



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ANDRE LUIZ FORTUNATO PEREIRA

**APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE VIBRAÇÕES
MECÂNICAS**

ANGICOS - RN

2020

ANDRE LUIZ FORTUNATO PEREIRA

**APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE VIBRAÇÕES
MECÂNICAS**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Profa. Dra. Enai Taveira da Cunha

ANGICOS - RN

2020

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

P436a Pereira, André Luiz Fortunato.
Aplicação de equações diferenciais no estudo de
vibrações mecânicas / André Luiz Fortunato Pereira.
- 2020.
54 f. : il.

Orientadora: Enai Taveira da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2020.

1. Equações Diferenciais. 2. Sistema massa-
mola. 3. Transformada de Laplace. I. da Cunha,
Enai Taveira, orient. II. Título.

ANDRE LUIZ FORTUNATO PEREIRA

**APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ESTUDO DE VIBRAÇÕES
MECÂNICAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Angicos, como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 03 / 02 / 2020

BANCA EXAMINADORA

Enai T. da Cunha

Profa. Dra. Enai Taveira da Cunha (UFERSA)
Presidente

[Assinatura]
Prof. Dr. Marcus Vinicius Sousa Rodrigues (UFERSA)
Membro Examinador

Tony Kleverson Nogueira

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por tudo que sou hoje e todas as coisas boas e por sempre me dar forças para continuar.

A minha mãe, Ruty Maria Fortunato, por todo o amparo, carinho e dedicação, sempre buscando o melhor para mim. Ao meu pai, Luiz Gonzaga Pereira Otaviano, que sempre me incentivou e me fortaleceu.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado nesses anos, compartilhando dos momentos bons e das decepções.

Sou eternamente grato a todos os professores que contribuíram para o meu ensino e aprendizado, em especial a minha orientadora, Enai Taveira da Cunha, por toda a atenção, dedicação e empenho em me ajudar na construção desse trabalho e compartilhar de seu conhecimento.

Gostaria de agradecer também aos professores Tony Kleverson Nogueira e Marcus Vinicius Sousa Rodrigues, por terem aceitado o convite para a banca e também por, ao longo do curso, me fazerem descobrir um grande interesse pelo cálculo diferencial e integral e pela física.

RESUMO

Em diversas áreas de estudo, constantemente desejamos descrever ou modelar o comportamento de sistemas físicos em termos matemáticos. Muitas vezes, o modelo matemático que descreve um determinado problema é dado por uma equação diferencial. Nesse intuito, esse trabalho foi feito com o objetivo de motivar alunos nos cursos de Ciência e Tecnologia ao estudo de equações diferenciais, mostrando suas aplicações dentro da área de vibrações mecânicas. Nesse trabalho foi feito um levantamento teórico dentro da área de equações diferenciais, apresentando conceitos, exemplos e resultados dentro da teoria. Foi feito um estudo dentro da teoria de vibrações mecânicas, apresentando alguns modelos de um sistema massa-mola e sua solução através de equações diferenciais. Finalmente, apresentamos as aplicações das equações diferenciais nessa área, através de problemas que foram resolvidos utilizando métodos usuais de resolução das equações diferenciais e de transformada de Laplace. Com isso, podemos concluir que os estudos dentro da área de vibrações mecânicas estão diretamente ligados aos estudos de equações diferenciais que são relevantes para um bom desempenho dentro dessa área da engenharia.

Palavras-chave: Equações Diferenciais, Sistema massa-mola, Transformada de Laplace

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema massa-mola.....	28
Figura 2 – Sistema massa-mola sujeito a uma força periódica.	31
Figura 3 – Sistema com amortecimento viscoso.	33
Figura 4 - Solução não amortecida.	36
Figura 5 - Movimentos com tipos diferentes de amortecimento.	37

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	10
2.1 Algumas definições básicas	10
2.1.1 Classificação pelo tipo	10
2.1.2 Classificação pela ordem.....	11
2.1.3 Classificação em relação a linearidade	11
2.1.4 Soluções de Equações Diferenciais.....	11
2.1.5 Problema de Valor Inicial	11
2.2 Equações diferenciais lineares de segunda ordem	12
2.2.1 Existência de uma única solução.....	12
2.2.2 Princípio de Superposição.....	12
2.2.3 Dependência e independência Linear	13
2.2.4 Critério para Independência Linear de Funções	14
2.2.5 Solução de Equações Homogêneas.....	14
2.2.6 Equação característica	15
2.2.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas	16
2.2.8 Solução Geral	16
2.2.9 Método dos Coeficientes Indeterminados.....	17
3 TRASFORMADA DE LAPLACE	19
3.1 Condições suficientes para existência da Transformada de Laplace de uma função	20
3.2 Propriedades da Transformada de Laplace	20
3.2.1 Linearidade da transformada de Laplace	20
3.2.2 Transformada de Laplace de Derivadas	21
3.3 Transformada inversa.....	22
3.2.1 Aplicações	23
4 VIBRAÇÕES MECÂNICAS.....	26
4.1 Vibração livre	26
4.1.2 Equação do movimento de um sistema massa-mola	27
4.1.3 Métodos de energia.....	28
4.1.4 Solução	29
4.1.5 Movimento Harmônico	29
4.2 Vibração forçada sem amortecimento.....	31

4.3 Vibração livre com amortecimento viscoso	32
4.3.2 Constante de amortecimento e fator de amortecimento	34
4.4 Vibração forçada com amortecimento viscoso.....	37
5 METODOLOGIA	39
6 APLICAÇÕES: VIBRAÇÕES MECÂNICAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	40
7 CONCLUSÃO.....	51
REFERÊNCIAS.....	52

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são importantes ferramentas matemáticas que modelam os mais diversos tipos de problemas, sejam eles físicos, químicos, biológicos e etc. Ao modelar uma equação diferencial podemos encontrar expressões que envolvem a taxa de variação com o tempo das grandezas que descrevem o problema. Com o avançar da física, o estudo das equações diferenciais foi de vital importância para seu desenvolvimento, sendo utilizada para o cálculo das equações de movimento dos fluidos, das oscilações de um sistema vibratório, da termodinâmica e de diversas outras áreas (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

A utilização das equações diferenciais surgiu através de observações e a necessidade em modelar situações reais, sendo de grande importância para a interação da matemática, com outras áreas de conhecimento. Em vibrações mecânicas, as equações diferenciais são de grande valia, sendo utilizadas para descrever o movimento de corpos que oscilam em torno de uma posição de equilíbrio. (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Muitos alunos sentem dificuldade ao cursarem a disciplina de equações diferenciais, seja nos conceitos iniciais, como também nas suas resoluções, incluindo a interpretação e compreensão de suas aplicações em problemas práticos. Por meio deste trabalho, estaremos interessados em modelar e solucionar problemas de vibrações mecânicas por meio do uso das equações diferenciais, a fim de despertar um maior interesse dos alunos que pretendem cursar alguma engenharia. Na metodologia desse trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica na biblioteca da UFERSA, campos angicos e também pesquisas na plataforma online, tomando como base, artigos e monografias, a fim de obter um aprofundamento nos assuntos aqui tratados.

Com esse objetivo, desenvolvemos nas seções 2 e 3 um estudo teórico acerca de equações diferenciais e transformada de Laplace, com foco nas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem lineares, bem como alguns métodos de solução, tais como a transformada de Laplace, equação característica e o método dos coeficientes indeterminados.

Na seção 4, apresentamos a teoria de vibrações mecânicas, mostrando os tipos de modelos, que são: sem amortecimento, com amortecimento e forçados. Será feita a modelagem dos problemas e através da aplicação das equações diferenciais, encontraremos a solução dos mesmos.

Por último, na seção 6, foram selecionados problemas de vibrações mecânicas acerca dos modelos abordados nesse trabalho, com base na bibliografia de Bronson e Costa (2008), onde utilizamos os métodos vistos nas seções anteriores para obter suas soluções.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Em diversas áreas de estudo, constantemente desejamos descrever ou modelar o comportamento de sistemas físicos em termos matemáticos. Muitas vezes o modelo matemático que descreve um sistema é dado por uma equação diferencial. Nessa seção, apresentaremos algumas definições sobre equações diferenciais e, também, serão desenvolvidos alguns métodos para encontrar a solução dessas equações. As definições dessa seção foram baseadas no livro do Zill e Cullen (2001).

Definição 2.1 Uma equação contendo derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é dita uma equação diferencial (ED).

Exemplo 2.1 O movimento oscilatório de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (2.1)$$

Essas equações podem ser classificadas quanto ao tipo, à ordem e a linearidade.

2.1 Algumas definições básicas

2.1.1 Classificação pelo tipo

Existem dois tipos de equações diferenciais: equações diferenciais ordinárias e equações diferenciais parciais.

Definição 2.2 Equações que contém apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, é dita equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplo 2.2 Equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$x \frac{dy}{dx} + y = \sin x. \quad (2.2)$$

Definição 2.3 Uma equação diferencial que contém as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é dita equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 2.3 Equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (2.3)$$

Neste trabalho serão abordados apenas os conceitos acerca das equações diferenciais ordinárias. Portanto, a partir daqui, não será mais discutida a teoria sobre as equações diferenciais parciais.

2.1.2 Classificação pela ordem

Por definição, a ordem de uma equação diferencial é dada pela derivada de maior ordem que aparece na equação. A equação na forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (2.4)$$

é dita uma equação ordinária de n -ésima ordem, onde $y^{(n)}$ representa a derivada de ordem n da função.

