

USO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM NA ANÁLISE DE CORRENTE E TENSÃO EM CIRCUITOS RLC.

Yan Gabriel A. Felipe¹, Matheus da S. Menezes², Samanta M. de Holanda³

Resumo: O estudo investigou a aplicação do método das diferenças finitas no contexto de circuitos RLC. A metodologia adotada neste trabalho se baseou na utilização da discretização dos domínios de corrente e tensão no tempo, conforme proposto pelo método das diferenças finitas. Para o propósito de calcular pontos de corrente e tensão utilizou-se da aproximação numérica das derivadas primeira e segunda, dado o domínio discretizado e tomando como base em valores iniciais estabelecidos pela natureza dos próprios circuitos. A pesquisa teve como objetivo principal avaliar se há eficácia do uso desse método e quais as suas limitações. Os resultados obtidos demonstraram que as aproximações realizadas foram extremamente proveitosas, visto que elas conseguiram se aproximar das funções originais com uma precisão boa, proporcionando uma representação fiel do comportamento dos circuitos analisados. As limitações encontradas se resumiram principalmente ao tamanho do passo adotado na análise de acordo com o número de pontos considerados. No entanto, essas limitações foram controláveis e puderam ser ajustadas de acordo com o tamanho do espaço analisado.

Palavras-chave: Equações diferenciais; Cálculo numérico; Circuitos elétricos.

1. INTRODUÇÃO

A área do cálculo numérico desempenha um papel fundamental na engenharia, oferecendo ferramentas importantes, ágeis e úteis. Embora as resoluções analíticas e as medições empíricas tenham sido pilares tradicionais da engenharia, a capacidade de simular sistemas por meio da computação representa um grande avanço na forma de resolver problemas de engenharia. Esta revolução digital traz consigo a flexibilidade e a capacidade de modelagem que na maioria vezes superam as limitações das abordagens tradicionais. Isso se torna evidente em sistemas complexos ou inacessíveis para medições diretas. Em muitos casos, o mundo real apresenta desafios que inviabilizam a obtenção de dados empíricos, seja devido à inacessibilidade física, ao custo proibitivo, entre outros diversos exemplos. Nesses cenários, a computação se destaca, permitindo aos engenheiros criar modelos virtuais em ambientes controlados que representam com precisão os problemas reais.

O circuito RLC é um tipo de circuito peculiar para a área da engenharia elétrica devido aos seus possíveis comportamentos quando submetido à energia elétrica. Como leitura complementar sobre circuitos RLC sugerimos [1] e [2]. Os seus componentes são extremamente fundamentais para a área da elétrica e eletrônica, sendo eles o resistor (R), o indutor (L) e o capacitor (C). Dependendo do formato com que os componentes estão organizados torna-se diferente o tipo de análise necessária para compreender e prever a resposta geral desses circuitos. Para simplificação e generalização desses circuitos, pode-se dividi-los nos casos em série e em paralelo. Ambos os casos possuem semelhanças para seu desenrolar matemático, porém é necessário conhecer muito bem as características de cada caso no intuito de prever exatamente qual será o comportamento que eles apresentarão de acordo com suas características.

Este trabalho tem como objetivo verificar a capacidade do Método das Diferenças Finitas de solucionar equações diferenciais de segunda ordem quando inseridas no contexto dos circuitos RLC, tomando em consideração suas características de natureza física e relações estabelecidas pela análise desses circuitos elétricos.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para que haja um entendimento mais profundo deste estudo, torna-se necessário que leitor possua conhecimento prévio sobre como dá-se o funcionamento do cálculo integral e diferencial, além de também compreender as leis de Kirchhoff, ter noções sobre componentes elétricos básicos, suas relações e como realizar análise de circuitos elétricos. Além disso, a fundamentação da leitura requer também que haja ao menos de forma básica entendimento sobre as formas de encontrar as respostas válidas para uma equação diferencial. Para os fins de visualização prévia desses temas, sugerimos: [3], [4] e [5].

Como será abordado o método numérico das diferenças finitas para realizar cálculos de tensão e corrente em circuitos RLC, esses tópicos serão apresentados e aprofundados de forma que haja melhor desenvolvimento de pontos específicos abordados por esse estudo.

2.1. Equações Diferenciais (ED)

As Equações Diferenciais são dadas por equações que relacionam uma função com uma ou mais de suas derivadas, podendo ser caracterizadas em diversas categorias. Destacaremos as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) lineares que, conforme [5], assumem o formato:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (01)$$

Além disso será destacado o caso em que os termos $a_n(x)$ à $a_0(x)$ e $g(x)$ são funções constantes, pois neste caso a equação diferencial será denominada também como homogênea, caso $g(x)$ seja igual a zero, ou heterogênea, se $g(x)$ for uma função constante diferente de zero.

Por fim, para os objetivos estabelecidos por este trabalho será utilizado apenas os casos especiais denominados de ED ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem e de segunda ordem, conforme os formatos:

$$a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (02)$$

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \quad (03)$$

2.1.1. Problema de valor inicial (PVI)

Devida a natureza nas equações diferenciais é possível encontrar infinitas soluções validas para as ED, sendo elas denominadas de famílias de soluções possíveis. Com intuito de encontrar uma resposta única $y(x)$ para uma ED deve-se levar em consideração o Teorema da existência e unicidade. De forma mais direta, conforme [4], toma-se um espaço I que y e y' estejam definidos, contendo um y_0 tal que seja satisfeito:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (04)$$

2.1.2. Problema de Valor de Contorno (PVC)

De forma semelhante ao PVI torna-se útil utilizar o PVC quando se deseja encontrar uma solução particular para um ED. Para este caso torna-se necessário condições de contorno para solucionar quais as constantes multiplicam os termos da função $y(x)$, esses valores podem ser dados como:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \text{ e } y(x_1) = y_1, \text{ ou} \\ y'(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_1) = y_1, \text{ ou} \\ y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y_1. \end{cases} \quad (05)$$

Onde os termos y_0 e y_1 devem ser termos constantes no intuito de igualá-los as equações solução $y(x)$ e $y'(x)$ e encontrar uma resposta particular.

