



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ANA LUIZA DA SILVA FONSECA

**O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM PROBLEMAS
FÍSICOS: TEORIA E APLICAÇÕES.**

ANGICOS

2020

ANA LUIZA DA SILVA FONSECA

**O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM PROBLEMAS
FÍSICOS: TEORIA E APLICAÇÕES.**

Monografia apresentada à Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientadora: Prof^a. Dra. Enai Taveira da
Cunha

ANGICOS

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

F676u Fonseca, Ana Luiza da Silva.
O uso de equações diferenciais ordinárias em
problemas físicos: teoria e aplicações / Ana Luiza
da Silva Fonseca. - 2020.
44 f. : il.

Orientador: Enai Taveira da Cunha .
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2020.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Cálculo
diferencial. 3. Aplicações físicas. I. , Enai
Taveira da Cunha, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo autor(a).

Biblioteca Campus Angicos
Bibliotecário: Helder Romero Maia Duarte
CRB: 15/673

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ANA LUIZA DA SILVA FONSECA

**O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM PROBLEMAS
FÍSICOS: TEORIA E APLICAÇÕES.**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 11 / 12 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a Dra. Enai Taveira da Cunha (UFERSA)
Presidente

Prof^a Dra. Gislene Micarla Borges de Lima (UFERSA)
Membro Examinador

Prof. Me. Jakcney Luan Azevedo de Sousa (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela capacidade de buscar meus objetivos, bem como sua misericórdia e divindade. Sem o Seu amor, eu nada seria.

À minha avó, Lindalva, por me ensinar os caminhos da empatia e da honestidade, por sempre acreditar no meu potencial e por ser meu combustível diário.

Ao meu amor, Eduardo Moura, por dividir comigo, não só as frustrações da vida acadêmica, mas também as vitórias. Sou grata pela oportunidade de assistir seu crescimento e por dividir contigo minhas conquistas pessoais.

Aos meus familiares e amigos, sem eles eu até conseguiria chegar até aqui, no entanto, não chegaria tão rápido.

Agradeço à minha orientadora, Enai Cunha por toda paciência, compreensão e motivação. Sua atuação como profissional é inspiradora.

Agradeço a Banca Examinadora pela disponibilidade.

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todos os professores que já passaram pela minha jornada acadêmica, cada parcela de conhecimento à mim ofertada foi essencial para o meu crescimento.

“Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes”

- Issac Newton

RESUMO

As ciências da natureza buscam constantemente relações para explicar os fenômenos vistos no cotidiano. Um clássico exemplo disso é o estudo das forças gravitacionais de Newton, cuja inspiração foi, segundo narrativas, a queda de uma maçã da macieira. Paralelo a isso estão os preceitos matemáticos, ligados diretamente às análises científicas. Várias aplicações físicas como circuitos elétricos e variações de temperatura não seriam possíveis sem o estudo do cálculo diferencial e integral. Com isso, o presente trabalho tem por objetivo apresentar os principais conceitos físicos e matemáticos, ligados às Equações Diferenciais Ordinárias, vistos na literatura, atuando como referência para motivar e contribuir no entendimento e estudo das aplicações de Equações Diferenciais nas áreas da física e engenharia. Metodologicamente ocorre através da revisão de literatura dos clássicos como Halliday, Bronson e Zill, dentre outros. Ao fim do estudo foi possível concluir que, devido à larga escala de aplicação das equações diferenciais ordinárias, o assunto é de extrema necessidade aos alunos de todos os cursos de engenharia pela vasta área de aplicabilidades que os cursos abrangem.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Cálculo Diferencial. Aplicações Físicas.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Circuito em série contendo fonte de eletricidade, resistor e capacitor	25
Figura 2	– Circuito em série contendo fonte de eletricidade, resistor e indutor	27
Figura 3	– Sentido de descolamento	29
Figura 4	– Eixo com representação de dois tempos em estudo.	30
Figura 5	– Sistema massa-mola em três níveis de estudo.	32

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	13
2.1.	Definição e Classificação	13
2.2.	Equações Diferenciais de Primeira Ordem.....	14
2.2.1.	Método das Variáveis Separáveis.....	14
2.2.2.	Equação Linear de Primeira Ordem: Método de Resolução	16
2.2.3.	Equações Exatas	18
2.2.4.	Equações Homogêneas de Primeira Ordem	20
2.3.	Equações Diferenciais de Segunda Ordem	22
2.3.1.	Equações Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	22
2.3.2.	Método dos Coeficientes Indeterminados	22
2.3.3.	Equações Lineares Não – homogêneas de Segunda Ordem.....	25
2.4.	Problemas de Valor Inicial (PVI).....	25
3	CIRCUITOS ELÉTRICOS	27
3.1.	Circuito RC	27
3.2.	Circuito RL	29
4	MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIÁVEL.....	31
5	VARIAÇÕES DE TEMPERATURA	33
6	SISTEMAS MASSA-MOLA	34
7	METODOLOGIA	37
8	PROBLEMAS RESOLVIDOS	38
8.1.	Circuitos Elétricos RL:	38
8.2.	Circuitos Elétricos RC:	39
8.3.	Movimento Retilíneo Uniformemente Variável:	40

8.4.	Variação de Temperatura:	41
8.5.	Sistema Massa-Mola:	42
9	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

Desde os primórdios da humanidade, o ser humano possui a capacidade de observar a natureza e, ao mesmo tempo, a necessidade de solucionar problemas. Vemos grandes exemplos no decorrer da história iniciando pelo surgimento da contagem, passando por Talles e Pitágoras, no período helenístico, onde criaram teoremas utilizados até hoje. Outro exemplo clássico é o do renascentista Isaac Newton, físico e matemático que descreveu comportamentos da natureza que são base para a tecnologia que conhecemos no mundo atual. Advindo por contribuições de Newton, o cálculo diferencial e integral tem extrema importância nos cursos de engenharia e física, tendo em vista as infinitas áreas de atuação das ciências da natureza.

Newton, ao criar o estudo de quantidades infinitesimais, iniciou o estudo de taxas de variação e o que conhecemos hoje como limite e derivada, essenciais no estudo das ciências da natureza. As aplicações do cálculo diferencial e integral, mais propriamente as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) dentro da física vão desde a cinemática e o sistema massa-mola à engenharia elétrica com cálculo de circuitos elétricos. Questões de variações de temperatura são abordadas desde as áreas de engenharia civil e construção de edificações, pois, levam em consideração tais fatores para a escolha dos materiais de construção, até a química e biologia com conservação de substâncias. No entanto, mesmo tendo grande relevância, o estudo de EDO ainda é motivo de pânico entre os discentes dos cursos de exatas.

