

O TEOREMA DE WEIERSTRASS EM SUBCONJUNTOS COMPACTOS DA RETA

Iago Ferreira do Vale Neto¹, Alessandro Belém da Silva²

Resumo

A noção de continuidade é um dos pontos centrais da Topologia e tem várias aplicações, tanto em Matemática, quanto em outras áreas da ciência. Intuitivamente, uma função é contínua num ponto de seu domínio quando seu gráfico não apresenta “salto” nesse ponto. Claro que essa ideia intuitiva precisa ser esclarecida com um certo rigor e as propriedades mais elementares da continuidade de uma função estudadas em detalhes. O Teorema de Weierstrass surge então como uma ferramenta poderosa em diversos aspectos. Provaremos aqui esse resultado no caso em que f é definida em um subconjunto compacto de números reais.

Palavras-chave: Compacidade; Extremos de uma função; Limites; Funções contínuas.

1. INTRODUÇÃO

Para preparar o terreno para estudar a continuidade de uma função estudaremos, as principais noções topológicas de subconjuntos da reta, chamam-se, assim, as propriedades que se baseiam nas noções de proximidade e limite. Elas estão fortemente ligadas com o comportamento das funções contínuas. As ideias aqui apresentadas, é claro, são bem mais gerais e pertencem a uma parte da matemática chamada Topologia.

Abordaremos os conceitos de limite primeiramente sob a sua forma mais simples, que é o limite de uma sequência. Posteriormente, a noção de limites no caso particular de uma sequência será estendida à situação mais geral onde se tem uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida num subconjunto qualquer $X \subset \mathbb{R}$.

Para se indagar sobre a continuidade de uma função, o domínio e o contradomínio dela devem possuir um certo tipo de estrutura, tornando-se o que se chama de “espaço topológico”. O conjunto dos números reais é o espaço topológico mais frequente utilizado e, por isso, talvez seja o mais importante. Estudaremos, portanto, noções elementares acerca da topologia da reta, a saber, abertos, fechados, compactos, assim como as propriedades destes.

De uma maneira bem direta, nosso problema é provar que “toda função contínua definida num intervalo compacto da reta é limitada e atinge seus extremos (dentro desse intervalo)”. Claro que antes disso há uma gama de informações a serem esclarecidas para se chegar ao resultado.

Buscaremos então estudar funções contínuas na reta, conhecer um pouco a estrutura topológica desse espaço, chegando ao Teorema de Weierstrass.

Esse trabalho segue as linhas de [3] e tem como um dos principais objetivos esclarecer, facilitar, auxiliar, de modo que a leitura dessa obra se torne simples e agradável. Logicamente, por questões de espaço, algumas demonstrações podem ser omitidas, citando sempre as devidas referências a fim de não deixar lacunas no texto.

2. DESENVOLVIMENTO

Nosso ambiente de trabalho, por assim dizer, durante todo este texto são subconjuntos de números reais. Assumiremos aqui, sem muita preocupação, propriedades elementares do conjunto $\mathbb{R}$. Do ponto de vista algébrico é conhecido o fato de que “ $\mathbb{R}$ é corpo ordenado completo” o que quer dizer, dentre outras coisas, que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente. Uma vasta bibliografia pode ser consultada para mais informações sobre esses assuntos, tanto em obras de análise (por exemplo, [4]), como em obras de álgebra (por exemplo, [7]).

Destacaremos dois elementos importantes de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que serão utilizados algumas vezes durante o texto, a saber, o *supremo* e o *ínfimo*.

¹ Autor - UFERSA

² Orientador - UFERSA

Definição 1 Dado um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, o número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo de X quando é a menor das cotas superiores de X . Isso quer dizer $x \leq b$ para todo $x \in X$ e, além disso, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq c$ para todo $x \in X$ então $b \neq c$.

De modo inteiramente análogo, definimos o *ínfimo* de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente.

Notação: Escreveremos $b = \sup X$ e $a = \inf X$ para indicar que b é o supremo e a o ínfimo de um conjunto X respectivamente.

Por exemplo, o ínfimo do conjunto $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ é igual a 0. Com efeito, claro que $0 < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, 0 é cota inferior de X . Agora dado $0 < c \in \mathbb{R}$, como $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente, podemos sempre encontrar, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/c$, mas isso nos diz que $1/n < c$, e desde que $1/n \in X$, concluímos que c , não pode ser cota inferior de X .

Na verdade, é possível provar que esse resultado equivale a dizer que o conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente. Essas condições significam que $\mathbb{R}$ é um corpo *arquimediano*.

Assumiremos as propriedades mais elementares do supremo e do ínfimo de um subconjunto limitado da reta. Mais detalhes encontram-se, por exemplo, em [4].;

O resultado a seguir é, as vezes, chamado de “Princípio do Intervalos Encaixados”, ele será usado no Teorema de Bolzano-Weierstrass, no teorema 22, e em outros teoremas apresentados futuramente.

Teorema 2 Dada uma sequência decrescente $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ de intervalos limitados e fechados $I_n = [a_n, b_n]$, existe pelo menos um número real c tal que $c \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Como $I_{n+1} \subset I_n, n \in \mathbb{N}$, temos que $I_{n+1} \subset I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_3 \subset I_2 \subset I_1$ ou ainda, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset \dots \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, ou seja, todo intervalo $I_n, n \in \mathbb{N}$, está contido no intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Pondo $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ temos que A é limitado superiormente, já que cada $b_n, n \in \mathbb{N}$, é uma cota superior para A , logo, existe $c = \sup A$. Evidentemente, $a_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois os b_n são cotas superiores para A e c , sendo o $\sup A$, é a menor dessas cotas. Portanto, $c \in I_n$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$. ■

Além das aplicações mostradas anteriormente, uma outra aplicação bem interessante do teorema anterior é o fato de que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável (veja, [3]).

2.1 Sequências de Números Reais

Conceitos centrais em análise se referem a limites: limite de funções, derivadas, integrais, sequências de funções, etc. Começaremos pelo limite de uma sequência de números reais, que são mais simples.

Definição 3 Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real x_n , chamado o n -ésimo termo da sequência.

Escreve-se $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a sequência cujo n -ésimo termo é x_n .

Cuidado, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, é diferente do conjunto de seus termos $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Por exemplo, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $x_n = 0$, se n é ímpar, $x_n = 1$, se n é par, não é a mesma coisa que o conjunto $\{0, 1\}$ de seus termos.

Exemplo 1: Seja $a > 1$ um número real. A sequência $(a, a^2, \dots, a^n, \dots)$ é claramente limitada inferiormente (por a). Por outro lado, sendo $a > 1$ então existe $d > 0$ tal que $a = 1 + d$. Lembrando da desigualdade de Bernoulli: em qualquer corpo ordenado K , se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, então $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$ (isso pode ser verificado utilizando indução sobre n). Segue da desigualdade acima que $(1+d)^n > 1+nd$. A desigualdade é estrita pois $d > 0 > -1$ também é uma desigualdade estrita. Assim, $a^n > 1+nd$. Portanto, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, novamente o fato de $\mathbb{N}$ não ser limitado superiormente, garante a existência de $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{(c-1)}{d}$, isto é, $1+nd > c$. Logo, $a^n > c$, o que mostra que (a^n) não é limitada superiormente.