2.2. Método das Diferenças Finitas (MDF)

No MDF tomamos o domínio contínuo de uma função e o transformamos em uma série de partes finitas discretas pertencentes a um conjunto de pontos, a partir dos quais serão calculados os valores do problema estabelecido. A substituição que se dá ao trocar o domínio contínuo por um domínio discreto, denomina-se de discretização, e dá-se de acordo com a Figura 1.

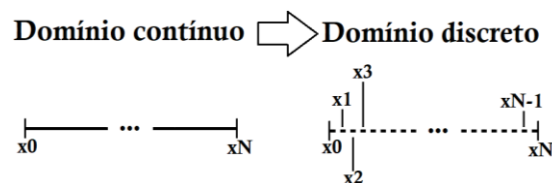


Figura 1. Discretização de domínio contínuo unidimensional. (Autoria própria)

Para os fins deste trabalho o domínio será dividido em N partes iguais, o espaço entre cada ponto do domínio será dado por h , conforme a Equação (06), onde x_0 é o ponto inicial e x_N o ponto final do domínio discretizado.

$$h = \frac{x_N - x_0}{N + 1} \quad (06)$$

Após a discretização do domínio da função problema, aplicamos a função nos pontos do novo domínio discretizado, necessitando de uma resolução ponto a ponto para chegar a uma aproximação válida. Porém, no caso onde há equações diferenciais, torna-se necessário aproximar por métodos numéricos válidos os valores das derivadas nos pontos do novo domínio para somente então resolver o problema.

2.2.1. Aproximação numérica da derivada primeira

Temos por definição que a derivada de uma função em um ponto é dada por [6] como:

$$y'(x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h}, \quad (07)$$

onde h será um valor pequeno, representado pelo limite de h tendendo a zero.

Para o caso do MDF considerarmos um espaço útil para o problema com N pontos discretizados igualmente espaçados, e valores de contorno x_0 e x_N , podemos descrever qualquer ponto entre os valores iniciais e finais do problema como:

$$x_1 = x_0 + h; x_2 = x_1 + h; \dots; x_N = x_{N-1} + h, \quad (08)$$

ou seja, o menor valor possível para o espaço será a própria diferença de espaço entre dois pontos do domínio discretizado, chegando então à aproximação de:

$$y'(x_n) = \frac{y(x_n + h) - y(x_n)}{h}, \quad (09)$$

esta aproximação denomina-se de diferença progressiva, pois toma em conta o valor de $x_n + h$, valor seguinte de x_n no espaço. De forma análoga podemos chegar a aproximação por diferença regressiva na forma:

$$y'(x_n) = \frac{y(x_n) - y(x_n - h)}{h}, \quad (10)$$

2.2.2. Aproximação numérica da derivada segunda

Para encontrar uma aproximação numérica válida para derivada de segunda ordem será utilizado a série de Taylor, conforme [6]. Devemos encontrar em expansões do polinômio de terceiro grau ao redor do valor de x_n , sendo feita a aproximação pelos valores de $x_n + h$ e $x_n - h$, assumindo que $y \in C^4[x_n + h; x_n - h]$:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_n^+), \quad (11)$$

$$y(x_n - h) = y(x_n) - hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_n^-), \quad (12)$$

tomando os valores ξ_n^+ e ξ_n^- como valores entre $(x_n, x_n + h)$ e $(x_n - h, x_n)$. Ao realizar a soma das Equações (11) e (12), e isolar o termo y'' teremos:

$$y''(x_n) = \frac{y(x_n + h) - 2y(x_n) + y(x_n - h)}{h^2} - \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(\xi_n^-) + y^{(4)}(\xi_n^+)]. \quad (13)$$

Percebe-se que para o caso da aproximação numérica por meio da série de Taylor terá atrelado ao valor da aproximação o valor do erro.

O valor de erro será desprezado para fins de cálculo, chegando então na aproximação da Equação (14) para o cálculo da derivada segunda.

$$y''(x_n) = \frac{y(x_n + h) - 2y(x_n) + y(x_n - h)}{h^2} \quad (14)$$

2.3. Circuitos RLC e respostas analíticas

Neste tópico será definido os tipos de respostas que os circuitos RLC podem expressar, como encontrar soluções específicas para cada tipo de circuito, dando então sua relação descarga com base em funções da tensão ou corrente no tempo.

2.3.1. Circuito RLC paralelo: Resposta natural

O circuito RLC paralelo com resposta natural, sem fontes de energia conectadas, dá-se por uma montagem dos três componentes de forma que proporcione entre eles a mesma tensão, controlada pela energia armazenada no capacitor (inicialmente igual a V_0) e ocorre conforme Figura 2, onde R representa a carga resistiva do circuito, C a carga capacitiva, L a carga indutiva, com unidades de medidas definidas respectivamente por: Ohm (Ω), Farad (F) e Henry (H). I_0 é a corrente inicial do indutor e v a tensão compartilhada entre os componentes, visto que estão montados em paralelo. Esse circuito será analisado por meio da lei de Kirchhoff das correntes, por meio de manipulações algébricas o comportamento da tensão do circuito respeitará o formato da ED da Equação (15).

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (15)$$

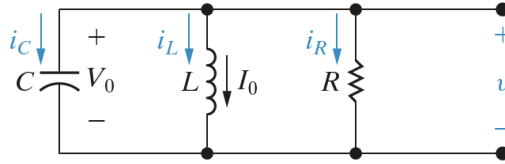


Figura 2. Circuito RLC paralelo. [3]

2.3.1.1. Formato da função solução da ED

Para começar a solucionar analiticamente a ED definida pela Equação (15), toma-se uma solução da forma exponencial, dado a substituição desta solução proposta e das suas respectivas derivadas encontra-se a equação característica da ED, dada por:

$$e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + \lambda \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC} \right) = 0, \quad (16)$$

subsequentemente deve-se encontrar os valores de λ que tornam a equação verdadeira, estas são determinadas por:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [rad/s]. \quad (17)$$

Tem-se então 3 casos particulares de solução para a ED em questão. Para facilitar a visualização desses casos, toma-se a atribuição de 2 constantes denominadas pela literatura como α , coeficiente de amortecimento, e ω_0 , frequência angular de ressonância, ambas são definidas por:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad [rad/s] \quad (18)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad [rad/s] \quad (19)$$

Ao substituir (18) e (19) em (17), temos:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ [rad/s]}. \quad (20)$$

Os 3 casos então ocorrem de acordo com a relação entre o α e o ω_0 , visto que a relação entre eles definirá se as raízes são reais e diferentes reais e iguais ou complexas conjugadas.

