

MODELAGEM DINÂMICA DE UM SISTEMA PLANO BOLA

Edson Freire Targino¹, Antonio Gomes Nunes², Marcelo Roberto Bastos Guerra Vale³

Resumo: O estudo, simulação, análise e interpretação de muitos fenômenos reais que ocorrem pelo mundo, só são possíveis, na maioria dos casos, por ter sido determinado uma equação ou conjunto de equações que são capazes de representa-los matematicamente, e isto, pode ser feito através de uma modelagem matemática. Neste viés, este trabalho tem como principal objetivo a modelagem matemática de um sistema físico vibrante com quatro graus de liberdade, denominado de plano bola ou mesa bola, e a partir da determinação das equações que regem o sistema, em um trabalho futuro, fazer a simulação utilizando um software. Na modelagem foi utilizado algumas ferramentas, dentre elas as equações diferenciais, a transformada de Laplace e algumas ferramentas da mecânica, sobretudo, a equação de Lagrange. Para um trabalho futuro, serão utilizadas as duas equações que representam o comportamento da bola sobre a plataforma em relação aos eixos coordenados x e y e feita uma simulação do sistema no software matlab, sobretudo utilizando o simulink.

Palavras-chave: modelagem; equação de Lagrange; sistema plano bola.

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática pode ser definida como a determinação de uma ou um conjunto de equações, sejam elas algébricas ou diferenciais, que sejam capazes de representar um fenômeno real. Seu principal objetivo é a formulação de um modelo matemático capaz de prever o funcionamento do sistema e, com isso, fazer-se uma análise, simulação e determinação de parâmetros. Quando se trata de modelagem de sistemas dinâmicos, as ferramentas para determinação das equações que regem o sistema são as mais diversas, dentre elas pode-se citar o uso das equações diferenciais, bem como da transformada de Laplace e dos conceitos da mecânica lagrangeana.

No que se refere as equações diferenciais, de acordo com [1], a sua utilidade é de grande importância em diversas áreas da engenharia, bem como das ciências, haja vista que são elas as responsáveis por estabelecer o suporte matemático para formular ou descrever os mais diversos sistemas físicos em termos matemáticos. De acordo com [2], equações diferenciais são aquelas que possuem derivadas e, quando uma descreve ou representa algum processo físico, é denominada, na maioria dos casos, de modelo matemático do processo. O entendimento desse tipo de equação faz-se necessário para compreender e investigar a gama de problemas encontrados por todo o mundo, dentre eles o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos e até mesmo a detecção e propagação de ondas sísmicas.

Outra ferramenta ou operador bastante útil na resolução de problemas práticos é a transformada de Laplace, de acordo com [3], ela tem a capacidade de transformar uma equação diferencial em uma equação algébrica, o que pode facilitar bastante a análise de um determinado sistema. Uma importante característica da transformada de Laplace é a capacidade de converter um determinado problema em outro equivalente com maior facilidade de ser resolvido, e quando determinada a solução e aplicada a transformação inversa, tem-se a solução do problema inicial.

No tocante a sistemas vibratórios com n graus de liberdade, isto é, possíveis deslocamentos que um conjunto de corpos unidos pode realizar no espaço físico, de acordo com [4], a determinação das equações de movimento ou do modelo matemático que representa o sistema torna-se mais simples através das equações de Lagrange do que pelo método de Newton, isto, pelo fato daquelas usarem uma abordagem escalar, já este, usa uma abordagem vetorial.

O presente trabalho tem como objetivo principal a modelagem matemática de um sistema dinâmico conhecido como plano bola, e em trabalhos posteriores, sua simulação. Para isso, serão usadas as ferramentas já citadas anteriormente mais o software matlab. A contribuição deste trabalho está pautada na ideia de que a modelagem transforma um problema da realidade em um problema matemático capaz de ser resolvido e analisado.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equação de Lagrange

Em sistemas vibratórios com vários graus de liberdade a dedução das equações de movimento que regem o

sistema frequentemente podem ser realizadas de maneira simples em termos de coordenadas generalizadas com a utilização de equações de Lagrange [5]. Considerando um sistema com n graus de liberdade a equação de Lagrange é representada como,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

A Equação 1 representa um conjunto de n equações diferenciais parciais, sendo que cada uma está associada a um dos graus de liberdade existentes no sistema analisado. Vale destacar, que L é denominada de função Lagrangeana, em que sua representação matemática pode ser expressa como:

$$L = T - V \quad (2)$$

Onde T representa a energia cinética do sistema e V a energia potencial.