Definição 4 Dizemos que uma sequência (x_n) converge para o número a ou tem limite a quando, para todo $\varepsilon > 0$, podemos sempre encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Uma sequência se chama convergente quando ela possui um limite, caso contrário, ela chama-se divergente.

Escreve-se então $a = \lim x_n$, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ou $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = a$, ou $x_n \rightarrow a$.

Em símbolos, podemos escrever

$$a = \lim x_n \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Cabem aqui algumas observações, ao dizermos “dado qualquer $\varepsilon > 0$ ”, fica subentendido que ε pode ser tão pequeno quanto se queira, ou seja, para valores muito grandes de n , os termos x_n tornam-se e mantêm-se tão próximos de a quanto se deseje.

Dito de outro modo, $x_n \rightarrow a$ significa que dado $\varepsilon > 0$, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ sempre que $n > n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, ou seja, fora do intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ estão apenas um número finito de termos da sequência x_n , a saber os termos $x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, x_{n_0}$.

Teorema 5 (Unicidade do limite) *Se uma sequência tem um limite, então esse limite é único.*

Prova: Seja uma sequência x_n de números reais tal que $\lim x_n = a$. Suponha que $\lim x_n = b$. Por definição, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow n_0 \leq n_1$ e $n_0 \leq n_2$, assim, $|a - b| = |a - b + x_n - x_n| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Como ε é arbitrariamente pequeno, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluímos que $a = b$. ■

Quando retiramos algum (ou alguns) termos de uma sequência, obtemos o que se chama uma “sub-sequência” da sequência dada. Assim, a sequência de números ímpares positivos é uma subsequência da sequência de números naturais, o mesmo ocorre com a sequência dos números pares positivos, ou da sequência dos números primos, mais precisamente:

Definição 6 *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_1}, \dots, x_{n_2}, \dots)$ para designar a subsequência $x' = x|_{\mathbb{N}'}$.*

Claro que uma subsequência de x é ela mesma na sequência.

Teorema 7 *Se uma sequência (x_n) converge para a , então qualquer subsequência de x_n converge para a .*

Esse resultado é imediato, já que

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

em particular, todos os termos $x_{n_k}, n_k > n_0$, também pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Ou seja, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ qualquer que seja a subsequência x_{n_k} de (x_n) .

O teorema anterior, apesar de simples, pode ser útil para verificar que uma dada sequência não é convergente. Se uma sequência (x_n) possui pelo menos duas subsequências com limites distintos, ela não pode convergir. Outro fato imediato é o:

Teorema 8 *Toda sequência convergente é limitada.*

Prova: Seja (x_n) uma sequência convergente e suponha $\lim x_n = a$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Isso quer dizer que a partir do índice $n = n_0 + 1$ a sequência é limitada inferiormente por $a - \varepsilon$ e superiormente por $a + \varepsilon$. Seja L o menor e M o maior dos elementos do conjunto finito

$$\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, a + \varepsilon, a - \varepsilon\}.$$

Naturalmente, $L \leq x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, (x_n) é limitada. ■

A recíproca desse resultado é claramente falsa. De fato, é imediato que a sequência $(0, 2, 0, 2, 0, \dots)$ cujo termo geral é $x_n = 1 - (-1)^{n+1}$ é limitada mas não é convergente, já que possui duas subsequências com limites distintos.

Definição 9 *Uma sequência (x_n) é dita crescente quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se ocorrer $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que (x_n) é não-decrescente. Analogamente, (x_n) é chamada decrescente e não-crescente respectivamente quando $x_n > x_{n+1}$ e $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sequências crescentes, decrescentes, não-crescentes e não-decrescentes são chamadas sequências monótonas.*

Suponha (x_n) uma sequência não-decrescente e limitada. Claro que (x_n) é limitada inferiormente por x_1 e, desde que, (x_n) é limitada, ela é limitada superiormente, o conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ dos valores de x_n é, portanto, limitado e, conseqüentemente, possui um supremo, digamos a .

Afirmção: $\lim x_n = a$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela definição de supremo, $a - \varepsilon$ não é cota superior de X . Assim, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_n \leq a$. Como (x_n) é não-decrescente, $x_{n_0} \leq x_n$ para todo $n > n_0$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$ o que mostra que $x_n \rightarrow a$.

Aqui supomos (x_n) não-decrescente, mas é imediato ver que argumentos análogos podem ser usados nos demais casos de uma sequência monótona. Isso prova o

Teorema 10 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

O teorema a seguir, devido a Karl Weierstrass³ (1815 – 1897), pode ser obtido como consequência do teorema 10, no entanto, devido a sua importância, daremos a ele o destaque merecido.

Teorema 11 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Prova: Seja (x_n) uma sequência limitada, digamos contida num intervalo fechado I tal que $c(I) = l$ (l é igual a amplitude do intervalo I). Dividindo esse intervalo ao meio, obtemos outros dois intervalos fechados, cada um de amplitude $\frac{l}{2}$. Como (x_n) possui infinitos elementos algum dos intervalos anteriores possui infinitos elementos de (x_n) (ou ambos!). Seja I_1 tal intervalo. Repetindo o argumento, obtemos um intervalo I_2 de amplitude $\frac{l}{2^2}$, contendo uma infinidade de elementos (x_n) . Prosseguindo indefinidamente, obtemos uma sequência de intervalos limitados e fechados I_n de tal modo que $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots$ com $c \in (I_n) = \frac{l}{2^n}$ e, além disso, cada intervalo contém uma infinidade de elementos de (x_n) . Pelo princípio dos intervalos encaixados, teorema 2, existe $c \in I_n$ para todo $n = 1, 2, \dots$. Agora seja x_{n_1} um elemento de (x_n) no intervalo I_1 , x_{n_2} no intervalo I_2 , e assim sucessivamente, tomados um após o outro, de modo que $n_1 < n_2 < \dots$. Afirmamos que a subsequência (x_{n_k}) obtida converge para c . Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c(I_{n_0}) < \varepsilon$, (tal escolha é possível pois $c = (I_n) = \frac{l}{2^n}$ tende a 0 quando n tende a $+\infty$) de modo que $I_m \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ para $m > n_0$. Portanto, para $k > n_0$, $n_k > n_0$ pois $n_k \geq k$ e, daí, $x_{n_k} \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ para todo $k > n_0$ o que significa que a subsequência x_{n_k} converge para c . ■

Exemplo 2: A sequência (x_n) dada por $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, é monótona decrescente, pois $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, no exemplo após a definição 1, vimos que o conjunto $X = \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferiormente por 0 e, desde que $\frac{1}{n} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que (x_n) é limitada. Pelo Teorema 10, (x_n) é uma sequência limitada.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, o fato de $\mathbb{N}$ não ser limitado superiormente garante que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Assim, $n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{1}{n_0} \right| < \varepsilon \therefore \lim x_n = 0$.

Exemplo 3: Vamos analisar a sequência (a^n) das potências de $a \in \mathbb{R}$.

Quando $a = 0$ ou 1 ela é constante, e, portanto, convergente. Quando $a = -1$, (a^n) é dada por $(-1, +1, -1, +1, \dots)$ e, portanto, (a^n) diverge, pois possui duas subsequências que convergem para limites distintos (teorema 7). Quando $a > 1$, a sequência é limitada ($a < a^2 < a^3 < \dots$), o mesmo ocorre quando $a < -1$, logo ela é divergente em ambos os casos (teorema 8).

