

Introdução às variáveis complexas e aplicações.

Mateus Pereira
Francisco Vieira

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo estudar a teoria e as aplicações acerca dos números complexos, apresentando métodos matemáticos utilizados para resolver esse tipo de equação. Esse artigo traz consigo o mundo dos números imaginários, buscando relacionar a sua importância para o ramo da matemática visando mostrar como as operações matemáticas funcionam e se comportam.

Palavras-chave: Número complexo. Operações. Conjugado.

Abstract

This paper aims to study the theory and applications of complex numbers, presenting mathematical methods used to solve this type of equation. This article brings with it the world of imaginary numbers, seeking to relate their importance to the field of mathematics in order to show how mathematical operations work and behave.

Key words: Complex number. Operations. Conjugate.

1 Introdução

Os números complexos surgiram da necessidade da resolução de equações quadráticas que apresentavam raízes negativas como exemplo pode-se citar:

A equação do segundo grau pode ser dada por:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

O discriminante da equação é:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (2)$$

As raízes da equação são dadas por:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

Se $\Delta < 0$, temos que $X \in \mathbb{C}$, pois:

$$b^2 - 4ac < 0 \quad (4)$$

Ou seja,

$$b^2 < 4ac \quad (5)$$

E, conseqüentemente,

$$b < 2\sqrt{ac} \quad (6)$$

“O primeiro registro do interesse do ser humano por equações cúbicas data da antiga civilização babilônica, [3], por volta de 1800-1600 a.C”. Posteriormente, por volta de 1545, Girolamo Cardano publicou a resolução de uma equação cúbica no seu livro *Ars Magna*, ganhando assim destaque para a fórmula da resolução, envolvendo a unidade imaginária.

Até então, os matemáticos da época não conseguiam compreender como a raiz quadrada de um número negativo poderia possibilitar uma solução, nesse sentido chegou-se à conclusão de que os números reais eram insuficientes para se tratar de expressões algébricas. O italiano Raphael Bombelli (1526-1573), discípulo de Cardano, ajudou na compreensão do mundo complexo quando aplicou a fórmula do seu mestre para resolver uma equação cúbica no capítulo 2 do seu livro *l'Algebra*. A partir dos feitos algébricos de Bombelli, os matemáticos começaram a utilizar em seus postulados raízes quadradas de números negativos.

Somente no século XVIII, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) ousou representar algebricamente $\sqrt{-1} = i$.

"Posteriormente, Abraham de Moivre (1667-1754) introduziu métodos sofisticados na investigação das propriedades dos números complexos, relacionando-os com a trigonometria" (CHAVES, 2013, p. 23). "O termo "Números complexos" se popularizou quando foi usado em trabalhos de Gauss e Hamilton, reconhecendo os números complexos como sendo um par ordenado de números reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica" (CHAVES, 2013, p. 24).

2 Aplicação prática

Considere a forma geral de uma equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x^2 + 2x + 2 = 0$$

Cujo discriminante pode ser dado por $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$, $\Delta < 0$. Nos números reais, teríamos;

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}, \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}$$

Mas, como os números complexos podemos fazer uso de i , a unidade imaginária, definida por $i^2 = -1$, com $\sqrt{-1} = i$, podemos fazer $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \cdot \sqrt{-1} = 2i$, e obter as raízes

$$z_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{2i}{2} = -1 + i$$
$$z_2 = \frac{-2 - (-2i)}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{-2i}{2} = -1 - i.$$

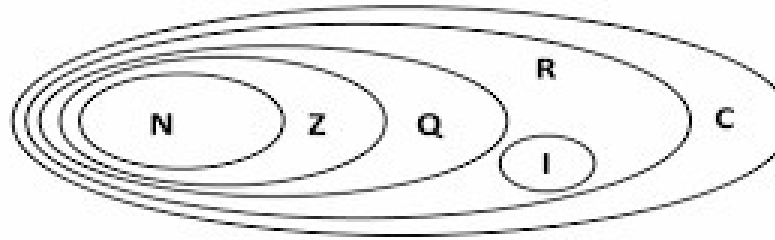
3 O conjunto dos números complexos:

O conjunto dos números complexos é definido como:

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Como exemplos de números complexos, tem-se: $z = 1 + 5i$, $z = 3 + \sqrt{2}i$, $z = \pi i$, $z = \frac{3}{7} - \frac{5}{13}i$.

Observa-se que, quando $y = 0$, temos $z = x \in \mathbb{R}$, ou seja, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um sub-



conjunto do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

3.1 Unidade imaginária:

A unidade imaginária, denotada como i , é um conceito fundamental dos números complexos. Ela é definida como a raiz quadrada de -1 , ou seja, $i = \sqrt{-1}$.

Como nenhum número real elevado ao quadrado pode resultar em um número negativo, o número i foi criado para expandir o conjunto dos números reais, permitindo a solução de equações como $x^2 + 1 = 0$, cuja solução é $x = \pm i$, visto que $i \cdot i = i^2 = -1$, isto é, $i = \sqrt{-1}$ como em $\mathbb{R}$, $\sqrt{x} \geq 0$, então $i \notin \mathbb{R}$.