Para $\alpha^2 > \omega_0^2$ tem-se o caso denominado de superamortecido, onde as raízes características são reais e distintas, que possui uma solução no formato:

$$v(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \text{ [V]}. \quad (21)$$

Quando $\alpha^2 < \omega_0^2$ acontecerá a resposta do circuito denominada de subamortecida, caso em que as raízes são complexas conjugadas.

Devido ao comportamento dos números imaginários ao utilizar o método de solução de ED há uma das respostas mais complexas de se expressar e com comportamento gráfico mais complexo, devido ao seu formato oscilatório dado pelas senoides e cossenoides incluídas na sua formação, como vê-se em:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}) + B_2 e^{-\alpha t} \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}) \text{ [V]}. \quad (22)$$

Por fim, no caso em que $\alpha^2 = \omega_0^2$ a resposta será denominada por criticamente amortecida, ocorrendo no acaso das raízes características serem reais e iguais, cuja solução é da forma:

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \text{ [V]}. \quad (23)$$

Os termos A_n , B_n e D_n serão encontrados a partir dos valores iniciais estabelecidos no formato de um sistema de equações que será aprofundado no próximo tópico deste capítulo

2.3.1.2. Função a partir dos valores iniciais

Conforme explicado na seção 2.1.2 para encontrar uma solução única da EDO será necessário encontrar valores de contorno próprios para o caso de estudo, devido à natureza do circuito RLC os valores de tensão inicial do capacitor (V_0) e corrente inicial do indutor (I_0) são facilmente obtíveis, portanto serão utilizadas para encontrar a solução particular da EDO.

As relações que deverão ser feitas para que a solução particular apareça serão dadas por um sistema de duas equações devido aos conceitos de PVI e PVC. Portanto os termos A_n , B_n ou D_n serão descobertos a partir da solução desse sistema de equações.

Primeiramente deve-se igualar o formato de solução encontrado na seção 2.3.1.1 com a condição inicial do caso, por exemplo, caso um circuito possua equação de resposta superamortecida teremos então a relação:

$$v(0) = V_0 = A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} \text{ [V]} \quad (24)$$

Ou então:

$$V_0 = A_1 + A_2 \text{ [V]} \quad (25)$$

Logo após isso deve-se utilizar a relação de tensão e corrente de um capacitor dada por:

$$C \frac{dv_c}{dt} = i_c(t) \text{ [A]} \quad (26)$$

E a análise de correntes de nó no circuito da Figura 2 para chegar a relação:

$$i_c(t) = -[i_r(t) + i_l(t)] \text{ [A]} \quad (27)$$

Que por meio da lei de ohm pode ser reescrita como:

$$i_c(t) = - \left[\frac{v(t)}{R} + i_l(t) \right] \quad [A] \quad (28)$$

Ao aplicar a Equação (28) na Equação (26) e isolar o termo da derivada encontra-se:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{- \left[\frac{v(t)}{R} + i_l(t) \right]}{C} \quad [V/s] \quad (29)$$

Por fim, resta tomar a Equação (29) quando $t = 0s$ e a igualar a derivada do formato da solução dado o devido caso, seguindo o exemplo dado anteriormente, tem-se:

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = \frac{- \left[\frac{V_0}{R} + I_0 \right]}{C} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \quad [V/s] \quad (30)$$

Ou então:

$$\frac{dv_c}{dt}(0) = \frac{- \left[\frac{V_0}{R} + I_0 \right]}{C} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad [V/s] \quad (31)$$

Com a dedução das Equações (25) e (31) feitas para o caso específico, resta montar um sistema com as duas equações e solucionar buscando os termos A_n , B_n ou D_n para conseguir descobrir analiticamente a função da tensão que soluciona a ED.

2.3.2. Circuito RLC série: Resposta natural

O circuito RLC série com resposta natural, assim como no caso do circuito em paralelo, dá-se pela montagem dos componentes R, L e C, porém a montagem deste caso será realizada de forma que todos os três componentes tenham a mesma corrente (i), visto que estão todos montados em uma única malha, o circuito pode ser visualizado na Figura 3, onde V_0 é a tensão inicial do capacitor e I_0 é a corrente inicial do indutor.

Neste caso o circuito será analisado utilizando o método das tensões de malha. A EDO que representa o comportamento do circuito é dada pela Equação (32).

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (32)$$

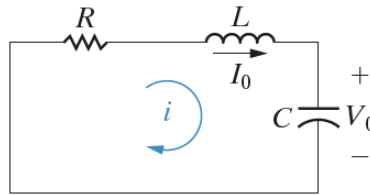


Figura 3. Circuito RLC série. [3]

2.3.2.1. Formato da função solução da ED

De forma semelhante ao caso RLC paralelo, a montagem da equação característica para essa ED dá-se no formato:

$$e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + \lambda \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} \right) = 0, \quad (33)$$

os valores de λ que tornam a equação verdadeira serão então:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [\text{rad/s}]. \quad (34)$$

De forma semelhante ao feito anteriormente para o circuito RLC paralelo toma atribui-se as constantes de coeficiente de amortecimento, frequência angular de ressonância, onde ω_0 permanece o mesmo para ambos os casos, seguindo no formato da Equação (19), e α dá-se por:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad [\text{rad/s}] \quad (35)$$

Ao aplicar as Equações (19) e (35) na Equação (34), percebe-se que retorna para o mesmo caso de solução do circuito paralelo, Equação (20), possuindo assim os mesmos tipos de formato para a função de resposta do circuito, tendo como diferença a comparação entre o valor de ω_0 e do α do circuito, visto a diferença entra as frequências angular de ressonância para cada circuito.

2.3.2.2. Função a partir dos valores iniciais

Da mesma maneira em que o circuito RLC paralelo deve ser resolvido caso a caso com utilização de V_0 e I_0 dos componentes, para o circuito em série deve ser feito o mesmo.