2.1.3 Classificação em relação a linearidade

Uma equação diferencial de ordem n é dita linear se F for linear em $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Assim, uma equação diferencial ordinária de n -ésima ordem é linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \quad (2.5)$$

Veja que as equações diferenciais lineares são caracterizadas por duas propriedades:

- A variável dependente y e suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência dos termos que envolve y é 1.
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Uma equação que não é linear é chamada de não linear.

2.1.4 Soluções de Equações Diferenciais

Qualquer função f definida em algum intervalo I , que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , que, quando substituída na equação diferencial de ordem n , reduz a equação a uma identidade, é denominada de solução para a equação no intervalo I . Esse intervalo é chamado também de Domínio da Solução e pode ser classificado como aberto, denotado por (a, b) , fechado denotado por $[a, b]$, infinito, denotado por $(0, \infty)$ e assim por diante.

2.1.5 Problema de Valor Inicial

Para uma equação diferencial de n -ésima ordem, o problema

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.6)$$

sujeito às condições iniciais $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)}$, onde $y_0, y_1, \dots, y_{(n-1)}$ são constantes reais especificadas, em um intervalo I , contendo x_0 , é dito como problema de valor inicial. Problemas de valor inicial são constantemente encontrados nas diversas áreas da ciência, como, por exemplo, a física e a biologia.

2.2 Equações diferenciais lineares de segunda ordem

Uma Equação Diferencial Ordinária de segunda ordem tem a seguinte forma

$$y'' = f(x, y, y'), \quad (2.7)$$

onde f é uma função conhecida. A equação (2.7) é dita linear quando a função f está na forma

$$f(x, y, y') = g(x) - p(x)y' - q(x)y. \quad (2.8)$$

Na equação (2.8) as funções g, p e q dependem somente de x . Dessa forma, a equação (2.7) pode ser reescrita da seguinte forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \quad (2.9)$$

Se $g(x) = 0$, então a equação (2.9) é chamada de equação homogênea. Supondo que $g(x) \neq 0$ a equação (2.9) é dita não-homogênea.

2.2.1 Existência de uma única solução

É muito importante saber se uma equação diferencial possui ou não solução, pois, ao se trabalhar com um problema aplicado a uma situação real, se for de conhecimento a existência de sua solução, é possível ganhar tempo e evitar maiores custos para a busca da solução do problema.

Teorema 2.1 (Existência de uma única solução). Se $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em um intervalo qualquer I e x_0 pertence a I , então o problema $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, sujeito as condições iniciais $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ tem uma única solução $y(x)$ no intervalo I .

As demonstrações dos teoremas a seguir podem ser encontradas em Zill e Cullen (2001).

2.2.2 Princípio de Superposição

O princípio de superposição diz que a soma de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea também é uma solução.

Teorema 2.2 (Princípio da Superposição: Equações Homogêneas). Sejam $y_1, y_2, \dots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de ordem n homogênea (2.5) em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x), \quad (2.10)$$

em que os $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

2.2.3 Dependência e independência Linear

No estudo das soluções de equações diferenciais homogêneas, precisamos da linearidade para determinar a solução das equações, devido o conjunto solução ser um espaço vetorial. Então, digamos que precisamos de um conjunto linearmente independente para determinar a base desse espaço. Sendo assim, as seguintes definições são de grande importância no estudo das soluções de equações diferenciais de segunda ordem.

Definição 2.4 Um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é linearmente dependente em um intervalo I , caso existam constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não nulas, tais que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo x pertencente a esse intervalo.

Definição 2.5 Um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é linearmente independente em um intervalo I se ele não é linearmente dependente nesse intervalo.

Dito isso, é possível afirmar que um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo x pertencente a esse intervalo, são $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Para o caso de duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$, é dito que, se essas funções são linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes c_1 e c_2 não nulas, tais que, para todo x pertencente a esse intervalo,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Portanto, se $c_1 \neq 0$, temos

$$f_1 = -\frac{c_1}{c_2} f_2(x),$$

isto é, duas funções são linearmente dependentes se uma é múltipla da outra. Com isso, é possível afirmar que duas funções são linearmente independentes em um intervalo, se uma não é múltipla da outra.

2.2.4 Critério para Independência Linear de Funções

Teorema 2.3 (Critério para Independência Linear de Funções). Suponha que as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ são linearmente independentes no intervalo.

O determinante do Teorema (2.2.3) é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$$

e é chamado de Wronskiano das funções.

Teorema 2.4 (Corolário). Se $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ possuem pelo menos $n - 1$ derivadas e são linearmente dependentes em I , então

$$W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$$

para todo x pertencente a esse intervalo.

2.2.5 Solução de Equações Homogêneas

É de extrema importância que as soluções $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ de uma equação diferencial ordinária sejam linearmente independentes, com isso, pode-se afirmar que essas soluções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação.

Devido a semelhança entre equações diferenciais lineares homogêneas e álgebra vetorial pode-se provar que, o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n forma um espaço vetorial de dimensão n e que qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial forma uma base para o espaço. Dessa forma, ao buscar um conjunto fundamental de soluções é possível obter a solução geral e a partir dela, todas as soluções particulares da equação diferencial (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

2.2.6 Equação característica

O objetivo aqui é apresentar um método para solucionar equações diferenciais lineares de segunda ordem, sendo o primeiro passo para isso, obter a solução das equações homogêneas.

Considere a equação de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.10)$$

Pode-se supor que uma solução de (2.10) é na forma exponencial, isto é,

$$y(x) = e^{rx} \quad (2.11)$$

onde r é constante. Substituindo a solução (2.11) na equação (2.10), obtemos

$$a(r^2 e^{rx}) + b(re^{rx}) + c(e^{rx}) = 0$$

Colocando o fator comum em evidência, tem-se:

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0. \quad (2.12)$$

Como e^{rx} nunca será nulo para valores reais de x , então, para que (2.12) seja satisfeita, deve-se determinar um r de tal forma que, ele seja raiz da equação de segundo grau

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é chamada de equação característica da equação diferencial (2.10). Sendo a equação 2.13 uma equação do segundo grau, existem 3 casos a se considerar:

Caso 1. Raízes reais distintas

Com a hipótese de que a equação (2.13) possui duas raízes reais distintas r_1 e r_2 , obtêm-se duas soluções:

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ e } y_2 = e^{r_2 x}.$$

Com o Princípio de Superposição temos que a soma de duas soluções também é solução para a equação (2.10) então, a solução da equação pode ser escrita da forma:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}. \quad (2.14)$$

Caso 2. Raízes reais iguais

Se $r_1 = r_2$ obtêm-se apenas uma solução exponencial $y_1 = e^{r_1 x}$ para a solução geral da equação.

Pelo Princípio de Superposição e com a necessidade de independência linear das soluções, tem-se que a solução pode ser escrita da forma

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}. \quad (2.15)$$

Caso 3. Raízes complexas conjugadas

Sendo r_1 e r_2 raízes complexas, então pode-se escrever $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$, onde α e $\beta > 0$ são reais e $i^2 = -1$. Então,

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (2.16)$$

Na pratica, é preferível trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas, sendo assim, utilizando a fórmula de Euler

$$e^{\pm ix} = \cos(x) \pm i \sin(x)$$

pode-se reescrever (2.16) como

$$y = e^{\alpha x} [c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)]. \quad (2.17)$$

2.2.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas

Definição 2.6 Uma função y_p não dependente de parâmetros arbitrários e que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - h(x) = g(x) \quad (2.18)$$

é dita solução particular da equação. Seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluções da equação (2.5) em um intervalo I e se y_p é uma solução particular de (2.18) nesse intervalo I , pode-se afirmar que a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p \quad (2.19)$$

também será solução da equação (2.18).

2.2.8 Solução Geral

O seguinte teorema fala sobre a solução geral de uma equação diferencial não-homogênea. O teorema diz que para encontrar essa solução, devemos encontrar uma solução particular da equação não-homogênea e as soluções fundamentais da equação homogênea.

Teorema 2.5 (Solução Geral de equações não-homogêneas). Seja y_p uma solução particular qualquer da equação diferencial linear não homogênea de ordem n (2.18) em um intervalo I , e seja, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ um conjunto de soluções da equação diferencial homogênea associada a equação (2.5) em I . Então, a solução geral nesse intervalo é dada por

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p, \quad (2.20)$$

onde $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes arbitrárias.

2.2.9 Método dos Coeficientes Indeterminados

A seguir, apresentamos um método aplicado a uma classe de funções como fator não-homogêneo de uma equação diferencial, afim de encontrar uma solução particular dessas equações.

Esse método de solução é aplicado a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (2.21)$$

com coeficientes constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $g(x)$ funções do tipo polinomiais, exponenciais, senos, cossenos, somas e produtos dessas funções.

A resolução através desse método requer que inicialmente seja dada uma hipótese inicial sobre a solução particular y_p , mas com seus coeficientes a determinar.

Ao substituir a função escolhida na equação (2.21) tenta-se determinar os coeficientes para que a equação seja satisfeita. Se a hipótese escolhida for correta, será obtida a solução particular y_p da equação diferencial. Caso os coeficientes não tenham sido determinados, significa que não existe solução para a hipótese inicialmente dada. Nessa situação é necessário supor uma nova hipótese e repetir o processo.

O método dos coeficientes indeterminados funciona bem na classe de funções polinomiais, exponenciais, senos e cossenos, pois essas funções possuem a notável propriedade: derivadas de suas somas e produtos são ainda somas e produtos de polinômios, exponenciais, senos e cossenos. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem de ser identicamente igual à $g(x)$, é razoável supor que y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

Na seguinte tabela, são ilustrados alguns exemplos específicos para $g(x)$ em (2.21) juntamente com a forma correspondente da solução particular.

