



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

VALDERI ALVES DE SOUZA NETO

**ASTRONOMIA PRÁTICA NO ENSINO MÉDIO: ESTIMATIVA DE MEDIDAS
ASTRONÔMICAS COM GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA ESCOLAR**

PAU DOS FERROS

2025

VALDERI ALVES DE SOUZA NETO

**ASTRONOMIA PRÁTICA NO ENSINO MÉDIO: ESTIMATIVA DE MEDIDAS
ASTRONÔMICAS COM GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA ESCOLAR**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel
Interdisciplinar em Ciências e Tecnologia.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr.

PAU DOS FERROS

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S719a Souza Neto, Valderi Alves de.
Astronomia prática no ensino médio: estimativa
de medidas astronômicas com geometria e
trigonometria escolar / Valderi Alves de Souza
Neto. - 2025.
109 f. : il.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2025.

1. Ensino de astronomia. 2. Geometria e
trigonometria. 3. UEPS. 4. Experimentos
históricos. 5. Tratamento estatístico. I. Cunha,
Sharon Dantas da, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

VALDERI ALVES DE SOUZA NETO

**ASTRONOMIA PRÁTICA NO ENSINO MÉDIO: ESTIMATIVA DE MEDIDAS
ASTRONÔMICAS COM GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA ESCOLAR**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel
Interdisciplinar em Ciências e Tecnologia.

Defendida em: 12/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Otávio Floriano Paulino, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Francisco Ernandes Matos Costa, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família, especialmente à minha mãe, Santilha, ao meu pai, Edberto, e aos meus irmãos, Antônio e Daniel, que sempre estiveram ao meu lado em toda essa jornada. O meu agradecimento também se estende a todos os demais familiares, minha saudosa avó Raimundo, meus tios e meus primos, que fizeram parte da minha caminhada.

Agradeço, de forma especial, à minha namorada, Ana Clara, pelo apoio constante e por estar comigo em cada etapa. Sempre me apoiou em cada passo e fez tudo ser melhor por estar ao meu lado.

Sou grato também aos meus colegas de trabalho da Brisanet, que sempre me ajudaram a conciliar a rotina profissional com a faculdade, em especial Cecília e Daniel.

Registro minha gratidão à turma que ingressou comigo em 2022: estivemos juntos em tudo, nas resenhas, nos estudos e em todas as experiências que a universidade nos proporcionou. Esse agradecimento se estende, ainda, a todos os amigos que fiz ao longo do caminho.

Deixo ainda um agradecimento à galera do ônibus de São Miguel, pelo apoio mútuo, pelas resenhas e pelos bons momentos que compartilhamos ao longo desses anos.

Por fim, agradeço aos professores que marcaram minha trajetória acadêmica. Reconheço o esforço de cada um para o desenvolvimento da educação brasileira. Sou grato a todos, mas deixo meu agradecimento especial ao meu orientador, Sharon.

RESUMO

A Astronomia sempre ocupou um papel central na história da ciência, permitindo desde a antiguidade a compreensão do universo através de princípios geométricos e observações simples. No contexto escolar, o resgate desses experimentos históricos surge como uma ferramenta poderosa para dar sentido prático aos conceitos abstratos da matemática. Este trabalho apresenta uma proposta de ensino de Astronomia para o Ensino Médio, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e estruturada através de Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). O objetivo principal foi demonstrar a aplicabilidade de conceitos de Geometria e Trigonometria escolar na estimativa de grandezas astronômicas reais. A intervenção foi realizada com 29 alunos de uma escola da rede pública em São Miguel/RN. A metodologia consistiu na reprodução adaptada de experimentos históricos clássicos: o método de Eratóstenes para medir a circunferência da Terra e os métodos de Aristarco para estimar o diâmetro e a distância da Lua. As atividades práticas articularam o uso de materiais de baixo custo com tecnologias digitais, como os softwares ShadowMap e Google Earth. Os dados coletados foram submetidos a um rigoroso tratamento estatístico, incluindo o cálculo de Erro Padrão, aplicação do Critério de Chauvenet para exclusão de outliers e o Teste T de Student para validação de compatibilidade. Os resultados obtidos foram expressivos: o diâmetro da Terra foi estimado com um erro de apenas 0,07%, o diâmetro da Lua com erro próximo a 2,2% e a distância da Lua com erro entre 6% e 8%. Além disso, um teste computacional realizado em 20 cidades corroborou a robustez do método aplicado. A avaliação da aprendizagem, comparando questionários pré e pós-experimento, revelou um avanço significativo na compreensão conceitual dos estudantes, evidenciando que a abordagem investigativa e o rigor científico no tratamento de dados promovem o engajamento e a alfabetização científica no ambiente escolar.

Palavras-chave: ensino de astronomia; geometria e trigonometria; ueps; experimentos históricos; tratamento estatístico.

ABSTRACT

Astronomy has always played a central role in the history of science, allowing since antiquity the understanding of the universe through geometric principles and simple observations. In the school context, retrieving these historical experiments emerges as a powerful tool to give practical meaning to abstract mathematical concepts. This work presents a proposal for teaching Astronomy in High School, based on David Ausubel's Theory of Meaningful Learning and structured through Potentially Meaningful Teaching Units (UEPS). The main objective was to demonstrate the applicability of school Geometry and Trigonometry concepts in estimating real astronomical quantities. The intervention was carried out with 29 students from a public school in São Miguel/RN. The methodology consisted of the adapted reproduction of classic historical experiments: Eratosthenes' method for measuring Earth's circumference and Aristarchus' methods for estimating the Moon's diameter and distance. The practical activities articulated the use of low-cost materials with digital technologies, such as ShadowMap and Google Earth software. The collected data underwent rigorous statistical treatment, including Standard Error calculation, application of Chauvenet's Criterion for outlier exclusion, and Student's t-test for compatibility validation. The obtained results were expressive: Earth's diameter was estimated with an error of only 0.07%, the Moon's diameter with an error close to 2.2%, and the Moon's distance with an error between 6% and 8%. Furthermore, a computational test performed across 20 cities corroborated the robustness of the applied method. The learning assessment, comparing pre- and post-test questionnaires, revealed significant progress in the students' conceptual understanding, evidencing that the investigative approach and scientific rigor in data processing promote engagement and scientific literacy in the school environment.

Keywords: astronomy teaching; geometry and trigonometry; ueps; historical experiments; statistical treatment..

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Ilustração do experimento de Eratóstenes.	21
Figura 2	– Mapa atual da região, destacando Alexandria e Assuã com elipses.	22
Figura 3	– Cópia grega do século X com ilustrações dos cálculos de Aristarco.	24
Figura 4	– Praça da realização dos experimentos.	26
Figura 5	– Ilustração do aparato montado e as medidas que devem ser feitas.	30
Figura 6	– Imagem do vídeo do momento em que a sombra começa a cobrir a lua.	32
Figura 7	– Imagem do vídeo do momento em que a sombra começa a descobrir a lua.	32
Figura 8	– Aparato utilizado pelos alunos.	34
Figura 9	– Plástico do aparato utilizado pelos alunos.	34
Figura 10	– Cordão do aparato utilizado pelos alunos.	34
Figura 11	– Ilustração do experimento, plástico fosco e furo.	35
Figura 12	– Apresentação detalhada ShadowMap, exemplo no final do dia.	40
Figura 13	– Apresentação detalhada ShadowMap, exemplo no início do dia.	40
Figura 14	– Simulação da forma como foram feitas as medidas.	44
Figura 15	– Medição da inclinação do solo onde foi realizado o experimento.	45
Figura 16	– Imagem demonstrando como o ângulo foi coletado no ShadowMap.	46
Figura 17	– Imagem ilustrativa demonstrando a medição da distância (Google Earth). .	47
Figura 18	– Instante 6 segundos, nenhuma sombra na lua.	49
Figura 19	– Instante 7 segundos, a sombra aparece no canto superior esquerdo da lua. .	49
Figura 20	– Instante 8 segundos, a sombra aumenta a intensidade.	49
Figura 21	– Simulação da forma real de como foram feitas as medidas pelos alunos. ...	53
Figura 22	– Demonstração do cálculo do valor de Chauvenet para o valor máximo.	54
Figura 23	– Demonstração do cálculo do valor de Chauvenet para o valor mínimo.	54
Figura 24	– Distribuição das respostas por série escolar.	60
Figura 25	– % de acerto por série escolar.	60
Figura 26	– % de acerto por questão.	61
Figura 27	– % de acerto por questionário.	61
Figura 28	– Questionário 3, Situação 1, Aproximação a Eratóstenes.	64
Figura 29	– Questionário 8, Situação 1, Aproximação a Eratóstenes.	65
Figura 30	– Questionário 6, Situação 1, Respostas Inconclusivas.	65
Figura 31	– Questionário 26, Situação 1, Respostas Inconclusivas.	65

Figura 32	– Questionário 18, Situação 1, Variação Temporal.	66
Figura 33	– Questionário 12, Situação 1, Variação Temporal.	66
Figura 34	– Questionário 27, Situação 1, Hipótese de Impossibilidade.	66
Figura 35	– Questionário 1, Situação 1, Ilustração.	67
Figura 36	– Questionário 24, Situação 1, Estratégias Atípicas.	67
Figura 37	– Questionário 26, Situação 2, Análise da Projeção da Sombra.	70
Figura 38	– Questionário 20, Situação 2, Análise da Projeção da Sombra.	70
Figura 39	– Questionário 18, Situação 2, Respostas Inconclusivas.	70
Figura 40	– Questionário 23, Situação 2, Respostas Inconclusivas.	71
Figura 41	– Questionário 25, Situação 2, Confusão Conceitual.	71
Figura 42	– Questionário 1, Situação 2, Ilustração.	71
Figura 43	– Questionário 2, Situação 3, Respostas Inconclusivas.	74
Figura 44	– Questionário 13, Situação 3, Respostas Inconclusivas.	74
Figura 45	– Questionário 14, Situação 3, Aproximação ao Método de Aristarco.	74
Figura 46	– Questionário 15, Situação 3, Hipótese de Impossibilidade.	75
Figura 47	– Questionário 21, Situação 3, Estratégias Atípicas.	75
Figura 48	– Simulando como foi garantido a verticalidade do palito usando esquadro. .	78
Figura 49	– Simulando como foi garantido a verticalidade do palito usando esquadro. .	78
Figura 50	– Simulação do experimento, lua não encaixada com precisão no furo.	79
Figura 51	– Simulação do experimento, lua encaixada com precisão no furo.	80
Figura 52	– Lua visível durante o dia na praça, na direção leste.	80
Figura 53	– Distribuição das respostas por série escolar.	84
Figura 54	– % de acerto por série escolar.	84
Figura 55	– % de acerto por questão.	85
Figura 56	– % de acerto por questionário.	85
Figura 57	– Média e mediana por Ano/Série.	89
Figura 58	– Média e mediana por afirmação.	90
Figura 59	– Detalhamento das respostas de cada afirmação.	90
Figura 60	– Média e mediana por questionário.	91
Figura 61	– Dispersão % de acertos (av. cognitiva) vs média av. da metodologia.	91
Figura 62	– Dispersão % de acertos vs média, excluindo 2 questionários.	92
Figura 63	– São Miguel x Icó/CE, coletando ângulo e horário no ShadowMap.	96
Figura 64	– Dispersão distância vs erro.	98

Figura 65 – Dispersão horário(num) vs erro.	98
Figura 66 – Dispersão altitude vs erro.	98
Figura 67 – Dispersão ângulo vs erro.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Resumo das 3 medidas de ângulo de incidência solar.	44
Tabela 2	– Medidas e resultados do experimento.	46
Tabela 3	– Instantes de tempo dos eventos.	48
Tabela 4	– Resultados do experimento.	50
Tabela 5	– Resultados com o valor de referência.	50
Tabela 6	– Medidas furo-olho dos alunos.	52
Tabela 7	– Estimativa com o valor do experimento anterior.	55
Tabela 8	– Estimativa com o valor de referência.	55
Tabela 9	– Resultados e erros apresentados aos alunos.....	82
Tabela 10	– Dados brutos do teste, com cálculo do diâmetro e erro percentual.	97
Tabela 11	– Médias do diâmetro, erro padrão e erros percentuais.	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	História da astronomia antiga	15
2.2	Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel	17
2.3	UEPS (unidades de ensino potencialmente significativas)	18
2.4	Método de Eratóstenes para o tamanho da Terra	21
2.5	Aristarco de Samos: sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua ...	23
3	METODOLOGIA	26
3.1	Caracterização da Pesquisa e dos Participantes	26
3.2	Escolha de temas significativos	27
3.3	Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos	27
3.4	Apresentação de situações-problema desafiadoras	28
3.5	Realização de atividades práticas (experimentos)	28
3.5.1	Estimativa do tamanho da Terra (adaptação do método de Eratóstenes)	29
3.5.2	Estimativa do tamanho da Lua (adaptação do método de Aristarco)	31
3.5.3	Estimativa da distância da Lua (adaptação do método de Aristarco)	33
3.6	Análise e discussão coletiva dos resultados	36
3.7	Sistematização dos conceitos científicos envolvidos	37
3.7.1	Geometria e Trigonometria	37
3.7.2	Física e Astronomia	38
3.8	Avaliação do processo de aprendizagem	38
3.9	Procedimento para análise de fontes de erro	39
3.10	Tratamento estatístico dos dados	41
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	43
4.1	Análise das estimativas das medidas astronômicas obtidas na aplicação ..	43
4.1.1	Estimativa do tamanho da Terra	43
4.1.2	Estimativa do tamanho da Lua	48
4.1.3	Estimativa da distância da Lua	52
4.2	Aplicação das etapas da UEPS e efeitos no processo de aprendizagem	59
4.2.1	Escolha de temas significativos	59
4.2.2	Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos	59

4.2.3	Apresentação de situações-problema desafiadoras	63
4.2.4	Realização de atividades práticas (experimentos)	77
4.2.5	Análise e discussão coletiva dos resultados	81
4.2.6	Sistematização dos conceitos científicos envolvidos	82
4.2.7	Avaliação do processo de aprendizagem	83
4.3	Estimativa do diâmetro da Terra: análise comparativa de fontes de erro .	96
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PRÉ-EXPERIMENTO	106
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PÓS-EXPERIMENTO	108

1 INTRODUÇÃO

A astronomia sempre ocupou um papel central na história da ciência, sendo uma das primeiras áreas do conhecimento humano a sistematizar observações naturais com base em princípios matemáticos. Desde os tempos antigos, pensadores como Eratóstenes de Cirene e Aristarco de Samos demonstraram que era possível alcançar resultados surpreendentes sobre a dimensão e a estrutura do universo utilizando apenas instrumentos simples, raciocínio lógico e fundamentos geométricos (Sagan, 1980; Freitas; Santucci; Marques, 2021).