Agora suponha $0 < a < 1$. Nesse caso, a sequência é limitada (entre 0 e 1), monótona (decrescente). Pelo teorema 10, (a^n) converge. Vamos provar que $\lim a^n = 0$. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Observe que $1 > a \Rightarrow \frac{1}{a} > 1$ e também $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{a}$ (basta multiplicar a desigualdade $1 > a$ por a em ambos os lados), isso nos diz que as potências de $\frac{1}{a}$ formam uma sequência crescente limitada. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}$, isto é, $a^n < \varepsilon$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |a^n - 0| = |a^n| = a^n < \varepsilon$, o que confirma que $\lim a^n = 0$. Para finalizar, quando $-1 < a < 0$, ainda se tem $\lim a^n = 0$. Basta observar que, nesse caso, $0 < |a| < 1$ e, pelo caso anterior, $0 = \lim |a|^n = \lim |a^n| \therefore \lim a^n = 0$. Aqui estamos utilizando o fato mais geral, $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim |x_n| = 0$, o que também não é difícil de ser verificado a partir da definição de limite.

Propriedades operatórias do limite de uma sequência (soma, multiplicação, divisão, etc) são facilmente verificadas como consequência do resultado a seguir.

Teorema 12 *Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou não), então $\lim (x_n y_n) = 0$.*

Prova: Como (x_n) converge para 0 dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, onde M é tal que $|y_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, dado pela limitação de (y_n) . Assim,

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

³O conhecido teorema de Bolzano-Weierstrass foi formulado por Weierstrass originalmente como “todo subconjunto infinito limitado de $\mathbb{R}$ possui algum ponto de acumulação” argumentos análogos ao que fizemos aqui, levam à prova desse teorema nessa versão.

sempre que $n > n_0$. Logo, $\lim (x_n y_n) = 0$. ■

Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, não é difícil mostrar que $\lim (x_n + y_n) = a + b$. Por outro lado, sendo

$$x_n \cdot y_n - a \cdot b = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$

Como (x_n) é convergente, portanto, limitada. Segue do teorema anterior que

$$\lim (x_n y_n - ab) = 0,$$

ou seja, $\lim x_n y_n = ab$, pois $\lim (y_n - b) = 0 = \lim (x_n - a)$. Se $b \neq 0$, o quociente $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ é tratado de forma parecida. Isso prova o:

Teorema 13 Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$ então:

1. $\lim (x_n \pm y_n) = a \pm b$;
2. $\lim (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, se $b \neq 0$.

Exemplo 4: Como $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ e $\lim \frac{1}{n} = 0$, segue que $\lim (x_n y_n) = 0$, onde $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \sin(n)$ mesmo sem que (y_n) seja convergente. É possível dar exemplos em que $(x_n y_n)$ diverge ou converge para um valor não nulo quando se tem $\lim x_n = 0$ e (y_n) não limitada.

2.2 Introdução a Topologia da Reta

Para adquirirmos a ideia de proximidade, precisamos obter parâmetros que estão relacionados com essa ideia, que são as noções de limite e continuidade de uma função. Veremos nessa seção alguns dos conceitos básicos sobre a topologia de $\mathbb{R}$ que serão utilizadas nas seções a seguir.

Definição 14 Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que o ponto a é interior a X quando existe um número $\varepsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em X . Chama-se o interior do conjunto X todos os pontos que são interiores a X . Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se aberto quando todos os pontos de A são interiores a A .

O interior do conjunto X representa-se pela notação $\text{int. } X$. Assim, dizer que $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, significa que $A = \text{int. } A$.

Exemplo 1: Todo ponto c do intervalo aberto (a, b) é um ponto interior a (a, b) , ou seja, um intervalo aberto é um conjunto aberto. Os pontos a e b , extremos do intervalo fechado $[a, b]$ não são interiores a $[a, b]$, pois dado qualquer $\varepsilon > 0$ o intervalo de raio ε centrado em a (ou em b) contém pontos fora do intervalo $[a, b]$. O interior do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é vazio. De fato, basta imaginar que próximo de qualquer número racional, digamos que q , existem pontos não racionais, consequentemente qualquer intervalo centrado em q não estará contido em $\mathbb{Q}$. Do mesmo modo, $\text{int. } (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Exemplo 2: Seja $A = (0, 1) \cup (2, 5)$. Então A é um subconjunto aberto da reta. Com efeito, para todo $x \in A$ tem-se $x \in (0, 1)$ ou $x \in (2, 5)$. Em qualquer caso, existe um intervalo aberto que contém x e está contido em A . Esse fato será generalizado no teorema 15 a seguir.

O limite de uma sequência pode ser reformulado em termos de conjuntos abertos: tem-se $a = \lim x_n$ se e somente se, para todo aberto A contendo a existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in A$.

Teorema 15 a) Se A_1 e A_2 são conjuntos abertos então a interseção $A_1 \cap A_2$ é um conjunto aberto. Mais geralmente, interseção finita de abertos é um aberto.

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Prova: a) Seja $x \in A_1 \cap A_2$ então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Logo existem $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tais que $x \in (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $x \in (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1) \subset A_1$ e $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2) \subset A_2$ e, portanto, $x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_1 \cap A_2$. Assim, todo ponto $x \in A_1 \cap A_2$ é interior e, consequentemente, esta interseção é um conjunto aberto. Para uma quantidade finita basta usar indução.

b) Seja $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, podemos obter um intervalo

(a, b) tal que $x \in (a, b) \subset A_\lambda$. Como $A_\lambda \subset A$ temos $x \in (a, b) \subset A$. Logo, todo ponto $x \in A$ é interior e, por conseguinte, A é aberto. ■

Exemplo 3: Embora por b) a reunião de uma infinidade de conjuntos abertos seja ainda aberta, a interseção de um número infinito de abertos pode não ser aberta. Por exemplo, se $A_1 = (-1, 1)$, $A_2 = (-1/2, 1/2)$, $\dots$, $A_n = (-1/n, 1/n)$, $\dots$ então $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \{0\}$. Com efeito, se $x \neq 0$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > 1/n$ logo $x \notin A_n$, donde $x \notin A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Definição 16 Diz-se que um ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \in X$. O fecho do conjunto X , denotado por $\overline{X}$, é o conjunto de todos os pontos aderentes a X . Quando $X = \overline{X}$ dizemos que X é um conjunto fechado.

Evidentemente, todo ponto $a \in X$ é aderente a X , basta tomar a sequência constante $x_n = a$. Além disso, $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$. Tem-se também $X \subset \overline{X}$ para todo X .

Teorema 17 Um ponto a é aderente ao conjunto X se, e somente se, toda vizinhança de a contém algum ponto de X .

Prova: Seja a aderente a X . Então $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da definição do limite de sequências que dada uma vizinhança qualquer $V \ni a$ temos $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande, logo $V \cap X \neq \emptyset$. Reciprocamente, se toda vizinhança de a contém pontos de X podemos escolher, em cada intervalo $(a - 1/n, a + 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in X$. Então $|x_n - a| < 1/n$, logo $\lim x_n = a$ e a é aderente a X . ■

Pelo teorema acima, a fim de que um ponto a não pertença a $\overline{X}$ é necessário e suficiente que exista uma vizinhança V de a tal que $V \cap X = \emptyset$.

Corolário 18 O fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.