As potências de $i = \sqrt{-1}$ apresentam um comportamento cíclico pois seguem um padrão que se repete a cada quatro potências. Esse comportamento se torna fácil de ser observado quando calculamos as sete primeiras potências de i :

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = i \cdot i = -1, \quad i^3 = i \cdot i \cdot i = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$$

$$i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad i^5 = i \cdot i^4 = i, \quad i^6 = i \cdot i^5 = -1, \quad i^7 = i \cdot i^6 = i \cdot (-1) = -i$$

Seja $z = 2 + 3i$, onde o número 2 é a parte real da composição e o número 3, acompanhado da letra i , é considerado a parte imaginária, ou

$$\text{Re}(z) = 2, \quad \text{Im}(z) = 3$$

$$e^i = \cos 1 + i \sin 1$$

$$e^i \approx 0.54 + i0.841$$

$$e^i \in \mathbb{C}$$

Se $Z = 5$, então, $Z = 5 + 0i$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$. É importante observar que dois números complexos são iguais se suas partes reais e imaginárias forem iguais.

4 Operações em $\mathbb{C}$

Do mesmo modo que, para números reais pode-se definir operações de soma, subtração, multiplicação e divisão, para os número complexo também é possível. Veja a seguir definições e propriedades.

4.1 Adição em $\mathbb{C}$

Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$. Definimos a soma como sendo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Seja $z_1 = 3$ e $z_2 = 4 + 5i$. Como no exemplo anterior, para resolver efetuar a soma, fazemos a parte real com a parte real e a parte imaginária com a parte imaginária, obtendo-se assim:

$$z_1 + z_2 = 7 + 5i.$$

A operação de adição em $\mathbb{C}$ verifica as seguintes propriedades:

- **A1)** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (propriedade associativa);
- **A2)** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (propriedade comutativa);
- **A3)** $\exists e \in \mathbb{C}$ tal que $z + e = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (existência do elemento neutro);
- **A4)** $\exists w \in \mathbb{C}$ tal que $z + w = e$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (existência do elemento simétrico);

A soma de números complexos é comutativa e, como $z + 0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, o número complexo $e = 0$ é o elemento “neutro da adição” ou “zero” de $\mathbb{C}$. Se $z = a + bi$ e $w = -a - bi$, então $z + w = 0$. Assim, todo número complexo z possui elemento inverso para a soma, ou seja, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $w + z = 0$.

4.2 Subtração em $\mathbb{C}$:

Usando do fato de que existe apenas um único complexo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 + z = z_2$, dados $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, podemos definir a subtração $z_1 - z_2$ como

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

Sejam $z_1 = 3 - \sqrt{2}i$, $z_2 = \pi - 3i$. Então

$$z_1 - z_2 = (3 - \pi) + (-\sqrt{2} + 3)i$$

4.3 Multiplicação em $\mathbb{C}$:

Sejam $W = a + bi$ e $Z = c + di$, definimos a multiplicação como sendo $W \cdot Z = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Que pode ser verificada usando produtos notáveis e a unidade imaginária,

$$\begin{aligned} W \cdot Z &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

As operações de multiplicação em $\mathbb{C}$ verificam as seguintes propriedades:

- **M1)** $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (propriedade associativa);

- M2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (propriedade comutativa);
- M3) $\exists e_m \in \mathbb{C}$ tal que $e_m z = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (existência do elemento neutro);
- M4) $\exists z' \in \mathbb{C}$ tal que $zz' = e$, $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$ (existência do elemento inverso).

a) Seja $Z_1 = 2 + 3i$ e $Z_2 = 1 - i$,

$$Z_1 \cdot Z_2 = (2 + 3i) \cdot (1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 5 + i$$

b) Seja $Z = a + bi$ e $W = 1$.

$$Z \cdot W = (a + bi) \cdot 1 = a + bi = Z = W \cdot Z$$

Como caso particular, dados $Z = 3 + 4i$ e $W = \frac{3-4i}{25}$, o produto satisfaz

$$Z \cdot W = (3 + 4i) \cdot \left(\frac{3}{25} - \frac{4i}{25} \right) = \frac{9}{25} - \frac{12i}{25} + \frac{12i}{25} - \frac{16i^2}{25} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Com isso, conclui-se que o número W é o inverso multiplicativo de Z , dado por:

$$Z = a + bi, \quad W = \frac{a - bi}{(a - bi)(a + bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Logo, W é o inverso de Z .

4.4 Divisão em $\mathbb{C}$:

A divisão em $z \in \mathbb{C}$ vem como consequência da multiplicação $z_1 \cdot z = z_2$.