O experimento de Eratóstenes, por exemplo, realizado no século III a.C., estimou a circunferência da Terra com notável precisão a partir da diferença angular das sombras projetadas em duas cidades distintas. Já Aristarco propôs métodos inovadores para estimar o tamanho e a distância da Lua e do Sol, antecipando, com erros marginais para a época, noções que só viriam a ser confirmadas séculos depois com instrumentos ópticos (Aristarco de Samos, 2016; Oliveira; Lima; Bertoula, 2016).

No entanto, apesar da riqueza histórica e didática desses experimentos, o ensino de astronomia no Ensino Médio brasileiro ainda enfrenta diversos desafios. Em geral, os conteúdos são abordados de maneira fragmentada, muitas vezes dissociados da prática científica e da vivência dos estudantes, o que contribui para a desmotivação e dificuldade na compreensão dos conceitos abstratos, sobretudo os ligados à geometria e à trigonometria (Andrade, 2020; Moreira, 2011). Ao mesmo tempo, vivemos em uma era em que recursos digitais, materiais acessíveis e metodologias ativas permitem ressignificar o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais interativo, contextualizado e significativo.

Nesse cenário, a Teoria da Aprendizagem Significativa, formulada por Ausubel (1980), oferece um alicerce teórico robusto para promover a compreensão duradoura dos conteúdos escolares. Segundo Ausubel (1980), o aprendizado ocorre de forma mais eficaz quando o novo conhecimento se ancora em conceitos que o aluno já possui, conectando-se de forma lógica e relevante à sua estrutura cognitiva. Com base nesse princípio, Moreira (2006) propôs as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), que orientam a construção de sequências didáticas pautadas no levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes, na apresentação de situações-problema e na realização de atividades práticas e experimentais.

Este trabalho fundamenta-se nesses referenciais para desenvolver uma proposta de ensino de astronomia prática no Ensino Médio, utilizando a geometria e a trigonometria

escolar para estimar medidas astronômicas reais, como o raio da Terra, o diâmetro da Lua e a distância entre a Terra e a Lua. A proposta pedagógica baseia-se na reprodução adaptada de experimentos clássicos de Eratóstenes e Aristarco, articulando o uso de materiais de baixo custo, como palitos de churrasco, pedaços de plástico semifosco e cordões, com tecnologias digitais modernas, como softwares de geolocalização e simulação solar. Essa abordagem híbrida visa unir a simplicidade dos métodos históricos com a precisão das ferramentas contemporâneas, promovendo uma abordagem interdisciplinar que valoriza o protagonismo dos alunos e a construção ativa do conhecimento. Para complementar a validação do método, a pesquisa incluiu um teste para avaliar a otimização da precisão da estimativa do diâmetro da Terra

Vale ressaltar que a intervenção foi aplicada em uma escola da rede pública de ensino no interior do Rio Grande do Norte, demonstrando a viabilidade da proposta em contextos reais de sala de aula.

Para atingir os objetivos propostos, este trabalho está estruturado em cinco capítulos. O segundo capítulo apresenta o referencial teórico, abordando a História da Ciência, a Teoria da Aprendizagem Significativa e os fundamentos dos métodos de Eratóstenes e Aristarco. O terceiro capítulo descreve a metodologia utilizada, detalhando as etapas das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) e os procedimentos experimentais. O quarto capítulo dedica-se à apresentação e análise dos resultados, incluindo o tratamento estatístico dos dados (como o Critério de Chauvenet e o Teste T de Student) e a avaliação da aprendizagem dos alunos. Por fim, o quinto capítulo apresenta as considerações finais e as perspectivas futuras da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta o embasamento teórico e histórico que sustenta a pesquisa. Inicialmente, aborda-se a história da astronomia antiga, contextualizando as origens do pensamento astronômico. Em seguida, a discussão fundamenta-se na área de ensino, apresentando a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel e as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) como alicerces pedagógicos. Por fim, detalham-se os objetos de conhecimento específicos que serão trabalhados: o Método de Eratóstenes para o cálculo da circunferência da Terra e as contribuições de Aristarco de Samos sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua.

2.1 História da astronomia antiga

A curiosidade inata do ser humano sobre o céu estrelado sempre foi um motor fundamental para o desenvolvimento do conhecimento. A Astronomia, considerada por muitos a mais antiga das ciências, nasceu dessa necessidade de entender os ciclos naturais. Desde os primórdios das civilizações, a observação dos astros não era apenas uma prática utilitária para demarcar o tempo ou as estações, mas uma fonte inesgotável de questionamentos que impulsionou o raciocínio e a busca por explicações. Como Bynum (2017) detalha em "Uma Breve História da Ciência", é essa observação sistemática e a curiosidade inerente que pavimentaram o caminho para as descobertas que moldaram nossa compreensão do cosmos. Nesse contexto, a astronomia não apenas se consolidou como a primeira ciência estruturada, mas serviu de base para o desenvolvimento do próprio método científico e matemático.

No percurso da história da astronomia, as grandes descobertas raramente surgem do nada. Elas são, em sua maioria, o resultado de uma evolução gradual de ideias, aprimoramento de métodos e a coragem de questionar o status quo. Antes mesmo da invenção de instrumentos ópticos sofisticados, a humanidade já demonstrava uma capacidade impressionante de desvendar mistérios celestes utilizando apenas a lógica, a matemática e a acuidade observacional. Foi nesse fértil terreno que surgiram figuras notáveis, cujas contribuições, embora antigas, ressoam até hoje, servindo como pilares para o ensino da astronomia prática.

Um exemplo notório dessa capacidade de inovação é o grego Eratóstenes de Cirene. No século III a.C., ele demonstrou o poder do raciocínio geométrico aplicado à observação de fenômenos naturais, e conseguiu estimar o perímetro da Terra, com base na diferença do ângulo dos raios solares em duas cidades distantes no solstício de verão. Esse fato, ilustra perfeitamente como problemas complexos podem ser abordados com engenhosidade e recursos simples (Sagan, 1980). A precisão de seus cálculos, considerando as limitações da época, é um testemunho da sofisticação do pensamento grego e da aplicabilidade de conceitos matemáticos como a geometria para desvendar as dimensões do nosso próprio planeta.

Em um período similar, Aristarco de Samos desafiou as concepções geocêntricas predominantes, sendo a primeira pessoa a propor que a Terra gira em torno do Sol (Freitas et al., 2021). Embora essa ideia inovadora fosse muito à frente de seu tempo e não tenha sido amplamente aceita de imediato, a contribuição de Aristarco à história da astronomia é inegável, destacando-se como um marco na evolução do pensamento cosmológico (Paulucci et al., 2022). Ele não apenas concebeu essa audaciosa teoria, mas também empregou princípios da trigonometria para tentar estimar as distâncias e tamanhos relativos do Sol e da Lua em relação à Terra (Freitas et al., 2021). As tentativas de Aristarco, mesmo com as limitações de suas medições, representam um passo crucial na aplicação da matemática para quantificar e compreender as relações entre os corpos celestes, pavimentando o caminho para futuras investigações astronômicas.

Esses exemplos da antiguidade clássica sublinham que a história da ciência não é apenas uma sucessão de fatos, mas uma narrativa de como o conhecimento é construído. A jornada de Eratóstenes e Aristarco demonstra que as grandes descobertas muitas vezes nascem da curiosidade, da observação perspicaz e da aplicação de ferramentas intelectuais acessíveis. Para os alunos do ensino médio, compreender esse percurso histórico é crucial, pois ao perceberem que avanços significativos foram alcançados com métodos que utilizam a geometria e a trigonometria que eles mesmos estudam, a mecânica celeste se torna algo palpável, acessível e desmistificado.

Portanto, a história da astronomia, com seus triunfos e desafios, serve como uma poderosa ferramenta pedagógica. Ela permite que os estudantes não apenas aprendam o conteúdo da astronomia prática, mas também desenvolvam uma visão mais concreta e crítica sobre a natureza do conhecimento científico. Ao invés de ser um corpo estático de verdades, a ciência revela-se como um processo dinâmico de investigação, questionamento e refinamento. Ao resgatar e valorizar essas experiências passadas, o ensino de astronomia no ensino médio

pode inspirar uma nova geração a enxergar a si mesmos como parte dessa contínua e fascinante jornada de descoberta.

2.2 Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel

A Teoria da Aprendizagem Significativa foi proposta pelo psicólogo educacional David Ausubel e revolucionou a compreensão sobre como o conhecimento é adquirido e retido de forma eficaz. Contrariando a ideia de que o aprendizado é meramente um acúmulo de informações, Ausubel, Novak e Hanesian (1980) postularam que a aprendizagem ocorre de maneira significativa quando o novo conteúdo se relaciona de forma não arbitrária e substantiva com os conhecimentos prévios que o aluno já possui em sua estrutura cognitiva. Essa conexão profunda não é apenas memorização, mas sim uma integração que modifica tanto o novo conhecimento quanto o já existente, tornando-o mais estável e duradouro (Moreira e Masini, 2006).

Segundo Ausubel (1980), para que a aprendizagem significativa ocorra, dois fatores principais são cruciais: a disposição do aluno para aprender e a significatividade lógica e psicológica do material de ensino. Isso significa que o material deve ser potencialmente significativo, ou seja, passível de ser relacionado à estrutura cognitiva do aprendiz, e o aluno deve ter a intenção de aprender significativamente, e não apenas de forma mecânica (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980). Conforme destacam Pelizzari et al. (2001), é fundamental que os conceitos sejam apresentados de modo organizado, claro e contextualizado, permitindo que o estudante compreenda as relações entre as ideias e as incorpore de forma consciente e relevante.

A importância dessa teoria se manifesta especialmente em disciplinas que demandam a aplicação de conceitos abstratos, como a matemática e as ciências naturais. No contexto do ensino de astronomia prática, a Teoria da Aprendizagem Significativa torna-se um pilar metodológico fundamental. Ao invés de apresentar fórmulas e conceitos isolados, a abordagem significativa enfatiza a necessidade de partir das experiências e dos saberes já existentes dos alunos. Por exemplo, conceitos como a esfericidade da Terra ou o movimento dos astros, muitas vezes intuitivamente presentes no cotidiano dos estudantes, podem servir como pontos de ancoragem para a introdução de ideias mais complexas, como a trigonometria na medição de distâncias astronômicas.

No ensino de disciplinas que envolvem conceitos abstratos e a aplicação de ferramentas e raciocínio matemática, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel oferece um alicerce sólido. Ao propor a reprodução de experimentos históricos que utilizam geometria e trigonometria básica, o processo de ensino-aprendizagem não apenas contextualiza o conhecimento, mas também permite que o aluno "faça" ciência. Essa abordagem ativa, que integra teoria e prática, possibilita que os estudantes estabeleçam relações concretas entre os fenômenos observados e os conceitos matemáticos, transformando informações abstratas em conhecimento relevante e pessoalmente significativo (Moreira, 2011).

Além disso, a experimentação e a resolução de problemas reais, características da astronomia prática, promovem o engajamento e a motivação dos estudantes. Ao vivenciarem a aplicação da matemática em situações tangíveis, eles percebem a utilidade e o poder das ferramentas que estão aprendendo. Esse processo facilita a assimilação do conhecimento de forma duradoura, uma vez que ele é construído ativamente pelo aluno, e não apenas recebido passivamente. A Aprendizagem Significativa, portanto, não é apenas uma teoria educacional, mas uma diretriz prática que capacita o ensino a ser mais eficaz, relevante e transformador, especialmente no campo da astronomia.

Diante desse cenário, nota-se que o ensino de astronomia ainda carece de estratégias que superem a memorização mecânica e a fragmentação dos conteúdos. A literatura recente aponta que não basta apenas introduzir o tema, é necessário estruturá-lo de forma que faça sentido para o aluno. Autores como Schinzel et al. (2022) argumentam que a utilização de sequências didáticas fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa, como as UEPS, surge como uma resposta necessária a essas lacunas. Ao investigar o ensino de tópicos complexos de astrofísica, o autor reforça que a organização hierárquica e progressiva do conhecimento é fundamental para transformar concepções prévias e promover uma evolução conceitual, contrastando com as abordagens tradicionais que muitas vezes ignoram a estrutura cognitiva do estudante.

2.3 UEPS (unidades de ensino potencialmente significativas)

A busca por metodologias que efetivamente promovam uma aprendizagem significativa levou ao desenvolvimento de abordagens didáticas inovadoras. Dentre elas, destacam-se as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS), uma proposta

desenvolvida por Marco Antonio Moreira (2006; 2011) que se alinha intrinsecamente aos princípios da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. A UEPS não é apenas um roteiro de atividades, mas um modelo didático que visa estruturar o processo de ensino-aprendizagem para maximizar a conexão entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva preexistente do aluno.

A concepção da UEPS fundamenta-se na premissa de que a aprendizagem é mais eficaz quando o estudante é ativamente envolvido na construção do seu próprio conhecimento, em um contexto que faz sentido para ele. Com base nas diretrizes de Moreira (2011), a estrutura das UEPS pode ser sintetizada em uma sequência de sete etapas interconectadas, projetadas para guiar a intervenção pedagógica:

- Escolha de temas relevantes e potencialmente significativos: Seleção de um tópico que desperte o interesse dos alunos e que possa ser relacionado aos seus conhecimentos prévios e ao seu cotidiano.
- Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos: Diagnóstico das ideias e conceitos que os estudantes já possuem sobre o tema, essencial para identificar os "subsunçores" (pontos de ancoragem) na estrutura cognitiva.
- Apresentação de situações-problema: Proposição de desafios ou questões que estimulem a curiosidade e a necessidade de buscar novas informações.
- Realização de atividades práticas e experimentais: Momento em que os alunos manipulam, investigam e testam hipóteses, facilitando a construção de conceitos a partir da experiência direta.
- Análise e discussão coletiva dos resultados: Troca de ideias e interpretações entre os alunos e o professor, promovendo a elaboração conjunta do conhecimento e a resolução de conflitos cognitivos.
- Sistematização dos conceitos: Organização e formalização dos novos conhecimentos adquiridos, integrando-os de forma coerente à estrutura cognitiva dos alunos.
- Avaliação da aprendizagem significativa: Verificação não apenas da memorização, mas da capacidade do aluno de aplicar e relacionar os conceitos em novas situações.

A relevância das UEPS para o ensino de astronomia é amplamente reconhecida e documentada na literatura recente, abrangendo desde conceitos fundamentais até tópicos de física moderna. Em sua dissertação, Andrade (2020) elaborou uma proposta de UEPS especificamente voltada para fenômenos cotidianos, como o dia/noite e as estações do ano, demonstrando como o observável pode ser sistematizado pedagogicamente. Expandindo esse

horizonte de aplicação, trabalhos como o de Schinzel et al. (2022) utilizam a mesma estrutura para abordar temas de alta abstração, como Buracos Negros e Relatividade, no Ensino Básico. Ambas as sequências didáticas, fundamentadas na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, foram desenvolvidas para promover um aprendizado com compreensão e significado, contrapondo-se ao ensino tradicional focado na memorização. A articulação entre esses trabalhos exemplifica a versatilidade da UEPS: ela é eficaz tanto para organizar conceitos de astronomia observacional, como propõe Andrade (2020), quanto para estruturar tópicos complexos de astrofísica, como defende Schinzel et al. (2022), partindo sempre dos conhecimentos prévios dos alunos e estimulando a crítica e o diálogo.

