

UMA PROPOSTA APLICADA AO ESTUDO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL COM O USO DO GEOGEBRA

Mateus Dutra Rocha¹, Profa. Dra. Fabiane Regina da Cunha Dantas Araújo²

Resumo: Este artigo teve como objetivo mostrar um exemplo proposto ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral a partir do uso do GeoGebra. É um trabalho que traz uma revisão de literatura sobre os principais temas do cálculo: limite, derivada e integral. Primeiramente, iniciou-se a sua construção com um breve histórico, evidenciando como aconteceu a evolução do cálculo no decorrer dos anos. Em seguida, foi realizada uma abordagem sobre as derivadas e as integrais, para a compreensão de como funciona o cálculo de áreas aplicando as integrais.

Palavras-chave: Cálculo diferencial e integral. GeoGebra. Áreas.

1. INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial e Integral surgiu através da Geometria e da Álgebra e é utilizado para estudarmos as taxas de variações de grandezas, como por exemplo, a inclinação de uma reta, acumulação de quantidade, dentre outros problemas que são de suma importância para a matemática. Divide-se em três partes: Limites, Derivadas e Integrais [3]. No curso de Cálculo do ensino superior existem muitas dificuldades por parte dos alunos, no que diz respeito, a compreensão dos conteúdos abordados no curso, pois trata-se de assuntos que necessitam de pré-requisito, como as representações gráficas e algébricas.

Esse trabalho traz uma contribuição a comunidade acadêmica, principalmente pela defasagem do uso de tecnologias no âmbito da sala de aula, onde alguns conteúdos são ministrados somente de forma algébrica fazendo com que a parte geométrica (mais visual) fique de fora, trazendo dificuldade ao pensamento racional dos estudantes. Foi proposto na realização do presente trabalho, a resolução de uma questão sobre áreas de figuras planas a partir das integrais, sendo a parte geométrica trabalhada com auxílio do *software* GeoGebra para uma melhor compreensão do conteúdo.

O intuito de utilizar o GeoGebra, neste estudo, foi o de trazer uma alternativa para que os professores possam utilizá-lo eventualmente na sala de aula, mostrando de uma maneira mais atrativa diferentes tipos de gráficos, de plotagens e de aplicações nas mais diversas áreas de conhecimento.

A pesquisa foi dividida em 3 seções. A seção 1 refere-se à introdução com informações sobre o objetivo e justificativa do que será abordado no estudo. Na seção 2, consta o referencial teórico com conceitos básicos necessários para o entendimento do assunto abordado. E na seção 3, tem-se as considerações finais acerca do que foi apresentado na pesquisa.

2. DESENVOLVIMENTO

Para melhor compreensão desta seção, faz-se necessários alguns conhecimentos prévios sobre origem do Cálculo Diferencial e Integral e de conteúdos atrelados a ele, no quais são: os Limites, Derivadas e Integrais e, também, algumas noções sobre o *Software* Gráfico GeoGebra.

2.1.1 Origem do cálculo diferencial e integral

O mundo desde a sua origem sempre esteve em constante evolução e, em paralelo a isso, a matemática também entrou neste processo de desenvolvimento. Um exemplo que representa esta ascensão foi quando os egípcios começaram a desenvolver o sistema de numeração no qual consistia em sete números chaves, que são; 1, 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000 [6].

Em decorrência desta evolução, foi-se aperfeiçoando as técnicas e as ferramentas matemáticas, onde desenvolveu-se o Cálculo Diferencial e Integral. Atualmente ainda existem muitas controvérsias a respeito da origem do Cálculo Diferencial e Integral, porém a teoria mais aceita atualmente é a de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz.

Existem fatos que Isaac Newton foi o pioneiro a utilizar a aplicação do Cálculo na física, onde Wilhelm aprimorou as notações que são utilizadas atualmente, porém Leibniz foi acusado de ter furtado as anotações de Newton que não foram publicadas e sim compartilhadas com alguns integrantes da grande sociedade real naquela época. A decorrência deste fato fez que com gerasse uma intriga entre os matemáticos ingleses e alemães daquele período.

Depois de feito alguns exames nos trabalhos de ambos os cientistas, conclui-se que, os mesmos chegaram a resultados semelhantes sem que haja a interferência do outro, pois Leibniz iniciava com os métodos de integração e Newton com a diferenciação. Além deste fato, o Teorema Fundamental do Cálculo foi descrito de forma diferente por eles e percebeu-se que com tal teorema era possível estipular o cálculo das áreas e integrais de maneira mais rápida [7].

Com o passar dos anos até os dias atuais, o Cálculo Diferencial e Integral foi sendo aprimorado, passando por alguns ajustes e reformulações pelas mãos de vários matemáticos, como os irmãos da família Bernoulli (Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli), Maria Gaetana Agnesi, o italiano Louis Lagrange, o alemão Bernhard Riemann que foi responsável pela definição de integral e, posteriormente, Henri Lebesgue que generalizou as noções de integral [7].