Sejam $Z = a + bi$, $W = c + di$, definimos a divisão como

$$\frac{Z}{W} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

e pode ser verificada como sendo,

$$\frac{a + bi}{c + di} \cdot 1 = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - adi + bci - di^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Sejam, $Z_1 = 2 + 3i$, $W_1 = 1 - i$, $Z_2 = \sqrt{2}i$, $W_2 = \pi i$. Temos,

$$\frac{Z}{W} = \frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{2 + 3i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{(2 + 2i + 3i + 3i^2)}{(1 + i - i - i^2)} = \frac{-1 + 5i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{5i}{2}.$$

$$\frac{Z}{W} = \frac{\sqrt{2}i}{\pi i} = \frac{\sqrt{2}i}{\pi i} \cdot \frac{-\pi i}{-\pi i} = \frac{-\pi\sqrt{2}i - \pi i^2}{-\pi^2 i^2} = \frac{\pi - \pi\sqrt{2}i}{\pi} = \frac{\pi}{\pi^2} - \frac{\pi\sqrt{2}i}{\pi^2} = \frac{1}{\pi} - \frac{\sqrt{2}i}{\pi}.$$

5 O Plano Complexo

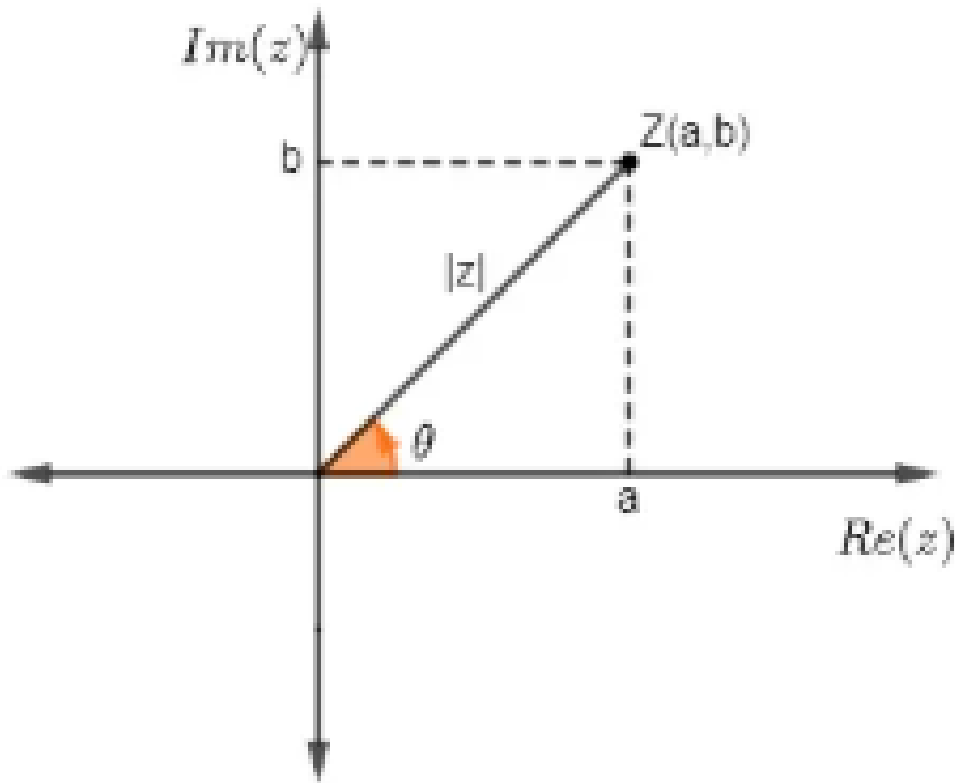
O plano complexo é uma identificação de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, onde:

- O eixo horizontal (eixo real) representa a parte real do número complexo.
- O eixo vertical (eixo imaginário) representa a parte imaginária.

Cada número complexo $z = a + bi$ pode ser representado como o ponto (a, b) no plano, onde:

- a é a coordenada no eixo real.

- b é a coordenada no eixo imaginário.



O ponto $(0,0)$ representa o número complexo $0 = 0 + 0i$.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Considerando uma função, tem-se:

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$a + bi \longmapsto (a, b)$$

A função é injetora pois $f : a \rightarrow b$ é considerada **injetora** se os elementos distintos de a tiverem imagens distintas em b e sobrejetora pois $f : a \rightarrow b$ somente é considerada **sobrejetora** se o seu conjunto-imagem for igual ao contradomínio (b), fornecendo um isomorfismo ou seja possuindo a mesma estrutura entre $\mathbb{C}$ e o plano $\mathbb{R}^2$, podendo representar cada número complexo $a + bi$ como par ordenado (a, b) .

5.1 Módulo de um Número Complexo

A partir da identificação acima, podemos definir o módulo de um número complexo como sendo a medida da distância até a origem, no plano. Sua representação é dada por:

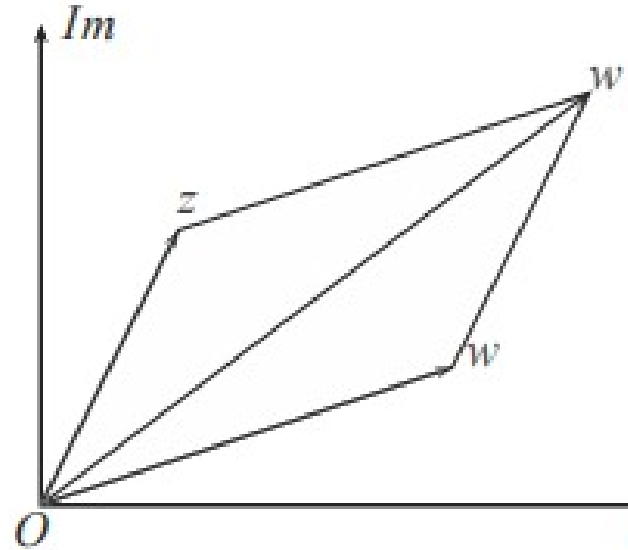
$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ e assim } |Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Considere $Z_1 = 3 + 4i$, $Z_2 = \sqrt{2} + \pi i$. Os módulos são dados por

$$|Z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|Z_2| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \pi^2} = \sqrt{2 + \pi^2}$$