Inicialmente toma-se a igualdade entre a função resposta encontrada com a corrente inicial, em $t = 0s$, para exemplificar novamente em um circuito com resposta superamortecida vide:

$$i(0) = I_0 = A_1 e^{\lambda_1 0} + A_2 e^{\lambda_2 0} \quad [A] \quad (36)$$

Ou então:

$$I_0 = A_1 + A_2 \quad [A] \quad (37)$$

Seguinte a isto deve-se utilizar a relação de corrente e tensão de um indutor dada por:

$$L \frac{di_l}{dt} = v_l(t) \quad [V] \quad (38)$$

Por meio da análise de tensões de malha no circuito da Figura 3 encontra-se a relação:

$$v_l(t) = -[v_r(t) + v_c(t)] \quad [V] \quad (39)$$

Pela lei de ohm reescreve-se:

$$v_l(t) = -[Ri(t) + v_c(t)] \quad [V] \quad (40)$$

Ao aplicar a Equação (40) na Equação (38) e isolar o termo da derivada, tem-se:

$$\frac{di_l}{dt} = \frac{-[Ri(t) + v_c(t)]}{L} \quad [A/s] \quad (41)$$

Ao visualizar a Equação (41) em $t = 0s$ e a igualar a derivada do formato da equação caso a caso, seguindo o exemplo do caso superamortecido, monta-se a equação:

$$\frac{di_l}{dt}(0) = \frac{-[RI_0 + V_0]}{L} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 0} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 0} \quad [A/s] \quad (42)$$

Ou então:

$$\frac{dI_l}{dt}(0) = \frac{-[RI_o + V_o]}{L} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \quad [A/s] \quad (43)$$

Por fim, semelhantemente ao feito no caso do circuito RLC paralelo resta montar um sistema com as Equações (37) e (41). Ao solucionar esse sistema será descoberto analiticamente a resposta do circuito RLC em série, resposta natural.

2.3.3. Resumo das respostas naturais do circuito RLC

De forma resumida pode-se montar uma tabela de respostas do circuito paralelo e em série como:

Tabela 1. Equações e coeficientes de acordo com o amortecimento do circuito RLC, adaptado. [3]

Amortecimento	Equações de resposta natural	Coeficientes das equações
Superamortecido	$X(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$	$X(0) = A_1 + A_2;$ $\frac{dX}{dt}(0) = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$
Subamortecido	$X(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})$ $+ B_2 e^{-\alpha t} \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2})$	$X(0) = B_1;$ $\frac{dX}{dt}(0) = -\alpha B_1 + (\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}) B_2$
Criticamente amortecido	$X(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}$	$X(0) = D_2;$ $\frac{dX}{dt}(0) = D_1 - \alpha D_2$

Onde o termo X pode ser substituído por corrente (i) ou tensão (v) e o coeficiente de ressonância devem ser adaptados dependendo do caso de estudo.

Ademais pode-se visualizar o formato dado por cada tipo respostas do circuito pela Figura 4, onde o eixo em que todas as curvas se aproximam é o zero da amplitude.

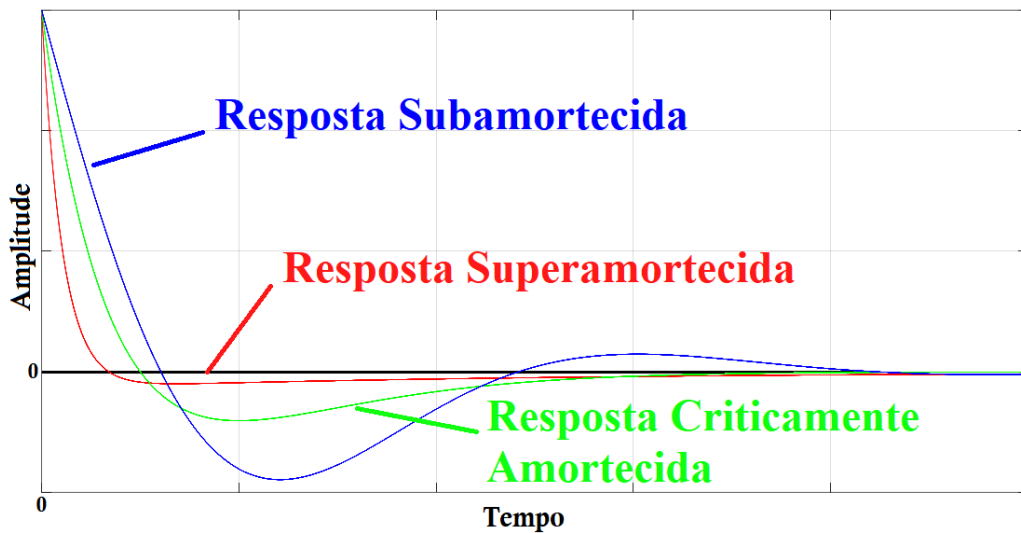


Figura 4. Visualização dos tipos de resposta para circuitos elétricos de segunda ordem. (Autoria própria)

3. METODOLOGIA

Com o objetivo de verificar a capacidade do método numérico das diferenças finitas de solucionar equações diferenciais de segunda ordem aplicadas a circuitos RLC, foi obtido valores através de comparação direta entre a aplicação da modelagem numérica discutida neste tópico com *software* GNU Octave [7], com solução analítica da EDO utilizando-se dos métodos de análise de circuitos, por meio de um problema para cada caso de circuito RLC, sendo que, cada problema terá 3 casos que representam os tipos de amortecimento que o circuito pode apresentar, decorrente de uma variação no parâmetro da resistência, como pode ser provado observando as relações entre as Equações (18) com (19) e de (35) e (19).

A simulação foi feita em um notebook com o sistema operacional Windows 10, as especificações de hardware são: Processador Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU @ 1.60GHz, 1800 Mhz, 4 Núcleos, 8 Processadores Lógicos, 8 GB de memória RAM e armazenamento de 1TB em HDD, já o software de simulação dos métodos numéricos é GNU Octave em sua versão 8.3.0 instalado no HDD.