2.1.2 Limite

Os conceitos de derivada e integral são os principais assuntos que estudamos durante o curso de cálculo, onde ambos são formados a partir do conceito de limite. Logo, podemos concluir que o limite é o conceito mais básico do curso de cálculo [1]. Podemos representá-lo, de uma forma geral, pela equação (1):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (1)$$

e dizemos que, o limite de uma função $f(x)$ quando x tende a a é igual a L , isto é, quanto mais próximo o valor de a , mais próximo os valores da função $f(x)$ se aproximam de L .

Escrevendo a definição de limite, de maneira mais completa, temos:

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto em torno de a , exceto possivelmente no ponto a , dizemos que $y = f(x)$ tem limite L quando x se aproxima de a e escrevemos equação (2):

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (2)$$

Se para cada número $\varepsilon > 0$ existir um número correspondente $\delta > 0$; tal que, para todos os valores de x equação (3),

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (3)$$

2.1.3 Continuidade

De forma intuitiva, dizemos que uma função é contínua quando apresenta um gráfico sem interrupção.

Definição: Dizemos que uma função f é contínua no ponto a se satisfizer as seguintes condições [1]:

- i) f é definida em a ;
- ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe;
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Observação: A condição (iii) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a) \quad (4)$$

E se (iii) for satisfeita, logo (i) e (ii) também serão satisfeitas.

Se pelo menos uma das condições não forem satisfeitas, então f é dita como uma função descontínua em a .

2.1.4 Derivada

2.1.4.1 Derivada em um ponto

Segundo [2], seja f uma função e p um ponto do seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad (5)$$

quando existe, pode ser chamado de derivada de f em p , onde é denotado por $f'(p)$.

Agora, consideremos uma pequena variação de x em que $x = p + h$. Assim, podemos reorganizar a equação (5) da seguinte forma: $h = x - p$ e fazendo x se aproximar de p é o mesmo que fazer h tender a zero. Assim, podemos escrever:

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \quad (6)$$

Dizemos que f é derivável ou diferenciável em $A \subset D_f$ se f for derivável em cada $p \in A$. Logo, f é uma função diferenciável se f for diferenciável em cada ponto pertencente ao seu domínio.

2.1.4.2 Derivada como função

Anteriormente, foi analisado a derivada de uma função f em um ponto fixo p

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \quad (7)$$

Ao tratarmos a derivada como uma função, podemos variar o ponto p e, assim, mudar o ponto p por uma variável x , logo teremos a seguinte expressão:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (8)$$

Ao atribuímos um valor x para que esse limite possa existir, logo x será $f'(x)$. Então podemos considerar f' como uma nova função na qual pode ser denominada de derivada de f , que tem a sua definição pela equação. Ao tratarmos f' em x , teremos como resposta $f'(x)$ que pode ser interpretado geometricamente, como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ [2].

Exemplo 1: Se $f(x) = x^2 + 1$, logo $f'(x) = 2x$

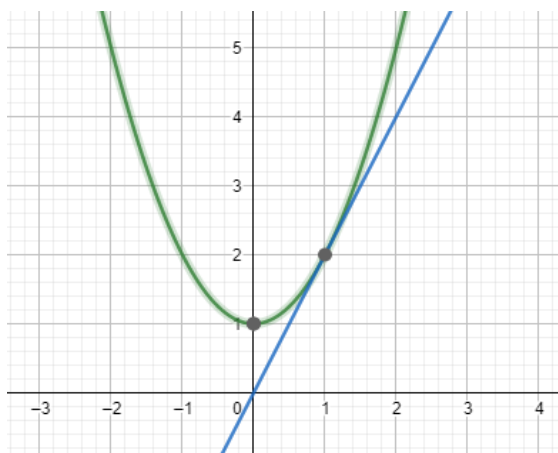


Figura 1. Gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ no GeoGebra
Fonte: Autoria própria (2021)

No exemplo anterior, podemos destacar, a função $f(x)$ na cor verde e a função $f'(x)$ na cor azul. Logo, de forma geométrica, $f'(x)$ passa tangenciando o gráfico da função $f(x)$ no ponto $(1, 2)$.

2.1.5 Integral

2.1.5.1 Soma de Riemann

A soma de Riemann corresponde à partição do intervalo $[a, b]$ em n subintervalos retangulares e pequenos, para que, na aproximação possamos considerar $f(x)$ constante. Ao calcularmos as áreas destes n subintervalos, e em seguida, somarmos cada uma delas, perceberemos que esta soma será aproximadamente a área destes retângulos formados. A Figura (2) mostra a aproximação da área através de retângulos cada vez menores, ao se aumentar o número de subintervalos, fazendo com que tenhamos uma aproximação da área sob a curva [8].