2.2 Equações diferenciais

De acordo com [6], as equações diferenciais são definidas como derivadas de uma ou mais variáveis desconhecidas, isto é, dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes. Essas equações podem ser classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade.

2.2.1 Classificação quanto ao tipo

Quanto ao tipo, pode-se destacar dois, ordinárias (EDO) e parciais (EDP). A primeira, é definida quando na equação diferencial só há uma variável independente associada. Já a segunda, é quando existe mais de uma variável independente associada.

$$1. \quad \frac{dy}{dx} + cy = e^x \quad (\text{EDO}) \quad (3)$$

$$2. \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = c \quad (\text{EDP}) \quad (4)$$

2.2.2 Classificação quanto a ordem

A ordem de uma equação diferencial, seja ela ordinária ou parcial, é a ordem da maior derivada presente na equação.

2.2.3 Classificação quanto a linearidade

Uma equação diferencial (ED) será considerada linear se puder ser apresentada da seguinte forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (5)$$

Além disso, elas são caracterizadas por duas propriedades. As quais dizem que a variável dependente y e suas derivadas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ devem ser de primeiro grau. Os coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , ..., a_n devem ser constantes ou dependentes de uma única variável independente (x).

2.3. Equações diferenciais parciais

Equações diferenciais parciais (EDP) são equações que tem a forma geral:

$$F \left(x, y, z, \dots, u(x, y, z, \dots), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \dots \right) = 0 \quad (6)$$

em que $x, y, z, \dots$ são variáveis independentes e $u(x, y, z, \dots)$ é a variável dependente.

2.4. Transformada de Laplace

A transformada de Laplace, assim como a integração e a derivação, também é considerada como um operador, isto é, ela transforma uma equação diferencial em uma equação algébrica, o qual facilita o processo de resolução de muitos problemas. Vale destacar que, essas três operações possuem a propriedade de linearidade [6].

Seja f uma função definida por $t \geq 0$, a transformada de Laplace é representada pela integral imprópria

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (7)$$

Sendo esta integral imprópria definida por um limite, isto é:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (8)$$

diz-se que a integral converge quando o limite existe, caso contrário, diverge.

Em caso de convergência, a integral transforma uma função na variável t em outra na variável s . Para denotar a função que está sendo transformada usa-se letras minúsculas, já a que foi aplicada à transformada de Laplace usa-se letras maiúsculas, assim como demonstrado na Equação (9):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (9)$$

2.5. Energia cinética

De acordo com [7], a energia cinética é aquela que está associada diretamente com o estado de movimento de um objeto, isto é, existe uma dependência da massa, sobretudo da velocidade do corpo, ou seja, quanto maior a velocidade com que o objeto se move, maior será sua energia cinética, oposto a isso, se o corpo estiver em repouso, sua energia será nula.

Sua representação matemática é dada da seguinte forma:

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad (10)$$

em que m representa a massa do objeto e v a velocidade com a qual está se movendo.

2.6. Energia potencial gravitacional

A energia potencial gravitacional está relacionada ao estado de separação entre dois objetos ou dois pontos que se atraem mutuamente através da força gravitacional, ou seja, da força peso [7].

A equação matemática que representa essa forma de energia é dada por:

$$U = -mgy \quad (11)$$

onde m representa a massa do objeto, g a constante gravitacional, y representa a altura ou a variação de altura, caso a energia potencial gravitacional inicial do corpo seja diferente de zero, o sinal negativo presente na equação é pelo fato de que a força gravitacional ($F_g = mg$) está no sentido oposto ou negativo do eixo coordenado y .

3. METODOLOGIA

Com o intuito de observar e analisar o comportamento do sistema dinâmico, este trabalho realiza uma análise através da utilização de ferramentas e conceitos da mecânica Lagrangeana, mais especificamente da equação de Lagrange, que é composta por um conjunto de equações diferenciais parciais, e por fim, a aplicação da transformada de Laplace para determinar a função de transferência que descreve o sistema.