A dificuldade de interpretar e aplicar os passos para a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais é um problema que assola alunos das referidas áreas, e como resultado dessa adversidade, surgem altos índices de evasão e reprovação. Como relata Dullius (2013, p. 215 *apud* ROWLAND, 2006), uma pesquisa realizada na Austrália, no ano de 2003, mostra que grande parte dos alunos que participaram da pesquisa pareciam não identificar a necessidade de unidades de medida nas variáveis em estudo. A autora ainda conclui seu trabalho frisando a necessidade do esforço por parte dos docentes, para que utilizem de novas ferramentas no ensino.

Outro trabalho que aborda o presente tema e trabalha na metodologia sugerida por Dullius (2013) é o de Pedrosa *et al.* (2015) com ótima análise sobre as competências de alunos egressos do curso de química, onde esses devem possuir boa desenvoltura na área de matemática. O autor sugere nesse caso, o estudo da prática de um método analítico de

diluição, muito utilizado na química, para auxiliar no entendimento da aplicação de EDO's no cálculo da diluição.

Portanto, pensando na dificuldade de compreensão dos discentes e com o intuito de incentivar o estudo, e, dessa forma, diminuir a evasão da disciplina, o presente trabalho apresenta uma revisão teórica, tratando os principais tópicos de EDO, demonstrando e resolvendo exemplos de modelagem, afim de motivar e contribuir no entendimento e estudo das aplicações dessas nas áreas da física e engenharia.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1. Definição e Classificação

Uma equação, derivável e contínua em um intervalo I , é nomeada Equação Diferencial (ED) quando envolve derivadas de uma função, sejam de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma variável independente. Além disso, essas equações são classificadas quanto ao tipo, ordem e linearidade.

A classificação quanto ao tipo é dividida entre Equação Diferencial Ordinária (EDO) e Equação Diferencial Parcial (EDP). Uma EDO é uma equação diferencial envolvendo derivada de uma função de uma única variável independente, sendo a derivada apresentada em diferentes ordens de derivação. Já uma EDP envolve funções com derivadas parciais, ou seja, envolvem derivadas de funções de várias variáveis independentes. Neste trabalho, abordaremos somente problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias.

Para classificar a equação diferencial quanto à ordem observa-se a derivada de maior ordem que aparece na equação. Vejamos um exemplo:

Na equação a seguir temos:

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

Já na próxima equação vemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - y = e^y$$

Através desses dois exemplos nota-se que na primeira temos apenas derivadas de primeira ordem, logo, é uma equação diferencial de segunda ordem. No entanto, segunda equação temos uma derivada de segunda ordem ou derivada segunda, portanto, trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem.

Vale explicitar que a potência de uma derivada não influencia na ordem, como apresentado na equação acima, nesse caso, a maior potência aplicada aos termos da equação será o grau da EDO.

Outra forma de classificar uma ED é em relação à linearidade. Com isso, para nomeá-la como linear ou não-linear devemos adotar os seguintes critérios:

Uma ED é linear se escrita na forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \text{ onde}$$

- I. A variável dependente e suas derivadas são de primeiro grau.
- II. Os coeficientes são constantes ou funções da variável independente.

Caso contrário, a ED é classificada como não-linear.

2.2. Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Equações diferenciais de primeira ordem são equações cuja derivada possui grau 1, ou seja, derivada uma única vez. As equações de primeira ordem, segundo Bronson (2010), são expressas de acordo com a equação:

$$y' + p(x)y + q(x) = 0, \quad (1)$$

Onde, $p(x)$ e $q(x)$ são funções da variável independente.

Segundo Bronson (2008), uma solução de uma equação diferencial na função incógnita y e na variável independente x no intervalo I é uma função $y(x)$ que satisfaça a equação diferencial identificada para todo x em I .

Nesta seção serão abordadas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, e seus respectivos métodos de resolução.

2.2.1. Método das Variáveis Separáveis

O método de resolução de equações diferenciais chamado de método das variáveis separáveis é aplicado a equações cujo formato encaixa-se na seguinte descrição:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (2)$$

Para a resolução, utilizamos o pré-suposto de que $y = f(x)$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx} \text{ ou ainda}$$

$$dy = f'(x)dx$$

Aplicando em (2), temos:

$$M(x) + N(f(x)) d \frac{f(x)}{dx} = 0, \text{ ou}$$

$$N(f(x)) d \frac{f(x)}{dx} = M(x)$$

Integrando em relação a variável independente, temos:

$$\int \left(N(f(x)) d \frac{f(x)}{dx} \right) dx = \int M(x) dx$$

Em seguida, obteremos a seguinte equação:

$$\int N(y) dy = \int M(x) dx$$

Ao chegar nesse modelo de equação, aplicamos a integração direta e obteremos o resultado da EDO.

Exemplo 1:

Encontre a Solução Geral da Equação Diferencial:

$$3y \frac{dy}{dx} = -7x$$

Resolvendo, temos:

$$3y \frac{dy}{dx} + 7x = 0$$

Utilizando $y' = \frac{dy}{dx}$

$$3yy' + 7x = 0$$

$$\int (3yy') dx + \int (7x) dx = 0$$

$$\int \left(3y \frac{dy}{dx} \right) dx + \int (7x) dx = 0$$

$$\int 3y dy + \int 7x dx = 0$$

$$3 \int y dy + 7 \int x dx = 0$$

$$3 \int y \, dy = -7 \int x \, dx$$

Integrando separadamente cada termo, temos, como Solução Geral:

$$\frac{3}{2}y^2 + \frac{7}{2}x^2 + C$$

2.2.2. Equação Linear de Primeira Ordem: Método de Resolução

Como vimos na seção 2.1. uma equação é classificada como linear se as derivadas de funções e os coeficientes presentes não dependem da variável dependente

Consideremos a seguinte equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (3)$$

A resolução de uma equação linear, é dada através da identificação de um fator de integração, fator esse que, ao multiplicar cada termo da equação inicial (3), transforma-a em uma equação que consiste na derivada do produto de duas funções. Exata.