Com efeito, se a é aderente a $\overline{X}$ então todo conjunto aberto A contendo a contém algum ponto $b \in \overline{X}$. A é uma vizinhança de b . Como b é aderente a X , segue-se que A contém algum ponto de X . Logo qualquer ponto a , aderente a $\overline{X}$, é também aderente a X , isto é, $a \in \overline{X}$.

O resultado a seguir pode ser visto como uma maneira de “construir” exemplos de conjuntos fechados.

Teorema 19 Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.

Prova: Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado, então F é igual ao seu fecho, daí, todos os pontos aderentes a F pertencem a F . Se $a \in A = \mathbb{R} - F$ então não pode ser um ponto aderente a F , segue do teorema 17 que existe um intervalo aberto I tal que $a \in I$ e $I \cap F = \emptyset$. Mas isso significa que $a \in I \subset A$ com $I \subset$ aberto, ou seja, a pertence ao interior de A . Sendo $a \in A$ um ponto genérico, concluímos que $A = \mathbb{R} - F$ é aberto. A recíproca é análoga, basta observar que essas afirmações são, na verdade, equivalentes. ■

Exemplo 4: Todo conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é fechado. Para verificar isso, sem perda de generalidade, vamos supor que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, assim, $\mathbb{R} - F = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \dots \cup (x_n, +\infty)$, ou seja, $\mathbb{R} - F$ é aberto por ser união de abertos, consequentemente, F deve ser fechado. Por motivo análogo, $\mathbb{Z}$ é fechado.

Exemplo 5: O fecho dos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é a reta toda, logo, esses conjuntos não são fechados. No exemplo 1 desta seção, vimos que esses conjuntos também não são fechados, ou seja, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não são nem abertos e nem fechados. Analogamente, um intervalo do tipo $[a, b)$ ou $(a, b]$, não é nem aberto e nem fechado.

Exemplo 6: Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são ao mesmo tempo fechados e abertos. $\mathbb{R}$ é fechado porque qualquer de seus pontos é aderente, basta tomar a sequência constante igual ao próprio ponto, seu complementar $\emptyset$ é, portanto, aberto. $\mathbb{R}$ também é aberto, já que dado qualquer $a \in \mathbb{R}$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ está contido em $\mathbb{R}$ seja qual for o $\varepsilon > 0$. Logo, seu complementar $\emptyset$ deve ser fechado pelo 19. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é ao mesmo tempo fechado e aberto, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$. Com efeito, nestas condições, $X \cup (\mathbb{R} - X)$ são ambos abertos. Como $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = X \cup (\mathbb{R} - X)$, implica que $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Segue imediatamente dos teoremas 19 e 15 que:

Teorema 20 a) Se F_1 e F_2 são fechados então $F_1 \cup F_2$ é fechado.

b) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de conjuntos fechados então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Exemplo 7: Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado, não-vazio. Então $a = \inf X$ e $b = \sup X$ são aderentes a X . Com efeito, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher $x_n \in X$ com $a \leq x_n < a + 1/n$, logo $a = \lim x_n$. Analogamente, vê-se que $b = \lim y_n, y_n \in X$. Em particular, a e b são aderentes a (a, b) .

Definição 21 Uma cisão de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma decomposição $X = A \cup B$ tal que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B e nenhum ponto de B é aderente a A . (Em particular, A e B são disjuntos.) A decomposição $X \cup \emptyset$ chama-se a cisão trivial.

Exemplo 8: Se $X = \mathbb{R} - \{0\}$, então $X = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$ é uma cisão. Dado um número irracional α , sejam $A = \{x \in \mathbb{Q}; x < \alpha\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q}; x > \alpha\}$. A decomposição $\mathbb{Q} = A \cup B$ é uma cisão do conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais. Por outro lado, se $a < c < b$, então $[a, b] = [a, c] \cup (c, b]$ não é uma cisão.

Teorema 22 Um intervalo da reta só admite a cisão trivial.

Prova: Suponha $I = A \cup B$ com, $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Tomemos $a \in A, b \in B$, digamos com $a < b$, logo $[a, b] \subset I$. Seja c o ponto médio do intervalo $[a, b]$. Então $c \in A$ ou $c \in B$ poremos $a_1 = c, b_1 \in B$. Em qualquer caso, obteremos um intervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$, com $b_1 - a_1 = (b - a)/2$ e $a_1 \in A, b_1 \in B$. Por sua vez, o ponto médio de $[a_1, b_1]$ o decompõe em dois intervalos fechados justapostos de comprimento $(b - a)/4$. Um desses intervalos, que chamaremos $[a_2, b_2]$, tem $a_2 \in A$ e $b_2 \in B$. Prosseguindo analogamente, obteremos uma sequência de intervalos encaixados $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ com $b_n - a_n = (b - a)/2^n, a_n \in A$ e $b_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema 2, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq d \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O ponto $d \in I = A \cup B$ não pode estar em A pois $d = \lim b_n \in \overline{B}$ e o fecho de B não tem interseção com A , nem em B pois $d = \lim a_n \in \overline{A}$ e o fecho de A não tem interseção com B . Absurdo, e esse absurdo veio de supor que $I = A \cup B$ era uma cisão não trivial. ■

Definição 23 Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando para todo $\varepsilon > 0$ tem-se $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$. Ou seja, quando toda vizinhança de a contém algum ponto de X diferente do próprio a .

Indica-se com X' o conjunto dos pontos de acumulação de X . Portanto, $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X , diz-se que a é um *ponto isolado* de X . Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que a é o único ponto de X no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Quando todos os pontos do conjunto X são isolados, X chama-se um conjunto *discreto*.

Exemplo 9: O conjunto $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots \right\}$ é discreto, pois seus pontos são todos isolados, e seu único ponto de acumulação é o número 1. Considerando o intervalo (a, b) , temos que todos os pontos do intervalo são seus pontos de acumulação e também os extremos a e b .

Teorema 24 Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a é um ponto de acumulação de X ;
2. a é limite de uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$;
3. Todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X .

Prova: Se $a \in X'$ então para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos achar um ponto $x_n \in X, x_n \neq a$, na vizinhança $(a - 1/n, a + 1/n)$ e, desse modo, $\lim x_n = a$, o que prova (2). Por outro lado, supondo (2), então, para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n; n > n_0\}$ é infinito porque do contrário existiria um termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência constante com limite $x_{n_1} \neq a$. A afirmação (3) segue então da definição de limite. Finalmente, a implicação (3) $\Rightarrow$ (1) é óbvia. ■

Exemplo 10: Se X é finito então $X' = \emptyset$ (conjunto finito não tem ponto de acumulação). $\mathbb{Z}$ é infinito mas todos os pontos de $\mathbb{Z}$ são isolados. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. Se $X = (a, b)$ então $X' = [a, b]$. Se $X = \{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ então $X' = \{0\}$, isto é, 0 é o único ponto de acumulação de X . Note que todos os pontos deste conjunto X são isolados (X é discreto).

Definição 25 Chama-se cobertura de um conjunto X a uma família C de conjuntos C_λ cuja reunião contém X . Quando todos os conjuntos C_λ são abertos, diz-se que C é uma cobertura aberta. Quando $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ é um conjunto finito, diz-se que $X \subset C_{\lambda_1} \cup \dots \cup C_{\lambda_n}$ é uma cobertura finita. Se $L' \subset L$ é tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$, diz-se que $C' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$ é uma subcobertura de C .