Tabela 1 - Tentativas para soluções particulares

$g(x)$	Forma de y_p
1. k (qualquer constante)	A
2. $\sin \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
3. $\cos \alpha x$	$A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$
4. $e^{\alpha x} \cos \beta x$	$Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$
5. $e^{\alpha x} \sin \beta x$	$Ae^{\alpha x} \cos \beta x + Be^{\alpha x} \sin \beta x$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

O exemplo a seguir ilustra como se dá a solução de uma equação diferencial de segunda ordem não-homogênea pelo método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 2.2.1: Encontre uma solução particular e a solução geral da equação diferencial de segunda ordem

$$y'' - 4y = e^x \cos x. \quad (2.22)$$

Solução: A equação característica de (2.22) é dada por $r^2 - 4 = 0$, cujas raízes são dadas por $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$. Então, a solução da equação diferencial homogênea associada a equação (2.22) é $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$.

Com $g(x) = e^x \cos x$ vemos na entrada 4 da tabela de tentativas de soluções particulares que deve ser escolhida a seguinte forma de solução

$$y_p = Ae^x \cos x + Be^x \sin x.$$

Derivando essa expressão duas vezes em relação a x , obtemos

$$y'_p = A(e^x \cos x - e^x \sin x) + B(e^x \sin x + e^x \cos x)$$

$$y''_p = -2Ae^x \sin x + 2Be^x \cos x.$$

Substituindo em (2.22) temos,

$$y''_p - 4y_p = (-4A + 2B)e^x \cos x + (-2A - 4B)e^x \sin x = e^x \cos x.$$

Dessa igualdade obtemos o seguinte sistema

$$-4A + 2B = 1$$

$$-2A - 4B = 0,$$

que possui a solução $A = -\frac{1}{5}$ e $B = \frac{1}{10}$. Logo, uma solução particular é

$$y_p = -\frac{1}{5}e^x \cos x + \frac{1}{10}e^x \sin x.$$

Assim, a solução geral da equação (2.22) é dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{5}e^x \cos x + \frac{1}{10}e^x \sin x.$$

3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

A Transformada de Laplace é uma importante ferramenta usada na resolução de equações diferenciais, em particular, as equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes que envolvem problemas de valor inicial e condições de contorno.

Nesta seção será apresentado alguns conceitos sobre Transformada de Laplace e suas propriedades.

Definição Básica: Seja a função $f(t)$, definida para $t \geq 0$, então a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} K(s, t)f(t)dt$$

é definida por um limite

$$\int_0^{\infty} K(s, t)f(t)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b K(s, t)f(t) dt.$$

Se esse limite existir, dizemos que a integral existe e converge; se o limite não existe, dizemos que a integral não existe e diverge. O limite em questão existe somente para certos valores da variável s . O termo $K(s, t)$ é uma função dada, chamada de núcleo da transforma. Quando

$$K(s, t) = e^{-st} \quad (3.1)$$

podemos definir uma importante transformada integral.

Definição 3.1 (Transformada de Laplace) Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$, define-se a sua Transformada de Laplace, $F(s)$, por:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \quad (3.2)$$

desde que a integral convirja para algum valor de s .

Exemplo 3.1 Calcular a transformada de Laplace da função constante $f(t) = 1$

Solução:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-st} + 1}{s} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s}$$

desde que $s > 0$. Em outras palavras, para $\mathcal{L}\{1\}$ existir tem-se que $s > 0$, dessa forma o expoente $-st$ é negativo e $e^{-st} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$. Quando $s < 0$, a transformada não existe, pois a integral diverge.

3.1 Condições suficientes para existência da Transformada de Laplace de uma função

Nem sempre a integral (3.2) irá convergir, dessa forma nem sempre uma função terá sua Transformada de Laplace. As condições a seguir garantem a existência da transformada: $f(t)$ é contínua por partes em qualquer intervalo limitado de $[0, \infty)$ e é de ordem exponencial para $t > T$.

Definição 3.2 (Ordem Exponencial) Uma função é dita de ordem exponencial se existirem números $c, M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Seja $f(t)$ uma função crescente, então a condição acima diz simplesmente que o gráfico de $f(t)$ no intervalo (T, ∞) não cresce mais rapidamente que o gráfico da função exponencial Me^{ct} , onde c é uma constante positiva, ou seja, estamos determinando uma limitação superior para a função $f(t)$.

Teorema 3.1 (Condições Suficientes de Existência) Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para todo $t > T$, então, a sua transformada de Laplace existe para todos $s > c$.

3.2 Propriedades da Transformada de Laplace

As propriedades abordadas a seguir são de grande serventia, pois sua utilização nos permite solucionar as equações diferenciais.

3.2.1 Linearidade da transformada de Laplace

Na resolução de equações diferenciais por Transformada de Laplace a linearidade é uma propriedade de grande importância, sendo indispensável.

Teorema 3.2 (Linearidade) Seja f e g funções que possuam transformadas de Laplace, então:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (3.3)$$

sendo α e β constantes. Por causa da propriedade (3.3), a transformada de Laplace é uma transformada linear, ou operador linear.

3.2.2 Transformada de Laplace de Derivadas

Na utilização da transformada de Laplace para solucionar problemas de valor inicial, além da linearidade, é necessário calcular as transformadas de derivadas. Será deduzida a fórmula geral a partir da transformada da derivada primeira de $f(t)$. Seja $f'(t)$ contínua para $t \geq 0$, da definição (3.2) tem-se que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

a integração por partes proporciona

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (3.4)$$

desde que $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, para a segunda derivada tem-se que,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = e^{-st} f'(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (3.5)$$

As transformadas (3.4) e (3.5) são dois casos especiais do teorema a seguir, que fornece a transformada de Laplace da n -ésima derivada de $f(t)$.

Teorema 3.3 (Transformada de uma derivada) Se $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas em $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^n(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

A tabela a seguir fornece as Transformadas de Laplace de algumas funções elementares. Essas transformadas podem ser demonstradas a partir da definição (3.2).

Tabela 2 – Transformadas de algumas funções elementares

-
1. $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
 2. $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
 3. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
 4. $\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$
 5. $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$
 6. $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
-

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

3.3 Transformada inversa

Na seção anterior estávamos interessados em encontrar a transformada de Laplace de uma função, isto é, transformar uma dada função $f(t)$ em outra função $F(s)$ por meio da integral. Agora será feito o inverso, dada uma função transformada $F(s)$, encontraremos uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Isso significa que $f(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $F(s)$, sendo denotada por

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}. \quad (3.6)$$

A seguinte tabela é análoga a tabela 2 e fornece as principais transformadas inversas.

Tabela 3 – Principais Transformadas Inversas

-
1. $1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
 2. $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
 3. $e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$
 4. $\sin kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$
 5. $\cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$
 6. $e^{at}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$
-

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

Semelhante a transformada de Laplace, a transformada de Laplace inversa é também um operador linear, o seguinte teorema afirma isso.

Teorema 3.4 (Linearidade da Transformada de Laplace inversa) Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha f(t) + \beta g(t),$$

para α e β constantes.

3.2.1 Aplicações

O método de Transformada de Laplace é útil para solucionar equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, sujeitas a uma condição inicial. O método consiste em reduzir a equação diferencial em uma equação algébrica, sendo assim, mais fácil a resolução. Para isso, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \\ y(0) = y_0; y'(0) = y'_0; \dots; y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

onde $a_i = 0, 1, 2, \dots, n$ e $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Aplicando a transformada de Laplace em toda a equação temos

$$\mathcal{L}\{a_n y^{(n)} + a_{(n-1)} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y\} = \mathcal{L}\{g(x)\}.$$

Utilizando a propriedade de linearidade, podemos escrever,

$$a_n \mathcal{L}\{y^{(n)}\} + a_{(n-1)} \mathcal{L}\{y^{(n-1)}\} + \dots + a_0 \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(x)\}. \quad (3.7)$$

Pelo teorema (3.3), a equação (3.7) torna-se

$$\begin{aligned} & a_n [s^n Y(s) - s^{(n-1)} y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] \\ & + a_{(n-1)} [s^{(n-1)} Y(s) - s^{(n-2)} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0 Y(s) = G(s). \end{aligned}$$

Colocando $Y(s)$ em evidência e reagrupando os termos, temos

$$\begin{aligned} & Y(s) [a_n s^n + a_{(n-1)} s^{(n-1)} + \dots + a_0] \\ & = a_n [s^{(n-1)} y_0 + \dots + y^{(n-1)}(0)] + a_{(n-1)} [s^{(n-2)} y_0 + \dots + y_0^{(n-2)}] + \dots G(s). \end{aligned}$$

Explicitando $Y(s)$, podemos encontrar $y(t)$ através da transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

Exemplo 3.2 Utilizando a transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^t \cos t\}. \quad (3.8)$$

Utilizando o teorema (3.3) e combinando as entradas (5) e (6) da tabela 2, temos, respectivamente, as seguintes transformadas:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s),$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - f(0) = sY(s)$$

e

$$\mathcal{L}\{e^t \cos t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Substituindo esses valores em (3.8), obtemos

$$s^2 Y(s) - sY(s) = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

Explicitando $Y(s)$ e expandindo $(s-1)^2$, temos:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}.$$

