

ANÁLISE DAS APLICAÇÕES DE INTEGRAIS NA OBRA DE OSCAR NIEMEYER - IGREJA SÃO FRANCISCO DE ASSIS EM BELO HORIZONTE/MG

Raquel Rayanne S. Torquato¹, Ivan Mezzomo²

Resumo: A Igreja São Francisco de Assis (Conjunto Pampulha, Belo Horizonte/ MG) de Oscar Niemeyer, é um marco na arquitetura e engenharia em razão das suas formas inusitadas, que fogem ao padrão do ângulo reto e das formas geométricas triviais. Construída na década de 40 a obra é uma referência para arquitetura moderna até os dias atuais. O presente trabalho se propõe a efetuar modelagem da obra, através da análise e equacionamento de suas superfícies tendo por finalidade demonstrar a ampla aplicabilidade do uso de integrais em seus aspectos numéricos e analíticos para solucionar problemas cotidianos na engenharia civil, dentre eles cálculos de áreas e volumes de sólidos não triviais.

Palavras-chave: Integral. Interpolação. Oscar Niemeyer. Igreja São Francisco de Assis

1. INTRODUÇÃO

As obras de Oscar Niemeyer têm como traço principal a liberdade da forma. A originalidade, sempre presente em suas edificações o tornaram uma referência para arquitetura moderna. O primeiro projeto de grande relevância na carreira do arquiteto foi o conjunto Pampulha construído entre 1940 e 1943, a pedido de Juscelino Kubitschek, o então prefeito da cidade de Belo Horizonte. O projeto define o que ficou conhecido mais tarde como a arquitetura de Niemeyer, caracterizada pela sensualidade e leveza [10].

Para Niemeyer, a beleza não está nas linhas retas, está nas curvas, que segundo ele representam o curso dos rios, o limite das montanhas, as ondas do mar, o universo. A Igreja São Francisco de Assis, ou simplesmente Igrejinha da Pampulha, como é conhecida, representa o amor de Niemeyer pelas curvas, sendo esta a característica marcante da edificação. Nela, foi deixada para trás a maneira tradicional de construir, baseada apenas na funcionalidade e segurança, tendo como resultado uma edificação que possui formas incomuns, e precisamente por essa razão, quando construída, a capela não recebeu permissão para realizar missas. Somente em 1959, foi consagrada e realizou a primeira missa [9].

O engenheiro Joaquim Cardoso foi responsável pelo cálculo estrutural da Igreja e pela sua execução, sendo possível a ele ousar nas formas geométricas da construção utilizando a tecnologia do concreto armado, que permite mais liberdade na forma. Com alternativas estruturais criativas, tornou-se viável realizar o que Niemeyer idealizou [6].

Na prática, combinar formas inusitadas e estruturas seguras apresentam vários problemas, dentre eles o cálculo de áreas de superfícies não planas, comprimento de arco de figuras geométricas e volumes de sólidos não triviais. O trabalho proposto tem por objetivo analisar a obra, Igreja São Francisco de Assis, definindo as funções que delimitam as curvas e aplicando métodos de integração para obtenção de áreas de cobertura e de revestimento e volumes de concreto utilizado.

Tal estudo é relevante, principalmente para os profissionais de engenharia civil, haja vista ser uma de suas atribuições projetar estruturas confiáveis, sem que sejam necessariamente triviais. Niemeyer [9] diz que arquitetura e estrutura devem andar juntas e juntas se enriquecer. Um profissional capaz de modelar matematicamente uma construção, não limitando a sua realização ao trivial, amplia em muito a sua possibilidade de atuação e enriquece a construção civil, aliando estética, funcionalidade e segurança.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Função

O que torna as funções essenciais no estudo de cálculo é a sua aplicabilidade ao cotidiano. Elas estão presentes em várias atividades diárias sem que nem mesmo percebamos [7]. Para Thomas [14], as funções são o elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos, isto é, são ferramentas fundamentais para tornarem dados de situações reais em modelos matemáticos, possibilitando assim o seu estudo.

Para a melhor compreensão do objeto de estudo, as funções podem ser representadas de maneiras distintas, o que muda de acordo com a finalidade para a qual se destinam. Stewart[13], define quatro formas principais de apresentação: verbalmente, utilizando as palavras para descrevê-las; algebricamente, através de fórmulas; numericamente, por meio de tabelas e visualmente por intermédio de gráficos.

Em 1673, a ideia de função, até então só aplicada, foi definida por Leibniz da seguinte maneira: “Se uma variável y depende de uma variável x de tal modo que cada valor de x determina exatamente um valor de y , então dizemos que y é uma função de x .” [1]. Mendelson [8], explica: “Dizer que uma quantidade y é uma função de alguma outra quantidade x , significa, em linguagem comum, que o valor de y depende do valor de x ”, ou seja, existe entre as variáveis uma relação de dependência, portanto, à medida que existe uma variação em x , existe também uma variação em y de uma forma bem definida, o que implica que para cada valor de x existe uma única saída possível em y .