Exemplo 11: Os intervalos $A_n = (1/n, 2)$, $n \in \mathbb{N}$, constituem uma cobertura aberta do conjunto $X = (0, 1]$ pois $(0, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Entretanto, esta cobertura não possui subcobertura finita pois, como $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, toda reunião finita de conjuntos A_n é igual aquele de maior índice, logo não contém $(0, 1]$.

O Teorema de Borel-Lebesgue a seguir é utilizado para caracterizar subconjuntos compactos. Nele, mais uma vez, vemos a importância do Princípio dos Intervalos Encaixados.

Teorema 26 (Borel-Lebesgue) *Toda cobertura aberta de um intervalo limitado e fechado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ admite uma subcobertura finita.*

Prova: Tomemos uma cobertura aberta $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ do intervalo compacto $[a, b]$. Suponhamos, por absurdo, que $C = (A_\lambda)_{\lambda \in L}$ não admita subcobertura finita. O ponto médio do intervalo $[a, b]$ o decompõe em dois intervalos de comprimento $(b - a)/2$. Pelo menos um destes intervalos, o qual chamaremos $[a_1, b_1]$, não pode ser coberto por um número finito de conjuntos A_λ . Por bisseções sucessivas obteremos uma sequência decrescente $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ de intervalos tais que $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ e nenhum $[a_n, b_n]$ pode estar contido numa reunião finita dos abertos A_λ . Pelo Teorema 2, existe um número real c que pertence a todos os intervalos $[a_n, b_n]$. Em particular, $c \in [a, b]$. Pela definição de cobertura, existe $\lambda \in L$ tal que $c \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, temos $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset A_\lambda$ para um certo $\varepsilon > 0$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b - a)/2^n < \varepsilon$ temos então $c \in [a_n, b_n] \subset [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$, donde $[a_n, b_n] \subset A_\lambda$, logo $[a_n, b_n]$ pode ser coberto por apenas um dos conjuntos A_λ . Contradição. ■

Teorema 27 *As seguintes afirmações a respeito de um conjunto $K \subset \mathbb{R}$ são equivalentes:*

1. K é limitado e fechado;
2. Toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita;
3. todo subconjunto infinito de K possui ponto de acumulação pertencente a K ;
4. toda sequência de pontos de K possui uma subsequência que converge para um ponto de K .

Prova: O Teorema de Borel-Lebesgue nos dá $(1) \Rightarrow (2)$. Na verdade, o teorema de Borel-Lebesgue foi provado aqui apenas para um intervalo do tipo $[a, b]$, mas é imediato generalizar para um subconjunto F limitado e fechado da reta, basta usar o fato que F fechado implica $\mathbb{R} - F$ aberto, F limitado implica que F contido em algum intervalo limitado e fechado. Para provar que $(2) \Rightarrow (3)$, seja $X \subset K$, e suponha que X não tenha ponto de acumulação em K , para cada $x \in K$ podemos achar um intervalo aberto I_x , de centro x que não contém ponto algum de $X - \{x\}$. Em outras palavras, temos $I_x \cap X = \{x\}$ se $x \in X$ e $I_x \cap X = \emptyset$ se $x \notin X$. Isto nos fornece uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{x \in X} I_x$, da qual podemos extrair uma subcobertura finita

$K \subset I_{x_1} \cup \dots \cup I_{x_n}$. Em particular, esta reunião finita contém X . Ora, para cada $x \in X$, o único intervalo da cobertura original que continha x era o próprio I_x . Segue-se que, para cada $x \in X$ o intervalo I_x comparece na coleção $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$. Logo, X é finito. Assim, quando se supõe que K cumpre a condição (2), os únicos subconjuntos de K que não possuem ponto de acumulação em K são os finitos. Segue-se que $(2) \Rightarrow (3)$.

Mostremos agora que $(3) \Rightarrow (4)$. Dada uma sequência de pontos $x_n \in K$ há duas possibilidades: ou o conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é finito ou infinito. No primeiro caso, algum valor $x_{n_1} = x_{n_2} = \dots$ deve repetir-se uma infinidade de vezes, o que nos dá uma subsequência constante (e, portanto, convergente) de (x_n) . No segundo caso, a hipótese (3) nos dá $a \in K$, um ponto de acumulação de X . Todo intervalo aberto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de X e, portanto, contém os termos x_n com índices arbitrariamente grandes.

Finalmente, mostraremos que $(4) \Rightarrow (1)$. De fato, se K fosse ilimitado (digamos superiormente), tomaríamos $x_1 \in K$ e veríamos que existiria $x_2 \in K$ tal que $x_2 > x_1 + 1$. Prosseguindo analogamente, obteríamos uma sequência de pontos $x_n \in K$ com $x_{n+1} > x_n + 1$. Toda subsequência de x_n seria ilimitada e, portanto, não-convergente. Por outro lado, se K não fosse fechado, existiria uma sequência de pontos $x_n \in K$ com $\lim x_n = x \notin K$. Qualquer subsequência de (x_n) convergiria para x , portanto estaria violada a condição (4). Isto conclui a demonstração. ■

Definição 28 *Diremos que um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto quando cumpre uma das (e portanto todas as) condições do Teorema 27.*

Por exemplo, um intervalo $[a, b]$ o conjunto $\{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}$ são compactos. Todo conjunto finito é compacto. A reta $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos racionais, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ e $\mathbb{Z}$ não são compactos. Por outro lado, (a, b) é limitado mas não é fechado, logo não é compacto. Também $\mathbb{Z}$ não é compacto pois é ilimitado, embora seja fechado (seu complementar $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ é a reunião dos intervalos abertos $(n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, logo é um conjunto aberto).

Observação. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto então, $a = \inf X$ e $b = \sup X$ pertencem a X . Assim, todo conjunto compacto contém um elemento mínimo e um elemento máximo. Ou seja, X compacto $\Rightarrow$ existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in X$. Quando falarmos sobre funções contínuas, veremos que esse é precisamente o conteúdo do Teorema de Weierstrass (objetivo principal deste trabalho). Noutros termos, veremos que X compacto e f contínua em X implicam $f(X)$ compacto, consequentemente, devem existir x_0 e x_1 em X tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in X$.

Alguns comentários sobre compacidade. Como vimos, na reta, uma cobertura aberta de um subconjunto K admite uma subcobertura finita se, e somente se, K é limitado e fechado. Nada há de especial no fato de termos $n = 1$. Mais geralmente, em qualquer $\mathbb{R}^n$, mais ainda, em espaços métricos (a grosso modo, um *espaço métrico* é qualquer conjunto não vazio munido de uma *métrica* e satisfazendo algumas condições) mais gerais essa equivalência continua válida. Há, no entanto, *lugares* (por “lugares” entenda-se certos espaços topológicos) onde uma cobertura aberta de um subconjunto limitado e fechado pode não admitir uma subcobertura finita. Nesses espaços a compacidade de acordo com o item 2 do teorema 27 se mostra mais útil. Por exemplo, em *espaços de Hilbert*, estudados em análise funcional, não é verdade que uma equivalência (1) $\Leftrightarrow$ (2) análoga a do teorema 27. (Veja as referências [5] e [6]).

2.3 Limites

Em vez de seqüências, como visto na seção 2.1, trataremos agora de funções reais, mais especificamente, de limites numa forma geral.