A contextualização dos conteúdos em problemas reais e a realização de experimentos são pilares das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas que se alinham perfeitamente com a proposta da astronomia prática. Essa abordagem não só estimula o raciocínio crítico e a autonomia dos alunos, mas também torna o processo de aprendizagem mais significativo, pois os conceitos abstratos de geometria e trigonometria ganham vida e aplicação concreta. Ao observar a sombra de um objeto para calcular ângulos ou ao simular a posição relativa de astros, os estudantes engajam-se ativamente na construção do conhecimento, percebendo a relevância do que estão aprendendo, conforme destaca Andrade (2020). Corroborando essa visão, Schinzel et al. (2022) apontam que o uso de materiais potencialmente significativos e a promoção da interação social são estratégias cruciais que a UEPS incorpora para superar a desmotivação dos alunos e a abordagem passiva da física em sala de aula. Assim, a união entre a experimentação prática e a discussão conceitual profunda se mostra o caminho para um aprendizado mais eficaz e duradouro.

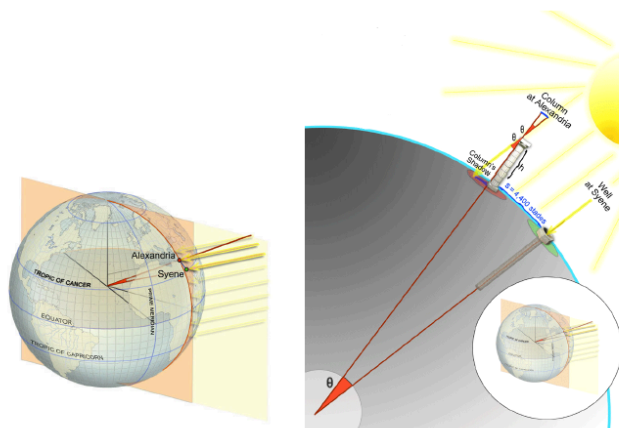
Portanto, a UEPS se configura como um modelo didático adequado e robusto para articular teoria e prática no Ensino Médio, preenchendo a lacuna entre o conhecimento formal e a experiência vivencial do estudante. Ao favorecer a apropriação dos conceitos científicos por meio da investigação, da reflexão coletiva e da experiência direta, a UEPS estabelece pilares essenciais para um ensino de ciências que seja não apenas eficaz e motivador, mas também profundamente transformador, capacitando os alunos a compreenderem e interagirem com o mundo de forma mais informada e crítica. O sucesso da aplicação dessa metodologia em diferentes vertentes da astronomia, seja na geometria das sombras evidenciada por Andrade (2020) ou na astrofísica discutida por Schinzel et al. (2022), reforça a sua potencialidade como ferramenta indispensável para uma atualização curricular e para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa no ensino de física no Brasil.

2.4 Método de Eratóstenes para o tamanho da Terra

O experimento original de Eratóstenes, realizado por volta de 240 a.C., é um marco histórico e didático na ciência, considerado um dos experimentos mais belos de todos os tempos. Eratóstenes, então bibliotecário-chefe da Grande Biblioteca de Alexandria, utilizou observações simples do Sol durante o solstício de verão em duas cidades, Siena (atual Assuã), onde o Sol passava próximo do zênite ao meio-dia, fazendo com que poços não projetassem sombra, e Alexandria, onde uma haste vertical projetava sombra, para demonstrar a curvatura da Terra. Assumindo que os raios solares incidem paralelamente devido à grande distância do Sol, ele mediu o ângulo da sombra em Alexandria, aproximadamente $7,2^\circ$ ($1/50$ de um círculo), que corresponde ao ângulo central da Terra entre as duas cidades.

Com a distância estimada em 5.000 estádios (cerca de 920 km), Eratóstenes calculou a circunferência terrestre em torno de 252.000 estádios, o que equivale a um raio de aproximadamente 6.400 km, valor surpreendentemente próximo do raio médio moderno de 6.371 km, com erro inferior a 1%. A simplicidade dos materiais e a sofisticação do raciocínio usados tornam esse experimento um exemplo poderoso da aplicação da geometria para compreender o mundo físico. De maneira semelhante, Aristarco de Samos, um dos primeiros a propor métodos para calcular a distância e o tamanho da Lua e do Sol, usou raciocínios trigonométricos e observações celestes, abrindo caminho para a astronomia matemática (Azevedo et al., 2022; Gomes e Marques, 2023). A seguir temos a Figura 1 que ilustra o experimento de Eratóstenes e a Figura 2 que é um Mapa atual da região onde ele o fez.

Figura 1 – Ilustração do experimento de Eratóstenes.



Fonte: Disponível em:

<https://cfp.ufcg.edu.br/portal/index.php/textos-de-divulgacao/529-experimento-de-erastostenes>.

Figura 2 – Mapa atual da região, destacando Alexandria e Assuã com elipses.



Fonte: Disponível em: <https://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/extn/adou/20/adou23.htm>.

A relevância do experimento de Eratóstenes para o ensino transcende a mera reprodução histórica. Como pontuam Gomes e Marques (2023), o método de Eratóstenes pode ser generalizado para situações em que as cidades não estão no mesmo meridiano e o Sol não está a pino, tornando-o mais adaptável à realidade de diferentes localidades e datas. Em sua pesquisa, Gomes e Marques (2023) aplicaram essa generalização em pares de cidades brasileiras, como Goiânia e Juiz de Fora, e Goiânia e Marau, utilizando equipamentos simples e softwares astronômicos para a determinação de ângulos e distâncias, com resultados que, embora apresentem variações, demonstram a consistência do modelo proposto e sua pertinência no ensino de ciências.

Esses experimentos são fundamentais para o ensino prático da astronomia, pois ilustram como conceitos matemáticos podem ser aplicados em situações reais para a estimativa de grandezas astronômicas. A revisitação do experimento de Eratóstenes, conforme explorado por Azevedo et al. (2022), reforça o valor pedagógico dessas experiências. O estudo deles demonstrou como é possível estimar o raio médio volumétrico da Terra com um erro de apenas 0,5% e a velocidade angular de rotação da Terra, utilizando materiais simples como fios de prumo e cartolinas, e dados de satélite para as distâncias entre as cidades. Essa abordagem didática e simples permite que os alunos compreendam a curvatura média do planeta e sua velocidade de rotação, além de desenvolverem habilidades de medida, montagem de aparato experimental, análise de dados e comparação com resultados da literatura.

A interdisciplinaridade é outro ponto forte dessas atividades. Neves et al. (2021) destacam que o experimento de Eratóstenes, considerado um dos dez experimentos científicos mais belos, pode ser simplificado para aplicação interdisciplinar nas disciplinas de Matemática, Física e Geografia do Ensino Médio, abordando conceitos como trigonometria, movimento planetário, latitude, longitude, equinócio e solstício. A reprodução de experimentos históricos, como o de Eratóstenes, tem o potencial de desmistificar a ciência e o método científico, estimulando a curiosidade e o engajamento dos alunos.

A proposta de atividades práticas, como as descritas por Caetano e Moreira (2022), permite que os estudantes construam seus próprios gnômons e realizem medições em suas casas, facilitando o aprendizado conceitual e a familiarização com tecnologias digitais como o Google Maps e simuladores do céu, que auxiliam na obtenção de dados e na compreensão dos fenômenos. Esses estudos, em conjunto, evidenciam que adaptar experimentos históricos ao contexto escolar torna possível o engajamento dos alunos com a ciência e o desenvolvimento de habilidades de observação, cálculo e análise crítica, alinhando teoria e prática de forma significativa no Ensino Médio.

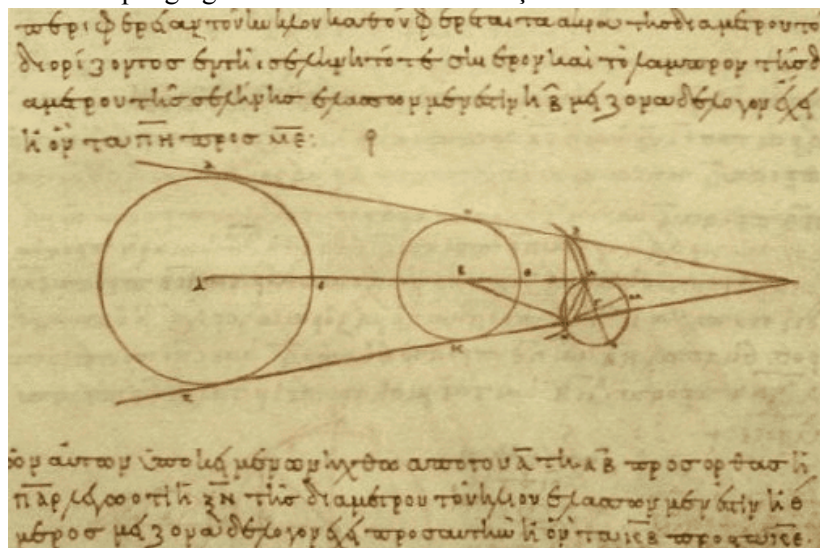
2.5 Aristarco de Samos: sobre os tamanhos e as distâncias do sol e da lua

Na obra *Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua*, Aristarco de Samos, astrônomo e matemático grego do século III a.C., apresentou uma das primeiras tentativas conhecidas de medir, com base em fundamentos geométricos, as dimensões e distâncias relativas entre a Terra, a Lua e o Sol. Sua abordagem consistia em utilizar apenas observações visuais e raciocínio lógico para propor modelos que explicassem os fenômenos celestes, em uma época anterior ao desenvolvimento da trigonometria ou da óptica astronômica.

Segundo Aristarco de Samos (2016), ele empregou um método geométrico notável para estimar a razão entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua. Observando o momento exato em que a Lua se encontrava em quadratura (quando a fase lunar é de quarto crescente ou minguante), ele supôs que o triângulo formado por Terra, Lua e Sol era retângulo. A partir da medida do ângulo entre Lua e Sol a partir da Terra, estimado em aproximadamente 87° , Aristarco concluiu que o Sol estaria cerca de 19 vezes mais distante da Terra do que a Lua. Ainda que essa razão estivesse longe do valor real, de cerca de 400 vezes, a proposta revelou uma sofisticação intelectual notável para a época, estabelecendo uma base metodológica de grande importância para a astronomia (Freitas et al., 2021; Oliveira, Lima e

Bertuola, 2016). A seguir temos a Figura 3 que é uma cópia grega do século X de um livro original de Aristarco, com ilustrações dos seus cálculos.

Figura 3 – Cópia grega do século X com ilustrações dos cálculos de Aristarco.



Fonte: Disponível em:

<https://olhardigital.com.br/2021/11/23/colonistas/com-um-eclipse-lunar-uma-moeda-e-uma-vela-aristarco-calculou-a-distancia-entre-a-terra-e-a-lua-22-mil-anos-atras/>.

Complementando esse estudo, Aristarco também buscou determinar o tamanho relativo da Lua a partir de eclipses lunares. Durante esses eventos, ele observava o tempo que a Lua levava para atravessar a sombra projetada pela Terra e, a partir disso, deduzia que o diâmetro da sombra terrestre na região onde a Lua a atravessa correspondia a cerca de dois diâmetros lunares. Esse raciocínio permitiu-lhe estabelecer uma razão aproximada entre os diâmetros da Terra e da Lua, o que representa uma aplicação engenhosa da observação de fenômenos naturais para o desenvolvimento de relações quantitativas entre corpos celestes (Aristarco de Samos, 2016; Freitas et al., 2021). Aristarco considerava que, se a Lua levava determinado tempo para entrar e sair da sombra terrestre, e esse tempo era proporcional ao seu diâmetro aparente, então seria possível, com base no tempo total do eclipse, deduzir tanto o tamanho relativo da Lua quanto a razão entre a sua distância e o raio da Terra (Oliveira, Lima e Bertuola, 2016). Esse uso do tempo de duração do eclipse como uma ferramenta indireta de medição mostra o quanto sua proposta era ousada, especialmente por considerar um fenômeno periódico e acessível à observação direta como base para investigações científicas.

Para estimar a distância da Lua em relação à Terra, Aristarco baseou-se na ideia de que, durante um eclipse lunar, a sombra da Terra projetada sobre a Lua podia ser comparada

ao tamanho do próprio planeta. Observando o tempo que a Lua levava para atravessar completamente essa sombra, e considerando o tempo do seu movimento orbital, ele deduziu que a Lua estava a uma distância aproximadamente vinte vezes maior que o raio da Terra (Aristarco de Samos, 2016; Freitas et al., 2021). Essa estimativa era baseada na razão entre o diâmetro da Terra e o tamanho angular da Lua no céu, o que implica que, conhecendo o tamanho aparente da Lua e a largura da sombra terrestre, seria possível, por semelhança de triângulos, calcular a sua distância.

Embora o valor obtido estivesse longe do real, a Lua está a cerca de 60 vezes o raio da Terra, o método representa uma das primeiras tentativas conhecidas de determinar uma distância astronômica por meios geométricos. Inspirada nesse raciocínio, uma adaptação moderna e bastante didática envolve o uso de uma moeda para cobrir completamente o disco lunar no céu. Posicionando a moeda à frente dos olhos e medindo a distância entre ela e o observador, é possível calcular a razão entre o diâmetro da moeda e essa distância, que será aproximadamente igual à razão entre o diâmetro real da Lua e sua distância à Terra. Com esse procedimento, chega-se a um valor próximo de 108 vezes o diâmetro da Lua, evidenciando a coerência com o princípio geométrico original. Essa adaptação simples permite, com poucos recursos, transmitir a lógica fundamental do experimento de Aristarco de forma acessível e eficaz (Zurita e Lucena, 2021).

Apesar das limitações tecnológicas e da imprecisão dos dados disponíveis na antiguidade, o valor duradouro dos experimentos de Aristarco reside justamente na sua concepção metodológica. Como destacam Freitas et al. (2021) e Oliveira, Lima e Bertuola (2016), a genialidade de Aristarco não está apenas nas estimativas numéricas, mas na sua capacidade de formular perguntas sobre o cosmos e desenvolver métodos baseados exclusivamente na geometria e na observação empírica. Seus experimentos representam não apenas um marco histórico na ciência, mas também uma ferramenta extremamente valiosa para a educação científica contemporânea. A possibilidade de replicar, ainda que com adaptações, os raciocínios de Aristarco com materiais simples e acessíveis, torna esses experimentos exemplares como recurso pedagógico, pois estimulam o raciocínio lógico, a criatividade e a autonomia investigativa dos estudantes, promovendo uma compreensão mais profunda da construção do conhecimento científico.