A fórmula mais usual para esta definição é: $f: D \rightarrow C$, $x \mapsto y$, sendo D e C subconjuntos dos reais e $x \mapsto y$ uma lei que associa para cada elemento x do conjunto D um único elemento y do conjunto C , logo, uma função $f: D \rightarrow C$ é uma lei ou regra de associação entre os elementos de x pertencentes à D e os elementos $f(x)$ em C . Definimos, portanto, a partir dessa notação, que D é o conjunto domínio da função onde estão contidos os valores da variável independente, nesse contexto, os valores de x . Chamamos o conjunto C de contradomínio e de imagem da função o conjunto $f(x)$ onde estão contidos os valores da variável dependente, nesse exemplo y , que varia de acordo com a alteração de x em D .

Um modo bastante eficaz de se observar o comportamento de determinados fenômenos é através da representação gráfica de uma função. A possibilidade de visualizar o comportamento de determinada função amplia em muito a probabilidade de resolução de problemas. O gráfico de uma função pode ser dito como o conjunto $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$, isto é, G é um conjunto constituído pelos pontos do plano cartesiano cujos pares ordenados são os valores $(x, f(x))$, contanto que x pertença ao conjunto domínio da função f .

Os gráficos são comumente construídos tendo como base os dados já organizados em tabelas, no entanto, esta não é a única utilidade da representação numérica de função. No exercício da ciência e engenharia, por exemplo, existe a constante necessidade de manipulação e organização de grande número de dados até então não relacionados, sendo habitual a escolha desta maneira de representação.

As funções podem ser classificadas quanto a sua forma, em três grupos principais: polinomiais, algébricas e transcendentais [14].

Chamamos de polinomial a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se apresenta na forma: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ [14], sendo $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes e n pertencente ao conjunto dos naturais, denomina-se caso atendidas os parâmetros n como grau do polinômio. Dentre as funções polinomiais temos as funções lineares, são aquelas cujo grau do polinômio é 1, isto é $f(x) = a_1 x + a_0$. Para $n = 2$, tem-se a chamada função quadrática dada por $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, que possui como representação gráfica uma parábola, representação esta muito utilizada no estudo de tais funções, analogamente temos as funções cúbicas que apresentam grau de polinômio três.

Denomina-se função algébrica aquela função que é fruto de operações algébricas como radiciação, soma, subtração e/ou multiplicação, a exemplo das funções racionais que são a razão entre funções polinomiais, isto é, dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, sendo $p(x)$ e $q(x)$ polinômios e $q(x) \neq 0$.

As funções transcendentais, por sua vez, são por definição aquelas funções que não são algébricas, dentre essas estão as trigonométricas, logarítmicas, inversas trigonométricas, exponenciais e que não possuem nome.

2.2. Integrais

No mundo real é comum nos depararmos com situações em que se faz necessário o cálculo de áreas. A geometria básica, por sua vez, já nos oferece fórmulas para solucionar tais questões, contudo, Anton, Bivens e Davis [1] afirma que a integral surgiu da necessidade de se calcular áreas, o que explica esta afirmação é a motivação para o estudo de integrais, que não foi tão somente calcular áreas já outrora facilmente calculadas, foi calculá-las em figuras limitadas por parábolas, arcos, espirais, entre outros. Sua aplicação vai além da matemática, pois uma curva pode ser a representação de diversos fatores físicos.

2.2.1 Somas de Riemann

Dada uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, construindo assim o conjunto $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$, denominado partição do intervalo. Manipulamos a partir de então os subintervalos dados por $S_i = [x_{i-1}, x_i]$ de amplitude dada por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, conforme observado na Figura 1.

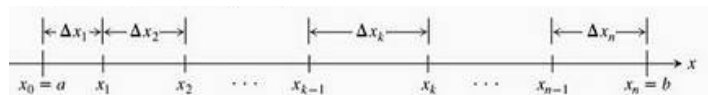


Figura 1. Representação da partição dos intervalos [14].

Escolhemos arbitrariamente um ponto C_k em S_i para construir retângulos de largura Δx_n e altura onde C_n tocar a curva, isto é, no ponto $(C_k, f(C_k))$, conforme representado na Figura 2. A área desses retângulos consiste

no produto entre base e altura dada por $A = f(C_k) \cdot \Delta x_k$.

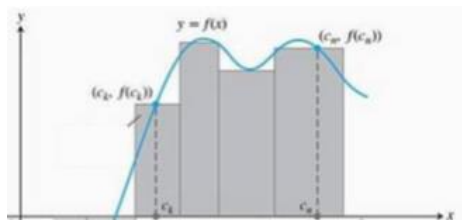


Figura 2: Representação geométrica das somas de Riemann [14].

Logo, a soma de Riemann de f no intervalo $[a, b]$ corresponde ao $\sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k$.

2.2.2 Integral definida

A integral definida é uma ferramenta essencial em cálculo para definir quantidades importantes para matemática e para ciência, como áreas, volumes, comprimentos de linhas curvas, probabilidades e pesos de vários objetos [14].

A partir do conhecimento de Somas de Riemann podemos chegar a definição de Integral definida através da seguinte associação:

Sendo $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que delimita uma curva e I um número que representa a área sob ela, quando $\Delta x_k \rightarrow 0$ o $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$ em $[a, b]$ tende a I , o que é apresentado na equação:

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

Caso o número I exista, por definição ele é a integral definida de f em $[a, b]$ e o limite das somas de Riemann, conforme indicado pela expressão:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$$

Contanto que esse limite exista a $\int_a^b f(x) dx$ também existe e a função f é dita integrável no intervalo.