Além disso, as simulações dos métodos numéricos serão feitas em um intervalo de tempo de $[0: 0,001s]$, com três diferentes níveis de discretização do domínio, em 50 espaços, 500 espaços e 50 mil espaços. Simultaneamente à realização das simulações, os valores analíticos serão calculados. Quando uma matriz contendo a aproximação da função para N pontos de tempo for construída, outra matriz com N pontos será gerada, na qual os mesmos valores de tempo serão aplicados à função analítica previamente calculada. O erro absoluto será calculado a partir da subtração dessas duas matrizes, resultando na criação de uma nova matriz, o maior valor dessa matriz será identificado e então registrado em uma tabela. Em seguida, o erro percentual será calculado, dividindo-se todos os valores da matriz de erros absolutos pelos respectivos valores da função analítica, montando uma matriz de erros percentuais. Por fim, será realizada uma média aritmética dos valores na matriz de erros percentuais, e esse valor será apresentado em forma de tabela. Metodologia utilizada na para simulação ser resumida conforme fluxograma presente na Figura 5.

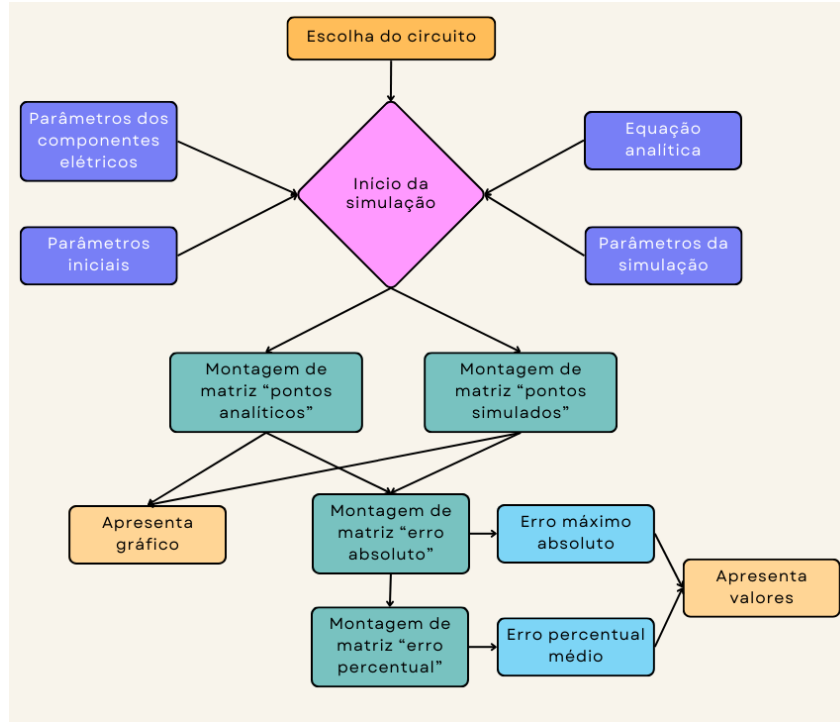


Figura 5. Fluxograma da aplicação do método numérico. (Autoria própria)

3.1.1 Modelagem numérica RLC paralelo

Para chegar em um modelo que possa aproximar os valores da tensão ao longo do tempo, conforme proposto pelo MDF, devemos partir da equação diferencial do caso paralelo, dada na Equação (15) e aplicar as aproximações das derivadas primeira e segunda. Para a derivada de primeira ordem utilizaremos a aproximação por diferenças progressivas (09), para a derivada de segunda ordem utilizamos a Equação (13), encontrando a Equação (44), onde o valor de h é a variação de tempo entre 2 pontos do domínio discretizado.

$$\frac{v(t_n + h) - 2v(t_n) + v(t_n - h))}{h^2} + \frac{1}{RC} \frac{v(t_n + h) - v(t_n)}{h} + \frac{1}{LC} v(t_n) = 0 \quad (44)$$

A partir da substituição das derivadas existem diversas propostas possíveis que podem ser tomadas caso a caso para definir uma função que possa ser solucionada ponto a ponto. Para o caso desse estudo foi escolhido tomar os termos das funções nos pontos do domínio e colocá-los em evidência, vide:

$$v(t_n + h) \left[\frac{1}{h^2} + \frac{1}{RCh} \right] + v(t_n) \left[-\frac{2}{h^2} - \frac{1}{RCh} + \frac{1}{LC} \right] + v(t_n - h) \left[\frac{1}{h^2} \right] = 0 \quad (45)$$

Considere então as simplificações:

$$k_1 = \frac{2}{h^2} + \frac{1}{RCh} - \frac{1}{LC} \quad (46)$$

$$k_2 = \frac{1}{h^2} \quad (47)$$

$$k_3 = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{RCh} \quad (48)$$

Substituindo (46), (47) e (48) em (45) e montando uma função com foco em $v(t_n + h)$, encontramos:

$$v(t_n + h) = \frac{k_1 v(t_n) - k_2 v(t_n - h)}{k_3} \quad [V] \quad (49)$$

De acordo com o domínio estabelecido pelo MDF, podemos generalizar qualquer ponto $t_n + h$ como t_n , tomando então a equação:

$$v(t_n) = \frac{k_1 v(t_n - h) - k_2 v(t_n - 2h)}{k_3} \quad [V] \quad (50)$$

Um ponto extremamente importante para o caso desse estudo é que a função que representa o fenômeno real está contida apenas nos valores de $t \geq 0$ segundos. Porém, ao solucionar a ED encontramos funções definidas para todo os valores de t . Ou seja, para representar valores reais só podemos aplicar valores a partir de $n = 2$, o que se torna um problema, visto que para que possamos aproximar os diversos valores de $v(t_n)$ no espaço discretizado, torna-se necessário possuir de antemão os valores de $v(t_0)$ e $v(t_1)$. O valor de $v(t_0)$ é uma constante que temos inicialmente, porém precisamos encontrar qual a tensão no ponto t_1 .