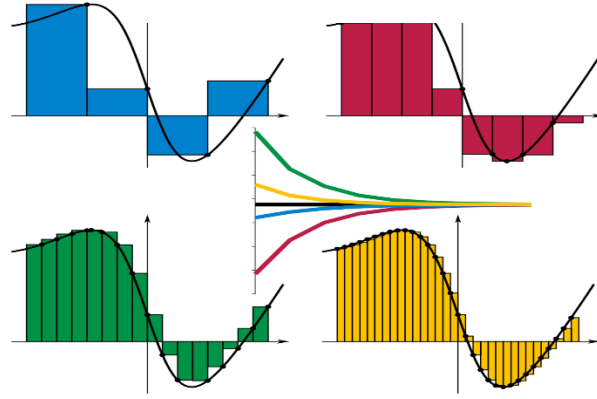


Figura 2. Aproximação da área com retângulos
Fonte: [8]

Para [2] a soma de Riemann é executada a partir da partição de vários retângulos, onde podemos descobrir uma expressão em que o limite seja possível de ser calculado. E ainda, segundo [2], podemos analisar a soma de Riemann geometricamente, a partir da expressão (9), onde c_i é a altura dos retângulos e Δx_i a base dos retângulos.

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (9)$$

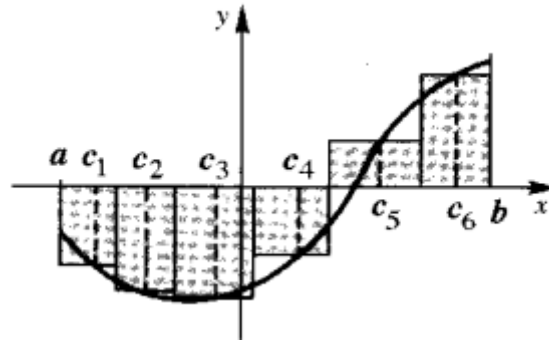


Figura 3. Intervalos particionados
Fonte: [2]

Conforme a Figura 3, para $n = 6$, temos:

$$\sum_{i=1}^6 f(c_i) \Delta x_i \quad (10)$$

A área da função, será a soma das áreas dos retângulos acima do eixo x menos a soma das áreas dos retângulos abaixo do eixo x .

2.1.5.2 Integral de Riemann

De acordo com [2], seja f uma função definida em $[a, b]$ e L um número real, dizemos que, $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ tende a L , quando $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, e escrevemos:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = L \quad (11)$$

se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ que só dependa de ε mas não dependa da escolha dos números c_i tal que

$$|\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i - L| < \varepsilon \quad (12)$$

para toda participação P de $[a, b]$, com $\max \Delta x_i < \delta$.

Tal número L , que é único, quando existe, é denominado como a integral de Riemann de f em $[a, b]$ e indicado por $\int_a^b f(x) dx$. Logo, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (13)$$

2.1.5.3 Primitivas

Segundo [1], temos a seguinte definição: Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + c$ é chamada de integral indefinida da função $f(x)$, onde é denotada por:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (14)$$

De acordo com esta notação, o símbolo $\int$ é chamado sinal de integração, $f(x)$ função integrando e $f(x) dx$ integrando. O processo que permite achar a integral indefinida de uma função é chamado integração e o símbolo dx que aparece serve para identificar a variável de integração.

Pela definição de integral indefinida, decorre que:

$$(i) \int f(x) dx = F(x) + c \leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

(ii) $\int f(x) dx$ representa a família de todas as primitivas da função integrando.

2.1.5.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Segundo [1], O Teorema Fundamental do Cálculo nos permite relacionar as operações de derivação e integração. E, ainda que, conhecendo uma primitiva¹ de uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow IR$, podemos calcular a sua integral definida $\int_a^b f(t) dt$ [1].

Teorema: Se f é contínua em qualquer ponto de $[a, b]$ e se F é qualquer primitiva¹ de f em $[a, b]$. Então:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (15)$$

2.1.5.4 Cálculo de Áreas

O cálculo de áreas de figuras planas pode ser realizado através dos métodos de integração. Usaremos os casos abordados em [1].

Caso I: Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde f é contínua e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$.

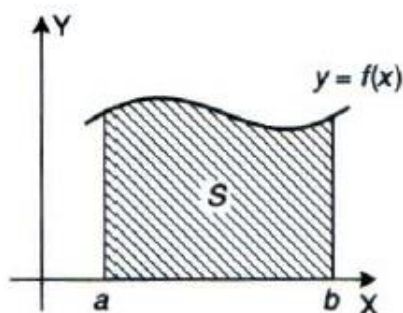


Figura 4. Cálculo de área (Caso I)
Fonte: [1]

Neste caso, a área é dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (16)$$

Caso II: Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x , onde

f é contínua e $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$.