2.2.3 Teorema fundamental do cálculo

O enunciado do teorema fundamental do cálculo é exposto por Stewart [13] em 2 partes distintas:

Teorema fundamental do cálculo, parte 1:

“Seja f contínua em $[a, b]$, então a função g definida por $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ para $a \leq x \leq b$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Isto é, uma função contínua em determinado intervalo é tanto integrável quanto derivável nesse intervalo.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2:

“Se f é contínua em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, onde F é qualquer primitiva de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Conforme exposto pelos enunciados, o teorema fundamental do cálculo determina uma relação entre derivada e integral, propondo uma maneira sistemática para que sejam encontradas soluções para o problema de volumes e áreas de forma mais simples do que através do cálculo dos limites das somas de Riemann.

2.3 Métodos Numéricos

Para Chapra e Canale [3], os métodos numéricos são ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas, pois são capazes de lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complicadas, que não são incomuns na prática de engenharia [...], ou seja, os métodos numéricos transformam problemas complexos de resolver em um conjunto de soluções mais simples, que podem ser resolvidos de maneira analítica ou através de um sistema computacional [12].

Os métodos numéricos têm uma vasta aplicação, podem ser usados para soluções de problemas que envolvem desde equações lineares até sistemas complexos com equações diferenciais. Na construção civil, por exemplo, pode ser utilizado para modelagem matemática de estruturas, para aproximação de funções que definem curvas, entre outros.

2.3.1 Aproximação de Funções

Nas aplicações de integrais, é comum nos depararmos com problemas que envolvam funções definidas implicitamente ou por expressões complexas. Também aparecem, constantemente, situações em que se faz necessário a leitura de dados tabelados. Para a resolução desse tipo de problema que os métodos de aproximação são utilizados [4].

Os métodos de aproximação, também chamados de métodos de ajuste de curvas, são usados para estimar funções a partir de dados que podem ser discretos ou contínuos. Os dados discretos são obtidos de tabelas que normalmente apresentam resultados de experimentos. Os dados contínuos, por sua vez, são pontos advindos de funções.

Chapra e Canale [3] definem que o ajuste de curvas adequados dependem principalmente da precisão dos dados. Quando os pontos apresentam maior possibilidade de erro, é aconselhável usar o método dos mínimos quadrados que propõe uma função aproximadora que ajusta a forma geral dos dados, contudo não necessariamente passando pelos pontos. A curva dada representa a tendência geral de comportamento dos pontos, definindo um padrão. É possível, no método dos mínimos quadrados através da análise dessa tendência realizar, além do melhor ajuste dentro do intervalo, a previsão de comportamento futuro, extrapolando o intervalo apresentado.

Para dados mais precisos, com baixo grau de erro, o método mais adequado é a interpolação polinomial, que ajusta a curva através de um polinômio interpolador de modo a passar por todos os pontos dados. Para Franco[5] a interpolação polinomial é usada na solução de dois problemas principais (caso contínuo): quando conhecemos apenas alguns pontos $(x_i, f(x_i))$ de uma função $f(x)$, mas não sabemos sua expressão analítica e queremos manipulá-la ou quando conhecemos $f(x)$ e é difícil ou impossível o manuseio de tal função.

Nesse trabalho, utilizaremos como método de aproximação de funções a interpolação polinomial em razão de o nosso objeto de estudo ser uma obra arquitetônica em que conhecemos apenas alguns pontos $(x_i, f(x_i))$.

2.3.2 Interpolação Polinomial

Conforme mencionado, o método da interpolação consiste em estimar um polinômio de grau n que representa o comportamento dos pontos no intervalo. Nesse sentido apresentaremos a seguir dois teoremas importantes.

Teorema 1 (Weierstrass) [2]: Se $f(x)$ é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então, para cada $\varepsilon > 0$, existe alguma função polinomial de ordem n , $P_n(x)$ com a seguinte propriedade:

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \text{ para } x \in [a, b]$$

Teorema 2 [5]: Dados $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, e $n + 1$ valores $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau menor ou igual a n , tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Esses teoremas garantem que a função f pode ser aproximada por um polinômio $P_n(x)$ e que nos pontos base o valor da função a ser interpolada são os mesmos do polinômio de interpolação.

É possível encontrar o polinômio interpolador $P_n(x)$ usando estratégias diferentes, nesse trabalho utilizaremos a fórmula de Lagrange, devido a simplicidade na sua aplicação.

2.3.2.1 Fórmula de Lagrange

Segundo Franco [5], dado um conjunto composto por $(n + 1)$ pontos e pares ordenados $(x_i, f(x_i))$, com $0 \leq i \leq n$. A fórmula de Lagrange define o polinômio interpolador de grau n por:

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n) \quad (1)$$

onde,

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_{i-1})(x_0-x_{i+1})\dots(x_0-x_n)} \quad (2)$$

De maneira simplificada, temos $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ e $P_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i)$.

2.4. Integração numérica

O cálculo de integrais definidas por vezes apresentam empecilhos que dificultam o cálculo analítico e em alguns casos o processo se torna inviável. Os métodos numéricos servem como alternativa para se obter uma aproximação de uma integral definida. Dentre os métodos numéricos de integração, a regra do trapézio se

apresenta como um método ao mesmo tempo simples e eficaz, justificando sua popularidade.