Para calcular a transformada inversa de $Y(s)$, utilizaremos o método de frações parciais aplicados a funções racionais:

$$\frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - 2s + 2} \quad (3.9)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $s(s^2 - 2s + 2)$ implica

$$1 = A(s^2 - 2s + 2) + (Bs + C)s,$$

$$1 = As^2 - 2As + 2A + Bs^2 + Cs$$

$$1 = s^2(A + B) + s(C - 2A) + 2A.$$

Igualando os coeficientes das potências de s , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - 2A = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = 1$. Substituindo esses valores em (3.9), obtemos

$$\frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)} = \frac{1/2}{s} + \frac{-\frac{1}{2}s + 1}{s^2 - 2s + 2}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2 - 2s + 2}\right\}.$$

Reescrevendo a equação, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right\}.$$

Utilizando a entrada (1), combinando as entradas (5) e (6) e (4) e (6) da tabela 3, temos

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right\} = -\frac{1}{2}e^t \cos t$$

e

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2 + 1}\right\} = \frac{1}{2}e^t \sin t.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 - 2s + 2)}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t.$$

Portanto, a solução do problema é dada por

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t \cos t + \frac{1}{2}e^t \sin t.$$

4 VIBRAÇÕES MECÂNICAS

As vibrações mecânicas são de grande importância no dia a dia. Muitas atividades humanas envolvem vibrações de uma forma ou de outra. A respiração está associada à vibração dos pulmões, os batimentos cardíacos são movimentos oscilatórios do coração e andar envolve oscilações de braços e pernas. Recentemente, muitas investigações foram motivadas pelas aplicações da vibração na área da engenharia, como projeto de máquinas, motores, fundações, turbinas e sistemas de controle (RAO, 2008).

De acordo com Balachandran e Magrab (2016), máquinas equipadas com peças rotativas, tais como ventoinhas, ventiladores, separadores centrífugos, máquinas de lavar roupa, tornos, bombas centrífugas, prensas rotativas e turbinas, quando sujeitas a qualquer desbalanceamento podem causar vibrações.

Em muitas situações, a estrutura ou componente de uma máquina sujeita a vibrações pode falhar devido à fadiga do material, ocasionada pela variação cíclica da tensão induzida. Apesar dos efeitos danosos, as vibrações são de grande utilidade em várias aplicações industriais e de consumo. Por exemplo, a vibração entra em ação em peneiras, máquinas de lavar, relógios e unidades de massagem elétrica (RAO, 2008).

O principal objetivo desse trabalho é motivar o estudo de equações diferenciais através da aplicação dessas equações em vibrações mecânicas. Nesta seção, apresentamos um referencial teórico para conhecermos algumas definições dentro dessa área de aplicação.

4.1 Vibração livre

Vibração livre ocorre em um sistema quando este oscila depois de sofrer uma perturbação inicial, de modo que nenhuma força de excitação atue sobre este sistema após isso. Um sistema massa-mola com um grau de liberdade representa o sistema vibratório mais simples que se pode ter. Esse sistema possui apenas um grau de liberdade, pois somente uma coordenada é suficiente para descrever o movimento da massa em qualquer instante do tempo (RAO, 2008).

Os sistemas vibratórios são classificados em: sistemas amortecidos ou não amortecidos. Sistema não amortecido é aquele onde forças que causam dissipação de energia durante o movimento não atuam sobre o sistema e a amplitude do movimento permanece constante ao longo do tempo. Na realidade, exceto no vácuo, a amplitude de uma vibração livre diminui lentamente ao decorrer do tempo, em função do atrito ou da resistência do meio ao qual o sistema está inserido, tais vibrações são chamadas de amortecidas. (RAO, 2008).

4.1.2 Equação do movimento de um sistema massa-mola

A segunda lei do movimento de Newton pode ser enunciada da seguinte forma:

A força resultante que age sobre um corpo, é igual ao produto da massa desse corpo pela a sua aceleração.

Dessa forma, se uma massa m for deslocada por uma distância $\vec{x}(t)$ após uma força resultante $\vec{F}(t)$ agir sobre ela na mesma direção, a segunda lei do movimento de Newton resulta em

$$\vec{F}(t) = m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = m \ddot{\vec{x}}, \quad (4.1)$$

onde

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}$$

é a aceleração da massa.

Considere o sistema massa-mola mostrado na figura 1(a). A massa está presa na extremidade inferior de uma mola. Em repouso, a massa fica em uma posição chamada de posição de equilíbrio estático, onde a força da mola dirigida para cima está em equilíbrio com a força gravitacional dirigida para baixo que atua sobre a massa. Se supusermos que o alongamento x da mola é pequeno, a força da mola fica muito próxima de ser proporcional a x ; isso é conhecido como a lei de Hooke. Dessa forma, escrevemos $F_k = -kx$, onde a constante de proporcionalidade k é chamada de constante da mola e o sinal negativo indica que a força da mola age no sentido oposto ao movimento. O comprimento da mola na posição de equilíbrio é dado por $l_0 + \delta_{st}$, em que δ_{st} é a deflexão estática, que é causada pelo peso W da massa m . De acordo com a figura 1(a), temos que, para o equilíbrio estático,

$$W = mg = k\delta_{st} \quad (4.2)$$

em que g é a aceleração da gravidade. Se a massa sofrer um deslocamento até uma determinada posição $+x$ em relação à sua posição de equilíbrio estático, então a força da mola é dada por $F_m = -k(x + \delta_{st})$, como é mostrado na figura 1(c).

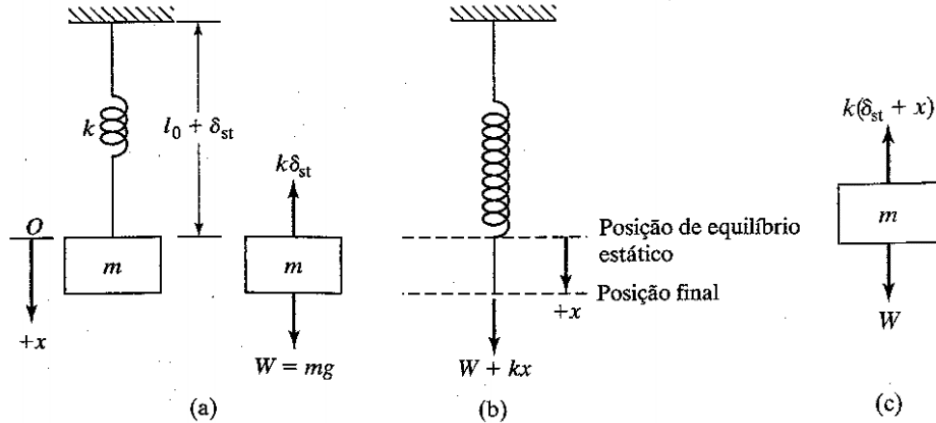
No problema dinâmico, estamos interessados em estudar o movimento da massa, após sofrer um deslocamento inicial. Denotamos por x , sendo o sentido positivo para baixo, o deslocamento da massa a partir da sua posição de equilíbrio estático no instante t . Temos que x está relacionado as forças que atuam sobre a massa pela segunda lei do movimento de Newton

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

e pela equação (4.2) temos que $W = k\delta_{st}$, dessa forma, obtemos

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (4.3)$$

Figura 1 - Sistema massa-mola.



Fonte: RAO, S. (2008)

4.1.3 Métodos de energia

De acordo com Rao (2008), um sistema é conservativo quando não existe perda de energia devido ao atrito, ou membros inelásticos que dissipam energia. Caso não exista a realização de trabalho sobre um sistema conservativo causado por forças externas (exceto a força gravitacional ou de outras forças potenciais), então a energia total do sistema permanece constante, esse princípio é conhecido como o princípio da conservação da energia. Em um sistema massa-mola, temos que a energia é parcialmente cinética e parcialmente potencial, sendo a soma dessas energias constante. A energia cinética T é armazenada na massa em função de sua velocidade, e a energia potencial U é armazenada na mola em função de sua deformação elástica. Pelo princípio da conservação da energia, temos que

$$T + U = \text{constante}.$$

Derivando em relação ao tempo, isto é

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0. \quad (4.4)$$

As energias cinética e potencial são dadas por

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (4.5)$$

e

$$U = \frac{1}{2} kx^2. \quad (4.6)$$

Substituindo as equações (4.5) e (4.6), na equação (4.4) obtemos a equação desejada

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

4.1.4 Solução

A equação (4.3), é uma equação diferencial linear com coeficientes constantes de segunda ordem. A equação possui solução do tipo

$$x = e^{rt}. \quad (4.7)$$

Substituindo a equação (4.7) na equação (4.3), obtemos a equação característica

$$mr^2 + k = 0$$

cujo as soluções são $r = +\sqrt{k/m}i$ e $r = -\sqrt{k/m}i$, onde $i = \sqrt{-1}$. Como as raízes da equação característica são complexas, iremos utilizar a equação (2.17). Sendo $\alpha = 0$ e $\beta = \sqrt{k/m}$, temos que a solução da equação (4.3) é dada por

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t.$$

Podemos ainda reescrever a solução como

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t \quad (4.8)$$

onde a constante ω_n , dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.9)$$

é chamada de frequência natural e é expressa em rad/s. As constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas pelas condições iniciais do problema.