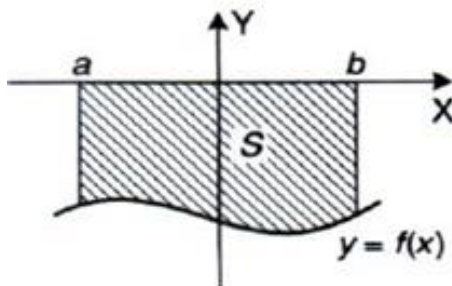


Figura 5. Cálculo de área (Caso II)
Fonte: [1]

Para este caso, a área é dada por:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (17)$$

Caso III: Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g , pelas retas $x = a$, $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$. Neste caso, pode ocorrer uma situação particular onde f e g assumem valores não negativos para todo $x \in [a, b]$ (Figura 6).

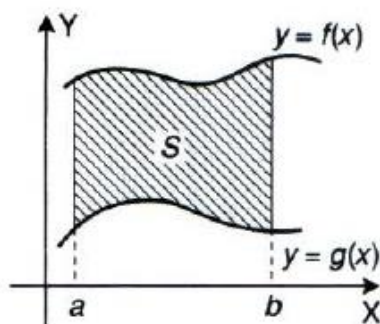


Figura 6. Cálculo de área (Caso III)
Fonte: [1]

Logo, a área será calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de f e a área sob o gráfico de g , portanto, podemos calculá-la da seguinte forma:

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (18)$$

2.1.6 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática gráfica gratuito e com acesso a multiplataformas para quaisquer níveis de ensino, que combinem a geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas. Este *software* foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter. Sua popularidade tem crescido desde a sua origem, onde atualmente é utilizado em 190 países com a tradução para 55 idiomas com mais de 300000 downloads mensais, com 66 institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte aos seus clientes [4].

O GeoGebra nos traz algumas características que o deixam um *software* bastante sofisticado, como:

- Gráficos dinâmicos;
- Interface simples e fácil de usar;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários no mundo;
- Gratuito.

Como o GeoGebra é um *software* com características livre traz para o mundo da educação novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra e estatística, fazendo com que os professores nas salas de aula tenham uma maior interatividade com os alunos, resultando em um ensino de maior qualidade, desenvolvendo o lado racional deles.

Além destas características, o GeoGebra tem bastante importância na comunidade científica, onde apresenta diversas premiações, como algumas dessas mais recentes [5]:

- Archimedes 2016: MNU Award in category Mathematics (Hamburg, Germany);
- Microsoft Partner of the Year Award 2015: Finalist, Public Sector: Education (Redmond, WA, USA);
- MERLOT Classics Award 2013: Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (Las Vegas, Nevada, USA);
- NTLC Award 2010: National Technology Leadership Award (Washington D.C., USA).

Neste estudo foi utilizada versão 6.0.674.0-offlinesuite.

A Figura 7 mostra a interface inicial do GeoGebra.

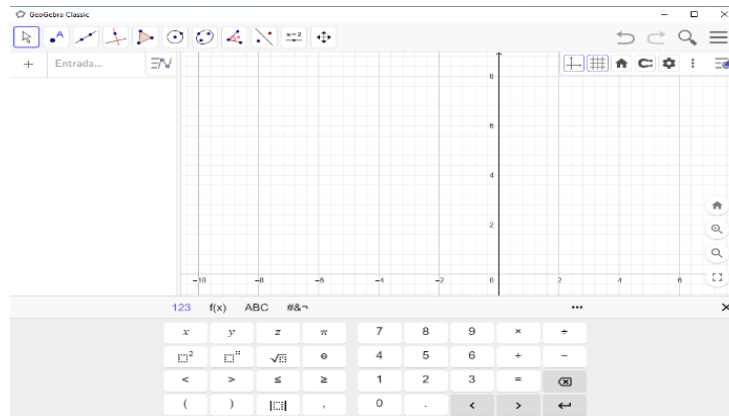


Figura 7. Interface inicial GeoGebra
Fonte: Autoria própria (2021)

A Figura 8 mostra a interface do GeoGebra com algumas funções.

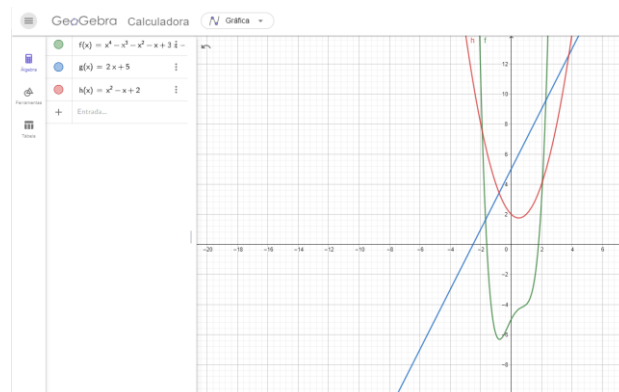


Figura 8. Interface do Geogebra com algumas funções
Fonte: Autoria própria (2021)

2.1.6.1 Cálculo de áreas no GeoGebra

Anteriormente, foi visto que, a soma de Riemann consiste na utilização da adição de parcelas infinitas, onde iremos obter o valor de uma determinada medida. Vale salientar que quanto maior for a quantidade de partições (mais retângulos), a precisão por trás do cálculo será mais próxima do valor real de uma determinada região abaixo da curva.