Esse fator de integração pode ser encontrado, segundo Boyce e DiPrima (2010), da seguinte forma:

Considerando que $\mu(x)$ satisfaça o pressuposto:

$$\frac{d(\mu(x))}{dx} = p(x)\mu(x) \quad (4)$$

Sabendo que o fator integrante multiplicará cada termo da equação (3), teremos:

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)f(x) \quad (5)$$

Nota-se, que o lado esquerdo da equação consiste na derivada do produto $\mu(x)y$, logo:

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)p(x)y + \mu(x) \frac{dy}{dx} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5):

$$\frac{d(\mu(x)y)}{dx} = \mu(x)f(x) \quad (7)$$

Agora, retornando à (6), com as devidas operações matemáticas, consideramos que:

$$\frac{\frac{d(\mu(x))}{dx}}{\mu(x)} = p(x)$$

Integrando ambos os lados em relação a x:

$$\int \frac{\frac{d(\mu(x))}{dx}}{\mu(x)} dx = \int p(x) dx$$

Fazendo a integral da esquerda por substituição, ficamos com:

$$\begin{aligned} u &= \mu(x) \\ \frac{du}{dx} &= \frac{d(\mu(x))}{dx} \\ \ln u &= \int p(x) dx \\ \ln \mu(x) &= \int p(x) dx \end{aligned}$$

Aplicando a função exponencial:

$$e^{\ln \mu(x)} = e^{\int p(x) dx}$$

Dessa forma, o fator de integração é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7):

$$\frac{d(ye^{\int p(x) dx})}{dx} = f(x) e^{\int p(x) dx} \quad (9)$$

Para finalizar, encontra-se a derivada da equação integrando em relação a variável x

$$y(x)e^{\int p(x) dx} = \int f(x) e^{\int p(x) dx} , \quad \text{que é a solução geral de EDO.}$$

Exemplo:

Tendo a equação linear:

$$\frac{dI}{dt} = 50I = 5$$

Ao obter o fator de integração:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int 50dt} \\ \mu(x) &= e^{50t}\end{aligned}$$

Multiplicando os termos da equação inicial:

$$e^{50t} \frac{dI}{dt} + 50e^{50t}I = 5e^{50t}$$

Aplicando a equação (9), temos:

$$\frac{d(Ie^{50t})}{dt} = 5e^{50t}$$

Integrando em relação à variável t:

$$\begin{aligned}Ie^{50t} &= \frac{5}{50}e^{50t} + c \\ I &= \frac{1}{10} + Ce^{-50t}\end{aligned}$$

2.2.3. Equações Exatas

Dada uma equação diferencial de 1ª ordem no modelo:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (10)$$

Podemos defini-la como Equação Diferencial Exata se as suas derivadas parciais satisfazem a seguinte condição:

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y)$$

Este é o primeiro passo para a solução desse tipo de EDO.

Levando em consideração a definição de que a derivada de uma constante é sempre zero, temos: $f(x, y) = C$ e que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

Logo, o segundo passo é montar a seguinte equação:

$$f(x, y) = \int M \, dx + g(y) = C \quad (11)$$

O terceiro passo é derivar a equação (11) em relação à variável y e obter algo no seguinte formato:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int M \, dx}{\partial y} + g'(y) = N(x, y)$$

Ao isolar a derivada da função $g(y)$, obtemos:

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial \int M \, dx}{\partial y}$$

Por fim, para encontrar $g(y)$, integramos em relação à variável y e o resultado é inserido na equação (11), e assim, teremos a função $f(x, y)$.

$$\int g'(y) \, dy = \int N(x, y) \, dy - \int \frac{\partial \int M \, dx}{\partial y} \, dy \quad (12)$$

Exemplo:

Tendo:

$$x \frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2, \quad -x dy + (2xe^x - y + 6x^2) dx = 0$$

Sendo:

$$N(x, y) = -x dy$$

$$M(x, y) = (2xe^x - y + 6x^2) dx$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = -1$$

Aplicando a equação (11):

$$f(x, y) = \int -x \, dy + g(x) = c$$

$$f(x, y) = -xy + g(x) = c$$

Derivando em relação a variável y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (\int M dx)}{\partial x} + g'(y) = N$$

$$\frac{\partial(-xy)}{\partial x} + g'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$$

$$-y + g'(x) = 2xe^x - y + 6x^2$$

Integrando em relação à variável y :

$$\int g'(x) = \int 2xe^x + 6x^2 \, dx$$

$$g(x) = 2x^3 + 2(xe^x - e^x)$$

Por fim, obteremos a seguinte solução geral:

$$f(x, y) = -xy + 2x^3 + 2(xe^x - e^x)$$

2.2.4. Equações Homogêneas de Primeira Ordem

Essas equações possuem um formato peculiar, em que a função apresenta como variável o quociente da variável dependente pela variável independente, como apresentada a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (13)$$

Porém, há também casos em que a equação não aparece explícita, fazendo -se necessário realizar simples operações matemáticas para evidenciá-la. A solução para essa peculiaridade dar-se pela substituição do produto por uma função arbitrária:

$$v(x) = \frac{y}{x}$$

$$y = x v(x) \quad (14)$$

Derivando a equação (14), teremos:

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

Substituindo na equação (13), obteremos:

$$x \frac{dv}{dx} + v = F(v)$$

$$x \frac{dv}{dx} = F(v) + v$$

$$\frac{1}{F(v) - v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ao organizar a equação substituída, retornamos a um modelo já visto, que, nesse caso, é uma equação separável, cuja resolução já conhecemos.

Por fim, ao encontrar o resultado da equação obtida com a substituição, é necessário desfazer esta substituição, retornando às variáveis iniciais.

Exemplo:

Seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{(y + x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

Atribuindo:

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$$

Fazendo a substituição, temos:

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{v - 1}{v + 1}$$

$$\frac{v + 1}{1 + v^2} \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}$$

Integrando em v ,

$$\int \frac{v + 1}{1 + v^2} dv = -\int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + v^2) + \arctg v + c = -\ln|x| + c$$

Retornando a $v = \frac{y}{x}$, temos,

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{(x^2 + y^2)}{x^2}\right) + \arctg \frac{y}{x} = -\ln|x| + c$$

2.3. Equações Diferenciais de Segunda Ordem

As equações diferenciais de segunda ordem, como o próprio nome já diz, são equações cuja maior ordem da derivada é 2.