4.1.5 Movimento Harmônico

O sistema massa-mola é um tipo de movimento oscilatório bastante comum. Por ser periódico, pode ser caracterizado como um movimento harmônico. De acordo com Barreto Filho e Silva, (2015) para ocorrer um movimento em torno de uma posição de equilíbrio, é necessário um mesmo intervalo de tempo para ir e voltar à posição de equilíbrio, portanto, devem-se determinar as grandezas, período e frequência. O tempo gasto pelo objeto para executar um ciclo completo é chamado de período, sendo dado por

$$T = \frac{1}{f}, \quad (4.10)$$

onde f é a frequência e é definida como o número de ciclos completos por unidade de tempo, dada por

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi}. \quad (4.11)$$

A equação (4.8) é a equação geral que descreve o movimento do sistema massa-mola, podendo ser expressa de forma mais simples. Sejam

$$C_1 = A \sin \phi \quad (4.12)$$

e

$$C_2 = A \cos \phi \quad (4.13)$$

onde A e ϕ são duas constantes arbitrárias a serem determinadas. Substituindo essas expressões na equação (4.8), obtemos

$$x = A \sin \phi \cos \omega_n t + A \cos \phi \sin \omega_n t.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, podemos escrever

$$x(t) = A \sin(\omega_n t + \phi). \quad (4.14)$$

O deslocamento máximo relativo a posição de equilíbrio é chamado de amplitude A . O argumento da função seno, $\omega_n t + \phi$, é a fase do movimento, e a constante ϕ é chamada de ângulo de fase, ou fase inicial, pois representa quanto a curva está deslocada em relação a origem no tempo $t = 0$. Podemos encontrar os valores das constantes A e ϕ através das equações (4.12) e (4.13). Elevando ao quadrado e somando as duas equações, obtemos para a amplitude o resultado

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}. \quad (4.15)$$

Dividindo a equação (4.12) pela equação (4.13), obtemos para o ângulo de fase, a seguinte relação

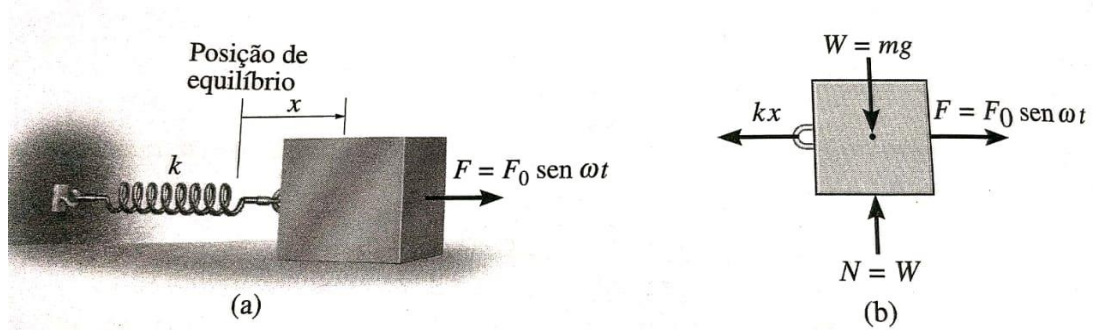
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C_1}{C_2} \right). \quad (4.16)$$

4.2 Vibração forçada sem amortecimento

Vibração forçada sem amortecimento é um tipo de movimento vibratório muito importante em trabalhos de engenharia, onde os princípios que regem esse movimento são de grande importância na análise de forças que causam vibração em diversos tipos de maquinários e estruturas (HIBBELER 2005).

A figura 2(a) representa um sistema massa-mola sujeito a uma força periódica $F = F_0 \sin \omega t$, onde essa força possui amplitude F_0 e frequência angular ω . A figura 2(b) é a representação do diagrama de corpo livre para o bloco.

Figura 2 – Sistema massa-mola sujeito a uma força periódica.



Fonte: R.C.HIBBELER (2005)

A aplicação da segunda lei do movimento de Newton resulta em

$$F_0 \sin \omega t - kx = m\ddot{x}$$

ou

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t. \quad (4.17)$$

A equação (4.17) é uma equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea com coeficientes constantes, cuja solução geral consiste na soma da solução complementar, x_c , com a solução particular, x_p .

A solução complementar pode ser obtida através da equação homogênea associada à equação (4.17), isto é, a equação obtida ao fazer o segundo membro da equação igual a zero, sendo equivalente à equação (4.3), onde a solução é dada pela equação (4.8), logo

$$x_c = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t. \quad (4.18)$$

Como o movimento é periódico uma solução particular da equação (4.17) é da forma

$$x_p = C \sin \omega t, \quad (4.19)$$

onde C é uma constante a ser determinada. Derivando duas vezes em relação ao tempo e substituindo o resultado na equação (4.17), obtemos

$$m(-C\omega^2 \sen \omega t) + k(C \sen \omega t) = F_0 \sen \omega t.$$

Colocando o termo $\sen \omega t$ em evidência e resolvendo para C , obtemos

$$C = \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}. \quad (4.20)$$

Substituindo essa expressão na equação (3.19), obtemos para a solução particular

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sen \omega t. \quad (4.21)$$

Portanto, para a solução geral, temos,

$$x = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sen \omega_n t + \frac{F_0/k}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sen \omega t. \quad (4.22)$$

Nessa equação, x descreve dois tipos de vibração do bloco. A solução complementar x_c descreve a vibração livre, que depende da frequência angular ω_n e das constantes C_1 e C_2 , que são determinadas pelas condições iniciais do sistema. A solução particular x_p descreve a vibração forçada do bloco causada pela força aplicada $F = F_0 \sen \omega t$. Pelo fato dos sistemas vibrantes estarem na realidade, sujeitos a atrito, a vibração livre, x_c , se atenua com o passar do tempo e tende a desaparecer. Por causa disso, a vibração livre é transitória. Por sua vez, a vibração forçada é denominada de vibração permanente, pois se mantém de forma indefinida (HIBBELER 2005).

4.3 Vibração livre com amortecimento viscoso

Segundo Tipler e Mosca (2009), quando um corpo é solto vibrando livremente, ele acaba por voltar a sua posição de equilíbrio, porque a energia mecânica é dissipada por forças de atrito.

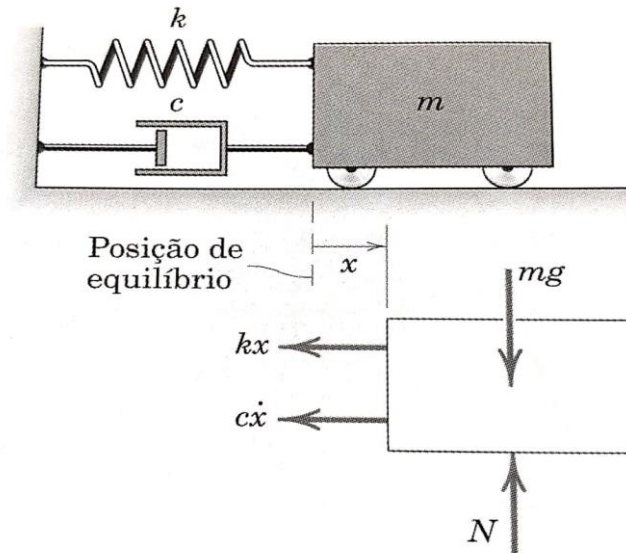
Na prática, os sistemas mecânicos sempre estão submetidos a algum grau de atrito, dissipando assim energia mecânica. A análise do movimento de vibração das seções anteriores não incluía os efeitos do atrito ou amortecimento no sistema, de modo que as soluções obtidas são aproximações. No amortecimento viscoso, a força de amortecimento, F , atua no sentido oposto e é proporcional à velocidade do corpo sujeito a vibração, sendo dada por

$$F = -c\dot{x}, \quad (4.23)$$

onde a constante c é chamada de coeficiente de amortecimento viscoso e tem como unidades N·s/m.

A figura 3 representa um sistema com um grau de liberdade submetido a um amortecimento viscoso, junto ao diagrama de corpo livre.

Figura 3 – Sistema com amortecimento viscoso.



Fonte: MERIAM, J. L

Se x for medido em relação à posição de equilíbrio da massa m , a aplicação da segunda lei do movimento de Newton fornece

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0. \quad (4.24)$$

A solução da equação (4.24) é da forma

$$x = e^{st} \quad (4.25)$$

onde s é uma constante a ser determinada. Substituindo essa função na equação (4.24) obtemos a seguinte equação característica

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad (4.26)$$

cujas raízes são dadas por

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}. \quad (4.27)$$

Essas raízes dão duas soluções para a equação (4.24):

$$x_1 = C_1 e^{s_1 t} \text{ e } x_2 = C_2 e^{s_2 t} \quad (4.28)$$

Assim, a solução geral da equação (4.24) é dada pela combinação linear das duas soluções x_1 e x_2 :

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} = C_1 e^{\left\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} + C_2 e^{\left\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right\}t} \quad (4.29)$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema.

4.3.2 Constante de amortecimento e fator de amortecimento

O amortecimento crítico c_c é definido como o valor da constante de amortecimento c para qual o radical na equação (4.27) torna-se zero:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0,$$

logo

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n. \quad (4.30)$$

É definido como fator de amortecimento ζ a razão entre a constante de amortecimento e a constante de amortecimento crítico:

$$\zeta = \frac{c}{c_c}. \quad (4.31)$$

Utilizando as equações (4.30) e (4.31), podemos escrever

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c} \cdot \frac{c_c}{2m} = \zeta \omega_n \quad (4.32)$$

e, por consequência,

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \omega_n. \quad (4.33)$$

Assim, podemos reescrever a solução, equação (4.29), da seguinte forma

$$x = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}. \quad (4.34)$$

Como $0 < \zeta < \infty$, o radicando $(\zeta^2 - 1)$ pode ser positivo, negativo ou nulo, dando origem a três tipos de amortecimento:

Caso 1. Sistema subamortecido

($\zeta < 1$ ou $c < c_c$ ou $c/2m < \sqrt{k/m}$). Para essa condição, ($\zeta^2 - 1$) é negativo e as raízes s_1 e s_2 são expressas da seguinte forma

$$s_1 = (-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n$$

e

$$s_2 = (-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n,$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Assim, podemos apresentar a solução (4.34) como

$$x = C_1 e^{(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})\omega_n t}. \quad (4.35)$$

Como $e^{(a+ib)} = e^a e^{ib}$ e utilizando a fórmula de Euler ($e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$), podemos reescrever a equação anterior como

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\}.$$

Fazendo $C'_1 = C_1 + C_2$ e $C'_2 = i(C_1 - C_2)$, obtemos

$$x = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ C'_1 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + C'_2 \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\},$$

que simplificando ainda mais, temos

$$x = X e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \phi \right), \quad (4.36)$$

onde (C'_1 , C'_2) e (X , ϕ) são constantes arbitrárias a ser determinadas pelas condições iniciais.