Definição 29 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida num subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X . Diremos que o número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a , e escrevemos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

para significar o seguinte: para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$.

Simbolicamente:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Informalmente: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que temos um $f(x)$ que pode se tornar tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a .

A restrição $0 < |x - a|$ significa que $x \neq a$. Assim, quando falamos de limite, é de suma importância que tenhamos um a que seja um ponto de acumulação do domínio da função mas não é de grande relevância que a pertença ou não a X , ou seja, que f esteja ou não definida no ponto a . Num dos exemplos mais importantes de limite, a saber, a derivada, estuda-se $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$, onde a função $q(x) = [f(x) - f(a)]/(x - a)$ não está definida para $x = a$.

Na verdade, se $a \notin X'$ é possível provar que *todo* número real L seria limite de $f(x)$ quando x tende para a !

Em termos de seqüências, o limite de uma função se traduz em:

Teorema 30 *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. A fim de que seja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ é necessário e suficiente que, para toda seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$, tenha-se $\lim f(x_n) = L$.*

Prova: Suponhamos, primeiro, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e que se tem uma seqüência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim x_n = a$. Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$ (pois $x_n \neq a$ para todo n). Por conseguinte, $n > n_0 \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$. Reciprocamente, suponhamos que $x_n \in X - \{a\}$ e $\lim x_n = a$ impliquem $\lim f(x_n) = L$ e provemos que se tem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Com efeito, negar esta igualdade implicaria em afirmar a existência de um número $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ podemos achar $x_n \in X$ tal que $0 < |x_n - a| < 1/n$ mas $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$. Então teríamos $x_n \in X - \{a\}$, $\lim x_n = a$ sem que fosse $\lim f(x_n) = L$. Esta contradição completa a prova. ■

De posse do teorema 30 segue imediatamente da unicidade e das propriedades operatórias do limite de uma sequência dadas respectivamente nos teoremas 5 e 13, a unicidade do limite de uma função num ponto assim como as propriedades operatórias do limite dadas nos corolários a seguir.

Corolário 31 (Unicidade do limite) *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ então $L = M$.*

Corolário 32 (Operações com limites) *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}, a \in X'$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$; $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, se $M \neq 0$. Além disso, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e g é limitada numa vizinhança de a , tem-se $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.*

Exemplos:

1. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$. (isto significa: $f(x) = x + 1$ se $x > 0$ e $f(x) = x - 1$ se $x < 0$.) Então $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{-1}{n}\right) = -1$.
2. Um dos exemplos mais populares de uma função sem limite é dado por $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $f(x) = \sin(1/x)$. Tomando-se $x_n = \frac{1}{n\pi}$, temos $x_n \rightarrow 0$ e $\lim f(x_n) = 0$. Por outro lado, para $x_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1}$, vale $x_n \rightarrow 0$ e $\lim f(x_n) = 1$. Na realidade, para todo número $c \in [-1, +1]$, podemos obter uma sequência de pontos $x_n \neq 0$, com $x_n \rightarrow 0$ e $f(x_n) = c$ para todo n . Basta tomar um número b tal que $\sin b = c$ e por $x_n = (b + 2n\pi)^{-1}$. Assim, não existe $\lim \sin(1/x)$. Mas esta função é limitada. Logo vale $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ para toda função $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim x^n \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

2.4 Continuidade

Chegamos ao ápice do nosso trabalho. A ideia de função contínua é o tema central da Topologia. Nossa intenção aqui é apresentar a continuidade de uma função e estabelecer fatos e conceitos topológicos que poderão ser utilizados em estudos mais aprofundados, longe, claro, de esgotar o assunto.

Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se *contínua* no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a .

Em termos mais precisos:

Definição 33 *Diremos que uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, é contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Diz-se que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em X quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.*

Em símbolos, f contínua no ponto a significa:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Chama-se *descontínua* no ponto $a \in X$ uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que não é contínua nesse ponto. Isto quer dizer que existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\delta > 0$ pode-se achar $x_\delta \in X$ tal que $|x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Iremos destacar agora algumas observações à respeito da continuidade de uma função:

1. Ao contrário da definição de limite, só faz sentido indagar se f é contínua no ponto a quando $a \in X$;
2. Se a é um ponto isolado de X , então toda função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a . (Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x - a| < \delta$ com $x \in X$ implica $x = a$ e, portanto, $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.) Em particular, se todos os pontos de X são isolados, então qualquer função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua; logo, toda sequência é uma função contínua, já que seu domínio $\mathbb{N}$ é um conjunto discreto.
3. Seja agora $a \in X$ um ponto de acumulação de X . Então $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Isto reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite. Reciprocamente, poderíamos definir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ pela condição de ser contínua no ponto a a função $g : X \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, onde $g(a) = L$ e $g(x) = f(x)$ para $x \in X - \{a\}$;

Exemplo 1: Todo polinômio $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Toda função racional $p(x)/q(x)$ (quociente de dois polinômios) é contínua no seu domínio, o qual é o conjunto dos pontos x tais que $q(x) \neq 0$. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, é descontínua no ponto 0 e é contínua nos demais pontos da reta. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x \cdot \sin(1/x)$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$, é contínua em toda a reta. A função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi = 0$ para x racional e $\varphi(x) = 1$ para x irracional, é descontínua em todos os pontos da reta porém suas restrições a $\mathbb{Q}$ e a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ são contínuas porque são constantes. Se definirmos $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $\psi(x) = x \cdot \varphi(x)$ veremos que ψ é contínua apenas no ponto $x = 0$.

Apresentaremos agora algumas propriedades elementares decorrentes da definição de continuidade.

O Teorema da Conservação do Sinal a seguir será utilizado no Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 34 *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a \in X$ com $f(a) < g(a)$. Existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$.*

Prova: Tomemos $c = [g(a) + f(a)]/2$ e $\varepsilon = g(a) - c = c - f(a)$. Então $\varepsilon > 0$ e $f(a) + \varepsilon = g(a) - \varepsilon = c$. Pela definição de continuidade, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $x \in X, |x - a| < \delta_1 \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < c$ e $x \in X, |x - a| < \delta_2 \Rightarrow c < g(x) < g(a) + \varepsilon$. Seja δ o menor dos números δ_1 e δ_2 . Então $x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c < g(x)$ o que prova o teorema. ■

Corolário 35 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X$. Se $f(a) \neq 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.*

Corolário 36 *Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, sejam $Y = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ e $Z = \{x \in X, f(x) \leq g(x)\}$. Existem $A \subset \mathbb{R}$ aberto e $F \subset \mathbb{R}$ fechado tais que $Y = X \cap A$ e $Z = X \cap F$. Em particular, se X é aberto então Y é aberto e se X é fechado então Z é fechado.*

Com efeito, pelo teorema 34, para cada $y \in Y$ existe um intervalo aberto I_y , de centro y , tal que $\{y\} \subset X \cap I_y \subset Y$. Daí resulta $\bigcup_{y \in Y} \{y\} \subset \bigcup_{y \in Y} (X \cap I_y) \subset Y$, ou seja, $Y \subset X \cap (\bigcup_{y \in Y} I_y) \subset Y$. Pondo $A = \bigcup_{y \in Y} I_y$, o teorema 15 assegura que A é um conjunto aberto. Além disso, $Y \subset X \cap A \subset Y$ concluímos que $Y = X \cap A$. Quanto ao conjunto Z , temos $Z = X - \{x \in X; g(x) < f(x)\}$. Pelo que acabamos de ver, existe $B \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $Z = X - (X \cap B) = X \cap (\mathbb{R} - B)$. Pelo teorema 19, $F = \mathbb{R} - B$ é fechado, portanto $Z = X \cap F$ como se pretendia mostrar.