2.4.1 Regra do Trapézio

Segundo Ruggiero [11], dada uma função f , contínua em $[a, b]$, o método dos trapézios consiste em aproximar a função f em uma função de primeira ordem, onde, desta forma, a área a baixo da nova função teria o formato de um trapézio, de altura lateral: $b - a$ e cuja base maior e base menor são dados por $f(a)$ e $f(b)$. A figura a seguir ilustra essa ideia:

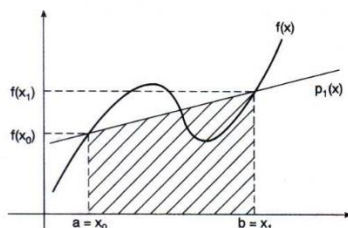


Figura 3: Representação da regra do trapézio[11]

Desta forma, podemos aproximar a área do trapézio à área abaixo da função $f(x)$, em $[a, b]$, logo:

$$\int_a^b f(x) = \frac{H}{2} [f(x_1) - f(x_0)]$$

onde $H = b - a$

2.4.2 Regra do trapézio generalizada

A regra do trapézio generalizada consiste na aplicação da regra do trapézio consecutivamente, em n intervalos, como pode ser visto na figura a seguir:

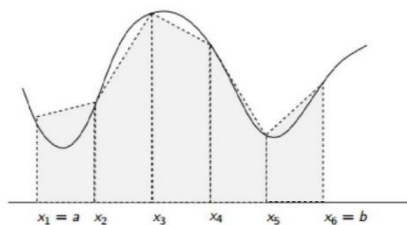


Figura 4: Representação da regra do trapézio generalizada[11].

De maneira análoga podemos aproximar a soma dos trapézios à área abaixo da função f . Portanto:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) &= \frac{h}{2} [f(x_1) - f(x_0)] + \frac{h}{2} [f(x_2) - f(x_1)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ \therefore \int_a^b f(x) &= \frac{h}{2} \{f(x_0) + 2 \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\} \end{aligned}$$

onde $h = x_i - x_{i-1}$.

3. METODOLOGIA

Acerca da obra Igreja São Francisco de Assis, Niemeyer afirma ter desprezado o ângulo reto, a arquitetura racionalista feita de régua e esquadro para entrar em um mundo de curvas e formas novas oferecidas pela tecnologia do concreto armado.

Localizada na Av. Otacílio Negrão de Lima, 3000 – Pampulha – Belo Horizonte [5], a obra está situada às margens da Lagoa da Pampulha. Composta na fachada principal por uma torre em formato de pirâmide invertida, que está ligada a uma marquise em um plano inclinado, que por sua vez está apoiada na outra extremidade por finas peças de aço com forma semelhante à de um y. Compondo a fachada principal têm-se a abóbada em formato parabólico que cobre a nave da igreja. A abóbada principal, como denominaremos a partir de agora, tem inclinação de 26.86% em sua altura, base trapezoidal e possui em suas laterais externas mosaicos de Paulo Werneck conforme podemos observar na Figura (5a).

A Obra conta com mais três cascas curvas simétricas que cobrem as áreas de apoio da Igreja, como banheiros, capela e sacristia e uma maior, que cobre o altar e se “encaixa” a abóbada principal, possuindo uma diferença de altura de 15 cm. Para compor e embelezar essa parte da igreja têm-se um painel em azulejo de

Candido Portinari retratando a história de São Francisco de Assis. Podemos observar a disposição de tais cascas curvas na Figura (5b)



Figura 5a: Fachada Principal. Fonte: Iepha-MG



Figura 5b: Fachada Sudoeste. Fonte: Iepha-MG

Devido à dificuldade em encontrar dados oficiais sobre as medidas da Igreja, utilizaremos nesse trabalho os dados obtidos por meio do AutoCAD, a partir dos desenhos técnicos encontrados na referência [6].

Abordaremos o estudo da obra da seguinte maneira: Primeiro, utilizando o método de Lagrange, estimaremos as funções que delimitam as curvas conforme a ordem que foram apresentadas anteriormente. Em seguida, em posse das funções, utilizaremos integrais definidas para o cálculo de áreas de aplicação de azulejo e/ou área envidraçada. Para os cálculos das áreas de cobertura e revestimento das abóbadas utilizaremos o comprimento de arco e o método de integração numérica.

Para facilitar a compreensão do objeto de estudo, subdividiremos a obra em 4 problemas. A seguir definiremos detalhadamente os problemas e as medidas utilizadas.

Problema 1: Fachada Principal – Acesso

Na fachada principal da Igreja vamos calcular a área referente a seção principal, bem como a área para ventilação na parte superior, representada pela região *a* na Figura 6b, que possui pequenas aberturas responsáveis pela ventilação e iluminação natural do local e a área envidraçada na parte inferior da edificação representada pela região *b* na Figura 6b, onde estão presentes as portas de acesso.