Dados os números complexos $w = a + bi$ e $z = c + di$, é possível fazer suas representações vetoriais



5.1, sua parte Real e sua parte Imaginária z ; w ; $w+z$

Representação do Módulo de z , w e $z + w$

Lembrando da *Regra do Paralelogramo* para a soma vetorial, $|w+z|$ é a diagonal do paralelogramo cujos vértices são a origem $O = (0, 0)$, w , $w + z$ e z .

Usando a notação $z.w$ para o segmento de extremos em w e z , temos:

$$Oz = |z| \quad \text{e} \quad z(w+z) = Ow = |w|. \quad (7)$$

Dados três pontos A , B e C , a soma dos comprimentos dos segmentos AB e AC é maior ou igual ao comprimento do segmento BC , e a igualdade ocorre se, e somente se, A , B e C são colineares.

5.2 Conjugado de Z :

Dado $z = a + bi$, o conjugado de $\bar{z}$, é definido por $z = a - bi$.

Aqui destaca-se a representação de alguns números complexos e seus respectivos conjugados, $Z_1 = 2 + 3i \Rightarrow \bar{Z}_1 = 2 - 3i$ e $Z_2 = 4 - \sqrt{2}i \Rightarrow \bar{Z}_2 = 4 + \sqrt{2}i$.

5.3 Forma trigonométrica ou polar dos números complexos:

Dado um número complexo $z = x + yi$, consideremos sua representação vetorial na figura a seguir,

Dado o número $Z = a + bi$, temos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$X = r \cos \theta, \quad Y = r \sin \theta$$

O θ é chamado de argumento de Z , $\arg(Z)$, Desta forma, temos:

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\bar{Z} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