Teorema 37 *A fim de que a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua no ponto a é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$, se tenha $\lim f(x_n) = f(a)$.*

A demonstração segue exatamente as mesmas linhas do teorema 30, por isso é omitida.

Corolário 38 *Se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ então são contínuas nesse mesmo ponto as funções $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$, bem como a função f/g , caso seja $g(a) \neq 0$.*

O domínio da função f/g , bem entendido, é o subconjunto de X formado pelos pontos x tais que $g(x) \neq 0$. Existe $\delta > 0$ tal que $X \cap (a - \delta, a + \delta)$ está contido nesse domínio.

A composta de duas funções contínuas é contínua, mais precisamente:

Teorema 39 *Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in X, g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in Y$ e $(x) \subset Y$, de modo que a composta $g \circ f$ é contínua no ponto a . (A composta de duas funções contínuas é contínua.)*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ existe, pela continuidade de g no ponto b , um número $n > 0$ tal que $y \in Y, |y - b| < n$ implicam $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Por sua vez, a continuidade de f no ponto a assegura que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X, |x - a| < \delta$ implicam $|f(x) - b| < n$. Consequentemente, $x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(b)| = |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \varepsilon$, o que prova o teorema. ■

Passaremos a analisar a continuidade de uma função num intervalo da reta. Inicialmente, veremos que uma função contínua não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermediários, como sugere o:

Teorema 40 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Prova: Consideremos os conjuntos $A = \{x \in [a, b]; f(x) \leq d\}$ e $B = \{x \in [a, b]; f(x) \geq d\}$. Pelo Corolário 36, A e B são fechados, i.e., $A = \overline{A}$ e $B = \overline{B}$, por conseguinte, $A \cap B = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$. Além disso, é claro que se tem $f(c) = d$ para qualquer $c \in A \cap B = \{x \in [a, b]; f(x) = d\}$. Se, entretanto, fosse $A \cap B = \emptyset$ então $[a, b] = A \cup B$ seria uma cisão não trivial, o que contradiz o teorema 22. Logo, deve ser $A \cap B \neq \emptyset$ e o teorema está provado. ■

Corolário 41 Se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então $f(I)$ é um intervalo.

Isto é óbvio se f é constante. Caso contrário, sejam $\alpha = \inf f(I) = \inf \{f(x); x \in I\}$ e $\beta = \sup f(I) = \sup \{f(x); x \in I\}$. Se $f(I)$ for limitado, tomaremos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$. Para provar que $f(I)$ é um intervalo (aberto, fechado ou semiaberto) cujos extremos são α e β , tomemos d tal que $\alpha < d < \beta$. Pelas definições de $\inf$ e $\sup$, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha \leq f(a) < d < f(b) \leq \beta$. Pelo teorema 40 existe $c \in [a, b]$, logo $c \in I$, tal que $f(c) = d$. Assim $d \in f(I)$. Isto prova que $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Como α é o $\inf$ e β é o $\sup$ de $f(I)$, nenhum número real menor do que α ou maior do que β pode estar em $f(I)$. Portanto, $f(I)$ é um intervalo cujos extremos são α e β .

Observação: Se $I = [a, b]$ é um intervalo compacto então $f(I)$ é também um intervalo compacto, pelo teorema 42, a seguir. Mas se I não é fechado ou limitado, $f(I)$ pode não ser do mesmo tipo que I . Por exemplo, seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin x$. Tomando sucessivamente os intervalos abertos $I_1 = (0, 7)$, $I_2 = (0, \pi/2)$ e $I_3 = (0, \pi)$ temos $f(I_1) = [-1, 1]$, $f(I_2) = (0, 1)$ e $f(I_3) = (0, 1]$.

O Teorema do Valor Intermediário possui diversas aplicações, vejamos aqui duas das mais conhecidas.

Exemplo 2: Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinômio real de grau ímpar (isto é, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ com $a_n \neq 0$ e n ímpar). Afirmamos que p possui uma raiz real, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$. Para fixar as ideias, suponhamos $a_n > 0$. Então podemos escrever $p(x) = a_n \cdot x^n \cdot r(x)$, onde

$$r(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}.$$

Evidentemente, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 1$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n) = +\infty$ e (por ser n ímpar) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n) = -\infty$, concluímos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$. Tomando, $I = \mathbb{R}$ no corolário 41, vemos que $p(\mathbb{R})$ é ilimitado nos dois sentidos. Portanto $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Assim, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetiva. Em particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p(c) = 0$.

Exemplo 3: Seja $y \geq 0$ um número real. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^n$. Evidentemente, f é contínua. Logo sua imagem é um intervalo. Como $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, tal intervalo é $[0, +\infty)$ isto é, f é sobrejetiva. Assim sendo, para todo $y \geq 0$, existe $x \geq 0$ tal que $x^n = y$. Além disso, f é crescente e, portanto, injetiva. Concluímos que f é uma bijeção. Dado $y \geq 0$, o número $x \geq 0$ tal que $x^n = y$ é único e se escreve $\sqrt[n]{y}$.

Esse exemplo mostra a existência da raiz n -ésima de um número real qualquer $y \geq 0$.

Muitos problemas em matemática e nas suas aplicações consistem em procurar pontos de um conjunto X nos quais uma certa função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ assume seu valor máximo ou seu valor mínimo. Antes de tentar resolver um desses problemas, é necessário saber se realmente tais pontos existem. Para começar, a função f pode ser limitada superiormente (e então não possui valor máximo) ou inferiormente (não terá valor mínimo). Entretanto, mesmo limitada, f pode não assumir valor máximo em X , ou mínimo, ou nenhum dos dois.

Exemplo 4: Sejam $X = (0, 1)$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Então $f(X) = (0, 1)$ logo, para todo $x \in X$ existem x' e $x'' \in X$ com $f(x') < f(x) < f(x'')$. Isto significa que, para nenhum $x \in X$, o valor $f(x)$ é o maior nem o menor que f assume em X . Noutro exemplo, podemos tomar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(1+x^2)$. Temos $0 < g(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $g(0) = 1$, vemos que $g(0)$ é o valor máximo de $g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x)$ seja o menor valor de g . Com efeito, se $x > 0$ basta tomar $x' > x$ para ter $g(x') < g(x)$. E se $x < 0$, toma-se $x' < x$ e se tem novamente $g(x') < g(x)$.

Observe que nesses exemplos o domínio de cada uma das funções f e g não são conjuntos compactos, por isso não conseguimos obter valores máximos ou mínimos para essas funções em pontos de seus domínios.

Chegamos agora ao principal resultado do nosso trabalho, ele será consequência do teorema a seguir:

Teorema 42 A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$ por uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é um conjunto compacto.