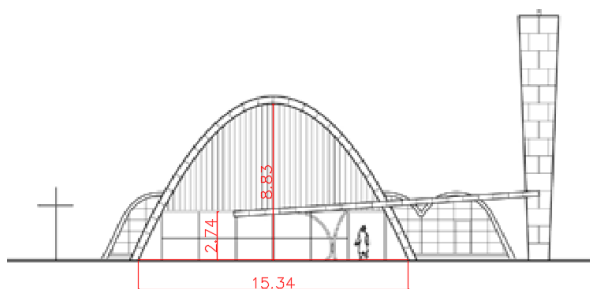


Figura 6a: Fachada Principal. Fonte: Adaptada[6]

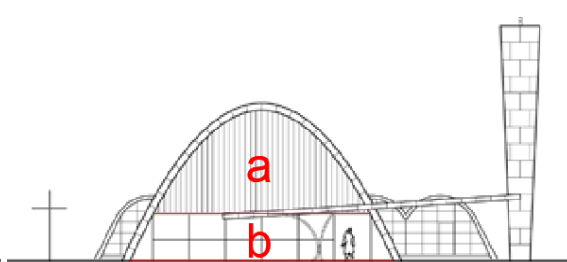


Figura 6b: Fachada Principal. Fonte: Adaptada[6]

Problema 2: Fachada Sudoeste – Fundos da Igreja

Na fachada sudoeste da edificação vamos calcular a área ocupada pelo painel de Portinari que pode ser melhor visualizado na Figura 5b. Para tanto subdividiremos essa parte da edificação conforme pode ser observado na Figura 7b. Chamaremos de arco maior o arco que delimita a região *a* e arco menor o que delimita as regiões *b*, região *c* os triângulos retângulos de base 1,05m e altura 2,45m e região *d* é o retângulo de base 20,7m e altura 2,45m.

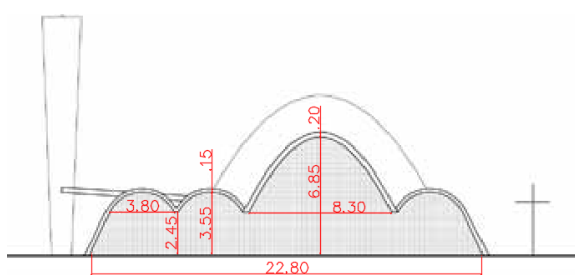


Figura 7a: Fachada Sudoeste. Adaptada [6]

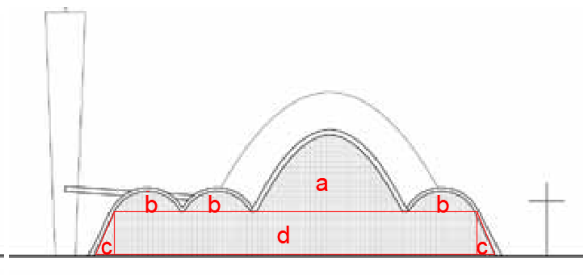


Figura 7b: Fachada Sudoeste. Adaptada [6]

Problema 3: Cobertura das áreas de apoio - Fundos da Igreja

Nesse problema vamos calcular a área de cobertura das áreas de apoio da edificação (Figura 8), para tanto, de maneira análoga a realizada no problema 2, estimaremos as funções para os arcos maior e menor. Em seguida será necessário calcular o comprimento de arco das curvas, realizando o produto destes pela largura obteremos a área de cobertura. Vamos calcular também o volume de concreto que foi usado na cobertura levando em consideração a espessura de cada arco.



Figura 8: Vista lateral da edificação Fonte: Iepha/MG

Problema 4: Abóbada Principal

Na abóbada principal o nosso objetivo será calcular a área de cobertura e o volume de concreto utilizado. A abóbada principal é delimitada por dois arcos conforme pode ser visto na Figura 9a. Adotaremos as medidas de altura presentes na Figura 9a e as medidas de largura contidas na figura 9b onde está representada a planta baixa da edificação.

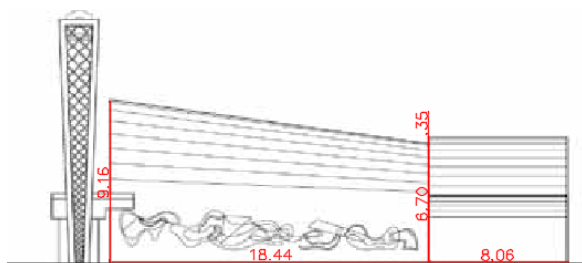


Figura 9a: Fachada Noroeste. Fonte: Adaptada [6]

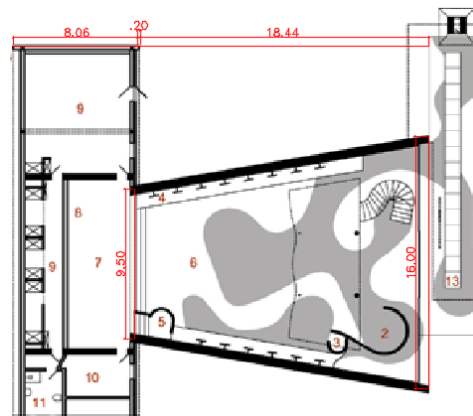


Figura 9b: Planta Baixa. Fonte: Adaptada[6]

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresentaremos a partir de agora os resultados obtidos através da aplicação de integrais, em seus aspectos numéricos e analíticos, as partes que compõem a Igreja. Definiremos áreas e volumes conforme já mencionado anteriormente.