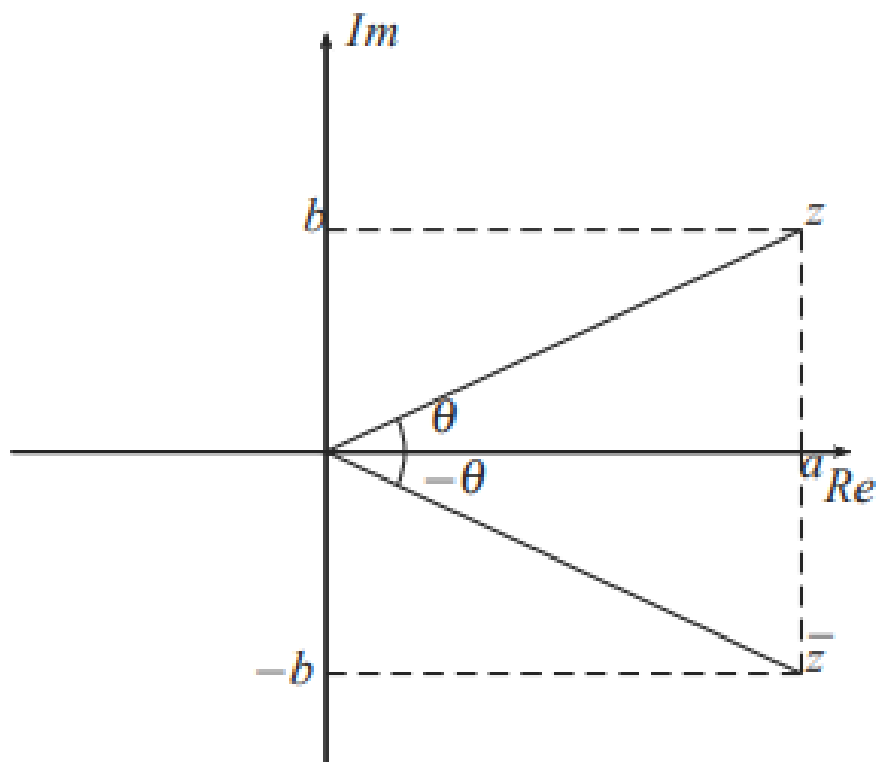


Figura 1: Conjugado

Note que $Z \cdot \bar{Z} = r^2$

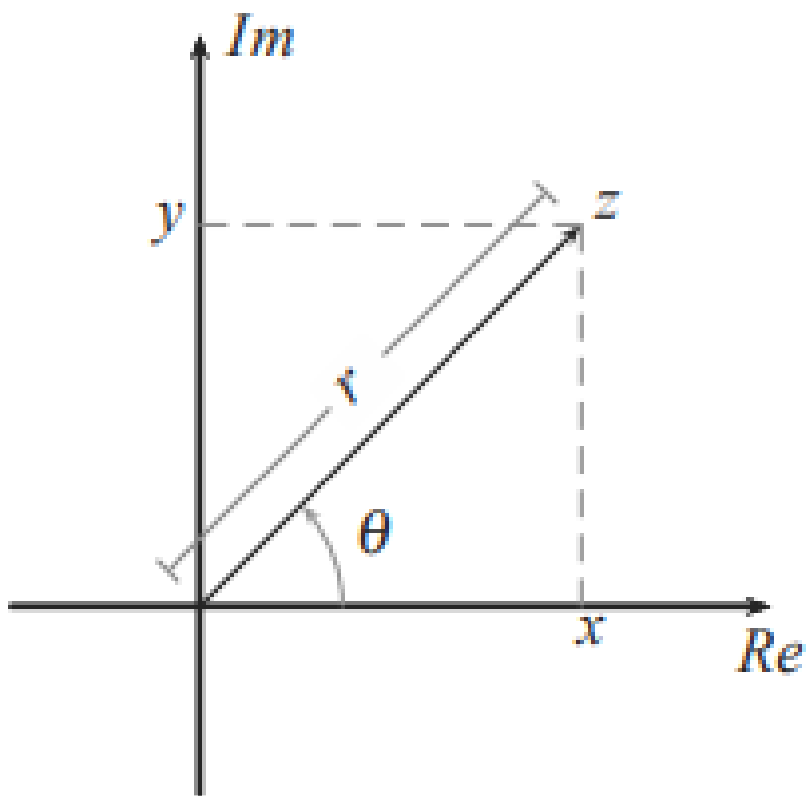
Dado $Z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. Para calcular θ , podemos escrever

$$\cos \theta = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4} + \frac{9}{4}} = 3$$

A representação polar de Z é dada por:

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$



Escrever $Z = -1 + \sqrt{3}i$ na forma polar

$$r = |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$Z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

Para $Z = -3 - 3i$, temos o ponto $(-3, -3)$:

$$|Z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

Para $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$:

$$r = |Z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos \theta = \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = 1 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

Note que, é possível efetuar todas as operações usando a forma polar, usando as propriedades trigonométricas,

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i r_1 \cdot r_2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2$$

$$+ r_1 \cdot r_2 \cdot (\sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)) = r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

Aqui estão alguns exemplos em que se destaca a importância da aplicação da multiplicação dos números complexos. Dados $Z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $Z_2 = \sqrt{7} + \sqrt{7}i$ com $\tan \theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$. Calcular $Z_1 \cdot Z_2$, onde $\theta_1 = \frac{5\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ e $r_1 = |Z_1| = 2$, $r_2 = |Z_2| = \sqrt{14}$,

$$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{14} \cdot \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= 2\sqrt{14} \cdot \left[\cos \left(\frac{23\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{23\pi}{12} \right) \right]$$

$$Z_5 = r_5 \left[\cos \left(5 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(5 \cdot \frac{5\pi}{3} \right) \right]$$

Usando os mesmos argumentos, podemos efetuar a divisão de números $Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $Z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ como sendo,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ou

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Utilizando os resultados obtidos em exemplos anteriores, tem-se o seguinte:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{\sqrt{14}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{14}} \left(\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{14}}{14} \left(\cos \left(\frac{17\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{12} \right) \right)$$

6 Raízes n-ésimas de números complexos

Nos números reais, raízes n-ésimas são soluções de equações polinomiais. Por exemplo $X^2 = 2$ satisfeito por $X = \pm\sqrt{2}$, $X^3 = 2$ satisfeito por $X = \pm\sqrt[3]{2}$ e etc.

Já nos números complexos, a equação $Z^n = Z_0$ tem como solução $Z = \sqrt[n]{|Z_0|}$.

Sejam Z e $Z_0 \in \mathbb{C}$, podemos escrever;

$$Z = |Z| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad Z_0 = |Z_0| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Considerando a equação:

$$Z^n = Z_0$$

$$Z^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |Z_0| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Daqui, obtemos:

$$Z^n \cos n\varphi = |Z_0| \cos \theta$$

$$Z^n \sin n\varphi = |Z_0| \sin \theta$$

Logo:

$$Z^n = |Z_0| \Rightarrow |Z| = \sqrt[n]{|Z_0|}$$

Neste caso:

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Assim:

$$Z = \sqrt[n]{|Z_0|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

Aqui destaca-se um exemplo onde $Z_0 = 1 + i$ e pede-se para encontrar Z_0 tal que $Z^4 = Z_0$ ($Z = \sqrt[4]{|Z_0|}$). Sabe-se que:

$$Z = \sqrt[4]{|Z_0|} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{4} \right)$$

Dado que:

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad |Z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Temos:

$$Z_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z = (\sqrt{2})^{\frac{1}{4}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right]$$

6.1 Conjuntos no $\mathbb{C}$

Mostramos a representação natural dos números complexos no plano bidimensional $\mathbb{R}^2$, proporcionando uma representação algébrica $z = a + bi$, onde a representa a parte real e b a parte imaginária, podendo ser escrito como um par ordenado (a, b) .

Quando representado no plano cartesiano, esse ponto define um vetor de posição que, em relação à origem, forma um ângulo θ , chamado de argumento do número complexo.