Para conseguir estabelecer as condições iniciais da simulação aplicaremos t_1 na Equação (50), chegando a:

$$v(t_1) = \frac{k_1 v(t_0) - k_2 v(t_{-1})}{k_3} \quad [V] \quad (51)$$

Para que seja encontrado o valor de $v(t_{-1})$ utilizamos então a aproximação da derivada primeira por diferença regressiva, Equação (10), no ponto t_0 e igualando a Equação (29), resulta em:

$$\frac{dv_c}{dt}(t_0) = \frac{-\left(\frac{V_0}{R} + I_0\right)}{C} = \frac{V_0 - v(t_{-1})}{h} \quad [V/s] \quad (52)$$

Ao simplificar a equação em termos de $v(t_{-1})$, temos:

$$v(t_{-1}) = \frac{-h\left(\frac{V_0}{R} + I_0\right)}{C} + V_0 \quad [V] \quad (53)$$

Feito isso, substitui-se a Equação (53) na Equação (51), resultando em:

$$v(t_1) = \frac{k_1 V_0 - k_2 \left[\frac{-h\left(\frac{V_0}{R} + I_0\right)}{C} + V_0 \right]}{k_3} \quad [V] \quad (54)$$

Com isso pode ser descoberto o valor de tensão no ponto $n = 1$, como discutido anteriormente. Após essa manipulação podemos realizar por meio de um método iterativo o cálculo ponto a ponto de qualquer valor de tensão tal que $n > 1$.

3.1.2 Modelagem numérica RLC Série

Seguindo o raciocínio proposto para o circuito RLC paralelo será realizado a discretização do domínio do tempo e aplicado as aproximações das derivadas na Equação (32), resultando em:

$$\frac{i(t_n + h) - 2i(t_n) + i(t_n - h))}{h^2} + \frac{R}{L} \frac{i(t_n + h) - i(t_n)}{h} + \frac{1}{LC} i(t_n) = 0 \quad (55)$$

A partir da substituição das derivadas existem diversas propostas possíveis que podem ser tomadas caso a caso para definir uma função que possa ser solucionada ponto a ponto. Para o caso desse estudo foi escolhido tomar os termos das funções nos pontos do domínio e colocá-los em evidência, vide:

$$i(t_n + h) \left[\frac{1}{h^2} + \frac{R}{Lh} \right] + i(t_n) \left[-\frac{2}{h^2} - \frac{R}{Lh} + \frac{1}{LC} \right] + i(t_n - h) \left[\frac{1}{h^2} \right] = 0 \quad (56)$$

Considere então as simplificações:

$$k_1 = \frac{2}{h^2} + \frac{R}{Lh} - \frac{1}{LC} \quad (57)$$

$$k_3 = \frac{1}{h^2} + \frac{R}{Lh} \quad (58)$$

Tomando k_2 como igual ao do caso paralelo substituímos (57), (47) e (58) em (56) e montamos a função em relação a $i(t_n + h)$, encontrando:

$$i(t_n + h) = \frac{k_1 i(t_n) - k_2 i(t_n - h)}{k_3} \quad [A] \quad (59)$$

Tendo como base o domínio estabelecido pelo MDF chegamos na aproximação:

$$i(t_n) = \frac{k_1 i(t_n - h) - k_2 i(t_n - 2h)}{k_3} \quad [A] \quad (60)$$

Novamente torna-se inviável utilizar essa aproximação sem ter 2 pontos sequenciados no domínio, portanto será feita de forma análoga a aproximação numérica do circuito RLC em paralelo o cálculo de $i(t_{-1})$, utilizando aproximação da derivada primeira por diferenças regressivas, Equação (10), e a derivada da corrente no indutor da Equação (41), temos:

$$\frac{di_l}{dt}(t_0) = \frac{-(RI_o + V_o)}{L} = \frac{I_o - i(t_{-1})}{h} \quad [A/s] \quad (61)$$

Isolando o termo $i(t_{-1})$, encontramos:

$$i(t_{-1}) = \frac{-h(RI_o + V_o)}{L} + I_o \quad (62)$$

Aplicando $n = 1$ na Equação (60) e substituindo na Equação (62), temos:

$$i(t_1) = \frac{k_1 I_o - k_2 \left[\frac{-h(RI_o + V_o)}{L} + I_o \right]}{k_3} \quad [V] \quad (63)$$

Com o valor dos dois primeiros pontos do domínio discreto encontrados, pode-se aplicar N pontos a Equação (59) para solucionar problemas do tipo RLC em série.

3.2. Problemas

Os valores estipulados para os componentes dos problemas seguem valores que podem ser obtidos comercialmente, com margem para montagem de associação de elementos em série e paralelo para chegar aos valores desejados.

Conforme estabelecido no início desta sessão, a variação do tipo de resposta será provocada de acordo com a variação unicamente da resistência de forma a simplificar a montagem e visualização dos problemas.

Problema 1: Circuito RLC paralelo $V_0 = 12V$; $I_o = 30mA$; $L = 50mH$; $C = 0,2\mu F$

Caso a) $R = 100\Omega$

Resposta superamortecida:

$$v(t) = 15.8198 e^{-47912.9t} - 3.81981 e^{-2087.12t} [V]$$

Caso b) $R = 250\Omega$

Resposta criticamente amortecida:

$$v(t) = e^{-10000t}(12 - 27000t) [V] \quad (64)$$

Caso c) $R = 1k\Omega$

Resposta subamortecida:

$$v(t) = e^{-2500t}(12 \cos(9682.46t) - 18.5903 \sin(9682.46t)) [V]$$

Problema 2: Circuito RLC série $V_0 = 100V$; $I_o = 0A$; $L = 10mH$; $C = 0,1\mu F$

Caso a) $R = 3k\Omega$

Resposta superamortecida:

$$i(t) = 0.0447214 e^{-26180.3t} - 0.0447214 e^{-3819.88t} [A]$$

Caso b) $R = 2k\Omega$

Resposta criticamente amortecida:

$$i(t) = -1000t e^{-10000t} [A] \quad (65)$$

Caso c) $R = 1k\Omega$

Resposta subamortecida:

$$i(t) = -0.11547 e^{-5000t} \sin(8660.25t) [A]$$

4. RESULTADOS

Neste tópico será disposto os seguintes resultados simulados pela aplicação do MDF em circuitos RLC: gráficos das curvas aproximadas, gráfico das curvas das funções analíticas aplicadas ponto a ponto e tabelas com erro percentual médio e o erro máximo absoluto caso a caso.