3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho fundamenta-se nas sete Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPs), conforme proposta teórica que visa promover uma aprendizagem mais profunda e significativa. A intervenção será organizada em um roteiro sequencial, garantindo a progressão dos conceitos e a participação ativa dos alunos.

3.1 Caracterização da Pesquisa e dos Participantes

A aplicação das atividades e a realização dos experimentos ocorreram escola da rede pública estadual do Rio Grande do Norte, envolvendo um grupo de 29 alunos dos 3 anos do ensino médio (1º, 2º e 3º) selecionados pelo professor de Física da instituição com base no maior desempenho escolar e no interesse demonstrado pela área. Esses estudantes já haviam sido previamente escolhidos para participar da OOPAA (Olimpíada do Oeste Potiguar de Astronomia e Astronáutica), sendo aproveitado esse mesmo grupo para a execução do trabalho.

A aplicação ocorreu no turno vespertino do dia 02/09/2025, e as observações astronômicas foram realizadas entre 16h e 17h, em uma praça de eventos pública localizada próxima à escola (Figura 4), o que facilitou o deslocamento dos alunos.

Figura 4 - Praça da realização dos experimentos.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

3.2 Escolha de temas significativos

Como etapa inicial das UEPS, procedeu-se à seleção e contextualização de temas considerados relevantes para os alunos, visando conectá-los com o mundo real. Para este projeto, optou-se pela abordagem de Geometria e Trigonometria do Ensino Médio aplicadas à Astronomia.

A Astronomia foi utilizada como campo de estudo por oferecer um contexto vasto para a aplicação de conceitos matemáticos, com o intuito de tornar o aprendizado mais engajador. Foram abordados tópicos como triângulos, proporções, ângulos e funções trigonométricas, todos contextualizados por problemas astronômicos históricos e atuais. O objetivo foi demonstrar a aplicabilidade prática desses conceitos em situações que transcendem o ambiente de sala de aula, como a medição das dimensões da Terra e da Lua.

3.3 Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos

Antes da introdução de novos conceitos ou das situações-problema, foi realizado um diagnóstico dos conhecimentos prévios dos alunos. Esta etapa foi crucial para identificar lacunas, misconceptions e o nível de familiaridade que a turma possuía com os temas abordados.

Para isso, aplicou-se um questionário inicial impresso, denominado "Questionário Pré-Experimento", composto por 13 perguntas objetivas de múltipla escolha. O instrumento focou nas seguintes áreas:

- Trigonometria: Conceitos de seno, cosseno, tangente; cálculo de ângulos e lados em triângulos retângulos.
- Triângulos: Classificação, propriedades (soma dos ângulos internos) e semelhança de triângulos.
- Geometria: Conceitos de linha, ponto, ângulo, círculo e suas propriedades básicas.
- Noções de Astronomia: Questões gerais sobre o universo, o movimento dos corpos celestes e a história da ciência.

O "Questionário Pré-Experimento" completo que foi aplicado, com o detalhamento das questões encontra-se no Apêndice A.

3.4 Apresentação de situações-problema desafiadoras

Nesta etapa, apresentaram-se as situações-problema que serviram como ponto de partida para a investigação e a aplicação dos conceitos matemáticos. As situações-problema foram elaboradas a partir dos experimentos propostos, visando despertar a curiosidade e o senso crítico dos alunos. Os alunos receberam folhas com espaço para resposta das situações problemas, e foi informado que eles poderiam responder de forma escrita ou até mesmo desenhando.

As situações-problema apresentadas foram:

- Para o Experimento de Estimativa do Tamanho da Terra (Método de Eratóstenes): "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito?". Esta questão foi introduzida com uma breve contextualização histórica sobre Eratóstenes e seu feito, destacando a simplicidade e a genialidade do método.
- Para o Experimento de Estimativa do Tamanho da Lua (Método de Aristarco): "Como podemos estimar o diâmetro da Lua utilizando um eclipse lunar total?". Enfatizou-se a conexão com o conhecimento do diâmetro terrestre obtido no experimento anterior, mostrando a interligação dos conceitos.
- Para o Experimento de Estimativa da Distância da Lua (Método de Aristarco): "Seria possível determinar a distância entre a Terra e a Lua usando um simples furo em um pedaço de plástico fosco?". A proposta visou demonstrar a aplicabilidade de princípios geométricos com materiais acessíveis.

Essas questões guiaram as atividades práticas e motivaram os alunos a buscar soluções, utilizando os conhecimentos matemáticos e a observação científica.

3.5 Realização de atividades práticas (experimentos)

Esta constituiu a etapa central da intervenção, na qual os alunos se engajaram ativamente na investigação das situações-problema por meio de experimentos. A abordagem prática visou consolidar os conceitos teóricos e desenvolver habilidades de observação, medição e raciocínio lógico.

Os experimentos foram conduzidos conforme descrito a seguir:

3.5.1 Estimativa do tamanho da Terra (adaptação do método de Eratóstenes)

Situação-Problema: "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito?"

Contextualização: A atividade foi precedida de uma contextualização histórica sobre o método desenvolvido por Eratóstenes no século III a.C., destacando como ele utilizou a diferença na inclinação das sombras em duas cidades distintas para estimar, com surpreendente precisão, a circunferência da Terra. A proposta aplicada consistiu em uma adaptação moderna desse experimento clássico, tornando-o mais acessível e prático para o ambiente escolar, sem a necessidade de deslocamento físico entre cidades.

Materiais Necessários:

- Palito de churrasco (ou haste reta com aproximadamente 30 cm de comprimento);
- Base de isopor (ou suporte estável para fixação vertical da haste);
- Esquadro escolar (para garantir a perpendicularidade do palito em relação à base);
- Régua ou trena (para medição do comprimento da sombra);
- Acesso à internet com o aplicativo ou site ShadowMap;
- Calculadora científica ou planilha digital.

Procedimento:

Procedimento Experimental: Devido à necessidade de maior rigor na montagem e nivelamento do aparato, a execução deste experimento foi realizada de forma demonstrativa e participativa por um grupo reduzido (o pesquisador e três alunas voluntárias), enquanto a turma acompanhava o processo.

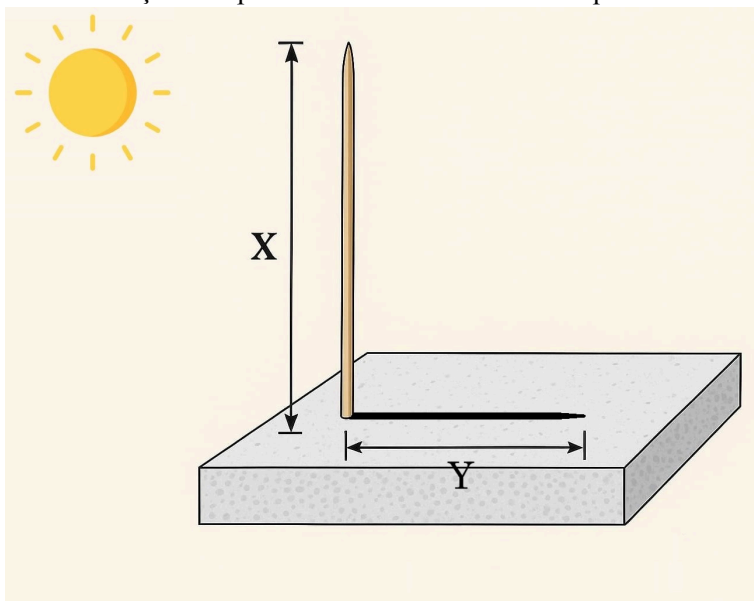
- Montagem do aparato: Fixou-se o palito de churrasco verticalmente sobre a base de isopor. Para garantir a precisão da verticalidade, utilizou-se um esquadro durante a montagem.
- Medição da sombra: Em um horário pré-determinado (momento em que o Sol projetava uma sombra definida), mediu-se o comprimento da sombra projetada pelo palito.
- Cálculo do ângulo: Com os dados do comprimento da haste e da sombra, calculou-se o ângulo de incidência dos raios solares utilizando trigonometria básica, por meio da relação da tangente, conforme a equação 1 e 2:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{Altura do palito}}{\text{Comprimento da sombra}} \quad (1)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\text{altura}}{\text{sombra}}\right) \quad (2)$$

A Figura 5 ilustra o aparato montado para o experimento. Ressalta-se que a imagem foi gerada por inteligência artificial (ChatGPT), baseada em instruções textuais fornecidas pelo autor. Na Figura 5, X = Altura do palito, Y = Comprimento da sombra.

Figura 5 – Ilustração do aparato montado e as medidas que devem ser feitas.



Fonte: gerada por Chat GPT em 18/07/2025.

- Verificação de nível: Após o cálculo do ângulo, verificou-se se o solo do local exato da medição apresentava alguma inclinação ou desnível, a fim de mitigar erros experimentais. Este procedimento foi realizado utilizando o nível de superfície digital de um smartphone.
- Identificação de uma cidade de referência: Utilizando a ferramenta ShadowMap, escolheu-se uma cidade distante que estivesse razoavelmente alinhada na mesma direção da sombra projetada (próxima à mesma longitude). O aplicativo permitiu visualizar a orientação da sombra no mapa, facilitando essa seleção.
- Consulta da sombra na cidade remota: No mesmo horário em que foi feita a medição local, os alunos verificarão no ShadowMap o ângulo solar naquela outra cidade escolhida. É essencial que os dois ângulos correspondam ao mesmo instante do dia, para que a diferença entre eles represente com fidelidade a curvatura terrestre entre os pontos.

- Consulta da sombra na cidade remota: No mesmo horário em que foi feita a medição local, verificou-se no ShadowMap o ângulo solar na cidade escolhida. Foi considerado essencial que os dois ângulos corresponderem ao mesmo instante do dia, para que a diferença entre eles representasse com fidelidade a curvatura terrestre entre os pontos.
- Cálculo da circunferência da Terra: Com a diferença angular entre os dois locais e a distância terrestre entre eles (obtida via Google Earth), aplicou-se uma regra de três para estimar a circunferência da Terra, utilizando as relações das equações 3 e 4.

$$\frac{\text{Diferença angular}}{360^\circ} = \frac{\text{Distância entre as cidades}}{\text{Circunferência da Terra}} \quad (3)$$

$$\text{Circunferência da Terra} = \frac{360 * \text{Distância}}{\text{Diferença angular}} \quad (4)$$

3.5.2 Estimativa do tamanho da Lua (adaptação do método de Aristarco)

Situação-Problema: "Como podemos estimar o diâmetro da Lua utilizando um eclipse lunar total?"

Contextualização: Neste experimento, adaptou-se o método de Aristarco de Samos (século III a.C.) para estimar o diâmetro da Lua. O ponto de partida foi um princípio simplificado: durante um eclipse lunar total, a largura da sombra da Terra projetada na Lua corresponde aproximadamente ao diâmetro terrestre. Para essa estimativa, utilizou-se como base o valor do diâmetro da Terra, obtido no experimento anterior (Método de Eratóstenes). Essa abordagem demonstrou como diferentes conhecimentos históricos podem ser combinados para realizar medições astronômicas.

Materiais Necessários:

- Vídeo do Eclipse Lunar Total de julho de 2018 (URL: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g> – exibido aos alunos);
- Calculadora ou Planilha Digital.
- Valor do Diâmetro Terrestre (obtido no experimento anterior).

Procedimento:

A inovação metodológica consistiu em simplificar o processo, utilizando apenas dois intervalos de tempo passíveis de mensuração no vídeo. Enquanto o método original de

Aristarco exigia medições angulares complexas, esta adaptação focou na duração dos eventos durante o eclipse.

- **Análise do vídeo:** Analisou-se o vídeo do eclipse lunar total através do vídeo sendo apresentado para toda a turma, identificando e cronometrando dois tempos cruciais (esses tempos foram identificados com apoio da turma):
 - Tempo de travessia da sombra (T_1): Tempo que a sombra completa da Terra leva para atravessar a Lua de ponta a ponta. Este intervalo foi considerado equivalente ao diâmetro da Terra.
 - Tempo de cobertura total (T_2): Tempo que a sombra leva para cobrir totalmente o disco lunar. Este intervalo foi considerado equivalente ao diâmetro da Lua.
 - Abaixo temos as Figuras 6 e 7 que ilustram instantes utilizados para a marcação dos tempos.

Figura 6 – Imagem do vídeo do momento em que a sombra começa a cobrir a lua.



Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g>.

Figura 7 – Imagem do vídeo do momento em que a sombra começa a descobrir a lua.



Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g>.

- Cálculo da proporção: Com os dois tempos registrados, calculou-se a proporção entre eles utilizando a seguinte razão da equação 5:

$$\text{Proporção dos tempos} = \frac{\text{Tempo de cobertura total}}{\text{Tempo de travessia da sombra}} \quad (5)$$

- Cálculo final: Multiplicando essa proporção pelo diâmetro terrestre (já obtido anteriormente), foi possível calcular o diâmetro estimado da Lua de acordo com a equação 6:

$$\text{Diâmetro da lua} = \text{Proporção dos tempos} \cdot \text{Diâmetro da Terra} \quad (6)$$

3.5.3 Estimativa da distância da Lua (adaptação do método de Aristarco)

Situação-Problema: "Seria possível determinar a distância entre a Terra e a Lua usando um simples furo em um pedaço de plástico fosco?"

Contextualização: Neste experimento, propôs-se uma abordagem prática e visual para estimar a distância entre a Terra e a Lua, baseada nos princípios geométricos utilizados por Aristarco de Samos. A atividade iniciou-se com uma contextualização sobre o método original de Aristarco, que utilizava o tamanho aparente da Lua para suas estimativas. A proposta aplicada consistiu em uma adaptação moderna e acessível, permitindo replicar a essência desse raciocínio com materiais simples e comuns.

Materiais Necessários:

- Pedaço de plástico simples semifosco (material translúcido para diminuir o brilho intenso da Lua);
- Perfurador de papel (para criar um furo preciso de 6 mm de diâmetro);
- Cordão;
- Régua ou trena;
- Palito de dente
- Calculadora ou planilha digital;
- Dados do Diâmetro da Lua (valor obtido no experimento anterior).

Procedimento:

- Recebimento do aparato: Cada aluno recebeu um aparato de medição já montado. Ele consiste no pedaço de plástico com dois furos: um destinado à fixação do cordão,

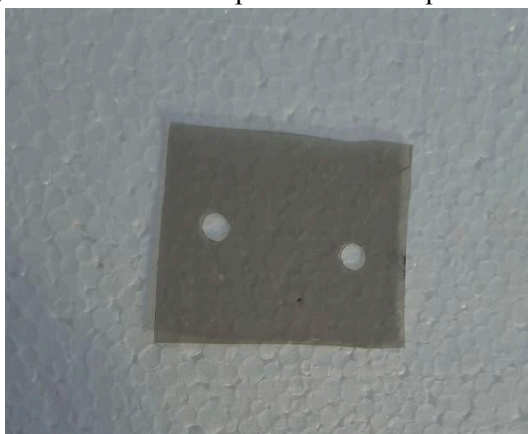
preso com o auxílio de um pedaço de palito de dente, e outro que será utilizado diretamente durante o experimento (Abaixo temos as Figuras 8, 9 e 10 que mostram o aparato e seus elementos).