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^2$$

$$x + iy \sim (x, y)$$

$$\varphi : f\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longrightarrow \varphi(z)$$

Na reta:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

$$0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - L| < \varepsilon$$

Definição: Dizemos que $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in X'$ satisfaz a seguinte condição:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = L \quad \text{se, para cada } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(z) - L| < \varepsilon$$

Exemplo:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z)$$

Seja $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow z^2 + 3z$. Então:

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z^2 + 3z) = (2i)^2 + 3(2i) = -4 + 6i$$

6.2 Propriedades dos Limites

A definição de limite de funções complexas é determinado como:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$$

Quando z tende a se aproximar de z_0 em qualquer direção, os valores de $f(z)$ se aproximam o tão quanto queiramos de L .

Sejam $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = L_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = L_2$, temos as seguintes propriedades, [2]:

1.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + z_1 \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) + z_1 \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

2.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [\varphi(z) \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$$

3.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\varphi(z)}{g(z)} \right) = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)} \quad \text{se } \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) \neq 0$$

Sejam $Z \in \mathbb{C}$, $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $Z_0 = x + iy$, então, se $\varphi(z) = \varphi(x + iy) = \mu(x, y) + V(x, y)i$, temos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(Z) = a + bi, \quad \text{se}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \mu(x, y) = a$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} V(x, y) = b$$

Relação da exponencial com os números complexos:

$$\text{Sendo } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad e$$

$$Z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\text{então } Z = |z| e^{i\theta}$$

$$\text{Portanto para } \theta = \pi \quad \text{temos } Z = \pi e^{i\theta} =$$

$$Z_1 Z_2 = \pi_1 \pi_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Verificando que $\lim_{z \rightarrow z_0} e^z = e^{z_0}$. Note que

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos x + i \sin y) = e^x \cos x + i e^x \sin y =$$

$$\mu(x) + i\nu(x, y)$$

$$\mu(x) = e^x \cos x \quad e$$

$$\nu(x, y) = e^x \sin y$$

Então, verificamos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \mu(x) = e^{x_0} \cos x_0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \nu(x, y) = e^{y_0} \sin y_0$$

Sendo assim

$$\lim_{z \rightarrow z_0} e^z = e^{x_0} \cos x_0 + i e^{y_0} \sin y_0$$

7 Continuidade de funções de uma variável complexa

Uma função complexa f é contínua em z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Dizemos que f é contínua em um domínio D se é contínua em todos os pontos de D , assim :

Dada a função $\varphi : C \rightarrow \mathbb{C}$, dizemos que φ é contínua em z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0), \quad \text{onde } z_0 \in A = D_\varphi.$$

Verificar se $\varphi(z) = z^2$ é contínua em $z = 0$.

Como $z = 0 \in D_\varphi$, temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 = 0^2 = 0.$$

Portanto, φ é contínua em $z = 0$.

Seja $z = x + iy$, então

$$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Logo,

$$\varphi(z) = \mu(x, y) + V(x, y)i.$$

Agora, calculando os limites:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2) = 0 - 0 = 0;$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2xy = 0;$$

7.1 Cálculo diferencial de funções a uma variável complexa

Seja $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $B(z_0, r) \subseteq A_\varphi$, onde $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ é uma bola aberta de raio r centrada em z_0 .

Temos que a derivada de φ em z_0 é dada por

$$\varphi'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\varphi(\Delta z + z_0) - \varphi(z_0)}{\Delta z},$$

quando o limite existir. Nesse caso, φ é dita diferenciável em z_0 .

Exemplos:

1) Sendo $\mathcal{F}(z) = C \in \mathbb{C}$, calcule $\mathcal{F}'(z)$ se existir em $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Delta z + z) - \mathcal{F}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta z} = 0$$

2) Se $\mathcal{F}(z) = 2z$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Delta z + z) - \mathcal{F}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2(\Delta z + z) - 2z}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2\Delta z + 2z - 2z}{\Delta z} = 2 \end{aligned}$$

3) $\mathcal{F}(z) = z^2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Delta z + z) - \mathcal{F}(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\Delta z + z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\Delta z)^2 + 2z\Delta z + z^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z(\Delta z + 2z)}{\Delta z} = 2z \end{aligned}$$

4) Se $\mathcal{F}(z) = \bar{z}$ em $0 = 0 + 0i = (0, 0)$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Delta z + 0) - \mathcal{F}(0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}, \quad \Delta z = x + iy = (x, y) \end{aligned}$$

Pelo eixo X:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0i}{x + 0i} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

Pelo eixo Y:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + iy}{0 - iy} = -1$$

Não existe $\mathcal{F}'(0 + 0i) = \mathcal{F}'(0) = \mathcal{F}'(0, 0)$.