3.1 Descrição do sistema

O sistema plano bola analisado no presente trabalho consiste em uma plataforma de formato retangular, com dimensões 25 cm x 26,5 cm. É um sistema que possui quatro graus de liberdade, sendo dois referentes ao movimento da bola e dois em relação a inclinação da plataforma, em que sobre ela é posicionada uma bola, com uma massa aproximadamente de 2,4 gramas e com pequeno valor de momento de inércia, que pode mover-se livremente sobre o plano. Sua principal finalidade é manter a bola em uma posição pré-determinada, mesmo sob perturbações externas. E isso, só é possível através do sensoriamento da posição da bola e controle da inclinação da plataforma. Aquele, no sistema confeccionado por alunos da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), dar-se através de uma câmera *webcam*, com uma capacidade máxima de resolução de até 640x480 pixels, e este, com ajuda de servo-motores posicionados em lados adjacentes da plataforma, permitindo-a inclinar em dois eixos. Em relação ao material utilizado para confecção da mesa, foi retirado de sobras de materiais utilizados em uma construção.

A Figura 1 mostra uma imagem do sistema físico simulado com todos os componentes, exceto os servo-motores.

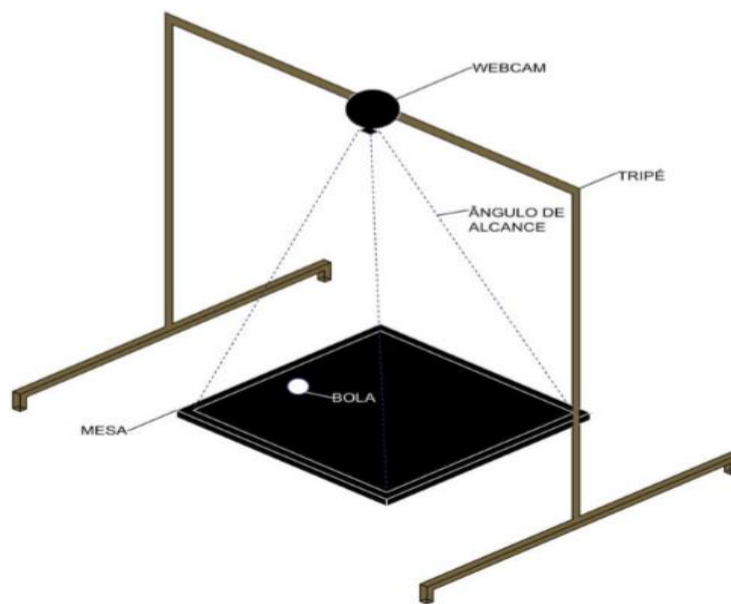


Figura 1. Sistema simulado em vista isométrica. [8]

Já a Figura 2 mostra uma imagem do sistema real. Como é possível observar, a câmera está posicionada no tripé de maneira que fique no centro da plataforma, para que dessa forma tenha-se o melhor ângulo de captação da posição da bola.



Figura 2. Sistema real. [8]

3.2 Ferramentas utilizadas na modelagem do sistema

Como este trabalho tem como objetivo inicial somente a modelagem do sistema, as ferramentas utilizadas foram aquelas já citadas anteriormente, ou seja, a equação de Lagrange, as equações diferenciais e a transformada de Laplace.

4. MODELAGEM DINÂMICA

Inicialmente serão feitas algumas considerações importantes para facilitar o desenvolvimento dessa modelagem, sendo elas:

1. A bola não desliza sobre a superfície da plataforma;

2. A bola é completamente simétrica;
3. As inclinações da plataforma serão pequenas;
4. Não há forças dissipativas ao sistema;
5. Os graus de liberdade ou as variáveis x_b, y_b, α, β são funções do tempo;
6. Os apoios dos eixos são simétricos em relação ao centro da plataforma.

A Figura 3 mostra um diagrama esquemático do sistema que servirá de auxílio para a modelagem matemática a partir das equações de movimento.