As constantes (X , ϕ) podem ser expressas como

$$X = \sqrt{(C'_1)^2 + (C'_2)^2} \quad (4.37)$$

e

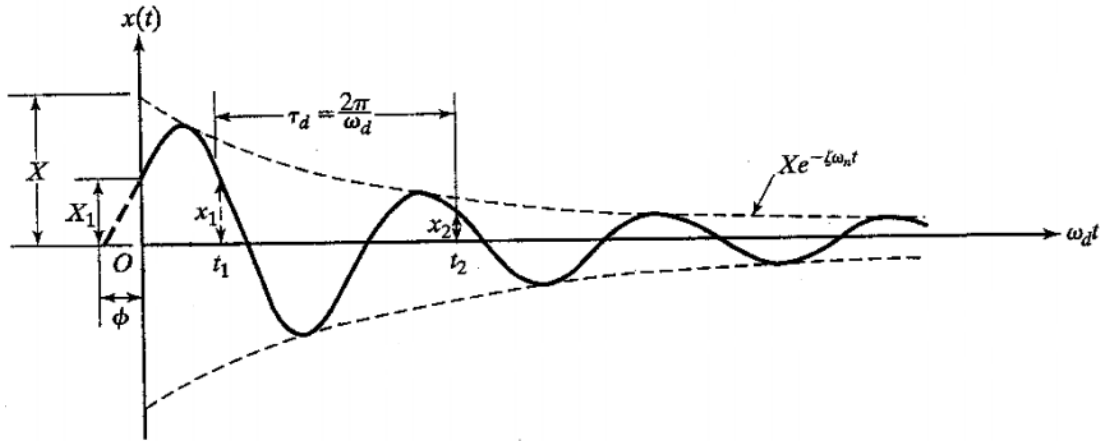
$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{C'_1}{C'_2} \right). \quad (4.38)$$

O movimento descrito pela equação (4.36) é um movimento harmônico amortecido de frequência angular $\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n$, por causa do fator $e^{-\zeta\omega_n t}$, a amplitude diminui exponencialmente com o passar do tempo, como ilustrado na figura 4. A quantidade

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n \quad (4.39)$$

é chamada de frequência natural de vibração amortecida. A frequência natural de vibração amortecida ω_d é sempre menor que a frequência natural não amortecida ω_n . O caso subamortecido é muito importante no estudo de vibrações mecânicas porque é o único que resulta em um movimento oscilatório.

Figura 4 - Solução não amortecida.



Fonte: RAO, S. (2008)

Caso 2. Sistema criticamente amortecido

($\zeta = 1$ ou $c = c_c$ ou $c/2m = \sqrt{k/m}$). Nesse caso, as duas raízes s_1 e s_2 da equação (4.33) são iguais:

$$s_1 = s_2 = -\frac{c_c}{2m} = -\omega_n. \quad (4.40)$$

Por causa das raízes repetidas, a solução da equação (4.24) é da seguinte forma

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (4.41)$$

O movimento representado pela equação (4.41) é aperiódico (isto é, não periódico). Como $e^{-\omega_n t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, o movimento diminuirá até zero, como ilustrado na figura 5.

Caso 3. Sistema superamortecido

($\zeta > 1$ ou $c > c_c$ ou $c/2m > \sqrt{k/m}$). Para $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$, as raízes s_1 e s_2 são reais e distintas, sendo dadas por

$$s_1 = (-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0$$

e

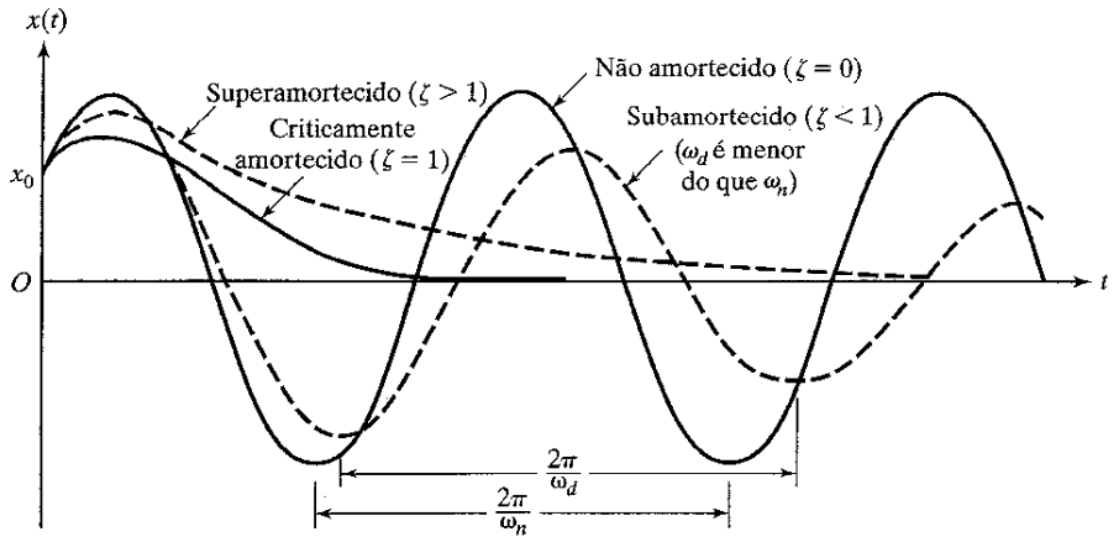
$$s_2 = (-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n < 0,$$

com $s_2 \ll s_1$. Assim, a solução da equação (4.24) é dada por

$$x = C_1 e^{(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}. \quad (4.42)$$

O movimento descrito pela equação (4.42) é aperiódico, independente das condições iniciais do sistema. Como as raízes s_1 e s_2 são ambas negativas, o movimento diminui exponencialmente com o passar do tempo, como mostrado na figura 5.

Figura 5 - Movimentos com tipos diferentes de amortecimento.



Fonte: RAO, S. (2008)

4.4 Vibração forçada com amortecimento viscoso

O caso mais geral de movimento vibratório com um grau de liberdade ocorre quando o sistema está submetido a forças de excitação e ao amortecimento viscoso. Se uma força periódica $F = F_0 \sin \omega t$ atua sobre o sistema representado pela figura 3, a equação diferencial que descreve o movimento é dada por

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t. \quad (4.43)$$

A equação (4.43) é não homogênea, sua solução geral é dada pela soma da solução complementar, x_c , com uma solução particular, x_p . A solução complementar pode ser determinada ao igualar o primeiro membro da equação (4.43) a zero, e resolvendo a equação homogênea resultante, sendo ela a equação (4.24). Dessa forma, a solução complementar é dada pelas equações (4.36), (4.41) ou (4.42), dependendo dos valores de s_1 e s_2 . Como a força aplicada é harmônica, a solução particular também é harmônica, tendo a seguinte forma

$$x_p = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (4.44)$$

Para determinar as constantes A e B é necessário calcular as derivadas com relação ao tempo necessárias e substituí-las na equação (4.43). Feito isso, e simplificando o resultado, obtemos

$$(-Am\omega^2 - cB\omega + kA) \sin \omega t + (-Bm\omega^2 + cA\omega + kB) \cos \omega t = F_0 \sin \omega t.$$

Essa equação é válida para qualquer valor de t . Assim, igualando os coeficientes das funções $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$, temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -Am\omega^2 - cB\omega + kA = F_0 \\ -Bm\omega^2 + cA\omega + kB = 0. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema e lembrando que $\omega_n^2 = k/m$, temos

$$A = \frac{(F_0/m)(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2} \quad (4.45)$$

e

$$B = \frac{-F_0(c\omega/m^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2}. \quad (4.46)$$

5 METODOLOGIA

Na construção deste trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica na biblioteca da UFERSA, campos angicos, utilizando referências indicadas por professores do campus e também pesquisas na plataforma online, tomando como base, artigos e monografias a fim de obter um aprofundamento nos assuntos aqui tratados. Através de um levantamento teórico, foi definido importantes conceitos acerca de equações diferenciais, transformada de Laplace e vibrações mecânicas, bem como algumas de suas principais propriedades. Além disso, buscando uma maior aplicabilidade, foram selecionados problemas envolvendo vibrações mecânicas, onde, apresentamos a resolução dos mesmos através de métodos de resolução de equações diferenciais e transformada de Laplace.

6 APLICAÇÕES: VIBRAÇÕES MECÂNICAS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O objetivo desta seção é mostrar a aplicação das equações diferenciais na resolução de problemas envolvendo vibrações mecânicas. Será utilizado aqui, os resultados vistos nas seções anteriores afim de solucionar os diversos tipos de problemas vibratórios abordados neste trabalho. Utilizaremos aqui, problemas da literatura de Bronson e Costa (2008).