7.2 As equações de Cauchy-Riemann

Agora serão abordados as equações de Cauchy-Riemann. Dada a função $\mathcal{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(z) = \mu(x, y) + iV(x, y)$

Se $\mathcal{F}'$ é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\Delta z + z_0) - \mathcal{F}(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\mu(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - \mu(x_0, y_0) + i[V(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - V(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\mu(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - \mu(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{(iV(\Delta x + x_0, \Delta y + y_0) - V(x_0, y_0))}{\Delta x + i\Delta y}\end{aligned}$$

Vamos nos aproximar pela reta horizontal, $\Delta y = 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mu(\Delta x + x_0, y_0) - \mu(x_0, y_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(iV(\Delta x + x_0, y_0) - V(x_0, y_0))}{\Delta x},$$

$$\text{então } \mathcal{F}'(z) = \mu_x(x, y) + iV_x(x, y) = \mu_x + iV_x$$

Se aproximando pela reta $\Delta x = 0$ temos:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mu(x_0, \Delta y + y_0) - \mu(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(iV(x_0, \Delta y + y_0) - V(x_0, y_0))}{i\Delta y}$$

$$\mathcal{F}'(z) = \mu_y(x, y) + iV_y(x, y) = \mu_y + iV_y$$

Assim as equações de Cauchy-Riemann são definidas da seguinte forma :

$$\mu_x = V_y, \quad \mu_y = -V_x$$

Então f é diferenciável logo as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

Exemplos:

1) Calcular $\varphi(z) = z^2$

$$\varphi(z) = \mu(x, y) + iV(x, y)$$

Note que $z = x + iy$

$$\varphi(z) = \varphi(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Resolvendo pela equação de Cauchy – Riemann:

$$\mu_x(x, y) = \mu_x = 2x, \quad V_x = 2y$$

$$\mu_y = -2y, \quad V_y = 2x$$

como

$$\mu_x = 2x = V_y, \quad \mu_y = -2y = V_x \quad \text{então} \quad \varphi \quad \text{é} \quad \text{diferenciável}.$$

A derivada:

$$i) \quad \varphi'(z) = \mu_x + iV_x = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

$$ii) \quad \varphi'(z) = V_y - i\mu_y = 2x - i(-2y) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z$$

$$2) \quad \text{Sendo} \quad \varphi(z) = 2z = 2x + 2iy, \quad \mu = 2, \quad V = 2y, \quad \text{temos}$$

$$\mu_x = 2, \quad V_x = 0$$

$$\mu_y = 0, \quad V_y = 2$$

$$\varphi'(z) = \mu_x + iV_x = 2 + i \cdot 0 = 2$$

$$3) \quad \text{Sendo} \quad \varphi(z) = 4z^2 + z \quad \text{temos}$$

$$\varphi(x + iy) = 4(x^2 - y^2 + 2xyi) + x + yi = 4x^2 - 4y^2 + x + (8xy + y)i$$

$$\varphi'(z) = 8x + 1 + i8y = 8(x + iy) + 1 = 8z + 1$$

Aqui serão abordadas algumas aplicações das equações de Cauchy–Riemann.

Dada $F(z) = \mu(x, y) + iV(x, y)$, com $z = x + iy$, sabemos que F'' é diferenciável.

As equações de Cauchy–Riemann são dadas por:

$$\begin{cases} \mu_x = V_y \\ \mu_y = -V_x \\ \mu_x \text{ e } V_x \text{ são contínuas.} \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$F'(z) = \mu_x + iV_x \quad \text{ou} \quad F'(z) = V_y - i\mu_y.$$

Já a função exponencial se comporta da seguinte maneira. A função exponencial é dada por:

$$F(z) = e^z, \quad \text{onde} \quad z = x + iy.$$

Sabemos que da formula obtida por Euler temos o seguinte:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

logo,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

Portanto, temos:

$$\mu(x, y) = e^x \cos y, \quad V(x, y) = e^x \sin y.$$

Pelas equações de Cauchy–Riemann, temos:

$$\begin{aligned} \mu_x &= e^x \cos y, & \mu_y &= -e^x \sin y, \\ V_x &= e^x \sin y, & V_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que:

$$F'(z) = \nu_y + i\mu_y = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

8 Funções trigonométricas complexas

Sabemos que, para $z = x + iy$, da equação de Euler, $e^{x+iy} = \cos \theta + i \sin \theta$. Também temos que:

$$e^{x+iy} = e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos \theta + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta,$$

ou seja:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos(-\theta) - i \sin \theta.$$

Além disso, temos as identidades trigonométricas complexas $2 \cos \theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ que nos dá

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

Agora, vamos calcular $\sin' z$ e $\cos' z$.

$$\begin{aligned} F(z) &= \sin z = \frac{e^{iz}}{2i} - \frac{e^{-iz}}{2i}, \\ F'(z) &= \sin' z = \frac{1}{2i} \cdot ie^{iz} - \frac{1}{2} \cdot (-i)e^{-iz} = \frac{e^{iz}}{2} + \frac{e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

Por fim:

$$g'(z) = \cos' z = \frac{1}{2}ie^{iz} - \frac{i}{2}e^{-iz} = \frac{i}{2}e^{iz} - \frac{i}{2}e^{-iz} = -\sin z.$$

8.1 Funções Hiperbólicas

As funções complexas cosseno hiperbólico $f(z) = \cosh z$ e seno hiperbólico $g(z) = \sinh z$ são definidas como no caso real, isto é:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

A derivada de $\sinh z$ é:

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \frac{e^z}{2} + \frac{e^{-z}}{2}$$

A derivada de $\cosh z$ é:

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \frac{e^z}{2} - \frac{e^{-z}}{2}$$

assim, temos:

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$$

9 Logaritmo de Números Complexos

As funções logarítmicas nos números complexos são consideradas funções multivaloradas, ou seja possui infinitas soluções devido a periodicidade da função exponencial .

