplicações das integrais. Com isso, esperamos que este trabalho possa contribuir em estudos futuros das disciplinas de cálculo diferencial e integral em cursos de nível superior. Dessa forma, concluímos nossos objetivos propostos para esse trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **CÁLCULO**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. 1 v.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

CARVALHO, João Paulo Antunes; MACÊDO, Josué Antunes de; LOPES, Lailson dos Reis Pereira. **Algumas aplicações do cálculo diferencial e integral**. *Research, Society And Development*, [S.L.], v. 10, n. 8, p. 1-17, 5 jul. 2021. Research, Society and Development. <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i8.17220>.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. 5. Ed, Campinas: Unicamp, 2011.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6.ed. rev. ampl. São Paulo: Pearson, 2006. 449p.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. 685p.

MAIOR, Eli. **E: A história de um número**. Tradução de Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MEDEIROS, Davison Machado. COSTA, Patrício Torres. **Sólidos de revolução e o Cálculo, uma extensão do estudo do volume e da área**. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*. Ano 05, Ed. 03, Vol. 03, pp. 141-154. Março de 2020. ISSN: 2448-0959, [Link](https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/solidos-de-revolucao) de acesso: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/solidos-de-revolucao>

MUNEM, Mustafa; FOULIS, David J. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 1982. 605p. v.1.

NAGWA. **Explicador da Lição: Volumes de Sólidos de Revolução**. Matemática. Disponível em: <https://www.nagwa.com/en/explainers/103158132069/>. Acesso em: 02 jun. 2023.

SILVA, José Augusto Florentino da. **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática**: algumas considerações. 2016. 1 v. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Católica de Brasília – UCB, Brasília, 2016.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. 829p.

STEWART, James. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2010. 536p. v. 1.

THOMAS, George B; WEIR, Maurice D; HASS, Joel. **Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2013. 642 p.

TORRES, Terezinha Ione Martins; GIRAFFA, Lucia Maria Martins. O Ensino do Cálculo numa perspectiva histórica: Da régua de calcular ao MOODLE. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**: REVEMAT, Ufsc, v. 4, n. 1, p. 18-25, 2009