Problema 1: (Bronson e Costa, p 133) Uma massa de 2 kg está suspensa por uma mola cuja constante é 10 N/m e permanece em repouso. Ela é então colocada em movimento com uma velocidade 150 cm/s. Determine uma expressão para o movimento da massa, desprezando a resistência do ar.

Dados:

$$m = 0,5 \text{ kg};$$

$$k = 6 \text{ N/m}.$$

Solução: Por não existir força externa, nem força de amortecimento aplicada à massa, a equação do movimento é regida pela equação (2.34). Sendo $m = 2 \text{ kg}$ e $k = 10 \text{ N/m}$, temos

$$2\ddot{x} + 10x = 0$$

ou

$$\ddot{x} + 5x = 0. \quad (5.1)$$

A solução dessa equação diferencial, é dada pela equação (2.39), onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{2}} \Rightarrow \omega_n = 2,24 \text{ rad/s}$$

substituindo esse valor na equação (2.39), obtemos a seguinte solução para (5.1)

$$x(t) = C_1 \cos(2,24 t) + C_2 \sin(2,24 t). \quad (5.2)$$

Pelo enunciado, temos que para $t = 0$, $x = 0 \text{ m}$. Aplicando essa condição inicial em (5.2), obtemos

$$x(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

logo, reescrevemos (5.2) como

$$x(t) = C_2 \sin(2,24 t). \quad (5.3)$$

Quando $t = 0$, $\dot{x} = 150 \text{ cm/s} = 1,5 \text{ m/s}$. Derivando a equação (5.3) em relação ao tempo, obtemos, para a velocidade,

$$\dot{x} = 2,24C_2 \cos(2,24t).$$

Aplicando a condição inicial, temos

$$\dot{x}(0) = 2,24C_2 \cos 0 = 1,5 \Rightarrow 2,24C_2 = 1,5$$

assim temos,

$$C_2 = 0,67.$$

Substituindo o valor de C_2 , obtemos para a solução

$$x(t) = 0,67 \sin(2,24 t). \quad (5.4)$$

Iremos agora solucionar o problema por transformada de Laplace. O problema de valor inicial é dado por

$$\ddot{x} + 5x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1,5$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} - 5\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{0\}. \quad (5.5)$$

Pela equação (3.5), escrevemos (5.5) como

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 5X(s) = 0,$$

substituindo as condições iniciais

$$s^2 X(s) - 1,5 + 5X(s) = 0.$$

Explicitando $X(s)$, obtemos

$$X(s) = \frac{1,5}{s^2 + 5}. \quad (5.6)$$

Para encontrar a solução $x(t)$, basta calcular a transformada inversa de (5.6), logo

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1,5}{s^2 + 5}\right\} \\ \Rightarrow x(t) &= 1,5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 5}\right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

A fim de usar a entrada 4 da tabela 3, iremos dividir e multiplicar a equação (5.7) por $\sqrt{5}$, dessa forma

$$x(t) = \frac{1,5}{\sqrt{5}} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{5}}{s^2 + 5} \right\}$$

Logo, a solução é dada por

$$x(t) = \frac{1,5}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}t)$$

ou

$$x(t) = 0,67 \sin(2,24 t).$$

Problema 2: (Bronson e Costa, p 143) Uma massa de 2 kg está suspensa por uma mola, distendendo-a em 0,392 m. O sistema está em repouso. Coloca-se a massa em movimento aplicando-se uma força externa $F(t) = 4 \sin 2t$. Determine o movimento subsequente da massa, considerando que a resistência do meio ambiente seja desprezível.

Dados:

$$m = 2 \text{ kg};$$

$$\delta_{st} = 0,392 \text{ m};$$

$$x(0) = 0;$$

$$\dot{x}(0) = 0;$$

$$\omega = 2 \text{ rad/s};$$

$$F_0 = 4 \text{ N}.$$

Solução: Pela lei de Hooke, temos que $mg = k\delta_{st}$, onde δ_{st} é a deflexão estática, causada pelo peso mg da massa. Resolvendo para k , temos

$$k = \frac{mg}{\delta_{st}} = \frac{2 \cdot 9,8}{0,392} \Rightarrow k = 50 \frac{N}{m}.$$

Como a resistência do ar é desprezível, não existe amortecimento no sistema, logo a equação que descreve o movimento é dada pela equação (4.17). Substituindo os valores, obtemos a seguinte equação diferencial não-homogênea

$$2\ddot{x} + 50x = 4 \sin 2t \quad (5.8)$$

cuja solução geral é dada pela soma da solução complementar, x_c , com a solução particular, x_p .

A solução complementar é dada pela equação (4.18), onde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} \Rightarrow \omega_n = 5 \text{ rad/s.}$$

Substituindo esse valor na equação (4.18), a solução complementar é dada por

$$x_c = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t.$$

A solução particular é dada pela equação (4.21). Substituindo os valores, temos

$$x_p = \frac{4/50}{1 - (2/5)^2} \sin 2t \Rightarrow x_p = 0,095 \sin 2t.$$

Portanto, a solução geral da equação (5.8), é expressa como

$$x(t) = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t + 0,095 \sin 2t \quad (5.9)$$

Aplicando as condições iniciais, obtém-se

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 0,095 \sin 0 = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

logo, reescrevemos (5.9), como

$$x(t) = C_2 \sin 5t + 0,095 \sin 2t. \quad (5.10)$$

Derivando (5.10) em relação ao tempo, obtemos para a velocidade

$$\dot{x} = 5C_2 \cos 5t + 0,19 \cos 2t.$$

Aplicando a condição inicial, temos

$$\dot{x}(0) = 5C_2 \cos 0 + 0,19 \cos 0 = 0 \Rightarrow 5C_2 = -0,19$$

logo,

$$C_2 = -0,038.$$

Substituindo a constante C_2 em (5.10), obtemos para a solução

$$x(t) = -0,038 \sin 5t + 0,095 \sin 2t. \quad (5.11)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.8) e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$2\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 50\mathcal{L}\{x\} = 4\mathcal{L}\{\sin 2t\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 25\mathcal{L}\{x\} = 2\mathcal{L}\{\sin 2t\}. \quad (5.12)$$

Utilizando a equação (3.5) e a entrada 4 da tabela 2, podemos escrever (5.12), como

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 25X(s) = 2 \left(\frac{2}{s^2 + 4} \right).$$

Substituindo as condições iniciais, temos

$$s^2 X(s) + 25X(s) = \frac{4}{s^2 + 4}.$$

Explicitando $X(s)$, obtemos

$$X(s) = \frac{4}{(s^2 + 25)(s^2 + 4)}.$$

Aplicando a transformada inversa, $x(t)$ é dado por

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2 + 25)(s^2 + 4)}\right\}. \quad (5.13)$$

Para calcular a transformada inversa de $X(s)$, utilizaremos o método de frações parciais aplicados a funções racionais:

$$\frac{4}{(s^2 + 25)(s^2 + 4)} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{Cs + D}{s^2 + 4}. \quad (5.14)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(s^2 + 25)(s^2 + 4)$ implica

$$4 = (As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 25).$$

Simplificando essa expressão, temos

$$4 = s^3(A + C) + s^2(B + D) + s(4A + 25C) + (4B + 25D).$$

Igualando os coeficientes das potências de s , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 0 \\ 4A + 25C = 0 \\ 4B + 25D = 4 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $A = C = 0$, $B = -\frac{4}{21}$ e $D = \frac{4}{21}$. Substituindo esses valores em (5.14), obtemos

$$\frac{4}{(s^2 + 25)(s^2 + 4)} = \frac{-4/21}{s^2 + 25} + \frac{4/21}{s^2 + 4},$$

logo,

$$x(t) = -\frac{4}{21} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 25}\right\} + \frac{4}{21} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\}.$$

Reescrevendo a equação, temos

$$x(t) = -\frac{4}{5 \cdot 21} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2 + 25} \right\} + \frac{4}{2 \cdot 21} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^2 + 4} \right\}.$$

Utilizando a entrada 4 da tabela 3, a solução $x(t)$ é expressa como

$$x(t) = -\frac{4}{105} \sin 5t + \frac{2}{21} \sin 2t.$$

Ou

$$x(t) = -0,038 \sin 5t + 0,095 \sin 2t.$$

Problema 3: (Bronson e Costa, p 143) Uma massa de 0,5 kg está suspensa por uma mola cuja constante é 6 N/m. A massa é posta em movimento deslocando-a 0,5 m abaixo de sua posição de equilíbrio, sem velocidade inicial. Determine o movimento subsequente da massa, considerando que a resistência provocada pelo meio seja $-4\dot{x}$ N.