2.3.1. Equações Homogênea de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

As equações homogêneas de segunda ordem podem ser escritas conforme:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

Se $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são constantes, ficamos com:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (15)$$

Pode-se verificar que possíveis soluções para o problema acima são funções exponenciais ou funções advindas de funções exponenciais, desse modo considerando $y = e^{mx}$ e suas derivadas $y' = me^{mx}$ e $y'' = m^2e^{mx}$, que ao substituir na equação (15), resultará na equação característica:

$$e^{mx} [am^2 + bm + c] = 0$$

Como e^{mx} nunca será zero, para estabelecermos o critério acima, temos que a equação característica é igualada a zero e a solução para esta equação é dada pela aplicação da resolução da equação de segundo grau, resultando em duas raízes.

Para as raízes encontradas após a resolução da equação de segundo grau, temos as seguintes possibilidades de resultado geral para a solução geral y :

a) Raízes reais e distintas:

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

b) Raízes reais e iguais (m):

$$y = C_1e^{mx} + C_2e^{mx}$$

c) Raízes complexas:

$$y = C_1e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Sendo α e β , respectivamente, as partes real e imaginária da raiz.

2.3.2. Método dos Coeficientes Indeterminados

Dada uma EDO não-homogênea de segunda ordem:

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \quad (16)$$

Esse método é utilizado para determinar os coeficientes da equação particular $y_p = g(x)$.

Segundo Bronson e Costa (2008), esse método é aplicável apenas se a função e suas derivadas puderem ser escritas em um mesmo conjunto finito de funções linearmente dependentes.

Para isso, faz-se necessário assumir uma solução particular (y_p) que dependerá da equação $g(x)$, conforme descrito a seguir:

a) Somas algébricas:

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Dx^1 + E$$

b) Exponencial:

$$g(x) = Ce^{Kx}$$

$$y_p = Ae^{Kx}$$

c) Funções trigonométricas:

$$g(x) = C \cos(Kx)$$

$$g(x) = C \sin(Kx)$$

$$y_p = A \cos(Kx) + B \sin(Kx)$$

Após identificar quais das soluções utilizar, deve-se derivar duas vezes a equação y_p obtida e aplicar no problema inicial. Em seguida, agrupando, matematicamente, os termos, encontram-se as constantes arbitrárias. Vejamos um exemplo:

Supondo a equação diferencial:

$$y'' + y' + y = (x^2 - 1) + 4e^{2x}$$

Resolveremos apenas a parte não-homogênea (y_p) e dividindo-a em duas, para facilitar a resolução, como $y_{p1} = (x^2 - 1)$ e $y_{p2} = Ae^{2x}$, vejamos as derivadas de primeira e segunda ordem de y_{p1} :

$$y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$$

$$y'_{p1} = 2Ax + B$$

$$y''_{p1} = 2A$$

Aplicando na ED do exemplo:

$$2A + (2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = (x^2 - 1)$$

Simplificando, temos:

$$(Ax^2) + (2Ax + Bx) + (2A + C) = (x^2 - 1)$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$Ax^2 = x^2, \quad A = 1$$

$$2Ax + Bx = 0, \quad B = -2$$

$$2A + C = -1, \quad C = -3$$

Logo, a solução y_{p1} será:

$$y_{p1} = x^2 - 2x - 3$$

Vejamos as derivadas de primeira e segunda ordem de y_{p2} :

$$y_{p2} = Ae^{2x}$$

$$y'_{p2} = 2Ae^{2x}$$

$$y''_{p2} = 4Ae^{2x}$$

Aplicando na ED do exemplo:

$$4Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

Simplificando:

$$e^{2x}(4A + 2A + A) = 4e^{2x}$$

Logo:

$$4A + 2A + A = 4$$

$$A = \frac{4}{7}$$

Logo, a solução y_{p2} será:

$$y_{p2} = \frac{4}{7} e^{2x}$$

Com isso, a solução geral para será:

$$y_p = x^2 - 2x - 3 + \frac{4}{7} e^{2x}$$

2.3.3. Equações Lineares Não – homogêneas de Segunda Ordem

Uma equação não-homogênea de 2ª ordem, apresentada na seção 2.3.2 na equação (16):

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x)$$

Em que, ao contrário da equação homogênea de segunda ordem, temos: $g(t) \neq 0$. A solução da equação (16) é dada por:

$$y = y_h + y_p$$

Onde, y_h é a solução encontrada considerando somente a parte homogênea (Seção 2.3.1.), ou seja, $g(t) = 0$, e y_p é a solução particular para a equação com o termo não – homogêneo. A solução da parte não – homogênea (y_p) é dada através do formato de $g(x)$, que pode ser uma das soluções descritas na seção 2.3.2.

2.4. Problemas de Valor Inicial (PVI)

São problemas que envolvem as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, seja qual for o tipo qualquer tipo e que junto da EDO é exigida uma condição inicial. Com isso, dada uma função definida em um intervalo (I), sua aplicação em um determinado valor de variável independente, ou sua derivada, seja ela de primeiro ou de segundo grau, é dada no problema.

Podemos ver no seguinte exemplo visto na obra de Boyce (2010):

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx_0}$$

Vejamos um exemplo:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ é uma família a dois parâmetros de soluções da ED de segunda ordem $y'' - y = 0$. Encontre uma solução para o problema de valor inicial que consiste na equação diferencial e nas condições iniciais dadas $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Derivando y , temos:

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Aplicando os valores iniciais dados na questão, temos:

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 1$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = C_1 e^0 - C_2 e^0 = 2$$

$$C_1 - C_2 = 2$$

Agora, como o problema resultou em um sistema linear, ao resolvê-lo, temos:

$$C_1 = \frac{3}{2}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}$$

Logo, a solução geral para esse problema de valor inicial, é:

$$y(x) = \frac{3}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} = 0$$

3 CIRCUITOS ELÉTRICOS

Os circuitos elétricos são sistemas cíclicos compostos por componentes físicos ligados por à uma fonte de energia, gerando corrente elétrica. Dentre as características dos circuitos e a quantidade de componentes, podemos citar os circuitos Resistor – Capacitor (RC), como o próprio nome já demonstra, são circuitos que possuem um resistor e um capacitor na composição, circuitos Resistor – Indutor (RL), circuitos que possuem um resistor e um indutor, e circuitos Resistor – Indutor – Capacitor (RLC), circuitos com os três componentes. Por convenção, este trabalho só abordará circuitos RC e RL.