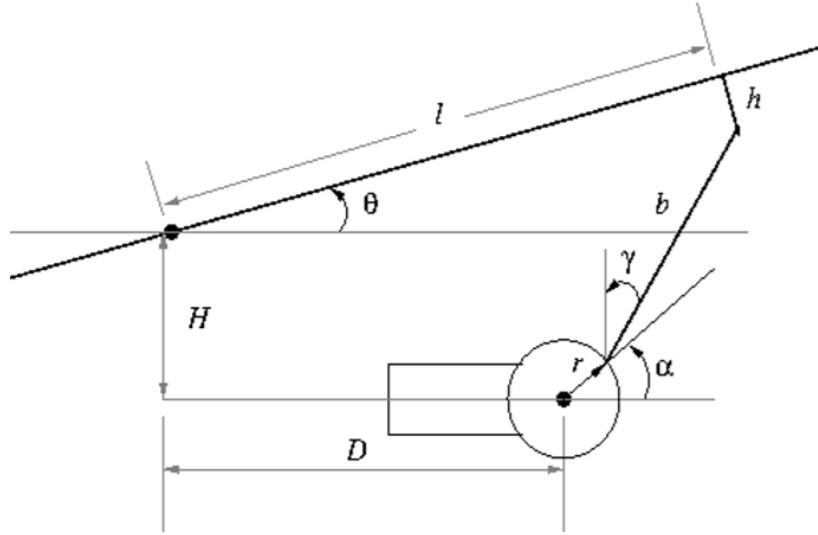


Figura 3. Diagrama dinâmico do sistema. [9]

A partir do diagrama apresentado e da Equação 1, serão determinadas as equações próprias do sistema. Sabendo que a Equação 1 é expressa na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde q_i representa as coordenadas generalizadas ou as coordenadas de direção do sistema, isto é, x_b e y_b que estão associadas a posição da bola sobre a plataforma; Q_i representa uma força composta ou dissipativa ao sistema. Vale destacar que L é composta pela soma da energia cinética mais a energia potencial do sistema.

No tocante a energia cinética (T_b), ela é composta pela soma de duas parcelas, ou seja, energia cinética de translação (ECT) mais a energia cinética de rotação (ECR), assim como exposto na Equação 12.

$$T_b = ECT + ECR \quad (12)$$

$$ECT = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \quad (13)$$

$$ECR = \frac{1}{2} I_b (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (14)$$

Logo,

$$T_b = \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{1}{2} I_b (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (15)$$

onde m_b representa a massa da bola; $\dot{x}_b, \dot{y}_b$ e ω_x, ω_y são, respectivamente, as velocidades de translação e as velocidades de rotação da bola em relação aos eixos coordenados x e y ; I_b é o momento de inércia da esfera.

Considerando que as velocidades de rotação podem ser representadas como:

$$\dot{x}_b = r_b \omega_x \quad (16)$$

$$\dot{y}_b = r_b \omega_y \quad (17)$$

onde r_b é o raio da bola.

Ao substituir as Equações 16 e 17 na Equação 15, tem-se a Equação 18:

$$T_b = \frac{1}{2} \left[m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + \frac{I_b}{r_b^2} (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \right] \quad (18)$$

Rearranjando a Equação 18, obtém-se:

$$T_b = \frac{1}{2} \left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \quad (19)$$

A energia potencial da bola será calculada por:

$$V_b = -m_b g h_{xy} \quad (20)$$

onde h_{xy} para os dois eixos coordenados será dado por,

$$h_{xy} = x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta) \quad (21)$$

Logo,

$$V_b = -m_b g (x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta)) \quad (22)$$

Dessa forma, a função lagrangeana será representada como,

$$L = \frac{1}{2} \left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + m_b g (x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta)) \quad (23)$$

Por considerações iniciais tem-se que $Q_i = 0$, ou seja, as forças não-conservativas presentes no sistema estão sendo desconsideradas, pelo fato de serem pequenas. Com isso, ao aplicar a Equação 1 na Equação 23, obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left[\frac{1}{2} \left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) + m_b g (x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta)) \right] \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}) \quad (25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} [m_b g (x_b \sin(\alpha) + y_b \sin(\beta))] \quad (26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m_b g \sin(\alpha) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left[\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\dot{x}) \right] \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) (\ddot{x}) \quad (29)$$

De acordo com as considerações iniciais, os ângulos de inclinação da plataforma serão muito pequenos, permitindo-se fazer as seguintes simplificações:

$$\sin(\alpha(t)) \approx \alpha(t) \quad (30)$$

$$\sin(\beta(t)) \approx \beta(t) \quad (31)$$

$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (32)$$

Sabendo que alfa pode ser representado pela Equação 32, onde d representa o braço de alavanca do servo motor e L a distância entre o centro da plataforma e o ponto de apoio de movimento do eixo. Dessa forma, a equação diferencial linearizada referente ao eixo coordenado x que representa o comportamento do sistema será dada como:

$$\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2} \right) \ddot{x}(t) + m_b g \frac{d}{L} \theta(t) = 0 \quad (33)$$