4.1. Problema 1

O problema 1 foi executado no GNU Octave, gerando os gráficos da Figura 6 e os valores de erro presentes na Tabela 2.

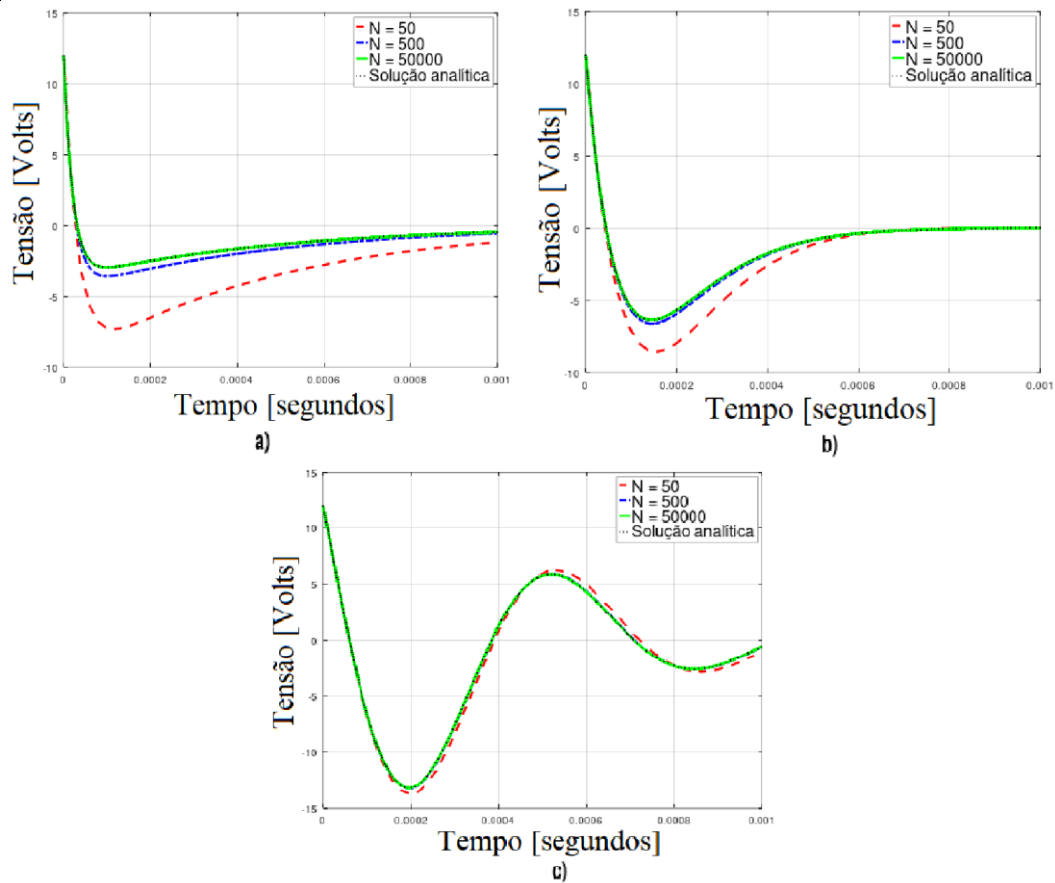


Figura 6. Gráficos RLC paralelo por MDF e método analítico do problema 1 (a) Resposta superamortecida, (b) Resposta criticamente amortecida (c) Resposta subamortecida (Autoria própria)

Tabela 2. Erros calculados com relação ao número de pontos e tamanho de passo para Problema 1. (Autoria própria)

			RLC paralelo		
			Caso a	Caso b	Caso c
$N1$	50	Erro médio percentual	152,20%	46,38%	31,44%
$h1$	1,9608E-01 [s]	Erro máx. absoluto	4,408	2,3049	7,87E-01
$N2$	500	Erro médio percentual	21,98%	4,23%	3,61%
$h2$	1,9960E-06 [s]	Erro máx. absoluto	6,29E-01	2,63E-01	8,32E-02
$N3$	50000	Erro médio percentual	0,25%	0,05%	0,08%
$h3$	2,0000E-08 [s]	Erro máx. absoluto	6,60E-02	2,68E-03	8,40E-04

De acordo com os dados obtidos é possível observar uma aproximação válida para o comportamento das ED relacionadas com os circuitos RLC paralelos, porém a aproximação se torna mais precisa para a maioria dos casos quando h fica menor do que aproximadamente $2 \mu\text{s}$. Ademais podemos dizer que para todos os casos quando h ficou menor do que $0,2 \text{ ns}$ pode-se aproximar com altíssima precisão o comportamento das curvas analisadas.

4.1. Problema 2

O problema 2 foi simulado por meio do GNU Octave, gerando os gráficos da Figura 7 e os valores de erro presentes na Tabela 3.