Para este processo de cálculo de área foi utilizado a seguinte função $f(x) = \ln^2(2x + \sin 3x)$ no intervalo de $[1,7]$. Para conseguirmos desenvolver o processo de cálculo de áreas, devemos realizar os seguintes passos:

- 1) Digitar na barra de entrada a função $f(x) = \ln^2(2x + \sin 3x)$ e, em seguida, pressionar a tecla "ENTER" (Figura 9).

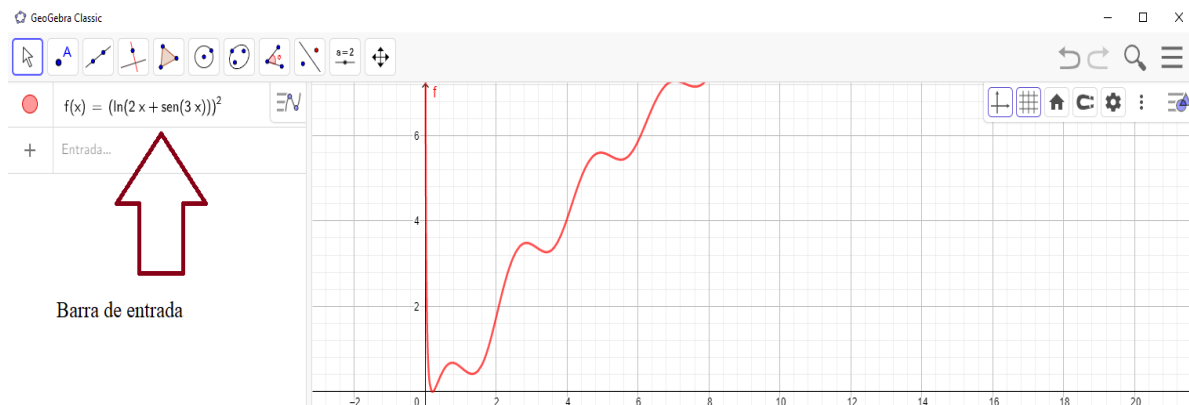


Figura 9. Barra de entrada do GeoGebra

Fonte: Autoria própria (2021)

Feito isto, pode-se visualizar o gráfico da função dada (Figura 10).

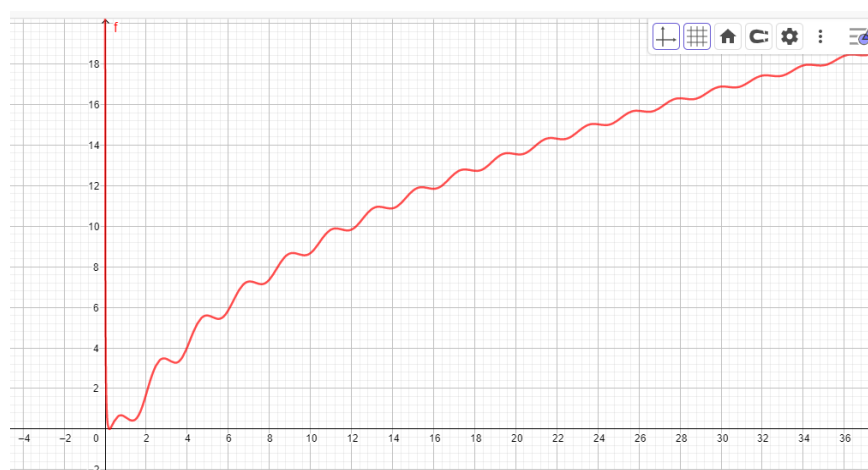


Figura 10. Gráfico da função $f(x) = \ln(2x + \sin 3x)^2$

Fonte: Autoria própria (2021)

2) Selecionar a opção controle deslizante (Figura 11).



Figura 11. Seleção do controle deslizante

Fonte: Autoria própria (2021)

3) Ao selecionar esta opção, clica-se na área de trabalho, onde aparecerá uma janela em que deverá ser determinado os intervalos do controle deslizante (Figura 12).