Seja $z = x + iy = \pi e^{i\theta} = \pi(\cos \theta + i \sin \theta) = (x, y)$, temos:

$$\log_e z = \ln z = \ln |z| + i\theta = \ln \pi + i \arg(z)$$

Se $z = 1 + i$, então:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo:

$$\ln(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Se $z = 1 - i$, então:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Logo:

$$\ln(1 - i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{7\pi}{4}$$

9.1 Função logarítmica

A ideia de função logarítmica complexa é representar a inversa da função exponencial, sendo definida da seguinte forma: Para um número complexo $z = re^{i\theta}$ onde $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$, o logaritmo natural é definido como:

$$\ln(z) = \ln |z| + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Isso ocorre porque a exponencial complexa é periódica com período $2\pi i$, resultando em infinitos valores possíveis para $\ln(z)$.

Aqui destaca-se mais uma representação de uma função logaritimica complexa:

$$\mathcal{F}(z) = \ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i\theta;$$

$$\tan^{-1}(\tan \theta) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\mathcal{F}(z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\mu(x, y) + iV(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Suponha que $\mathcal{F}(z)$ satisfaça as equações de Cauchy-Riemann:

$$\mathcal{F}'(z) = \mu_x(x, y) + iV_x(x, y)$$

ou

$$\mathcal{F}'(z) = -i\mu_y(x, y) + V_y(x, y)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\mu_x = \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2(x^2 + y^2)^{1/2}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$V_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Logo:

$$\mathcal{F}'(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

9.2 Logaritmo como inversa da exponencial

Sejam $\mathcal{F}(z) = e^z$ e $g(z) = \ln z$, a composta

$$(\mathcal{F} \circ g)(z) = \mathcal{F}(g(z)) = e^{\ln z} = e^{\ln |z| + i\theta} = e^{\ln |z|} \cdot e^{i\theta} = |z| \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = z$$

$$(g \circ \mathcal{F})(z) = g(\mathcal{F}(z)) = \ln(e^z) = \ln(e^x (\cos y + i \sin y)) = \ln |e^z| + iy = x + iy = z$$

Logo:

$$e^{\ln z} = z \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(z) = e^z \quad \text{é a inversa de} \quad g(z) = \ln z$$

9.3 Integrais

As integrais de funções complexas se comportam da seguinte maneira:

Dada uma função $\mathcal{F}(t) = \mu(t) + iV(t)$, temos:

$$\int_a^b \mathcal{F}(t) dt = \int_a^b \mu(t) dt + i \int_a^b V(t) dt$$

Considere a função $f(t) = (1 + it)^2$, Sua integral pode ser dada por,

$$\begin{aligned} \int_1^2 (1 + it)^2 dt &= \int_1^2 (1 + 2it - t^2) dt = \int_1^2 (1 - t^2) dt + i \int_1^2 2t dt \\ &= \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 + i \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(2 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) \right] + i \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{7}{3} + i \cdot 3 = \\
&\quad \frac{4}{3} + 3i
\end{aligned}$$

Um caso mais conhecido é dado pela função $f(t) = e^{it}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{it} dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + i \sin t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\
&= [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + i [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 1 + i(0 - (-1)) = 1 + i
\end{aligned}$$

10 Conclusão

Para finalizar, concluimos que o conjunto dos números complexos não é apenas uma extensão teórica dos números reais, mas uma ferramenta essencial para o avanço da ciência e da tecnologia, mostrando como as operações matemáticas impactam o mundo ao nosso redor, relacionando campos como a geometria, a física, visando aprofundar conceitos e mostrar que tudo está interligado e que a matemática foi a base para essa evolução.

Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo. Variáveis complexas e aplicações. LTC, 2008.
- [2] BROWN, James; CHURCHILL, Ruel. Complex variables and applications. McGraw-Hill, 2008.
- [3] VIEIRA, Lucia Helena da Silva. *Epistemologia dos números complexos*. Monografia de conclusão de Curso. Florianópolis, 1999.
- [4] CHAVES, Marcelo Santos. *Números Complexos: história, teoria e prática*. Editado por la Fundación Universitaria Andaluza Inca Garcilaso para eumed. net, 2013.
- [5] RODRIGUES, M. E. *Equações Algébricas e os Números Complexos*. 2015. Tese de Doutorado. Dissertação de mestrado. PROFMAT/UEM.
- [6] CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. *História dos Números Complexos*. Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo – 2001.
- [7] TEODOSIO, Elaine de Sousa. *Números complexos e suas aplicações à geometria no ensino médio*. 2016.
- [8] Sousa Jr., Luiz Amancio Machado de; Jutuca, Luiz Pedro San Gil. *Introdução às Funções de Variáveis Complexas I: volume único*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2015.