Figura 8 - Aparato utilizado pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 9 - Plástico do aparato utilizado pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 10 - Cordão do aparato utilizado pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

- Medição da distância Furo-Olho: Com o plástico e o cordão em mãos, os alunos posicionaram o furo de modo que, ao olhar através dele, a Lua se encaixasse perfeitamente em seu diâmetro, preenchendo-o por completo. A propriedade semifosca do plástico auxiliou nesse alinhamento, reduzindo o ofuscamento causado pelo brilho lunar e permitindo uma visualização mais nítida das bordas.
- Registro da medida: No exato momento do alinhamento visual, esticou-se uma das pontas do cordão (previamente presa ao plástico) até a lateral do olho do aluno. O ponto no cordão que tocou a lateral do olho foi marcado (Exemplo na Figura 11).
- Aferição: Em seguida, o cordão foi esticado sobre uma superfície plana e sua medida (distância do furo ao olho) foi verificada com uma régua ou trena.

Figura 11 – Ilustração do experimento, plástico fosco e furo.



Fonte: gerada por Gemini em 18/07/2025.

- Repetição e Média: Este procedimento foi repetido por todos os alunos presentes (29 alunos). A média das distâncias furo-olho obtidas foi utilizada nos cálculos finais para minimizar erros individuais e obter um valor representativo para a turma.
- Cálculo da Distância da Lua: Com a distância média entre o furo e o olho, e utilizando o diâmetro estimado da Lua e o diâmetro do furo, aplicou-se a proporção geométrica da equação 7, derivada do conceito de semelhança de triângulos:

$$\text{Distância da Lua} = \frac{\text{Diâmetro da Lua} * \text{Distância furo-olho (média)}}{\text{Diâmetro do furo}} \quad (7)$$

3.6 Análise e discussão coletiva dos resultados

Após a realização de cada experimento, esta UEP foi dedicada à análise dos resultados obtidos. Ressalta-se que, nesta etapa pedagógica, a discussão com os alunos se restringiu aos resultados diretos e aritméticos simples, sem a aplicação de modelagem estatística complexa ou tratamentos de erros robustos (como desvios-padrão ou critérios de rejeição de dados). O foco principal foi quantificar a precisão das estimativas de forma acessível, identificar as fontes de erro macroscópicas e propor melhorias para os métodos aplicados. Esta etapa foi crucial para desenvolver o pensamento crítico dos alunos e aprofundar sua compreensão sobre a natureza da medição científica.

Para cada experimento, a discussão abordou os seguintes pontos:

- Cálculo dos Resultados e Comparação com Valores Reais:
 - Os grupos de alunos apresentaram seus dados coletados e os cálculos finais para as grandezas estimadas (circunferência da Terra, diâmetro da Lua, distância da Lua) baseados em médias simples.
 - Foram fornecidos os valores reais aceitos para cada grandeza para fins de comparação.
 - Para cada experimento, calculou-se o erro percentual dos resultados obtidos em relação aos valores reais.
- Identificação e Análise das Fontes de Erro: Promoveu-se uma discussão coletiva para identificar e categorizar os possíveis fatores que levaram às diferenças entre os resultados experimentais simples e os valores reais. Esses fatores foram classificados em:
 - Erros de Medição: Imprecisões na leitura da régua, trena, cronômetro, ou no alinhamento visual (ex: posicionamento do palito, cronometragem do eclipse, alinhamento do furo com a Lua).
 - Erros de Instrumento: Limitações da precisão dos materiais utilizados (ex: esquadro escolar, imprecisões no corte do perfurador de papel).
 - Simplificações do Modelo: Reconhecimento de que os métodos históricos aplicados são simplificações da realidade (ex: a consideração da Terra e da Lua como esferas perfeitas; a órbita da Lua ser elíptica e não circular; a sombra da Terra não ser um cilindro perfeito).

- **Propostas para Melhoria dos Métodos:** Com base na análise dos erros, os alunos foram desafiados a propor maneiras de aprimorar os experimentos caso fossem realizados novamente. As sugestões incluíram:
 - Uso de instrumentos de medição mais precisos.
 - Alternativas para minimizar erros de paralaxe ou alinhamento visual.
 - Discussão sobre como, em um nível mais avançado, poder-se-ia incorporar fatores como o formato geoide da Terra ou a excentricidade da órbita lunar.
 - A importância da repetição das medições e do cálculo de médias para mitigar o erro aleatório.
- **Validação e Relevância Histórica:**
 - Apesar dos erros, a discussão ressaltou a engenhosidade dos cientistas históricos (Eratóstenes e Aristarco) que, com recursos rudimentares, conseguiram resultados notavelmente próximos dos valores aceitos hoje.
 - Esta etapa reforçou a ideia de que a ciência é um processo contínuo de aprimoramento e que mesmo métodos "simples" podem fornecer insights valiosos sobre o universo.

3.7 Sistematização dos conceitos científicos envolvidos

Esta etapa da intervenção visou consolidar o aprendizado, formalizando os conhecimentos intuitivos e experimentais adquiridos pelos alunos durante as atividades práticas. O procedimento consistiu em uma revisão teórica expositiva e dialogada, conectando diretamente as operações matemáticas e observações físicas realizadas nos experimentos com os conceitos formais da Geometria, Trigonometria e Astronomia.

O foco da sistematização foi demonstrar que os métodos aplicados não eram apenas "fórmulas mágicas", mas aplicações diretas de propriedades geométricas e físicas. Os conceitos abordados foram estruturados nos seguintes eixos:

3.7.1 Geometria e Trigonometria

- **Triângulos Semelhantes:** Revisou-se a aplicação deste conceito como a base fundamental para o experimento da distância da Lua, explicando a relação de

proporcionalidade entre o triângulo menor (formado pelo furo e o olho) e o triângulo maior (Terra-Lua).

- Triângulos Retângulos e Função Tangente: Retomou-se a geometria do experimento de Eratóstenes, detalhando como a haste vertical, a sombra projetada e o raio solar formam um triângulo retângulo. Enfatizou-se o uso da função tangente como a ferramenta que traduz medidas lineares (catetos) em medidas angulares.
- Círculo e Circunferência: Fez-se a distinção conceitual necessária entre círculo (área) e circunferência (perímetro) para justificar a aplicação da fórmula correta na determinação do perímetro terrestre.
- Retas Paralelas e Ângulos Alternos Internos: Revisitou-se a premissa de Eratóstenes sobre o paralelismo dos raios solares, demonstrando geometricamente por que o ângulo da sombra medido na haste equivale ao ângulo central da Terra entre as duas cidades.

3.7.2 Física e Astronomia

- Luz e Sombra: Discutiu-se a formação de sombras, introduzindo de forma simplificada os conceitos de umbra e penumbra para explicar a nitidez das bordas observadas nos experimentos.
- Tamanho Aparente: Abordou-se a relação entre o tamanho real e a distância dos objetos, utilizando a coincidência visual entre os diâmetros angulares do Sol e da Lua como exemplo prático.
- Movimentos Celestes: Relacionou-se a variação da posição das sombras com a rotação da Terra e a geometria dos eclipses com o alinhamento orbital necessário para o fenômeno.

3.8 Avaliação do processo de aprendizagem

A avaliação foi uma etapa contínua e formativa, acompanhando o progresso dos alunos ao longo de toda a intervenção. No entanto, para esta Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) específica, realizou-se uma avaliação final do processo de aprendizagem, com foco na compreensão dos conceitos e na percepção dos alunos sobre a metodologia utilizada.

Para isso, foi aplicado um questionário final impresso, denominado “Questionário Pós-Experimento”. Este questionário possuiu dois eixos principais:

- **Avaliação Cognitiva:** Teve como objetivo verificar a assimilação dos conceitos de Geometria, Trigonometria e Astronomia abordados nos experimentos. As perguntas incluíram problemas práticos, questões conceituais e reflexões sobre a aplicabilidade dos conhecimentos.
- **Avaliação da Metodologia:** Teve como objetivo coletar o feedback dos alunos sobre a experiência da intervenção. As perguntas abordaram o engajamento com os experimentos, a clareza das explicações, a relevância dos temas e a percepção de como a metodologia contribuiu para o aprendizado.

A análise das respostas forneceu dados importantes para avaliar a efetividade da intervenção e para futuras adaptações e aprimoramentos metodológicos. O “Questionário Pós-Experimento” completo que foi aplicado, com detalhamento das questões de ambos os eixos está presente no Apêndice B.

3.9 Procedimento para análise de fontes de erro

Saindo das etapas das UEPS, este tópico apresenta o teste experimental que foi desenvolvido para avaliar, de forma crítica, os softwares utilizados no primeiro experimento, identificando possíveis fontes de erro, oportunidades de melhoria e novas estratégias para o método de estimativa do diâmetro da Terra (baseado em Eratóstenes).

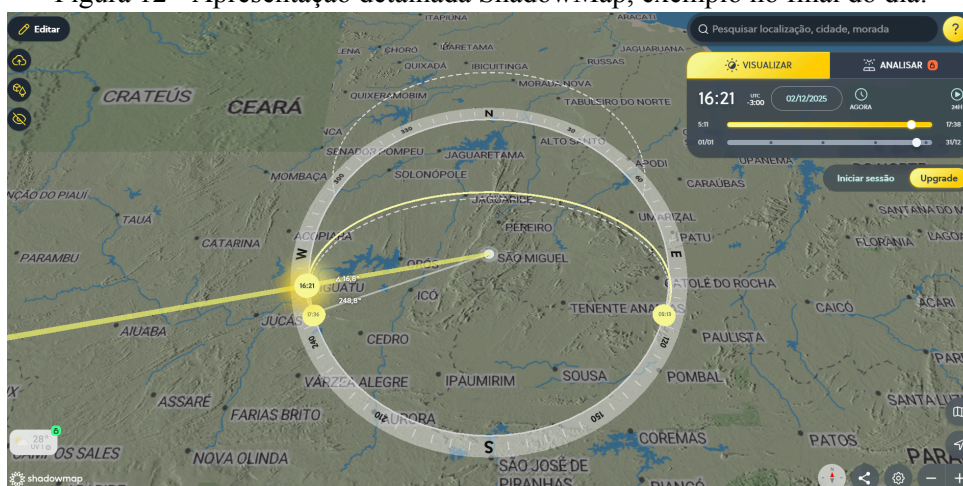
O teste consistiu na coleta de diversas medidas do ângulo de incidência solar em diferentes horários do dia, utilizando a ferramenta digital ShadowMap. A cidade de São Miguel/RN foi utilizada como referência principal. O objetivo foi avaliar variáveis como distância (em relação à cidade de referência), altitude e horário da medição, buscando determinar quais delas exerciam maior influência nas fontes de erro do cálculo.

Para a análise, é necessário compreender o funcionamento da ferramenta ShadowMap. As Figuras 12 e 13 ilustram como o site exibe os ângulos. A seguir, descrevem-se detalhadamente os elementos da interface que foram utilizados no experimento:

- **Reta amarela:** representa o vetor dos raios solares. Essa linha, que converge para o centro da tela, indica a direção da luz solar na malha 3D do site. Junto dela, é exibido o ângulo de incidência dos raios, o qual foi utilizado para medir o ângulo correspondente em cada cidade analisada.

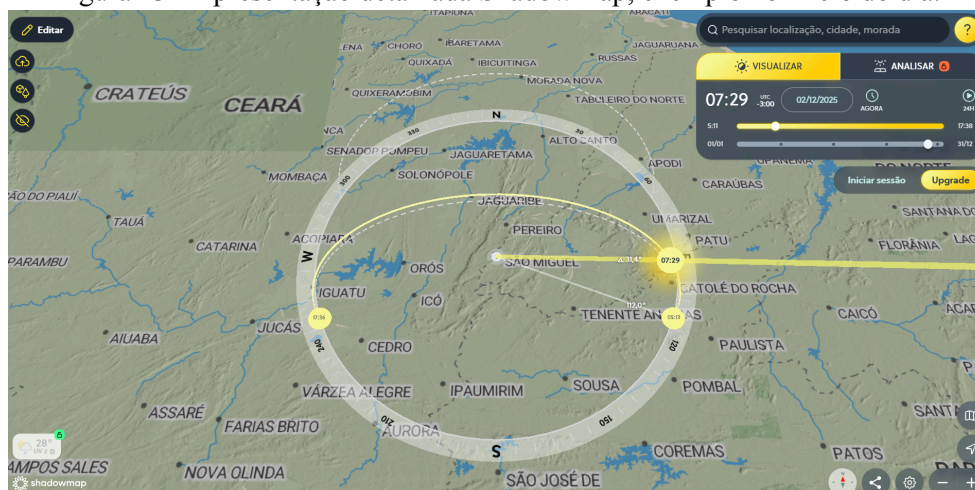
- Reta branca: localizada próxima ao centro da tela, indica a direção do Sol no plano cartesiano, acompanhada de um ângulo de referência cuja origem é o norte (0°). Ela foi utilizada para verificar a direção do Sol e da sombra durante as medições .
- Marcadores das cidades: dependendo do nível de zoom, o site exibe desde malhas de ruas até pontos representando cada cidade. Para o experimento, adotou-se um zoom que permitisse visualizar uma quantidade adequada de cidades representadas por pontos. Esses marcadores foram usados para posicionar o centro da tela sobre cada cidade e realizar as medições .
- Controle deslizante de horário: localizado no canto superior direito da tela, o controle amarelo permite variar o horário do dia. Ele foi ajustado conforme a necessidade para realizar as medições nos horários desejados .

Figura 12 - Apresentação detalhada ShadowMap, exemplo no final do dia.



Fonte: ShadowMap (2025).

Figura 13 - Apresentação detalhada ShadowMap, exemplo no início do dia.



Fonte: ShadowMap (2025).

Com a estrutura do site compreendida, o procedimento do teste foi realizado da seguinte forma: com a cidade de São Miguel/RN posicionada no centro da tela, o horário foi ajustado no controle deslizante até que a reta branca (indicadora da direção do Sol) se alinhasse com alguma cidade próxima. No instante em que esse alinhamento ocorreu, registrou-se o horário correspondente e coletaram-se os ângulos de incidência solar tanto para São Miguel quanto para a cidade alinhada.

Para coletar dados de cidades mais distantes, além do alcance imediato da reta branca e enriquecer o conjunto de medições, o centro da tela foi deslocado manualmente até outras localidades mais afastadas, mantendo sempre o mesmo ângulo de direção indicado pela reta branca para São Miguel no horário definido. Em seguida, foram obtidas também a distância e a diferença de altitude entre São Miguel e a cidade escolhida, utilizando o software Google Earth.