3.1. Circuito RC

São circuitos que possuem apenas resistores e capacitores, além de uma fonte de tensão. Os resistores e também os capacitores são os componentes passivos, ou seja, elementos que por si só não geram energia elétrica.

A análise em estudo é baseada na lei de Kirchhoff das tensões, que diz que o somatório das quedas de tensões em um circuito é igual a zero, como demonstrado a seguir:

$$\sum \varepsilon(t)$$

Para analisarmos melhor a situação e alinharmos à prática, vejamos o seguinte circuito RC em série:

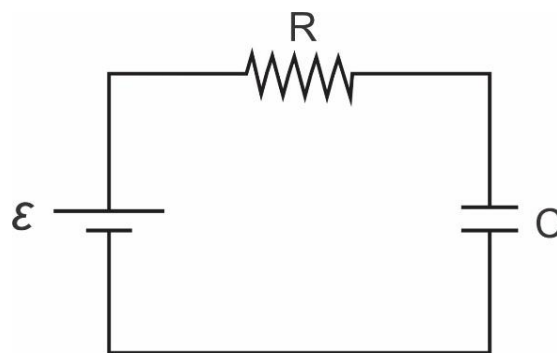


Figura1: Circuito em série contendo fonte de eletricidade, resistor e capacitor. Fonte: Autoria própria.

O resistor (R) é um componente físico que limita a passagem corrente no sistema, pois, ao ligar um resistor em uma fonte, ele dificulta a passagem de corrente para o outro lado do circuito. O resultado disso é uma queda de tensão.

A resistência de um resistor é dada pela lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{i}$$

No Sistema Internacional de Unidades (SI), o resistor tem a unidade medida em Ohms (Ω); V representa a diferença de potencial, com unidade em volts (V) e i representa a corrente, que, por sua vez, consiste no fluxo de cargas dentro de um determinado condutor, e tem por unidade o ampere (A).

A corrente (i), medida em amperes (A), em um indutor é determinada pela expressão:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Tendo em vista que a corrente depende do fluxo de cargas (q) em um espaço de tempo. Tenção tensão tenções tensões

Já um capacitor atua como um a gente que armazena energia elétrica. Sua estrutura é descrita por placas condutoras que além de possuírem uma quantidade de carga distribuída, contêm também um espaço entre si. Essas placas têm uma propriedade chamada de equipotencial, ou seja, todos os seus pontos possuem o mesmo potencial elétrico. Ao ligar um capacitor em uma fonte de energia, ocorre a migração de elétrons e uma das placas para o lado positivo da bateria e os elétrons do lado negativo da bateria para a outra placa, dessa forma, ocorre a carga do capacitor. A equação que descreve a relação entre a quantidade de carga e a diferença de potencial é:

$$q = CV,$$

Onde q é a quantidade de carga, medida em Coulomb (C), C é a capacitância (quantidade de carga acumulada nas placas), medida em Farad (F), e V é a própria diferença de potencial, medida em Volts (V).

Agora, sabendo dos princípios iniciais, podemos chegar à equação diferencial que resulta no estudo dos circuitos RC. Partindo do pressuposto de que as somas das quedas de tensão resultam em zero, e um circuito RC possui um resistor e um capacitor, temos que a queda de tensão no capacitor é:

$$V_C = \frac{q}{C}$$

Já a queda de tensão no resistor é definida por:

$$V_R = R \frac{dq}{dt}$$

Para que um circuito seja formado, há a necessidade de uma fonte, que podemos descrever como a força eletromotriz $\varepsilon(t)$. O somatório das quedas é dado pela equação diferencial:

$$\varepsilon(t) - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (17)$$

3.2. Circuito RL

Agora, vamos avaliar os circuitos que possuem apenas resistores e indutores. O método de análise continua sendo com base na lei de Kirchhoff das malhas, que, como mencionado anteriormente, relaciona as quedas de tensão dos elementos presentes no circuito elétrico.

Os indutores são elementos físicos que possuem uma bobina magnética que, ao receber corrente elétrica, induz um campo magnético. A bobina nada mais é do que um material condutor em forma de espiras. A quantidade de espiras influencia diretamente no valor da indutância. A indutância (L), medida em Henrys (H), é determinada através da seguinte fórmula:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

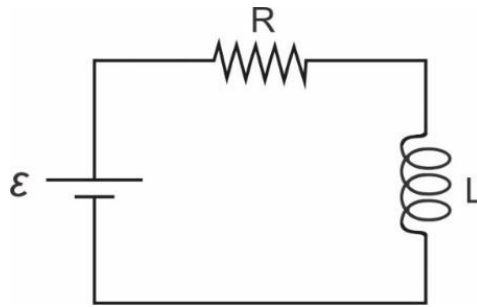
Onde, N é o número de espiras, Φ_B é o fluxo magnético, medido em tesla-metro quadrado no SI, e i é a corrente.

A queda de tensão em um indutor é dada pelo produto da indutância (L) pela variação de corrente em função do tempo, como vemos a seguir:

$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

Um circuito RL série tem a seguinte aparência:

Figura2: Circuito em série contendo fonte de eletricidade, resistor e indutor.



Fonte: Autoria própria.

Como já foi mencionada anteriormente a expressão da resistência e da sua respectiva queda de tensão, temos a seguir a expressão da lei de Kirchhoff para esse tipo de circuitos:

$$\varepsilon(t) - L \frac{di}{dt} - Ri = 0 \quad (18)$$

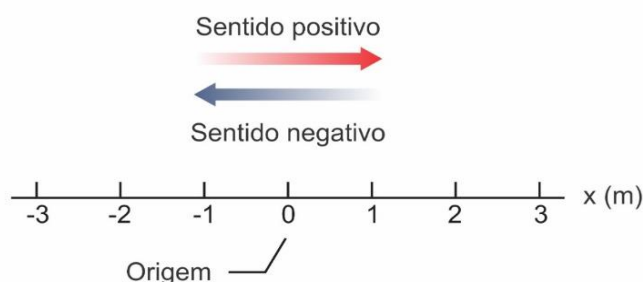
4 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIÁVEL

Nesta seção veremos um pouco da cinemática, campo da física que estuda o movimento de um corpo, com base na posição, velocidade e aceleração.