Problema 1 - Fachada principal

O passo inicial para o cálculo de áreas e volumes será definir a função que delimita a curva. Com base nas medidas de altura e comprimento da seção principal, considerando a origem do plano cartesiano na base e centro do arco da seção principal, cujo tabelamento é dado pela tabela abaixo.

Tabela 1: Pontos da curva da seção principal (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
- 7,67	0	7,67
$f(x_0)$	$f(x_1)$	(fx_2)
0	8,83	0

A seguir usaremos o método de Lagrange para encontrar a função que descreve essa curva, para $n = 3$, aplicando a equação 1 e usando os pontos da Tabela 1, temos:

$$P_n(x) = L_0(x).0 + L_1(x)f(x_1) + L_2(x).0$$

logo, $L_1(x)$ é dado por:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{[x - (-7,67)](x - 7,67)}{[0 - (-7,67)](0 - 7,67)} = -0,01699844804x^2 + 1$$

assim sendo temos como função estimada para a seção principal da fachada a seguinte função:

$$P_n(x) = -0,1500962962x^2 + 8,83$$

Usando essa função calcularemos a área total da seção principal, a área para ventilação e a área envidraçada, denominadas respectivamente A_1 , A_2 e A_3 , onde:

$$A_1 = 2 \cdot \int_0^{7,67} -0,1500962962x^2 + 8,83 \, dx$$

$$A_1 = 90,30146667 \, m^2$$

A área A_2 é calculada usando a função $P_n(x)$ como função superior e a reta na cota 2,74m como função inferior. Logo,

$$A_2 = \int_0^{7,67} -0,1500962962x^2 + 8,83 \, dx - \int_0^{7,67} 2,74 \, dx$$

$$A_2 = 48,26986667 \, m^2$$

A área da região envidraçada foi calculada pela diferença entre as áreas das regiões A_1 e A_2 , portanto

$$A_3 = A_1 - A_2$$

$$A_3 = 42,0316 \, m^2$$

Constatamos por meio da integração que a área em vidro, onde estão presentes as portas para acesso a capela, tem aproximadamente 42,03m² e a área para ventilação é de aproximadamente 48,27m².

Problema 2 - Fachada Sudoeste

De maneira similar a realizada para o cálculo da fachada principal, na fachada sudoeste utilizaremos um tabelamento com os dados de comprimento e altura dos arcos e o método de interpolação de Lagrange, para com base no tabelamento estimarmos as funções.

Tabela 2: Pontos referentes ao arco maior (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
- 4,15	0	4,15
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	4,4	0

Usando os pontos da Tabela 2, aplicaremos a seguir o método de Lagrange conforme equação 2 temos:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{[x - (-4,15)](x - 4,15)}{[0 - (-4,15)](0 - 4,15)} = -0,05806357962x^2 + 1$$

para $f(x_0)$ e $f(x_2)$ igual a zero $P_n(x)$ é dada por $P_n(x) = L_1(x)f(x_1)$ sendo:

$$P_n(x) = -0,2554797503x^2 + 4,4 \quad (3)$$

De modo análogo, utilizaremos os dados da Tabela 3 para estimar a função do arco menor

Tabela 3: Pontos referentes arco menor (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
- 1,9	0	1,9
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	1,1	0

Após a aplicação do Método de Lagrange obtivemos a função:

$$P_n(x) = -0,3047091413x^2 + 1,1 \quad (4)$$

A seguir utilizando as funções que delimitam os arcos maior (equação 3) e menor (equação 4) calcularemos através da integração as áreas das regiões a e b, denominadas respectivamente A_a e A_b , onde :

$$A_a = 2 \cdot \int_0^{4,15} -0,2554797503x^2 + 4,4 \, dx$$

$$A_a = 24,34666667m$$

Aplicando os limites de integração e função do arco menor temos:

$$A_b = 2 \cdot \int_0^{1,9} -0,3047091413x^2 + 1,1 \, dx$$

$$A_b = 2,786666667m^2$$

Para região c calcularemos a área triangular A_c utilizando a fórmula para o cálculo dessa figura geométrica mostrado a seguir:

$$A_c = \frac{1,05m \cdot 2,45m}{2} = 1,28625m^2$$

Por fim calcularemos a área retangular da região d, que chamaremos de A_d . Aplicando suas medidas a fórmula do retângulo, temos:

$$A_d = 20,7m \cdot 2,45m = 50,715m^2$$

Conforme podemos observar na Figura 7b, a área da obra onde está o painel de Portinari é composta pela região a, três regiões b, duas regiões c e a região d. Portanto adotando os valores encontrados para A_a , A_b , A_c e A_d , temos a área A_p do painel como mostrado abaixo:

$$A_p = 24,34666667m^2 + 3 \cdot 2,786666667m^2 + 2 \cdot 1,28625m^2 + 50,715m^2$$

$$A_p = 85,99416667m^2$$

Constatamos assim que foram usados aproximadamente 86,00m² em azulejo para composição do painel.

Problema 3: Cobertura das áreas de apoio - Fundos da Igreja

Para o cálculo da área de cobertura utilizaremos os pontos referentes ao arco maior e menor considerando as espessuras dos arcos, conforme podemos verificar nas Tabelas 4 e 5.