3.10 Tratamento estatístico dos dados

A aplicação do tratamento estatístico para garantir a robustez da análise dos dados coletados ocorreu posteriormente às etapas das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) e às atividades com os alunos. Essa análise utilizou os resultados brutos obtidos nos experimentos para identificar e quantificar a precisão das medições.

Para isso, foi aplicado o Critério de Chauvenet, um método estatístico utilizado para identificar e rejeitar valores anômalos (outliers) em um conjunto de medições. O procedimento adotado se baseou na metodologia para tratamento de valores suspeitos descrita por J. R. Taylor na obra Introdução à Análise de Erros.

O critério baseia-se no cálculo da discrepância do valor suspeito em relação à média, em unidades de desvio padrão, utilizando a seguinte fórmula da equação 8:

$$Discrepância = \frac{|Valor\ suspeito - Média|}{Desvio\ padrão\ amostral} \quad (8)$$

Com o valor da discrepância calculado, obtém-se o Número Esperado (NC), que serve como valor de referência para o critério. Este valor foi calculado multiplicando-se a probabilidade bi-caudal da distribuição T (uma adaptação do método sugerido por Taylor para número finito de medidas) pelo número total de medidas (N), conforme a equação 9:

$$NC = N \cdot Prob_{bi_dist_T} \quad (9)$$

Onde:

- NC: Número esperado (valor de referência de Chauvenet);

- N: Número de amostras;
- Prob_bi_dist_T: Probabilidade bi-caudal da distribuição T (com N-1 graus de liberdade).

Todos os cálculos estatísticos foram realizados utilizando o software Google Planilhas, empregando funções específicas como DESVPADA() para o desvio padrão amostral e DISTT() para a probabilidade bi-caudal da distribuição T.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A discussão dos resultados será dividida em três partes para melhor organização. Na primeira, serão analisados os resultados das estimativas das medidas astronômicas, analisando a precisão dos resultados obtidos com uso de estatística. Na segunda parte, será avaliada a aplicação das etapas das UEPS e a efetividade do processo de aprendizagem, considerando os questionários pré e pós-experimento (Apêndices A e B) e toda a intervenção. Por fim, na última etapa, será feita uma análise da precisão do método de cálculo do diâmetro da Terra, indicando possíveis melhorias para aumentar sua confiabilidade em pesquisas futuras.

É importante destacar que, no momento da aplicação, não foi possível registrar fotografias reais da atividade. Como a condução do experimento foi realizada individualmente e havia necessidade de atenção total à orientação dos alunos e à execução correta dos procedimentos, não foi viável conciliar essa responsabilidade com a captura de imagens. Dessa forma, os resultados apresentados serão discutidos sem registros fotográficos do momento da aplicação, utilizando apenas figuras ilustrativas ou simulações quando necessário.

4.1 Análise das estimativas das medidas astronômicas obtidas na aplicação

Nesta seção, a precisão dos resultados é analisada por meio de tratamento estatístico rigoroso aplicado pelo pesquisador aos dados brutos. Vale ressaltar que, para a estimativa da distância da Lua, este tratamento incluiu a aplicação do Critério de Chauvenet para a exclusão de valores espúrios (outliers), o que refinou o resultado em comparação à média simples discutida com os alunos na seção 4.2.5. Para as demais grandezas (diâmetro da Terra e da Lua), os valores mantêm-se consistentes com os obtidos em sala, uma vez que as correções sistemáticas (como a inclinação do solo) já haviam sido incorporadas ao procedimento experimental.

4.1.1 Estimativa do tamanho da Terra

Na aplicação do experimento foram obtidas três medidas válidas do tamanho da sombra e do comprimento do palito, utilizadas para o cálculo do ângulo de inclinação da sombra. Inicialmente eram 4 medidas, onde três foram feitas pelos alunos e uma pelo

pesquisador. Uma das medições dos alunos precisou ser descartada, pois o aparato (isopor com o palito) caiu e sofreu deformação, comprometendo o valor registrado. Segue exemplo na Figura 14 de uma simulação de um aparato utilizado.

Assim, apenas três medições foram consideradas efetivas para o cálculo. A seguir, apresenta-se a Tabela 1 com essas três medidas, já acompanhadas dos respectivos valores de tangente e do ângulo calculado.

Tabela 1 - Resumo das 3 medidas de ângulo de incidência solar.

Medida	Tamanho do Palito	Tamanho da Sombra	Tangente do ângulo	Ângulo (em graus)
Medida 1	7,9	29,4	3,7215	74,96
Medida 2	8,8	34,2	3,8864	75,57
Medida 3	9,1	35,3	3,8791	75,54
Média	-	-	3,8290	75,36

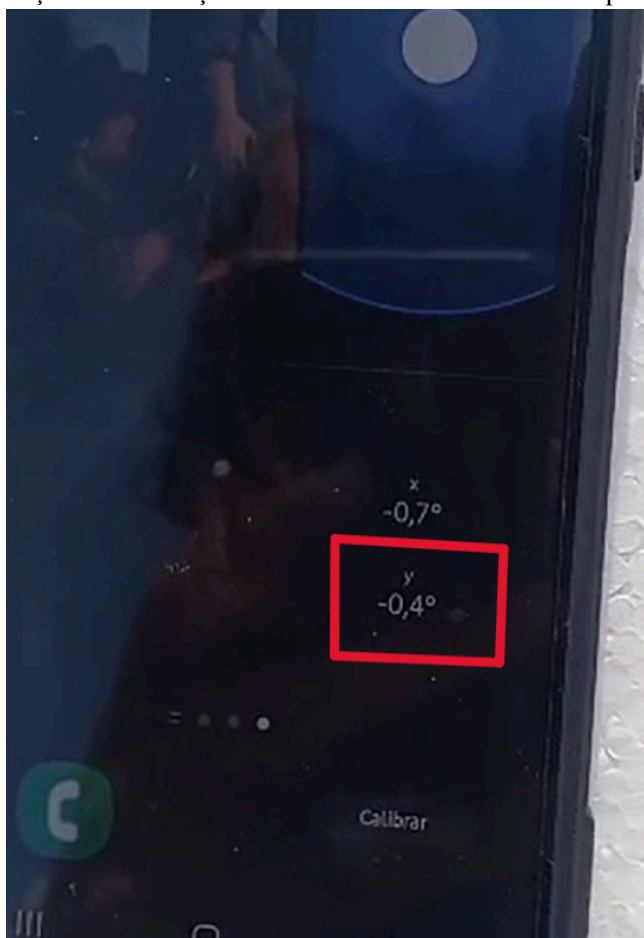
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 14 - Simulação da forma como foram feitas as medidas.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 15 - Medição da inclinação do solo onde foi realizado o experimento.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Conforme procedimento detalhado na Metodologia (seção 3.5.1), a verificação da superfície, utilizando o nível de superfície do celular, revelou uma inclinação de aproximadamente $-0,4^\circ$ na direção em que o ângulo estava sendo medido (Figura 15). Por conta disso, a média dos três ângulos obtidos precisou ser corrigida, adicionando $0,4^\circ$ para compensar o desnível do solo. A partir dessa média corrigida, deram-se sequência aos cálculos, utilizando-a como valor de referência. A seguir, são apresentadas as relações empregadas (equações 10, 11, 12 e 13) nos cálculos e os resultados obtidos (Tabela 2).

$$\text{Diferença angular} = \text{Ângulo Corrigido (em graus)} - \text{Ângulo na outra cidade (em graus)} \quad (10)$$

$$\text{Circunferência estimada da Terra (km)} = \left(\frac{\text{Distância da outra cidade (km)} \cdot 360^\circ}{\text{Diferença angular}} \right) \quad (11)$$

$$\text{Diâmetro estimado da Terra (km)} = \left(\frac{\text{Circunferência estimada da Terra (km)}}{\pi} \right) \quad (12)$$

$$\text{Raio estimado da Terra (km)} = \left(\frac{\text{Diâmetro estimado da Terra (km)}}{2} \right) \quad (13)$$

Tabela 2 - Medidas e resultados do experimento.

Resultados	
Ângulo Médio (em graus)	75,36
Ângulo Corrigido (em graus)	75,76
Ângulo na outra cidade (em graus)	68,80
Diferença angular	6,96
Distância da outra cidade (km)	774
Circunferência estimada da Terra (km)	40.046
Raio estimado da Terra (km)	6.373
Diâmetro estimado da Terra (km)	12.747

Fonte: Autoria própria (2025).

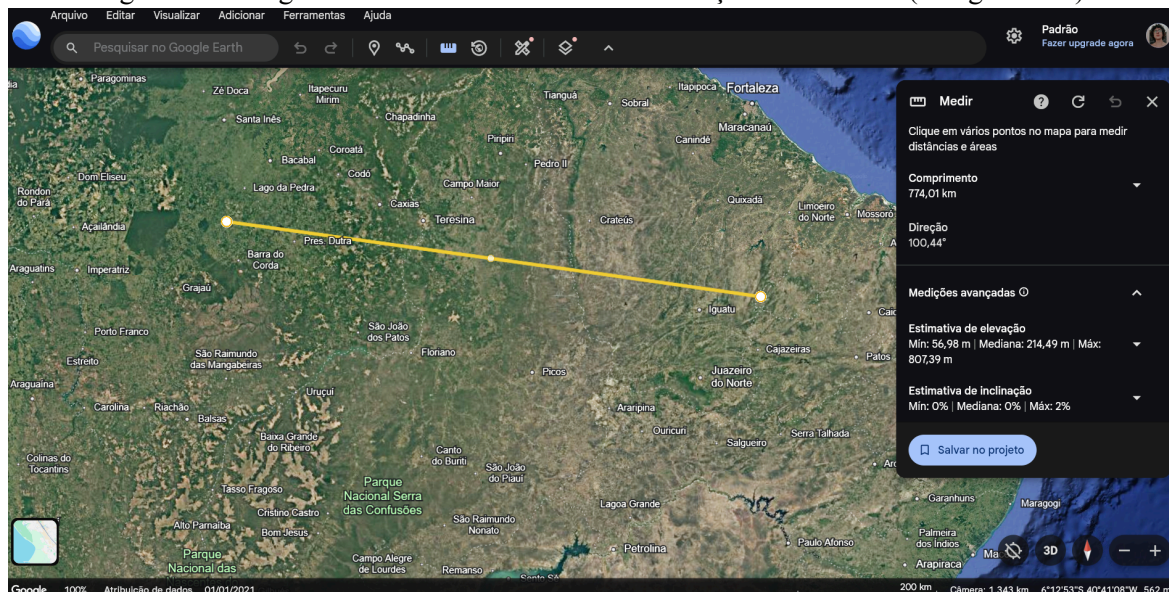
A segunda cidade utilizada para obter o ângulo de referência foi Lagoa Grande do Maranhão (MA), escolhida por estar aproximadamente alinhada com a direção da sombra medida localmente. No momento da aplicação, o software ShadowMap indicou uma inclinação da sombra solar de $21,2^\circ$ na cidade de Lagoa Grande do Maranhão (MA). Como era necessária a componente complementar desse ângulo, realizamos o cálculo $90^\circ - 21,2^\circ$, obtendo assim o ângulo de referência de $68,8^\circ$ para a cidade distante. E quanto à distância entre as cidades, ela foi medida utilizando a ferramenta de medição do Google Earth. Abaixo temos uma demonstração da coleta desses valores pelo ShadowMap (Figura 16) e pelo Google Earth (Figura 17).

Figura 16 - Imagem demonstrando como o ângulo foi coletado no ShadowMap.



Fonte: ShadowMap (2025).

Figura 17 - Imagem ilustrativa demonstrando a medição da distância (Google Earth).



Fonte: Google Earth (2025).

Por fim, observa-se que a estimativa obtida foi altamente precisa. O diâmetro estimado de 12.747 km ficou muito próximo do valor de referência do diâmetro equatorial da Terra (12.756 km), resultando em um erro de apenas 0,07%. Nesse caso, como existe uma diferença entre o diâmetro equatorial e polar, foi utilizado como valor de referência o diâmetro equatorial, pois as cidades dos experimentos são bem próximas ao equador. Esse resultado evidencia a eficácia e a precisão do método histórico utilizado, especialmente quando combinado com ferramentas modernas, como softwares de análise solar.

O valor experimental de 6.373 km obtido neste trabalho, apresentando um erro de apenas 0,07%, demonstra uma precisão superior à observada em outras abordagens didáticas presentes na literatura. Por exemplo, no trabalho de Azevedo et al. (2022), onde medições simultâneas foram realizadas entre cidades reais (Rio de Janeiro e Teresina), o raio encontrado foi de 6.400 km com um erro de 0,5%. Já Caetano e Moreira (2022), ao utilizarem uma metodologia similar à nossa com o auxílio de um software para simular a passagem zenital em uma segunda localidade, reportaram um desvio médio de -0,3%. Em contraste, experimentos que lidam com desafios geométricos de cidades em longitudes diferentes sem o auxílio de simulação de alinhamento, como o de Gomes e Marques (2023), apresentaram erros maiores, variando entre 1,6% e 8,0%. Isso evidencia que a estratégia de utilizar uma referência virtual (ShadowMap) para alinhar a longitude minimiza significativamente as incertezas geométricas.

Vale ressaltar que a precisão alcançada neste trabalho também valida a metodologia de coleta de dados assistida por tecnologia. Enquanto Gomes e Marques (2023) discutem a complexidade de generalizar o método de Eratóstenes para cidades fora do mesmo meridiano o que introduz fontes de erro geométrico adicionais, e Azevedo et al. (2022) destacam a dificuldade logística de sincronização temporal perfeita entre observadores distantes (como Rio de Janeiro e Teresina), nosso experimento minimizou esses ruídos externos. O uso de simuladores para o horário solar verdadeiro permitiu focar na execução geométrica local, sugerindo que, no Ensino Médio, a redução de variáveis ambientais incontrolláveis favorece a precisão final do raio terrestre.

4.1.2 Estimativa do tamanho da Lua

Este é o mais simples dos três experimentos. Ele foi realizado em sala de aula, com os alunos apenas assistindo ao vídeo do eclipse, conforme descrito na metodologia. Os tempos foram marcados em conjunto com os estudantes, solicitando que indicassem o momento exato em que acreditavam que cada marca deveria ser registrada. Segue os valores obtidos:

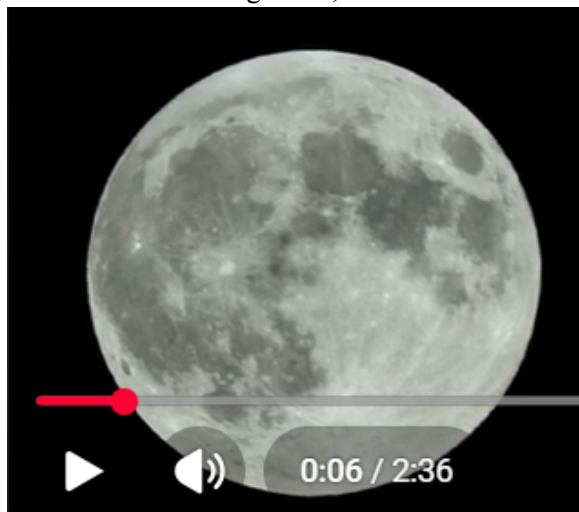
Tabela 3 - Instantes de tempo dos eventos.