Antes de entrarmos no campo das equações diferenciais aplicadas, vale discutir um pouco a respeito de definições, como as de posição e deslocamento.

A posição de um corpo é um ponto de localização em função do tempo $x(t)$, lembrando que a unidade no Sistema Internacional (SI) é de metros (m), podendo ser expressa também em outras unidades de comprimento. Esta pode ser positiva ou negativa, depende de onde o módulo estiver localizado no eixo das abscissas da coordenada cartesiana.

Figura 3: Sentido de deslocamento



Fonte: Halliday (2016)

Já o deslocamento é a variação da posição, podendo, também, ser positivo ou negativo, o que dependerá das posições em análise. A expressão do deslocamento pode ser simplesmente descrita como:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Que consiste na posição final subtraída da posição inicial.

Entrando agora no conceito de velocidade, que é a taxa de deslocamento em função do tempo, vemos a correlação entre as três definições que vimos até agora. A velocidade tem por unidade, no SI, o metro por segundo (m/s), podendo ser também descrita por qualquer unidade de medida em função do tempo.

A taxa de variação dessa função consiste na velocidade instantânea, quando um determinado tempo final, tende ao tempo inicial, como visto abaixo:

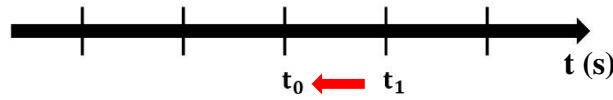


Figura 4: Eixo das abscissas com representação de dois tempos em estudo. Fonte: Autoria própria.

Quando esse intervalo é reduzido, o tempo da expressão tende a zero, o que resume-se no limite da expressão. Esse limite equivale à derivada da função $f(t)$, como mostra a expressão:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

Sabendo da definição de taxa de variação, vemos que, ao aplicar o limite à variação do deslocamento de um corpo em função do seu tempo, encontramos uma derivada, que resulta no valor da velocidade instantânea de locomoção daquele corpo. Ou seja:

$$v(t) = x'(t)$$

Entrando agora em outro conceito importante que é o de aceleração, temos que a variação da velocidade de um corpo em função do tempo consiste na aceleração (a aceleração é o quociente da variação de velocidade pela variação de tempo) daquele corpo. A aceleração tem por unidade no SI o metro por segundo quadrado (m/s^2). Como já vimos o conceito de taxa de variação, temos então que a derivada da velocidade em função do tempo resulta na aceleração:

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = x''(t)$$

Agora temos os modelos das equações que representam o espaço em função do tempo:

$$x(t) = \pm x_i \pm v_i t \pm \frac{\alpha t^2}{2} \quad (19)$$

5 VARIAÇÕES DE TEMPERATURA

A discussão sobre as trocas de calor de um meio com determinado corpo é abordada tanto na química quanto na física. Vários estudos de caso levam em consideração as variações de temperatura, como, por exemplo, a dilatação de líquidos e sólidos, assunto esse tanto abordado em propedêuticas quanto na engenharia civil.

Tais estudos, no entanto, levam em consideração apenas a simples variação de temperatura medida. Porém, os estudos de variação de temperatura com o auxílio das equações diferenciais avaliam as trocas de temperatura em função do tempo e de uma constante de proporcionalidade de transferência de calor.

Isaac Newton descreveu as transferências de temperatura de um corpo para outra em função do tempo, criando assim a Lei de Resfriamento de Newton, lei esta, descrita na equação abaixo:

$$T'(t) + k T(t) = kT_m$$

Ou simplesmente:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \quad (20)$$

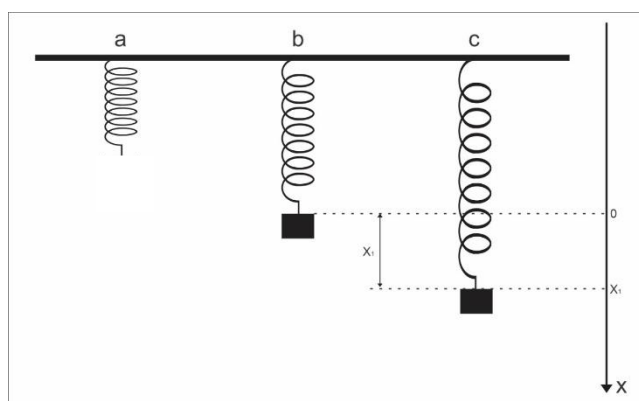
Onde, a taxa de variação de temperatura T de um corpo em função do tempo t é igual à uma constante k de proporcionalidade ou, também descrito por outro autor como coeficiente de transferência de calor. Já T_m é a temperatura do meio em que o corpo está inserido.

O módulo de T_m aumenta com o tempo se a ocorrer a transferência de calor do meio para o corpo. A recíproca é verdadeira, quando ocorre transferência do corpo para o meio.

6 SISTEMAS MASSA-MOLA

Sistemas massa-mola são sistemas que consistem no estudo de coeficientes de mola (que variam de acordo com o material de composição) relacionado com a posição do corpo de peso preso na extremidade da mola e as forças que agem naquele sistema. Vejamos a imagem a seguir:

Figura 5: Sistema massa-mola em três níveis de estudo.



Fonte: Autoria própria.

O eixo das abscissas é considerado como o eixo vertical, e indica as posições da mola antes da adição do objeto de massa (a), em equilíbrio portando o objeto de massa (b) e recebendo interferência de uma força externa, que ocasiona o desequilíbrio do sistema (c). A posição de equilíbrio (b) indica a origem do eixo, sendo a direção “para baixo” positiva em relação à esta.

A lei de Hook descreve que a força elástica (F_e) da mola equivale ao oposto do produto entre a distensão da mola, ou seja, o quanto a mola foi distendida, e a constante de proporcionalidade, como podemos ver:

$$F_e = -kx$$

Analisando o sistema através da variação da posição e das definições de taxa de variação, posição, velocidade e aceleração temos que, ao observar a variação da velocidade da mola com relação ao objeto de massa na extremidade em função do tempo, obtemos uma aceleração que é diretamente proporcional à força que age pela segunda lei de Newton:

$$f(t) = m\alpha$$

Ou, matematicamente relacionada à diferencial de segunda ordem:

$$f(t) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Outro ponto que entra no estudo é a força de resistência (F_r), denominada algumas vezes por força de amortecimento. Atuando de maneira que dificulta o deslocamento da posição da mola, o sentido desta força é “para cima” e é descrita da seguinte forma:

$$F_r = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

Onde γ é a constante de amortecimento e $\frac{dx}{dt}$ a velocidade em que ocorre a variação da posição devido ao amortecimento.