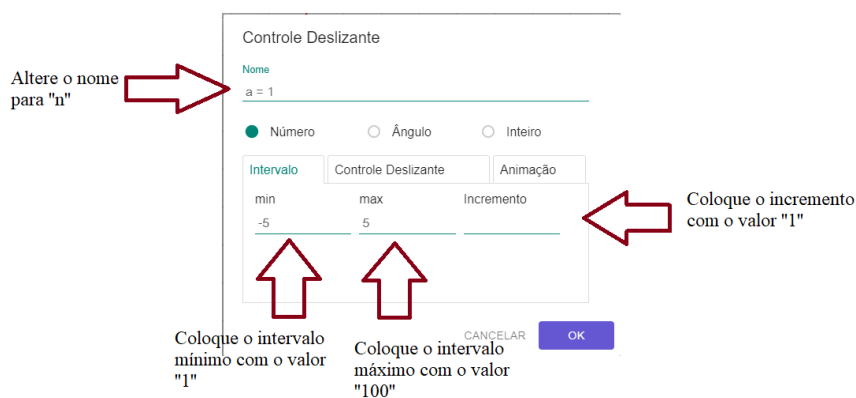


Figura 12. Intervalos do controle deslizante
Fonte: Autoria própria (2021)

4) Digite na barra de entrada o comando “ $\text{Somaderiemanninferior}[f, 1, 7, n]$ ”.

Interpretando o comando citado anteriormente, ele nos diz que f é a função escolhida, 1 e 7 são os extremos do intervalo escolhido que foram definidos no início do problema e no controle deslizante, onde irá nos mostrar a quantidade de retângulos abaixo da curva (Figura 13).

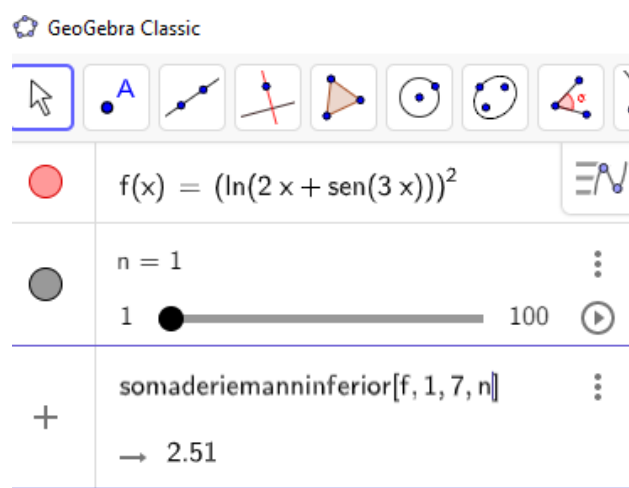


Figura 13. Comando soma de Riemann Inferior
Fonte: Autoria própria (2021)

Feito isso, pode-se visualizar o gráfico da função, conforme a Figura 14.

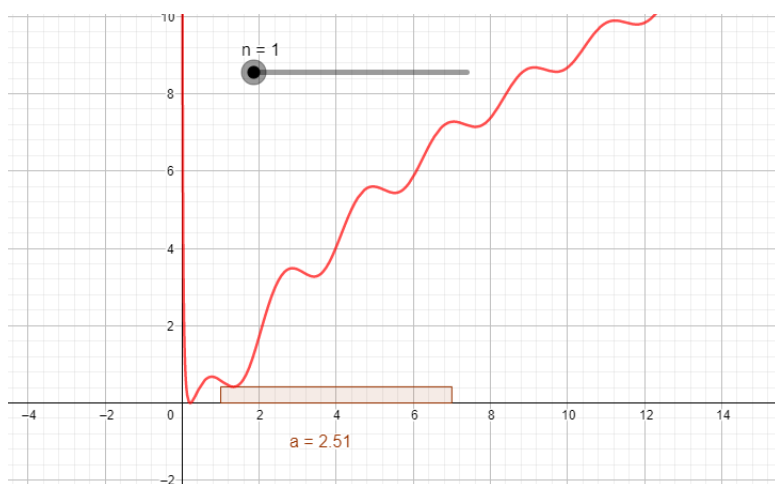


Figura 14. Gráfico da função pós comando de soma inferior
Fonte: Autoria própria (2021)

5) Digite na barra de entrada o comando “SomadeRiemannsuperior[f,1,7,n]”.

Interpretando o comando citado anteriormente, ele nos diz que f é a função escolhida, 1 e 7 são os extremos do intervalo escolhido que foram definidos no início do problema e no controle deslizante, onde irá nos mostrar a quantidade de retângulos acima da curva (Figura 15).