Início do Eclipse	7
Atravessou totalmente a Lua	46
Fim do eclipse	147

Fonte: Autoria própria (2025).

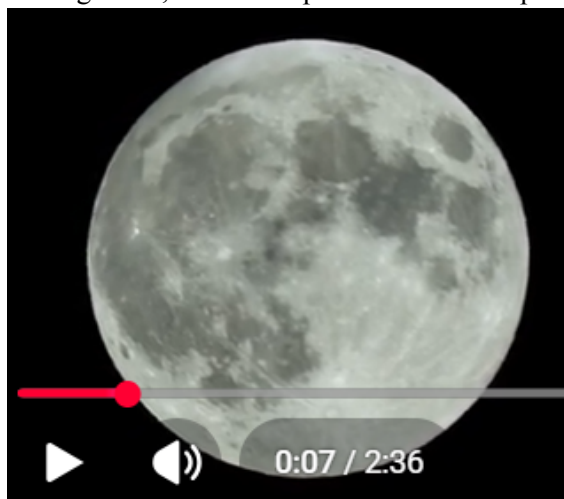
A seguir, são apresentadas três imagens (Figuras 18, 19 e 20) que ilustram o processo de identificação dos instantes no vídeo. Elas exemplificam a determinação do momento correspondente ao “Início do Eclipse”, mostrando um instante antes do ponto exato, o instante exato e um instante logo após o momento correto. Observa-se que, no instante 6 segundos, imediatamente antes dos 7 segundos, que é o marco do “Início do Eclipse”, não há qualquer sinal de sombra na Lua. Já no instante 7 segundos, nota-se o primeiro indício de escurecimento surgindo no canto superior esquerdo. No instante 8 segundos, essa sombra já se apresenta mais intensa e mais claramente definida. Dessa forma, o instante de 7 segundos foi selecionado como o momento correto do início do eclipse, decisão feita em conjunto com os alunos após a análise comparativa dos quadros. Esse mesmo procedimento de análise de instantes foi aplicado aos demais marcos do eclipse utilizados nos cálculos subsequentes.

Figura 18 - Instante 6 segundos, nenhuma sombra na lua.



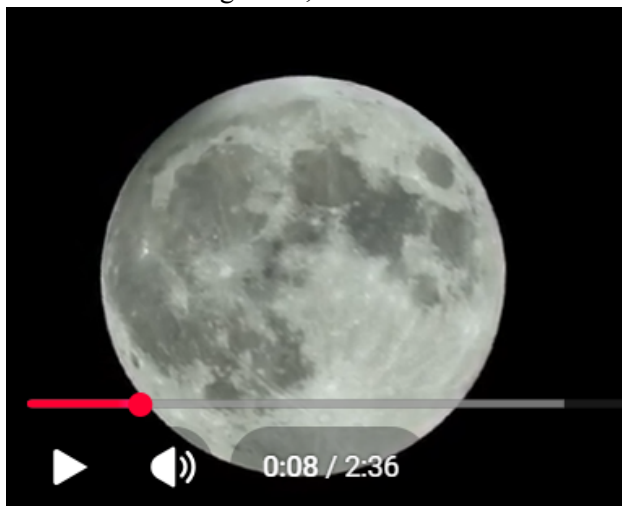
Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g>.

Figura 19 - Instante 7 segundos, a sombra aparece no canto superior esquerdo da lua.



Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g>.

Figura 20 - Instante 8 segundos, a sombra aumenta a intensidade.



Fonte: Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYf1g>.

Com os tempos apresentados na “Tabela 3 - Instantes de tempo dos eventos”, foram calculadas as durações correspondentes à passagem pela Terra e pela Lua (conforme descrito na metodologia). A partir desses valores, determinou-se a proporção Terra/Lua e, conseqüentemente, as dimensões estimadas da Lua. Os resultados calculados (Tabela 4) e as expressões (equações 14, 15, 16 e 17) são apresentados a seguir:

$$\text{Tempo para atravessar a Lua (segundos)} = \text{Atravessou totalmente a Lua} - \text{Início do Eclipse} \quad (14)$$

$$\text{Tempo para atravessar a sombra da Terra (segundos)} = \text{Fim do eclipse} - \text{Início do Eclipse} \quad (15)$$

$$\text{Proporção Terra/Lua} = \frac{\text{Tempo para atravessar a sombra da Terra (segundos)}}{\text{Tempo para atravessar a Lua (segundos)}} \quad (16)$$

$$\text{Diâmetro Estimado da Lua (km)} = \frac{\text{Diâmetro Estimado da Terra (km)}}{\text{Proporção Terra/Lua}} \quad (17)$$

Tabela 4 - Resultados do experimento.

Tempo para atravessar a Lua (segundos)	39
Tempo para atravessar a sombra da Terra (segundos)	140
Proporção Terra/Lua	3,59
Diâmetro Estimado da Terra (km)	12.747
Diâmetro Estimado da Lua (km)	3.551

Fonte: Autoria própria (2025).

Nos cálculos apresentados acima, foi utilizado o diâmetro da Terra estimado no experimento anterior. Entretanto, também é interessante repetir esses cálculos utilizando o valor teórico do diâmetro terrestre, que corresponde a 12756 km, ou seja, o diâmetro equatorial da Terra. Com esse valor teórico aplicado ao cálculo, o resultado obtido está na Tabela 5:

Tabela 5 - Resultados com o valor de referência.

Diâmetro Equatorial da Terra (km)	12756
Diâmetro Estimado da Lua (km)	3553

Fonte: Autoria própria (2025).

No caso do cálculo realizado com o diâmetro estimado da Terra, o valor obtido para o diâmetro da Lua foi de 3551 km (Tabela 4), resultando em um erro de 2,19% em relação ao valor de referência de 3475 km (diâmetro médio lunar).

Quando o cálculo foi repetido utilizando o diâmetro equatorial teórico da Terra (12756 km), o diâmetro estimado da Lua foi de 3553 km (Tabela 5), correspondendo a um erro de 2,26% em comparação ao valor de referência.

Observa-se que os dois resultados são extremamente próximos entre si, o que ocorre porque o experimento anterior, responsável pela estimativa do diâmetro terrestre, apresentou alta precisão. Assim, mesmo substituindo o valor da Terra por sua medida teórica, a variação no resultado final permanece mínima.

Um dado interessante a ser analisado é a razão entre os diâmetros Terra/Lua, tanto no valor teórico quanto no valor obtido experimentalmente. Utilizando o diâmetro equatorial da Terra e o diâmetro médio da Lua, a razão teórica é aproximadamente 3,67, indicando que a Terra possui cerca de 3,67 vezes o diâmetro lunar. No experimento, a razão estimada foi de 3,59, apresentando uma diferença muito pequena em relação ao valor teórico. Em termos percentuais, essa diferença corresponde a cerca de 2,23%. Esse resultado evidencia que o experimento também foi extremamente preciso nesse aspecto, reforçando a consistência do método utilizado e mostrando como observações simples podem produzir estimativas notavelmente próximas dos valores reais.

Esses erros reduzidos, ambos próximos de apenas 2%, demonstram não apenas a consistência entre os dois métodos, mas também a eficácia do procedimento histórico, que se apoia em observações simples porém capazes de produzir estimativas surpreendentemente confiáveis. Isso reforça o valor pedagógico e científico do método, mostrando que, mesmo com recursos limitados, é possível alcançar resultados muito próximos dos valores reais.

Com esses resultados, o método de cronometragem do eclipse lunar total revelou-se robusto, resultando em um diâmetro de 3551 km (erro de 2,19%) utilizando o diâmetro da Terra do experimento anterior e de 3553 km (erro de 2,26%) utilizando o valor de referência do diâmetro equatorial da Terra. Esse resultado supera a precisão relatada por Martins (2021), que, utilizando a mesma técnica de análise temporal de eclipses para o ensino, obteve um valor de 3580 km com erro de aproximadamente 3%. Além disso, ao compararmos a razão entre os diâmetros da Terra e da Lua, nosso valor experimental de 3,59 aproxima-se notavelmente da razão geométrica de 3,67 discutida por Oliveira, Lima e Bertuola (2016), que validaram a geometria do cone de sombra através da análise de fotografias. A consistência desses dados reforça que a análise temporal de vídeos de eclipses é uma ferramenta didática de alta precisão, acessível e capaz de reproduzir resultados históricos com fidelidade.

Aprofundando a análise comparativa, nossos resultados superam as limitações visuais descritas por Freitas et al. (2021) na reprodução do método de Aristarco. Esses autores relatam que a maior fonte de incerteza é a definição exata da dicotomia lunar (Lua meio cheia) a 'olho nu', o que gerou erros grosseiros em suas tentativas. Ao optarmos pela análise de vídeo quadro-a-quadro em grupo, conseguimos mitigar a subjetividade da visão humana individual apontada por Freitas, transformando uma percepção qualitativa vaga em um dado quantitativo mais robusto, próximo ao refinamento sugerido por Oliveira, Lima e Bertuola (2016) para observações de eclipses.

4.1.3 Estimativa da distância da Lua

Este foi o experimento que gerou a maior quantidade de dados, pois, devido à rapidez de execução e à simplicidade dos materiais utilizados (exemplo da realização na Figura 21), foi possível realizá-lo com todos os alunos presentes no dia. Cada estudante realizou sua própria medição. No total, 29 alunos estavam presentes, e seus respectivos dados de medição estão apresentados a seguir (Tabela 6):

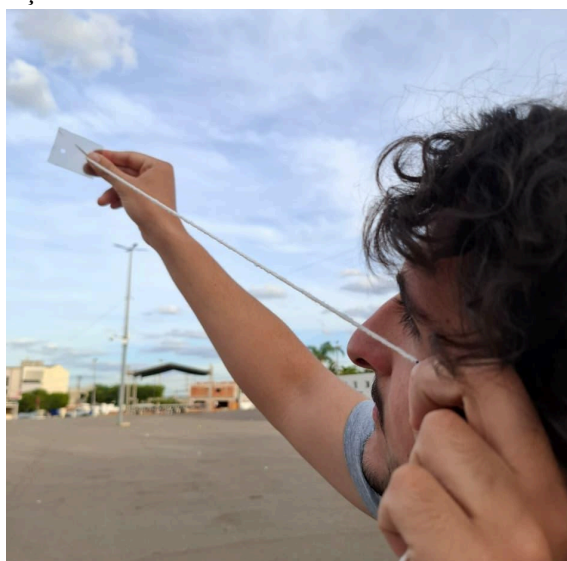
Tabela 6 - Medidas furo-olho dos alunos.

Medição	Distância (cm)
Medição 1	59
Medição 2	74
Medição 3	72
Medição 4	66
Medição 5	59
Medição 6	53
Medição 7	77
Medição 8	21
Medição 9	67
Medição 10	44
Medição 11	52
Medição 12	57
Medição 13	58
Medição 14	59
Medição 15	64
Medição 16	60

Medição 17	54
Medição 18	63
Medição 19	58
Medição 20	58
Medição 21	54
Medição 22	57
Medição 23	63
Medição 24	55
Medição 25	61
Medição 26	51
Medição 27	72
Medição 28	52
Medição 29	56

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 21 - Simulação da forma real de como foram feitas as medidas pelos alunos.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Inicialmente, o cálculo da distância da Lua foi realizado de forma direta, considerando a média aritmética de todas as medições coletadas pelos alunos, sem a aplicação de critérios de exclusão de dados. A média simples das distâncias furo-olho obtida foi de 58,48 cm. Ao dividir esse valor pelo diâmetro do orifício (0,6 cm), obteve-se uma razão distância/diâmetro de 97,47. Multiplicando-se essa razão pelo diâmetro da Lua estimado no experimento anterior (3551 km), chegou-se a uma distância preliminar de 346114 km. Comparado ao valor de referência, esse resultado apresentou um erro de 8,44%, o que já demonstra uma precisão satisfatória dada a simplicidade do método. Este foi o valor apresentado e discutido com a

turma durante a intervenção. No entanto, visando aprimorar a precisão científica da análise, os dados brutos foram submetidos posteriormente a um refinamento estatístico rigoroso, detalhado a seguir, para tratar possíveis valores discrepantes (outliers) e aumentar a confiabilidade da estimativa.

Com o conjunto de dados apresentado na Tabela 6, foi possível realizar a análise estatística fundamentada nos métodos de tratamento de erros experimentais de Taylor (1997) que foi comentado na metodologia. A análise iniciou-se avaliando os valores extremos do conjunto: o valor máximo (77 cm) e o valor mínimo (21 cm).

Para a aplicação do critério, foram considerados os seguintes parâmetros estatísticos da amostra:

- Média aritmética: 58 cm
- Desvio padrão amostral: 10,36 cm
- N (número de amostras): 29

Os resultados da aplicação do critério de Chauvenet para os extremos foram:

- Para o valor Máximo (77): O cálculo resultou em um valor de referência (NC) de aproximadamente 2,24. Como $2,24 > 0,5$, o valor 77 não foi descartado e permaneceu na análise (Figura 22).
- Para o valor Mínimo (21): O valor, que inicialmente já apresentava um desvio acentuado da média, resultou em um NC de aproximadamente 0,04. Como $0,04 < 0,5$, o critério indicou que é altamente improvável que este valor pertença à mesma distribuição estatística dos demais apenas por acaso, justificando sua rejeição estatística conforme as diretrizes para tratamento de dados espúrios (outliers) de Taylor (1997).

As Figuras 22 e 23 demonstram a aplicação das fórmulas no google planilhas:

Figura 22 - Demonstração do cálculo do valor de Chauvenet para o valor máximo.

MÁXIMO	77,00	77,00
MÍNIMO	44,00	21,00
CHAUVENET MÁX	0,93	=DISTT(ABS(C46-C50)/DESVPA(C2:C41);CONT.NÚM(C2:C41)-1;2)*CONT.NÚM(C2:C41)
CHAUVENET MIN	1,24	0,04 menor q 0,5 exclui

Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 23 - Demonstração do cálculo do valor de Chauvenet para o valor mínimo.

MÁXIMO	77,00	77,00
MÍNIMO	44,00	21,00
CHAUVENET MÁX	0,93	2,24
CHAUVENET MIN	1,24	=DISTT(ABS(C46-C51)/DESVPA(C2:C41);CONT.NÚM(C2:C41)-1;2)*CONT.NÚM(C2:C41)

Fonte: Elaboração do autor (2025).

Portanto, todas as análises realizadas a partir deste ponto desconsiderarão a oitava medição, resultando em um conjunto final de 28 dados.