É notória a participação da aceleração da gravidade no sistema, no entanto, não poderíamos deixar de notar que, como o sistema encontra-se preso em uma superfície e, inicialmente, encontra-se também em equilíbrio, é importante denotar que a força peso iguala-se à força elástica e ambas se anulam, não entrando na equação final do problema.

Por fim, sabemos que pela terceira lei de Newton a força resultante (produto da massa pela aceleração) é igualada ao somatório de todas as forças que agem no sistema (forças contrárias). Logo, para que todas as forças já discutidas anteriormente (Força elástica e força de amortecimento) tenham a capacidade de agir sobre o sistema massa-mola se faz necessária a aparição de uma força externa ($F(t)$). Ao igualarmos a força resultante à todas as forças que agem no sistema, temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= F_r + F_e + F(t) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} &= -\gamma \frac{dx}{dt} - kx + F(t) \\ m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx &= F(t) \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x &= \frac{F(t)}{m} \end{aligned} \quad (21)$$

Outra classificação importante relaciona os tipos de movimento de vibração das molas com os termos da equação (21), conforme descrito por Bronson (2008), como vistos a seguir:

Substituindo em (21) $a_1 = \frac{\gamma}{m}$, $a_0 = \frac{k}{m}$, $f(t) = \frac{F(t)}{m}$, temos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \quad (22)$$

a) Livre e não amortecido:

$$F(t) = 0$$

$$a_1 = 0$$

b) Livre e amortecido:

$$F(t) = 0$$

Esse tipo de movimento resulta em uma equação homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes (Seção 2.3.1.), sendo possível encontrá-la, após a resolução da equação de segundo grau, raízes reais e idênticas, raízes reais e distintas e raízes complexas.

Ainda, podemos classificar os resultados como:

- i. Raízes Reais e Distintas: Superamortecido;
- ii. Raízes Reais e Idênticas Criticamente Amortecido;
- iii. Raízes Complexas: Oscilatório Amortecido.

c) Forçado:

$$F(t) \neq 0$$

7 METODOLOGIA

O presente trabalho contou com a revisão de literatura dos principais clássicos didáticos que tratam da temática de Equações Diferenciais Ordinárias e suas aplicações na física, abordando os principais tópicos e a tratativa matemática por trás de cada método pressuposto.

Dentre os clássicos, foram utilizadas duas edições do autor Dennis G. Zill, além da coleção de David Halliday, frequentemente utilizados nos cursos de ciências da Natureza.

Outrossim, na etapa de resolução de questões, além de utilizar o Zill (2016), cuja temática principal são as aplicações das modelagens, foi utilizada a obra de Bronson (2008), acervo da coleção Schaum, referência para o estudo de matemática e engenharia.

8 PROBLEMAS RESOLVIDOS:

8.1. Circuitos Elétricos RL:

O problema a seguir foi retirado de Zill (2016):

Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,1 henry e a resistência é de 50 ohms. Ache a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \rightarrow \infty$.
 Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,1 henry e a resistência é de 50 ohms. Ache a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$. Determine a corrente quando $t \rightarrow \infty$.

Conforme os dados da questão, aplicados à equação (18) obtemos:

$$30 - 0,1 \frac{di}{dt} - 50i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + 500i = 300$$

Como vemos, o problema resultou em uma equação diferencial ordinária linear. Ao encontrar o fator integrante $\mu(t)$ através da Equação (8) e aplicarmos à equação (9), teremos:

$$\mu(t) = e^{\int 500 dt}$$

$$\mu(t) = e^{500t}$$

$$\frac{d(i(t)e^{500t})}{dt} = 300e^{500t}$$

Ao integrar com relação a t , temos:

$$i(t)e^{500t} = \frac{3}{5}e^{500t} + C$$

$$i(t) = \frac{3}{5} + Ce^{-500t}$$

Aplicando a condição inicial $i(0) = 0$

$$i(t) = \frac{3}{5} + C = 0$$

$$C = -\frac{3}{5}$$

Logo, obtemos a solução geral:

$$i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$$

Quando $t \rightarrow \infty$, $e^{-500t} \rightarrow 0$, logo $i \rightarrow \frac{3}{5}$

8.2. Circuitos Elétricos RC:

O problema a seguir foi retirado de Zill (2016):

Uma força eletromotriz de 100 volts é aplicada a um circuito em série RC no qual a resistência é de 200 ohms e a capacitância é 10^{-6} farads. Ache a carga $q(t)$ no capacitor se $q(0) = 0$. Ache a corrente $i(t)$.

Aplicando os dados do problema à equação (17), teremos:

$$100 - 200 \frac{dq}{dt} - \frac{1}{10^{-6}} q = 0$$

$$\frac{dq}{dt} + 5000q = \frac{1}{2}$$

Como já foi visto, o problema resultou em uma equação diferencial ordinária linear, o que faz necessária a obtenção de um fator de integração $\mu(t)$, que multiplicará os termos da equação obtida com os dados do problema acima, com mostrado na equação (8):

$$\mu(t) = e^{\int 5000 dt}$$

$$\int 5000 dt = 5000t$$

$$\mu(t) = e^{5000t}$$

$$\frac{d(q(t)e^{5000t})}{dt} = \frac{1}{2}e^{5000t}$$

Ao integrar com relação a t , temos:

$$q(t)e^{5000t} = \frac{1}{10000}e^{5000t} + C$$

$$q(t) = \frac{1}{10000} + Ce^{-5000t}$$

Aplicando $q(0) = 0$, temos:

$$C = -\frac{1}{10000}$$

Logo, obtemos a solução geral:

$$q(t) = \frac{1}{10000} - \frac{1}{10000} e^{-5000t}$$

Como:

$$i(t) = \frac{d(q(t))}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{2} e^{-5000t}$$

8.3. Movimento Retilíneo Uniformemente Variável:

O problema a seguir foi retirado de Rattan & Klingbeil (2017):

(ADAPTADO). Um protótipo de foguete é lançado do topo de um prédio de 50 ft de altura. A altura do foguete é dada por: $y(t) = y(0) + v(0)t - \frac{1}{2}gt^2$.

em que $y(t)$ é a altura do foguete no tempo t , $y(0) = H = 50$ ft é a altura inicial do foguete, $v(0) = 150$ ft/s é a velocidade inicial do foguete e $g = 32,2$ ft/s², a aceleração devido à gravidade. Determine:

- a) A equação quadrática para a altura $y(t)$ do foguete.