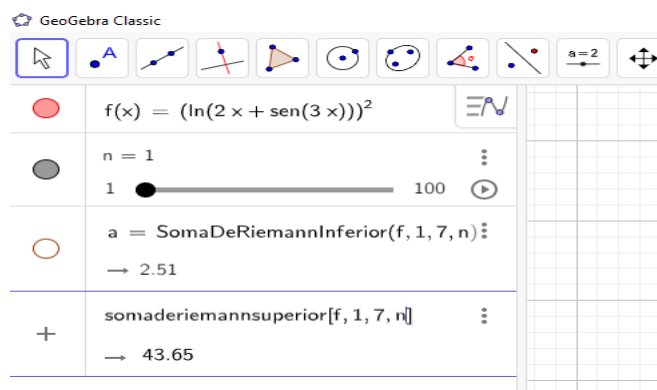


Figura 15. Comando soma de Riemann Superior
Fonte: Autoria própria (2021)

Feito isso, pode-se visualizar o gráfico da função, conforme a Figura 16.

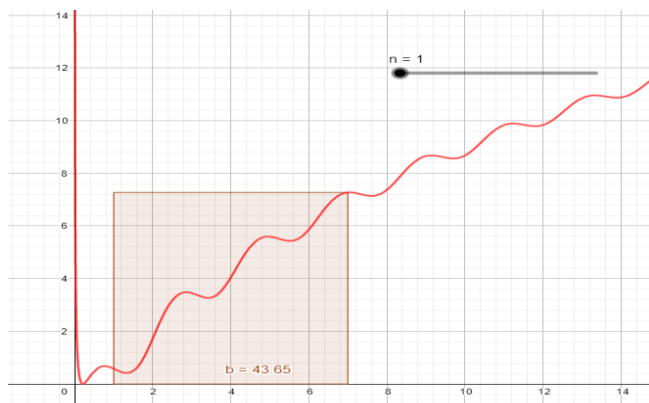


Figura 16. Gráfico da função pós comando soma superior
Fonte: Autoria própria (2021)

Agora podemos observar que à medida que manipulamos o valor de n no controle deslizante, o número de retângulos irá aumentar de maneira proporcional ao valor de n , logo, percebe-se que quanto maior a quantidade de retângulos, maior será a precisão do cálculo de área da função $f(x) = \ln(2x + \sin 3x)^2$ (Figuras 17).

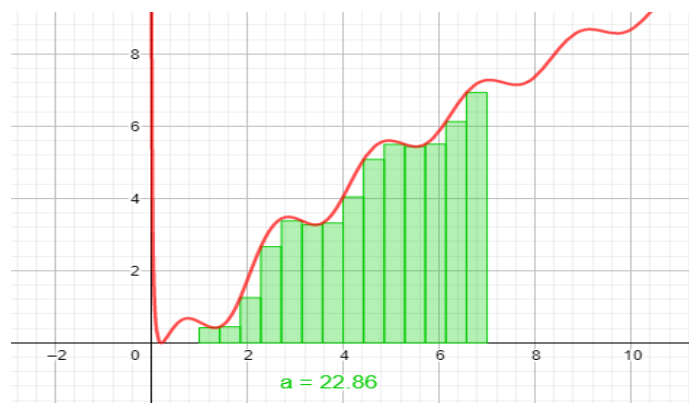


Figura 17. Soma de Riemann Inferior
Fonte: Autoria própria (2021)

Podemos, ainda, usar outros tipos de aproximação por Soma de Riemann no Geogebra, conforme mostram as Figuras 18 e 19.

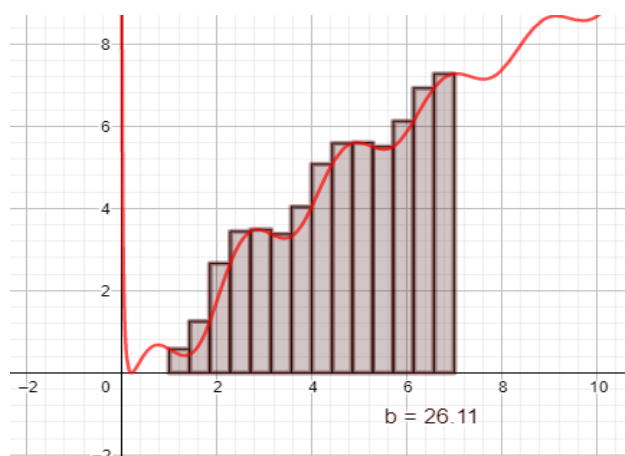


Figura 18. Soma de Riemann Superior
Fonte: Autoria própria (2021)

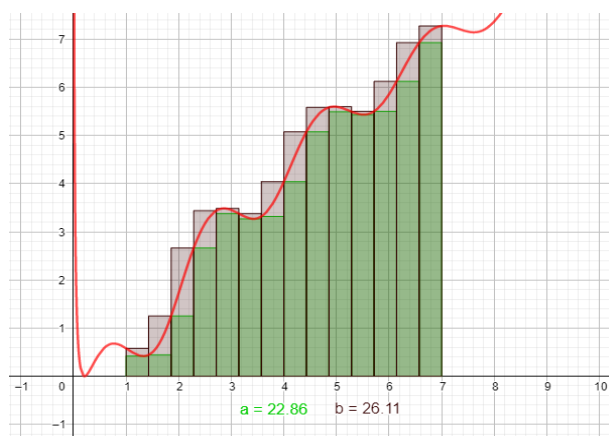


Figura 19. Soma de Riemann Inferior e Superior
Fonte: Autoria própria (2021)