Tabela 4: Pontos referentes ao arco maior (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
- 4,35	0	4,35
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	4,6	0

Tabela 5: Pontos referentes arco menor (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
- 2,05	0	2,05
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	1,25	0

Aplicando o método da interpolação de Lagrange aos pontos da Tabela 4, temos como função do arco maior:

$$P_n(x) = -0,2430968424x^2 + 4,6$$

Para o arco menor, aplicando o método aos pontos da Tabela 5 temos:

$$P_n(x) = -0,2974419988x^2 + 1,25$$

A partir de agora com a funções dos arcos que cobrem essas áreas da igreja já definidas e adotando a subdivisão presente na Figura 7b, definiremos a área total de cobertura dessa parte da edificação.

Encontraremos o comprimento de arco aplicando a função $P_n(x)$ na fórmula $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. Chamaremos de L_1 o comprimento do arco maior e L_2 o comprimento do arco menor. Conforme observado a seguir.

$$L_1 = 2 \cdot \int_0^{4.35} \sqrt{1 + 0,2363842991x^2} dx$$

$$L_2 = 2 \cdot \int_0^{2.05} \sqrt{1 + 0,3538869706x^2} dx$$

Resolveremos essas integrais pelo método de integração numérica regra dos trapézios generalizada, haja vista serem elas difíceis de se resolver analiticamente.

Utilizaremos para integração numérica uma planilha no Excel, adotando 1000 subintervalos temos que o comprimento L_1 é aproximadamente 13,24919m. Então a área de cobertura do arco maior, que denominaremos A_1 é o produto entre L_1 e a largura dessa região, conforme vemos abaixo.

$$A_1 \cong 13,24919m \cdot 8,06m \cong 106,7884714m^2$$

Agora calcularemos de maneira semelhante o comprimento de arco do arco menor. Adotando também 1000 subintervalos temos que o comprimento L_2 é aproximadamente 4,961782m, logo a área de cobertura A_2 , sobre o arco menor (Figura7b) é dado pelo produto entre L_2 e a largura, portanto:

$$A_2 \cong 4,961782m \cdot 8,06m \cong 39,99196292m^2$$

Sabendo a área de cobertura dos arcos maior e menor, resta-nos para calcular a área total de cobertura somente a área de cobertura das regiões c. Para tanto utilizaremos a seguir a fórmula para o cálculo da distância entre os pontos dessa reta. Considerando $x_0 = 0$ e $x_1 = 1,05$, nas extremidades da base do triângulo, temos

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + [f(x_1) - f(x_0)]^2}$$

$$L = \sqrt{(1,05 - 0)^2 + (0 - 2,45)^2} = 2,665520587m$$

A área de cobertura das regiões c são dadas por:

$$A_3 = 2,899137803m \cdot 8,06m = 21,48409593m^2$$

Observando na figura 7b a disposição das regiões de apoio da Igreja, podemos calcular a área total, conforme vemos a seguir

$$A_{total} \cong A_1 + A_2 \cdot 3 + A_3 \cdot 2$$

$$A_{total} \cong 232,0954013m^2$$

Conforme verificamos na figura 6, os arcos menores possuem espessuras diferentes da do arco maior, levaremos isso em consideração para o cálculo do volume de concreto utilizado na cobertura. O volume é dado por:

$$V_{total} \cong A_1 \cdot 0,2m + A_2 \cdot 3 \cdot 0,15m + 2 \cdot A_3 \cdot 0,15m$$

Após os cálculos obtivemos que o volume total de concreto utilizado para cobertura foi de aproximadamente $40,1537m^3$.

Problema 4 - Abóbada Maior

De modo análogo aos adotados em problemas anteriores, primeiramente estimaremos as funções pelo método de interpolação de Lagrange, usando para o tabelamento os dados de altura e comprimento já mencionados na seção anterior.

Abaixo podemos observar na Tabela 6, os pontos definidos na função do arco maior da abóbada.

Tabela 6: Pontos referentes ao arco maior (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
-8,0	0	8,0
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	9,16	0

Empregando o método de Lagrange aos pontos da Tabela 6, temos :

$$P_n(x) = L_0(x).0 + L_1(x)f(x_1) + L_2(x).0$$

sendo $L_1(x)$ dado pela seguinte equação:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{[x - (-8,0)](x - 8,0)}{[0 - (-8,0)](0 - 8,0)} = -0,015625x^2 + 1$$

então,

$$P_n(x) = L_1(x)f(x_1)$$

$$P_n(x) = -0,143125x^2 + 9,16$$

Vemos a seguir, na tabela 7 os pontos do arco menor.

Tabela 7: Pontos referentes ao arco menor (Autoria Própria)

x_0	x_1	x_2
-4,75	0	4,75
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$
0	6,7	0

Com base nos pontos da tabela 7, aplicando o método de Lagrange temos $L_1(x)$ dado a seguir:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{[x - (-4,75)](x - 4,75)}{[0 - (-4,75)](0 - 4,75)} = -0,04432132964x^2 + 1$$

Logo,

$$P_n(x) = L_1(x)f(x_1)$$

$$P_n(x) = -0,2969529086x^2 + 6,7$$

Após definirmos as funções que delimitam as curvas referentes aos arcos, encontraremos o comprimento de arco aplicando a função $P_n(x)$ na fórmula $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. Chamaremos de L_1 o comprimento do arco maior e L_2 o comprimento do arco menor.

$$L_1 = 2. \int_0^8 \sqrt{1 + 0,0819390625x^2} dx$$

$$L_2 = 2. \int_0^{4,75} \sqrt{1 + 0,3527241197x^2} dx$$

As integrais para o cálculo do comprimento de arco L_1 e L_2 são demasiadamente difíceis de se resolver explicitamente, por essa razão aplicamos a regra dos trapézios generalizada para integração numérica.