Partindo dos dados obtidos na questão, temos:

$$y(0) = 50 \text{ ft}$$

$$g = 32,2 \text{ ft/s}^2$$

$$v(0) = 150 \text{ ft/s}$$

Logo, a resposta consiste em:

$$y(t) = 50 + 150t - 16,1 t^2$$

- b) A velocidade.

A velocidade é obtida derivando $y(t)$ uma única vez:

$$y'(t) = -32,2t + 150 \text{ ft/s}$$

c) A aceleração.

A aceleração é obtida derivando $y(t)$ duas vezes:

$$y''(t) = -32,2 \text{ ft/s}^2$$

8.4. Variação de Temperatura:

O problema a seguir foi retirado de Zill (2016):

Um termômetro é removido de uma sala onde a temperatura ambiente é de 70°F e levado para fora, onde a temperatura é de 10°F . Após meio minuto, o termômetro indica 50°F . Qual será a leitura no termômetro em $t = 1 \text{ min}$? Quanto tempo levará para o termômetro atingir 15°F ?

Das condições iniciais:

$$T(0) = 70^\circ\text{F}$$

$$T_m = 10^\circ\text{F}$$

$$T(0,5) = 50^\circ\text{F}$$

Devemos encontrar:

$$T(1) = ?$$

$$T(t) = 15^\circ, \quad t = ?$$

Aplicando as informações, obtidas no enunciado, à equação (20), temos:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10)$$

Resolvendo pelo método de equações de variáveis separáveis, devemos integrar em relação à variável t , que resultará em:

$$T - 10 = Ce^{kt}$$

Aplicando às condições iniciais:

Para $t = 0$:

$$70 - 10 = Ce^{k0}$$

$$C = 60$$

Para $t = 0,5$:

$$50 - 10 = 60e^{0,5k}$$

$$\frac{40}{60} = e^{0,5k}$$

$$\ln \left| \frac{40}{60} \right| = \ln(e^{0,5k})$$

$$k = -0,811$$

Logo, a equação característica de modelagem do problema é dada por:

$$T - 10 = 60e^{-0,811t}$$

Agora, para $T(1)$:

$$T - 10 = 60e^{-0,811}$$

$$T = 36,665^\circ$$

Aplicando agora 15° :

$$15 - 10 = 60e^{-0,811t}$$

$$\frac{5}{60} = e^{-0,811t}$$

$$\ln \left| \frac{5}{60} \right| = \ln e^{-0,811t}$$

$$t = 3,06 \text{min}$$

8.5. Sistema Massa-Mola:

O problema a seguir foi retirado de Bronson (2010):

Uma massa de 0,5kg está suspensa por uma mola cuja constante é 6 N/m. A massa é posta em movimento deslocando-a 0,5m para baixo de sua posição de equilíbrio, sem velocidade inicial. Determine o movimento subsequente da massa, considerando que a resistência provocada pelo meio seja $-4x''$ N.

Sabendo que:

$$m = 0,5 \text{ Kg} \quad k = 6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\gamma = 4 \text{ N} \quad F(t) = 0$$

$$x(0) = 0,5, \quad x'(0) = 0$$

Utilizaremos a equação (21):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F(t)}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 12x = 0$$

Com base na equação (15) ficamos com:

$$e^{mx} [m^2 + 8m + 12] = 0$$

Resolveremos a equação polinomial do segundo grau, obtendo as raízes:

$$m_1 = -2$$

$$m_2 = -6$$

Como a equação do segundo grau resultou em duas raízes reais e distintas, temos que esse problema possui característica de sistema superamortecido.

Com isso, e com base no item a) da seção 2.3.1:

$$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$$

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-6t}$$

Derivando a equação, temos:

$$x' = -2C_1 e^{-2t} - 6C_2 e^{-6t}$$

Aplicando os problemas de valor inicial:

$$x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0,5$$

$$C_1 + C_2 = 0,5$$

$$x' = -2C_1 e^{-2t} - 6C_2 e^{-6t}$$

$$x'(0) = -2C_1 e^0 - 6C_2 e^0 = 0$$

$$-2C_1 - 6C_2 = 0$$

Resultando em um sistema linear:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0,5 \\ -2C_1 - 6C_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, ficamos com:

$$C_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{4}$$

Logo, a equação geral é:

$$x(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-6t}$$

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como demonstrado no decorrer da fundamentação teórica, as equações diferenciais possuem aplicações em várias situações modeladas no nosso cotidiano. Dessa forma, juntamente com as aplicações da física torna-se possível o estudo de especificidades de cada ramo da engenharia e das ciências da natureza. Por esse motivo, o assunto de equações diferenciais é de extrema necessidade a esses estudantes.

Ademais, o conhecimento adquirido com o estudo das EDO's serve, direta ou indiretamente, de pré-requisito para outras cadeiras dos inúmeros cursos das áreas das ciências da natureza, tornando-se essencial no decorrer do curso e, conseqüentemente, na carreira profissional.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. LTC, 2010.
- BRONSON, R.; COSTA, G. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 400 p. Coleção Schaum.
- DULLIUS, MARIA MADALENA; VEIT, ELIANE ANGELA; ARAUJO, IVES SOLANO. Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, [s. l.], v. v.6, ed. n.2, p. 207-228, Junho, 2013.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 1: Mecânica**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física, volume 3: Eletromagnetismo**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- PEDROSA, Marcelo S.; MAFRA, João Carlos M.; SIQUEIRA, Angelo S. UMA PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA: Prática de diluição contínua monitorada por espectrofotometria visível na motivação do ensino de equações diferenciais para alunos de química. **Revista de Educação, Ciências e Matemática**, v. 5, n. 1, p. 91-100, jan/abril. 2015.
- RATTAN, K.S.; KLINGBEIL, N. W. **Matemática Básica para Aplicações de Engenharia**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem - Tradução da 10ª Edição norte-americana**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. S. **Equações Diferenciais**. Vol. 1, 3ª ed. São Paulo: Person Makron Books. 2007.