Prova: De acordo com a condição (4) do teorema 27, devemos provar que toda sequência de pontos $y_n \in f(X)$ possui uma subsequência que converge para algum ponto em $f(X)$. Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $y_n = f(x_n)$, com $x_n \in X$. Como X é compacto, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, que converge para um ponto $a \in X$. Sendo f contínua no ponto a , de $\lim_{n \in \mathbb{N}'} x_n = a$ concluímos que, pondo $b = f(a)$ temos $b \in f(X)$ e, além disso, $\lim_{n \in \mathbb{N}'} y_n = \lim_{n \in \mathbb{N}'} f(x_n) = f(a) = b$, como queríamos demonstrar. ■

O teorema a seguir assegura a existência de valores máximos e mínimos de uma função contínua quando seu domínio é compacto.

Teorema 43 (Weierstrass) *Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida num compacto X é limitada e atinge seus extremos (isto é, existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$).*

Com efeito, como X é compacto, o teorema anterior garante que $f(X)$, é compacto. Pelo teorema 27, $f(X)$ é limitado e fechado. Logo $\sup f(x) \in f(X)$ e $\inf f(x) \in f(X)$ (veja a observação feita após esse mesmo resultado). Portanto existem $x_1, x_2 \in X$ tais que $\inf f(X) = f(x_1)$ e $\sup f(X) = f(x_2)$. Assim, $\inf f(X) = f(x_1) \leq f(x) \leq \sup f(X) = f(x_2)$ com $x_1, x_2 \in X$. $\square$

Exemplo 5: A função $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$, é contínua porém não é limitada. Isto se dá porque seu domínio $(0, 1]$ não é compacto.

Exemplo 6: Dado um ponto $a \in \mathbb{R}$ e um subconjunto fechado não-vazio $F \subset \mathbb{R}$, existe um ponto $x_0 \in F$ tal que $|a - x_0| \leq |a - x|$ para todo $x \in F$. (O ponto x_0 é o ponto de F mais próximo de a .) Para ver isto, basta considerar, um intervalo fechado $[a - n, a + n]$ suficientemente grande de forma que a interseção $K = [a - n, a + n] \cap F$ seja não-vazia. K é limitado e fechado, donde compacto. Consideremos a função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - a|$. Pelo teorema de Weierstrass, f atinge seu valor mínimo num ponto $x_0 \in K$. Para todos os pontos $x \in F$ tem-se $|x_0 - a| \leq |x - a|$ porque os pontos de F que não pertencem a K situam-se fora do intervalo $[a - n, a + n]$ e, portanto, estão mais longe de a do que o ponto x_0 . Note que se F não fosse fechado, poderíamos tomar $a \in \overline{F} - F$, logo o ínfimo da função f seria zero, não atingido em ponto algum $x \in F$. Portanto, quando F não é fechado, pode-se sempre achar um ponto a , do qual nenhum ponto de F é o mais próximo.

Exemplo 7: Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma função contínua em $[a, b]$. Vamos mostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$, não há o que fazer. Suponhamos então, $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Pelo teorema 43, $f([a, b])$ é compacto, logo, não pode ocorrer $f(a) < a$ e $f(b) > b$. Assim, devemos ter $f(a) > a$ e $f(b) < b$.

Defina $h : [a, b] \rightarrow [a, b]$ pondo $h(x) = x - f(x)$. Claro que h é contínua em $[a, b]$ pois é a diferença de duas funções contínuas. Observe ainda que $h(a) = a - f(a) < 0$ e $h(b) = b - f(b) > 0$. Ou seja, $h(a) < 0 < h(b)$ com h contínua. Segue do teorema 40 que existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$ e, conseqüentemente, $c - f(c) = h(c) = 0$. Logo, $f(c) = c$.

O ponto c do exemplo acima é chamado de *ponto fixo* da função f .

O resultado do exemplo 7 é conhecido como *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*, ele continua válido em dimensões maiores e é uma poderosa ferramenta da análise matemática. É possível provar, por exemplo, a existência de soluções de equações diferenciais ordinárias via Teorema do Ponto Fixo em espaços métricos mais gerais

Esse Resultado, teorema 43, tem importantes aplicações quando estudamos a derivada de uma função num ponto. No entanto, para apresentá-las aqui precisaríamos definir a derivada de uma função, estudar suas propriedades mais imediatas (pelo menos) para então termos bagagem para enunciar os resultados. Convém citar alguns resultados decorrentes do teorema 43:

1. *Teorema do valor intermediário para a derivada.*

Devido a Darboux⁴, esse resultado diz que a derivada de uma função, mesmo se for descontínua, cumpre a condição do teorema 40.

2. *Teorema de Rolle*⁵ : Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.

3. *Teorema do Valor Médio, de Lagrange*⁶: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , existe $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

O Teorema do Valor Médio segue do Teorema de Rolle, que segue do Teorema de Weierstrass. Logo “Weierstrass $\Rightarrow$ Lagrange”. Segue ainda do Valor Médio a *Fórmula de Taylor* tanto *infinitesimal* como *com resto de lagrange*. Esta, por sua vez, tem aplicações em funções *convexas*, *máximos* e *mínimos*.

⁴Jean-Gaston Darboux Nimes (1842 - 1917) foi um matemático francês, diretor da faculdade de ciências de Paris e membro da Academia Francesa de Ciências. Realizou várias descobertas em análise e mecânica racional.

⁵Michel Rolle (1652 – 1719) foi um matemático francês que trabalhou principalmente com equações algébricas. Desenvolveu a expressão moderna para o termo *n-ésima raiz de x*, que chamou de método “cascata” para separar as raízes em uma equação algébrica.

⁶Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), nascido como Giuseppe Lodovico Lagrangia foi um matemático italiano, responsável por estudos envolvendo aplicações do cálculo diferencial à teoria da probabilidade e pelo problema de oscilação da lua, recebendo, por este último, o grande prêmio da Academia Francesa de Ciências.

3. CONCLUSÃO

Por meio do que foi apresentado, pudemos obter noções de sequências de números reais, topologia da reta, funções contínuas e limites de sequências e funções. Esses conceitos foram de suma importância para chegarmos ao Teorema de Weierstrass, onde pudemos afirmar que qualquer função contínua de um intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$ é limitada, e que, além disso, tem um valor máximo $f(x_1)$ e um mínimo $f(x_2)$ nesse intervalo. Utilizamos teoremas, corolários, provas, definições e exemplos para facilitar o estudo e deixar de forma concisa e clara o entendimento.

Os teoremas apresentados são amplamente abordados em praticamente todos os ramos das ciências exatas, e, mais precisamente, em cursos de matemática propriamente ditos. O Teorema de Weierstrass é, sem dúvidas, uma ferramenta poderosa na área de limites e derivadas, servindo como auxílio para outros teoremas, incluindo o teorema de Rolle e do Valor Médio, podendo ser estendida até mesmo para outras áreas.

Referências

- [1] Figueiredo, D. G. - *Análise I*. Rio de Janeiro, L.T.C., 1974.
- [2] Guidorizzi, H. L. - *Um Curso de Cálculo*, vol. 1, 5ed. São Paulo, L.T.C., 2001.
- [3] Lima, E. L. - *Análise Real - Funções de Uma Variável*, vol. 1. Rio de Janeiro, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2006.
- [4] Lima, E. L. - *Curso de Análise*, vol. 1. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2006.
- [5] Lima, E. L. - *Elementos de Topologia Geral*. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970.
- [6] Lima, E. L. - *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2005.
- [7] Monteiro, L. H. J. - *Elementos de Álgebra*, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1971.
- [8] Rudin, W. - *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1970.