Ao analisarmos as Figuras 17, 18 e 19 percebe-se que existem sobras que vão se adaptando ao gráfico conforme n aumenta, ou seja, quanto mais retângulos, maior será a precisão para calcularmos a área. A soma de Riemann inferior apresentou com $n = 14$ uma área de 22,86 unidades de área, já a soma de Riemann superior apresentou com $n = 14$ uma área de 26,11 unidades de área. Portanto, a área real abaixo da curva da função será a média aritmética entre a soma de Riemann superior e inferior, com um valor de aproximadamente 24,49 unidades de área (Figura 20).

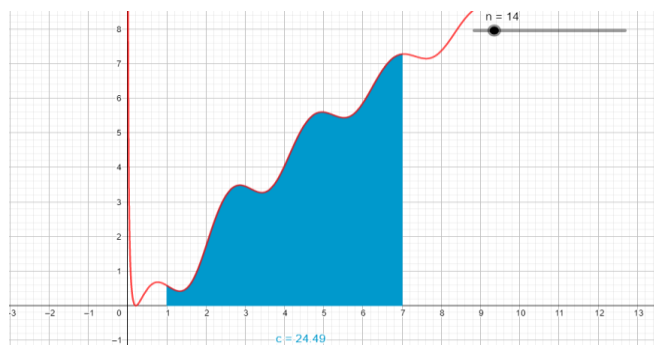


Figura 20. Resultado da integral definida com a função $f(x) = \ln(2x + \sin 3x)^2$.
Fonte: Autoria própria (2021)

O resultado anterior foi obtido através da Soma de Riemann com a Integral Definida e, para isso, aplicou-se o seguinte comando na barra de entrada do GeoGebra “Integral[f,1,7]”, onde f é a função, 1 limite inferior de integração e 7 o limite superior de integração (Figura 21).

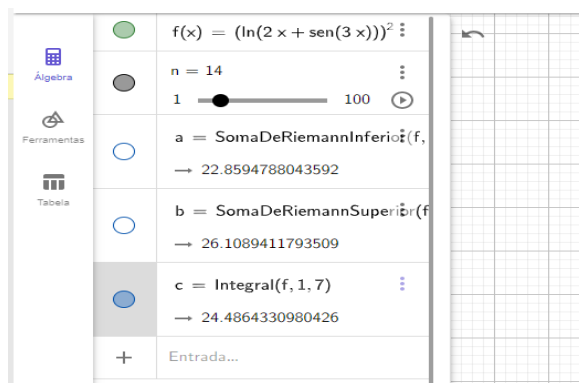


Figura 21. Comando para calcular o valor de uma integral no GeoGebra
Fonte: Autoria Própria (2021)

3. CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou o uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral para ilustrar funções e o cálculo de áreas sob curvas.

É notório que a utilização de meios computacionais para o desenvolvimento das disciplinas de cálculo tem como finalidade facilitar a visualização gráfica com simulações, visando com que as salas de aula com mais tecnologias possibilitem que os estudantes enxerguem situações em que seria impossível ter uma interpretação manual de gráficos mais complexos, sem o auxílio de recursos computacionais para desenvolver modelagens e problemas. Vale salientar que o GeoGebra é muito mais que um software de construção gráfica, pois ele consegue proporcionar a estudantes e professores uma forma de sondar profundamente o cálculo e outros conteúdos de maneira dinâmica.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Flemming, D. M.; Goncalves, M. B. Cálculo A: Funções, limite, derivação, integração – 6a. Edição, São Paulo: Prentice Hall, 2006.
- [2] Guidorizzi, H. L. Um curso de cálculo vol. 1. 5a. Edição, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001.
- [3] Stewart, J. Cálculo vol. 1. 5a. Edição, São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

-
- [4] PUC-SP. Instituto São Paulo Geogebra. Disponível em: <<https://www.pucsp.br/geogebraesp/geogebra.html>> acesso em 12 set. de 2021
- [5] GEOGEBRA. Geogebra - aplicativos matemáticos, 2021. Página inicial. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/?lang=pt>>. Acesso em: 17 set. de 2021.
- [6] JULIANA, Bezerra. História da Matemática. Disponível em <https://www.todamateria.com.br/historia-da-matematica/> > Acesso em 19 set. de 2021
- [7] EVES, H. Introdução à história da matemática/howard eves; tradução: Hygino h. Domingues.Campinas, SP: Editora da UNICAMP, v. 844, p. 63, 2007.
- [8] WIKIPÉDIA. soma de Riemann. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann> . Acesso em 27 set. de 2021.