Analogamente, tem-se que a equação linearizada que representa o movimento da bola no eixo y é dada por:

$$\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) \ddot{y}(t) + m_b g \frac{d}{L} \beta(t) = 0 \quad (34)$$

A função de transferência do sistema referente ao eixo x será obtida aplicando a transformada de Laplace na Equação 33, tendo como resultado:

$$\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) s^2 X(s) + m_b g \frac{d}{L} \theta(s) \quad (35)$$

$$X(s) \left[\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) s^2 \right] = -m_b g \frac{d}{L} \theta(s) \quad (36)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{-m_b g d}{L \left[\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) s^2 \right]} \quad (37)$$

Analogamente, a equação de transferência para o eixo y será dada por:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{\beta(s)} = \frac{-m_b g d}{L \left[\left(m_b + \frac{I_b}{r_b^2}\right) s^2 \right]} \quad (38)$$

A Tabela 1 mostra um resumo de todas as constantes presentes no sistema analisado.

Tabela 1. Constantes do sistema. (Autoria própria)

<i>Constantes</i>	<i>Valor</i>
m_b	0,0024 kg
r_b	0,0175m
I_b	0,735 e-6 kg.m ²
d	0,195m
L	0,125m
g	9,8 m/s ²

5. CONCLUSÃO

Diante de tudo que já foi exposto, pode-se afirmar que a modelagem matemática é de grande importância para a ciência e a sociedade, haja vista que ela é capaz de formular um modelo matemático (padrão ou fórmula) que permite a interpretação ou compreensão de determinados fenômenos naturais. Vale destacar, que cada vez mais ela tem se mostrado versátil no que se refere as relações com outras áreas do conhecimento, exemplo disso, tem-se sua utilização para entender e acompanhar o crescimento de uma determinada população, seja ela de pessoas ou até mesmo de pragas em um determinado setor da agricultura.

Pode-se afirmar que a maior utilidade ou contribuição da modelagem matemática para a ciência e a sociedade é o fato dela transformar um problema ou fenômeno real em um modelo matemático capaz de ser analisado, interpretado, sobretudo, simulado. Se tratando de sistemas físicos dinâmicos com mais de um grau de liberdade, isto é, possíveis deslocamentos que um conjunto de corpos unidos pode realizar no espaço físico, o modelo matemático que representa tal sistema torna-se mais fácil ser encontrado utilizando conceitos da mecânica lagrangeana, ou seja, da equação de Lagrange, devido o tratamento escalar dado por ela na análise.

Dessa forma, é válido afirmar que o presente trabalho obteve um resultado satisfatório, uma vez que foi alcançado o objetivo proposto inicialmente, que era a determinação das equações que representasse o comportamento da bola sobre a plataforma. Sendo assim, as Equações 33 e 34 proporcionará futuramente a simulação do sistema via *matlab* e *simulink*, proporcionando uma análise do sistema de forma mais didática.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MOTTA, Alexandre. **Equações diferenciais**: introdução. Florianópolis: If-sc, 2009. 165 p.
- [2] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010. 607 p.
- [3] GEROMEL, José C.; PALHARES, Alvaro G. B. **Análise linear de sistemas dinâmicos**: teoria, ensaios práticos e exercícios. São Paulo: Edgard Blucher, 2004. 375 p.
- [4] SILVA, Renato Molina da; BECK, João Carlos Pinheiro. **Introdução à engenharia das vibrações**. Porto Alegre: Edipucrs, 2012. 602 p.
- [5] RAO, Singiresu S. **Vibrações mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson, 2008. 424 p.
- [6] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2001. 473 p.
- [7] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física: Mecânica**. 9. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2012. 338 p.
- [8] MORAIS, Sabrina Loiola de; VALE, Marcelo Roberto Bastos Guerra. **Projeto de um sensor de posição utilizando webcam para um sistema mesa bola**. 2019. 9 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Elétrica, Ufersa, Mossoró, 2019.
- [9] ARAUJO, Douglas Henrique Caetano de et al. Modelagem e implementação de um sistema Ball and Plate. **Ciência e Tecnologia**, Campinas, v. 19, p.1-7, jun. 2016.