De maneira análoga ao que foi feito no problema aplicando a fórmula dos trapézio generalizada, adotando 1000 subintervalos temos que L_1 é aproximadamente 25,46229m.

Adotando a mesma quantidade de subintervalos para L_2 , temos que o comprimento do arco menor é aproximadamente 17,1809m.

A figura geométrica formada pelos comprimentos de arco é dada pela figura abaixo. Podemos observar que no plano a abóbada tem formato trapezoidal. Portanto calcularemos a área de cobertura denominada A_1 utilizando a fórmula do trapézio.

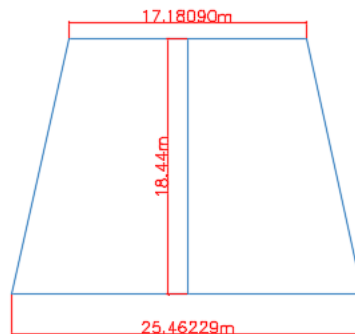


Figura 10: Cobertura da abóbada maior. Fonte: Autora

$$A_1 = 18,44m \left[\frac{(25,46229 + 17,1809m)}{2} \right]$$

$$A_1 = 393,1702118m^2$$

A área de cobertura, que no caso da obra estudada é também área de revestimento, é aproximadamente $393,17m^2$. Logo, o volume de concreto utilizado para cobertura dessa abóbada é dado pelo produto entre área a encontrada e sua espessura que é $0,33m$, totalizando aproximadamente $129,75 m^3$ de concreto.

5. CONCLUSÕES

A obra Igreja São Francisco de Assis, desenhada por Oscar Niemeyer tem como principal característica as formas inusitadas, nela os arcos e curvas são o traço predominante e deixaram um legado no que diz respeito ao uso da tecnologia do concreto armado para criar tais formas esteticamente deslumbrantes. Contudo a análise dessa obra gerou várias problemáticas, dentre elas, como calcular a área de cobertura para uma superfície curva e inclinada, ou qual volume de concreto a ser utilizado na construção.

Os métodos aplicados para resolução de tais questionamentos se mostraram eficazes, pois nos permitiram calcular as áreas e volumes das regiões não triviais de maneira satisfatória, demonstrando que o estudo desses métodos é de extrema importância pois possui aplicação prática. Na área de engenharia civil por exemplo somente com os estudos desenvolvidos nesse trabalho seria possível definir áreas para pintura, revestimento ou volume de concreto a ser utilizado estimando assim a quantidade de material necessário a construção ou reforma, esse estudo também pode ser útil no dimensionamento de estruturas para edificações com formas não triviais.

Dito isto, podemos afirmar que existe ampla aplicabilidade para o uso de integrais. Um profissional que possui o conhecimento dessas aplicações não precisa se limitar ao trivial, tornando possível unir a beleza das formas incomuns com planejamento e segurança.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. Tradução Claus Ivo Doering. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 680p.
- [2] BORJAS, Santos Demétrio M. Cálculo Numérico. Mossoró: EdUFERSA, 2013.
- [3] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008
- [4] CUNHA, C.; CRISTINA M. Métodos Numéricos. 2. ed. Editora da Unicamp. Campinas, 2009.
- [5] FRANCO, Neide Bertoldi. Cálculo numérico. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [6] MACEDO, Danilo Matoso. Da matéria à invenção: As obras de Oscar Niemeyer em Minas Gerais, 1938-1955. Brasília: Câmara dos Deputados, Coordenação de Publicações, 2008.
- [7] MALTA, Iaci; PESCO, Sinésio; LOPES, Hélio. Uma introdução ao cálculo. Rio de Janeiro: PUC – Rio: São Paulo: Loyola, 2002.
- [8] MENDELSON, Elliot. Introdução ao cálculo. Tradução Adonai Schlup Sant'Anna. 2 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. 384p. (Coleção Schaum)
- [9] NIEMEYER, Oscar. Minha arquitetura. Rio de Janeiro: Revan, 2000.
- [10] PAPADAKI, Stamo. Oscar Niemeyer. New York: George Braziller, 1960.
- [11] RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2 ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.
- [12] SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luis Henry Monken e. Cálculo numérico: Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.
- [13] STEWART, James. Cálculo. Tradução Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli. São Paulo: Cengage Learning, 2011. (Volume 1)
- [14] THOMAS, B. George [et al]. Cálculo. Tradução Kléber Pedrosa e Regina Simille de Macedo. 12 ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- [15] Instituto Estadual do Patrimônio Histórico e Artístico de Minas Gerais – IEPHA. Conjunto arquitetônico da Pampulha. 2016. Disponível em: <<http://www.iepha.mg.gov.br/index.php/programas-e-aco-es/patrimonio-cultural-protetido/bens-tombados/details/1/131/bens-tombados-conjunto-arquitet%C3%B4nico-da-pampulha>> Acesso em: 12 Mar. 2019.