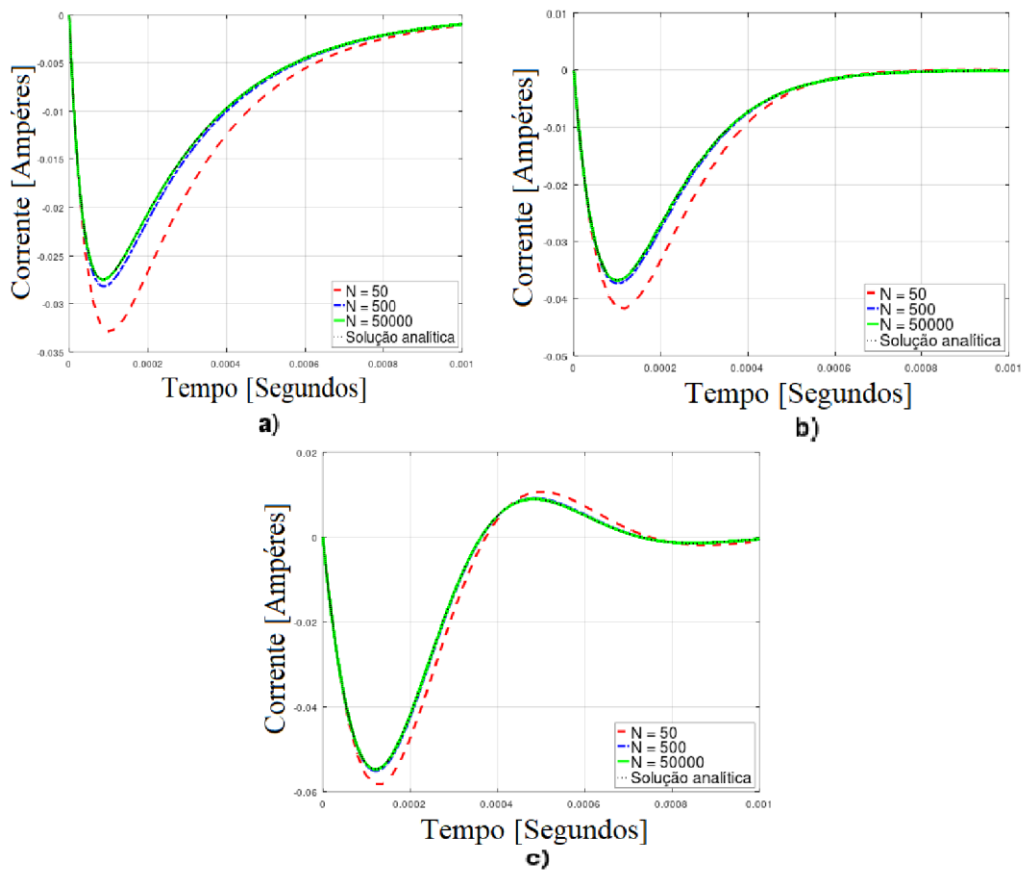


Figura 7. Gráficos RLC série por MDF e método analítico do problema 2 (a) Resposta superamortecida, (b) Resposta criticamente amortecida (c) Resposta subamortecida (Autoria própria)

Tabela 3. Erros calculados com relação ao número de pontos e tamanho de passo para Problema 2. (Autoria própria)

			RLC série		
			Caso a	Caso b	Caso c
$N1$	50	Erro médio percentual	22,23%	41,19%	20,04%
$h1$	1,9608E-01 [s]	Erro máx. absoluto	6,46E-03	6,41E-03	5,57E-03
$N2$	500	Erro médio percentual	2,83%	3,58%	6,14%
$h2$	1,9960E-06 [s]	Erro máx. absoluto	8,11E-04	7,44E-04	5,97E-04
$N3$	50000	Erro médio percentual	0,04%	0,04%	0,09%
$h3$	2,0000E-08 [s]	Erro máx. absoluto	9,12E-06	7,58E-06	6,03E-06

Os resultados aplicação do método no problema 2 demonstram capacidade de aproximar as respostas das ED advindas de circuitos RLC em série. Assim como os valores obtidos pela aplicação o problema 1, os dados encontrados nesta aplicação demonstram uma tendência de melhora da aproximação para os casos em que h fica menor do que aproximadamente $2 \mu s$. Além disso aproximação para um h menor do que $0,2 \text{ ns}$ demonstra com precisão excepcional do comportamento das curvas analisadas.

5. CONCLUSÃO

Em conclusão, os resultados obtidos através da aplicação do método das diferenças finitas neste estudo demonstraram-se altamente úteis como ferramenta para solução desse tipo de problema. As aproximações geradas foram capazes de representar com grande precisão as funções originais nos casos estabelecidos, até mesmo em diversos casos tendo aproximações com erro percentual médio menor que 5% para apenas 500 pontos de cálculo, ou variações de aproximadamente $2 \mu s$ entre os pontos de tempo, o que em diversos casos de aplicação real acaba se tornando uma precisão boa, considerando fatores como a própria taxa de precisão que os componentes elétricos possuem que varia de 5% até 10% para os produtos de uso mais comum, demonstrando assim então a eficácia

deste método na análise de circuitos RLC, tanto para corrente em circuitos em série quando de tensão em circuitos em paralelo.

No entanto, é importante salientar que existem limitações de aplicação associadas a esse método. O tamanho do passo utilizado na análise e o número de pontos nos quais o espaço é dividido desempenham um papel crucial na precisão das aproximações. Em cenários nos quais o espaço analisado é aumentado, o número de cálculos necessários para resolver os sistemas também aumenta proporcionalmente para manter a mesma precisão, o que pode se tornar computacionalmente custoso para sistemas maiores. Para esse trabalho foi feita uma escolha empírica de espaço de acordo com o tipo de resposta dos problemas analisados que traria um resultado interessante para comprovar efetividade do método.

Como perspectiva para trabalhos futuros, pode-se explorar a busca por uma proporção ideal entre o tamanho do espaço e o número de pontos a serem utilizados para o cálculo. Encontrar um equilíbrio que ofereça uma precisão adequada para cada caso específico, o que permitiria uma aplicação mais ampla e eficiente do método das diferenças finitas em circuitos RLC, tornando-o ainda mais valioso como ferramenta de simulação.

REFERÊNCIAS

- [1] KAYAMA, Milton E.. **RESSONÂNCIA EM CIRCUITO RLC-SÉRIE**. Ano desconhecido. 4 f. Laboratório de Eletricidade, Magnetismo e Ótica, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - Unesp, Guaratinguetá. Disponível em: <https://www.feg.unesp.br/Home/PaginasPessoais/zacharias/rlc-senoidal.pdf>. Acesso em 05 de out. 2023
- [2] USP. **Circuito RLC série**. 2006. 12 f. FAP-0214, Universidade de São Paulo - USP, 2006. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/239561/mod_resource/content/1/RLC_caos.pdf
- [3] NILSSON, James W. Respostas natural e a um degrau de circuitos RLC. In: NILSSON, James W.; RIEDEL, Susan A. **Circuitos elétricos**. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015. Cap. 8. p. 290-336. Tradução: Sonia Midori Yamamoto.
- [4] SANTOS, Reginaldo J.. Equações Diferenciais de 1ª Ordem: equações ordinárias de 1ª ordem. In: SANTOS, Reginaldo J.. **INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. Cap. 1, p. 11.
- [5] ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Cengage Learning, 2016.
- [6] BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas; BURDEN, Annette M.. **Análise Numérica**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- [7] **GNU Octave**. Disponível em: <https://octave.org/download>. Acesso em 06 de set. 2023