Dados:

$$m = 0,5 \text{ kg};$$

$$k = 6 \text{ N/m};$$

$$c = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m};$$

$$x(0) = 0,5 \text{ m};$$

$$\dot{x}(0) = 0.$$

Solução: Como existe amortecimento nesse sistema, a equação que rege o movimento desse sistema, é dada pela equação (4.24). Substituindo os valores, obtemos a seguinte equação diferencial homogênea

$$0,5\ddot{x} + 4\dot{x} + 6x = 0$$

ou

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 12x = 0. \quad (5.15)$$

Antes de encontrar a solução, primeiro vamos classificar o sistema, quanto ao seu amortecimento. Sendo o coeficiente de amortecimento crítico

$$c_c = 2m\omega_n = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \cdot 0,5 \sqrt{\frac{6}{0,5}} \Rightarrow c_c = 3,46 \text{ N}\cdot\text{s/m}.$$

O fator de amortecimento é dado pela equação (4.31)

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{4}{3,46} \Rightarrow \zeta = 1,156.$$

Como $\zeta > 1$ o sistema é superamortecido e sua solução é dada pela equação (4.42). Substituindo os valores, obtemos

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{(-1,156 + \sqrt{(1,156)^2 - 1})3,46t} + C_2 e^{(-1,156 - \sqrt{(1,156)^2 - 1})3,46t} \\ &\Rightarrow x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-6t}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aplicando a condição inicial, temos

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0,5 \\ &\Rightarrow C_1 + C_2 = 0,5. \end{aligned}$$

Derivando (5.16) em relação ao tempo, implica

$$\dot{x} = -2C_1 e^{-2t} - 6C_2 e^{-6t}$$

Substituindo a condição inicial, temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= -2C_1 e^0 - 6C_2 e^0 = 0 \\ &\Rightarrow -2C_1 - 6C_2 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, os valores das constantes são, $C_1 = 0,75$ e $C_2 = -0,25$. Substituindo as constantes em (5.16), temos para a solução

$$x(t) = 0,75e^{-2t} - 0,25e^{-6t}. \quad (5.17)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.15), temos

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 8\mathcal{L}\{\dot{x}\} + 12\mathcal{L}\{x\} = 0. \quad (5.18)$$

Pelo teorema 3.3, escrevemos (5.18) como

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 8[sX(s) - x(0)] + 12X(s) = 0.$$

Aplicando as condições iniciais e simplificando, obtemos

$$s^2 X(s) + 8sX(s) + 12X(s) = 0,5s + 4.$$

Explicitando $X(s)$ implica em

$$X(s) = \frac{0,5s + 4}{s^2 + 8s + 12}.$$

Fatorando o denominador, temos

$$X(s) = \frac{0,5s + 4}{(s + 2)(s + 6)}.$$

Para calcular a transformada inversa de $X(s)$, utilizaremos frações parciais, dessa forma

$$\frac{0,5s + 4}{(s + 2)(s + 6)} = \frac{A}{(s + 2)} + \frac{B}{(s + 6)}.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(s + 2)(s + 6)$, implica em

$$0,5s + 4 = A(s + 6) + B(s + 2).$$

Fazendo $s = -2$ e $s = -6$ na última equação, concluímos que $A = 3/4$ e $B = -1/4$, respectivamente.

Consequentemente,

$$X(s) = \frac{3/4}{(s + 2)} - \frac{1/4}{(s + 6)}.$$

Calculando a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 6)}\right\}$$

Utilizando a entrada 3, da tabela 3, temos que a solução $x(t)$, é dada por

$$x(t) = \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-6t},$$

ou

$$x(t) = 0,75e^{-2t} - 0,25e^{-6t} \quad (5.19)$$

Problema 4: Um sistema massa-mola amortecido, sujeito a uma força harmônica, é descrito pelo seguinte problema de valor inicial. Determine o movimento subsequente da massa.

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = \sin t \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

A equação diferencial do problema é não-homogênea, dessa forma, sua solução geral, é dada pela soma da equação complementar x_c , com a solução particular x_p .

Do problema, temos os seguintes dados:

$$m = 1 \text{ kg};$$

$$c = 4 \text{ N}\cdot\text{s/m};$$

$$k = 4 \text{ N/m};$$

$$F_0 = 1 \text{ N};$$

$$\omega = 1 \text{ rad/s}.$$

Pelos dados, obtemos os seguintes valores

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2 \text{ rad/s}$$

e

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{4}{(2) \cdot (1) \cdot (2)} = 1.$$

Como $\zeta = 1$, a solução complementar é dada pela equação (4.41). Substituindo o valor de ω_n , temos

$$x_c = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}. \quad (5.21)$$

A força harmônica aplicada ao sistema é dada por $F(t) = \text{sen } t$, logo, para a solução particular, temos

$$x_p = A \text{ sen } \omega t + B \cos \omega t, \quad (5.22)$$

onde A e B são constantes dadas pelas equações (4.45) e (4.46), logo

$$A = \frac{(F_0/m)(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2} = \frac{(1/1)(2^2 - 1^2)}{(2^2 - 1^2)^2 + (4 \cdot 1/1)^2} = 0,12$$

e

$$B = \frac{-F_0(c\omega/m^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2} = \frac{-1(4 \cdot 1/1^2)}{(2^2 - 1^2)^2 + (4 \cdot 1/1)^2} = -0,16.$$

Substituindo esses valores em (5.22), obtemos para a solução particular

$$x_p = 0,12 \text{ sen } t - 0,16 \cos t.$$

Assim, a solução geral é dada por

$$x(t) = x_c + x_p = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + 0,12 \text{ sen } t - 0,16 \cos t.$$

Pelas condições iniciais, temos

$$x(0) = (C_1 + C_2 \cdot 0)e^0 + 0,12 \text{ sen } 0 - 0,16 \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 - 0,16 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0,16.$$

Substituindo C_1 na solução geral, obtemos

$$x(t) = (0,16 + C_2 t)e^{-2t} + 0,12 \sin t - 0,16 \cos t. \quad (5.23)$$

Derivando (5.23) em relação ao tempo, implica em

$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-2t} - 2e^{-2t}(0,16 + C_2 t) + 0,12 \cos t + 0,16 \sin t.$$

Aplicando a condição inicial, temos

$$\dot{x}(0) = C_2 e^0 - 2e^0(0,16 + C_2 \cdot 0) + 0,12 \cos 0 + 0,16 \sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 - 0,32 + 0,12 = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = 0,2.$$

Logo, a solução do problema, é expressa como

$$x(t) = (0,16 + 0,2t)e^{-2t} + 0,12 \sin t - 0,16 \cos t. \quad (5.24)$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação (5.20), temos

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}\} + 4\mathcal{L}\{\dot{x}\} + 4\mathcal{L}\{x\} = \mathcal{L}\{\sin t\}. \quad (5.25)$$

Pelo teorema 3.3, e utilizando a entrada 4 da tabela 2, reescrevemos (5.25) como

$$s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + 4[sX(s) - x(0)] + 4X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos

$$s^2 X(s) + 4sX(s) + 4X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Explicitando $X(s)$, implica em

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 4s + 4)(s^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s + 2)^2(s^2 + 1)}.$$

A fim de calcular a transformada inversa de $X(s)$, utilizaremos frações parciais, dessa forma

$$\frac{1}{(s + 2)^2(s^2 + 1)} = \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{(s + 2)^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 1}. \quad (5.26)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $(s + 2)^2(s^2 + 1)$, temos

$$1 = A(s + 2)(s^2 + 1) + B(s^2 + 1) + (Cs + D)(s + 2)^2.$$

Simplificado, implica em

$$1 = s^3(A + C) + s^2(2A + B + 2C + D) + s(A + 4C + 2D) + (2A + B + 4D).$$

Igualando os coeficientes das potências de s , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 2A + B + 2C + D = 0 \\ A + 4C + 2D = 0 \\ 2A + B + 4D = 1. \end{cases}$$

A solução desse sistema, fornece os seguintes valores, $A = 4/25$, $B = 1/5$, $C = -4/25$ e $D = 3/25$. Substituindo esses valores em (5.26), obtemos

$$\frac{1}{(s+2)^2(s^2+1)} = \frac{4/25}{s+2} + \frac{1/5}{(s+2)^2} + \frac{-4s/25 + 3/25}{s^2+1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4/25}{s+2} + \frac{1/5}{(s+2)^2} + \frac{-4s/25 + 3/25}{s^2+1} \\ \Rightarrow X(s) &= \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{4}{25} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada inversa, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{4}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} - \frac{4}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{3}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}.$$

Utilizando as entradas 3, 4, 5 e combinando as entradas 3 e 6 da tabela 3, obtemos para a solução

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{4}{25} e^{-2t} + \frac{1}{5} t e^{-2t} - \frac{4}{25} \cos t + \frac{3}{25} \sin t \\ \Rightarrow &(0,16 + 0,2t)e^{-2t} - 0,16 \cos t + 0,12 \sin t. \end{aligned}$$

7 CONCLUSÃO

Esse trabalho, foi desenvolvido a fim de despertar uma maior motivação de alunos no estudo de equações diferenciais. Foi exposto o referencial teórico sobre equações diferenciais, onde abordamos importantes definições e métodos de soluções, como o método dos coeficientes indeterminados e também transformada de Laplace. No estudo de vibrações mecânicas, foi apresentado a teoria sobre o sistema massa-mola, considerando o sistema vibrando livremente ou sobre efeito de amortecimento viscoso e forças externas. Por fim, buscando uma maior aplicabilidade, selecionamos alguns problemas, onde, apresentamos a resolução dos mesmos através de métodos de resolução de equações diferenciais e transformada de Laplace. Com isso, mostramos a importância da teoria de equações diferenciais dentro do estudo de vibrações mecânicas e sua relevância dentro da resolução de problemas nessa área.

REFERÊNCIAS

BALACHANDRAN, Balakumar; EDWARD, B. **Vibrações Mecânicas**. 2 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

BARRETO FILHO, Benigno; Cláudio Xavier da Silva. **Física aula por aula: termologia, óptica, ondulatória**. 3 ed. São Paulo; FTD, 2016.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

BRONSON, Richard.; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais**. 3 ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.

HIBBELER, R.C. **Mecânica para Engenharia**. 10 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia**. 6 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas**. 4 ed. São Paulo: Prentice Hall, 2008.

TIPLER, Paul Allen; MOSCA, Gene. **Física para cientistas e engenheiros**. 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, vol. 1. 3 ed. São Paulo: Makron Books, 2001.