A seguir, são apresentados a média aritmética e a incerteza da média, calculada através do Erro Padrão conforme definido por Taylor (1997). Os valores são apresentados primeiro sem arredondamento e, posteriormente, com o arredondamento compatível com o valor do erro padrão. Como, neste caso, o erro padrão é maior que 1, o arredondamento adequado é para zero casas decimais, garantindo consistência entre a incerteza e o número de algarismos significativos apresentados.

- Média: 59,82 cm
- Erro padrão: 1,43 cm
- Média arredondada: 60,00 cm
- Erro padrão arredondado: 1,0 cm
- Obs: Erro padrão calculado de acordo com a equação 18.

$$\text{Erro padrão} = \frac{\text{Desvio padrão amostral}}{\sqrt{\text{Quantidade de amostras}}} \quad (18)$$

Com o valor médio de 60 cm para a distância entre o olho e o furo, é possível prosseguir com o cálculo da estimativa da distância da Lua. O furo utilizado possuía 0,6 cm de diâmetro, assim, a razão distância/diâmetro é igual a 100 ($60 \div 0,6$).

Isso significa que, de acordo com o experimento, cabem aproximadamente 100 diâmetros lunares entre a Terra e a Lua. Utilizando essa proporção para estimar a distância lunar (calculando através da equação 19), obtêm-se os valores apresentados a seguir, tanto utilizando o diâmetro estimado da Lua do experimento anterior (Tabela 7) quanto o diâmetro médio lunar (Tabela 8), que é o nosso valor de referência.

$$\text{Distância da Lua} = \text{Diâmetro da lua} \cdot \text{Razão distância/diâmetro} \quad (19)$$

Tabela 7 - Estimativa com o valor do experimento anterior.

Diâmetro Estimado da Lua (km)	3551
Distância Estimada da Lua (km)	355100

Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 8 - Estimativa com o valor de referência.

Diâmetro Médio Lunar (km)	3475
Distância Estimada da Lua (km)	347500

Fonte: Autoria própria (2025).

Os dois resultados foram bem relevantes. O primeiro, calculado usando o diâmetro estimado da Lua, reflete bem a proposta desses experimentos: construir todo o conhecimento a partir das próprias medições. Esse valor foi obtido exclusivamente com os resultados dos três experimentos realizados, sem recorrer a nenhum dado de referência externo. Ou seja, é um cálculo completamente derivado das observações e medições experimentais: um resultado “do zero”. Já o segundo valor apresenta uma abordagem alternativa, pois utiliza o diâmetro real da Lua como dado de referência. Ele permite avaliar a precisão do método isoladamente, comparando o resultado experimental com um parâmetro conhecido e amplamente aceito. Assim, funciona como uma forma de validar o procedimento e identificar o impacto do erro experimental.

O valor de referência para a distância Terra–Lua, normalmente citado como 384.400 km, representa a distância média entre os centros da Terra e da Lua, obtida pela média entre perigeu e apogeu. No entanto, para nosso método, que mede ângulos a partir da superfície terrestre, a comparação correta deve considerar a distância da superfície da Terra até o centro da Lua. Assim, utilizamos como referência 378.022 km, obtidos subtraindo o raio equatorial terrestre (6378 km) da distância média.

Ao analisar os erros:

- Para o cálculo baseado no diâmetro estimado da Lua, o resultado obtido foi de 355.100 km. Comparando com o valor de referência (378.022 km), o erro relativo é de 6,06%.
- Para o cálculo usando o diâmetro real da Lua, o resultado foi de 347.500 km, o que implica um erro de aproximadamente 8,07% em relação ao valor de referência.

Os dois métodos produziram erros relativamente pequenos considerando a simplicidade e a natureza manual do experimento. O fato de o cálculo totalmente experimental (sem dados externos) apresentar erro menor que o cálculo usando o diâmetro real da Lua é especialmente interessante: isso sugere que a estimativa do diâmetro lunar obtida pelos experimentos foi bastante consistente com as outras grandezas medidas. Em outros termos, os erros individuais dos experimentos acabaram “se alinhando” e resultando num valor final mais próximo do real.

Já o método com o diâmetro real expõe os erros acumulados apenas desse experimento, e, por isso, mostra um desvio um pouco maior.

No geral, ambos os resultados mostram que o método histórico, baseado na geometria simples e observações diretas, é surpreendentemente eficaz. E considerando as limitações

instrumentais (furos, réguas, medidas manuais), chegar a valores com erros perto de 6–8% é muito bom.

Devido à quantidade de dados coletados neste experimento, também foi possível realizar um teste T de Student para avaliar a confiabilidade do valor obtido para a distância da Lua. O teste foi aplicado ao resultado de 355.100 km, que corresponde ao valor estimado a partir da combinação dos três experimentos realizados.

Para a análise, inicialmente determinou-se o T crítico, utilizando o Google Planilhas por meio da função INV.T.BC(). A análise adotou um nível de confiança de 95% e um grau de liberdade igual a $N - 1$, que neste caso é 27 (28 medições menos 1). O resultado forneceu um T crítico de aproximadamente 2,05.

O cálculo do T para o Teste T envolveu um procedimento mais complexo, utilizando técnicas de propagação de erro para obter a incerteza total do experimento. Como a grandeza final é fruto de operações matemáticas (divisão e multiplicação) entre variáveis com erros independentes, utilizou-se o método das derivadas parciais, aplicando a soma em quadratura das incertezas. O cálculo foi dividido em três etapas:

Etapa 1, Incerteza da Razão: Como a razão distância/diâmetro é calculada pela divisão da equação 20, a incerteza associada (Erro Razão) foi obtida pela fórmula de propagação para divisões, que aplicamos de acordo com a equação 21:

$$\text{Razão} = \frac{\text{Distância furo-olho}}{\text{Diâmetro furo}} \quad (20)$$

$$\text{Erro Razão} = \sqrt{\left(\frac{\text{Erro Distâncias}}{\text{Diâmetro do furo}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Média Distâncias} \cdot \text{Erro Diâmetro do furo}}{\text{Diâmetro do furo}^2}\right)^2} \quad (21)$$

Onde:

- Erro Distâncias (1 cm): Erro padrão das 28 medidas de distância, arredondado para zero casas decimais.
- Diâmetro do furo (0,6 cm): Diâmetro descrito na caixa do furador de papel utilizado.
- Média Distâncias (60 cm): Média aritmética das 28 medidas, arredondada para zero casas decimais.
- Erro Diâmetro do furo (0,05 cm): Definido como meio milímetro. Este valor contempla tanto o erro de leitura do paquímetro quanto possíveis efeitos de borda no orifício durante o experimento.

O cálculo acima está ponderando o peso do erro da medição da distância e do diâmetro do furo.

Etapa 2, Incerteza da Distância Terra-Lua: A estimativa da distância Terra-Lua é o produto entre a razão encontrada e o diâmetro da Lua. Portanto, a incerteza combinada final foi obtida pela propagação do erro de um produto, aplicado de acordo com a equação 22:

$$\text{Erro Distância Terra Lua} = \sqrt{(\text{Diâmetro da lua} \cdot \text{Erro Razão})^2 + (\text{Razão} \cdot \text{Erro diâmetro lua})^2} \quad (22)$$

Onde:

- Diâmetro da lua (3.551 km): Valor calculado no experimento anterior.
- Erro Razão (8): Erro da razão distância/diâmetro calculado na etapa anterior (arredondado).
- Razão (100): Relação distância/diâmetro estimada neste experimento.
- Erro diâmetro lua (1,05 km): Erro estimado da medida do diâmetro lunar. Foi calculado como o desvio padrão entre o raio equatorial (1.738,1 km) e o raio polar (1.736,0 km) dividido pela raiz de 2, estabelecendo uma estimativa estatística para a variação do diâmetro aparente do astro.

Etapa 3, Cálculo do T (Teste de Compatibilidade T de Student): Por fim, foi realizado o cálculo do T para o Teste T para verificar a compatibilidade do resultado, utilizando a equação 23:

$$t = \frac{|\text{Distância experimental} - \text{Distância de referência}|}{\text{Erro Distância Terra Lua}} \quad (23)$$

Onde:

- Distância experimental (355.100 km): Distância Terra-Lua calculada no experimento.
- Distância de referência (378.022 km): Distância real usada como referência.
- Erro Distância Terra Lua (aprox. 28.408 km): Incerteza total calculada na Etapa 2.

A análise estatística resultou em um $t = 0,807$. Como este valor se encontra abaixo do limite crítico ($T_{\text{crit}} = 2,05$), não há evidência estatística para rejeitar a compatibilidade entre as medidas. Portanto, considera-se o experimento conclusivo, validando o método utilizado para a estimativa da distância Terra-Lua.

Por fim, o método para determinação da distância Terra-Lua empregado neste trabalho permitiu estimar uma distância de 355.100 km (erro de ~6%), e usando valor de referência no cálculo uma distância de 347.500 km (erro de ~8,07%), esses resultados contornaram as dificuldades históricas enfrentadas por outros autores. Freitas et al. (2021), por exemplo, ao tentarem replicar o método da dicotomia (lua 50% iluminada) de Aristarco, concluíram ser experimentalmente inviável obter boas estimativas de distância devido à dificuldade de medir o ângulo exato de iluminação da Lua, errando por um fator superior a 20 vezes. O sucesso da

nossa abordagem alinha-se com as propostas experimentais do CEPA/USP, que validam o uso de fendas e semelhança de triângulos para este fim, mostrando-se uma alternativa mais viável para o ensino médio do que métodos complexos que exigem telescópios ou coordenação entre observadores distantes, como a paralaxe geocêntrica discutida por Rodrigues e Scarano Jr (2022).

Sob a ótica da viabilidade escolar, esse resultado traz um contraponto importante à proposta de Rodrigues e Scarano Jr. (2022). Embora os autores defendam corretamente a paralaxe como um conceito físico fundamental e 'agregador', eles propõem seu ensino através de simulações com alvos terrestres e uso de bússolas, dada a impossibilidade técnica de medir a paralaxe estelar ou solar em um pátio escolar. Nossos dados mostram que, ao substituímos a paralaxe direta pelo método de projeção por orifício (semelhança de triângulos), tornamos a medição da distância solar acessível e executável, mantendo o rigor geométrico sem esbarrar nas limitações instrumentais que a paralaxe geocêntrica impõe ao ensino básico.

4.2 Aplicação das etapas da UEPS e efeitos no processo de aprendizagem

Neste tópico do trabalho, serão analisadas cada uma das sete etapas das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) descritas na metodologia. Para cada etapa, será discutida a forma como foi aplicada, os resultados observados e os impactos gerados tanto na dinâmica da atividade quanto no processo de aprendizagem dos alunos.

4.2.1 Escolha de temas significativos

Essa etapa ocorre antes da aplicação e corresponde à escolha do tema a ser trabalhado; por isso, não há resultados a serem analisados neste momento. Contudo, ao longo da análise das etapas seguintes, observa-se que os conteúdos selecionados, Geometria e Trigonometria Básica aplicadas à Astronomia, típicos do Ensino Médio, mostram-se altamente significativos para os alunos.

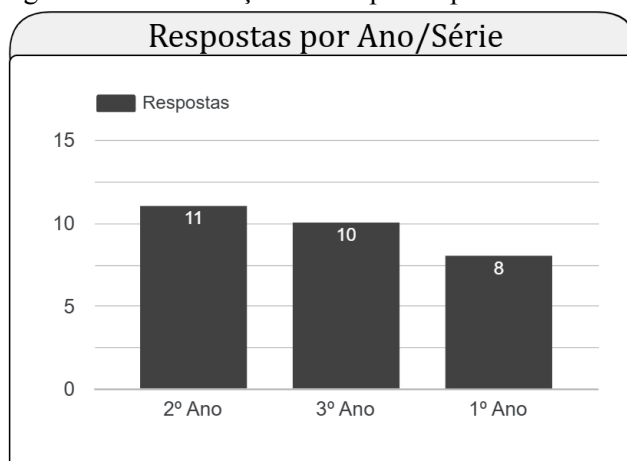
4.2.2 Levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos

O “Questionário Pré-Experimento” diagnóstico (cujas perguntas estão dispostas no Apêndice A) foi aplicado aos 29 alunos participantes, com o objetivo de levantar o

conhecimento prévio da amostra sobre Trigonometria, Geometria e noções básicas de Astronomia.

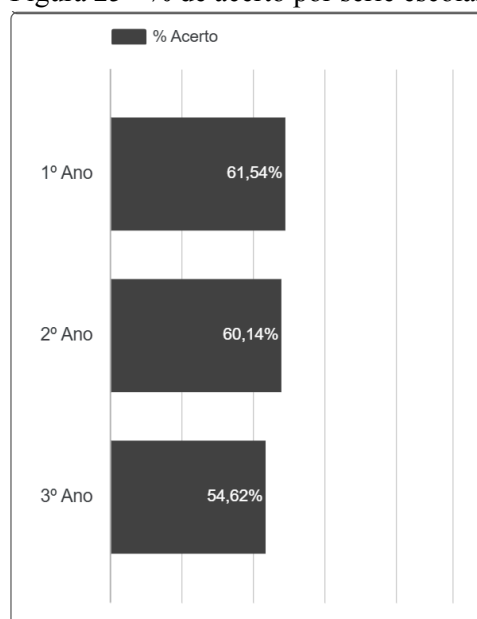
O questionário foi respondido pelos 29 alunos participantes. Em cada formulário também foi registrado o ano escolar de cada estudante, informação utilizada posteriormente para complementar as análises. Para análise dos resultados, o questionário também recebeu um identificador, um número de 1 a 29 que identifica o questionário, pois o nome dos alunos não foi coletado. A seguir, apresenta-se uma série de gráficos construídos por meio do software Looker Studio para a análise das respostas obtidas e, posteriormente, uma série de comentários, discussões e conclusões referentes aos dados apresentados nos gráficos.

Figura 24 - Distribuição das respostas por série escolar.



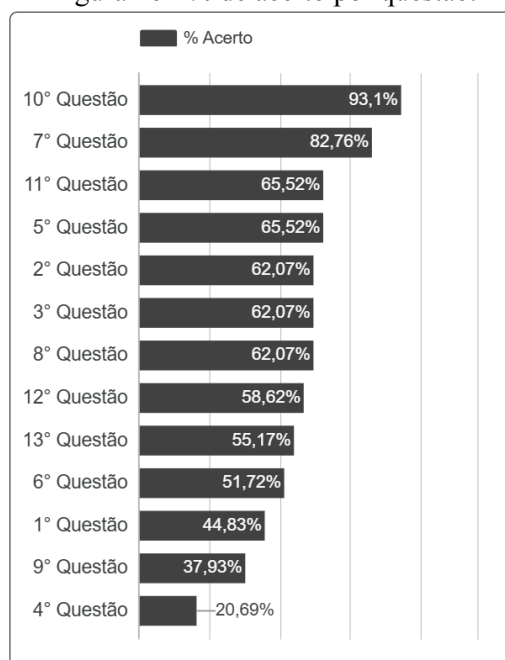
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 25 - % de acerto por série escolar.



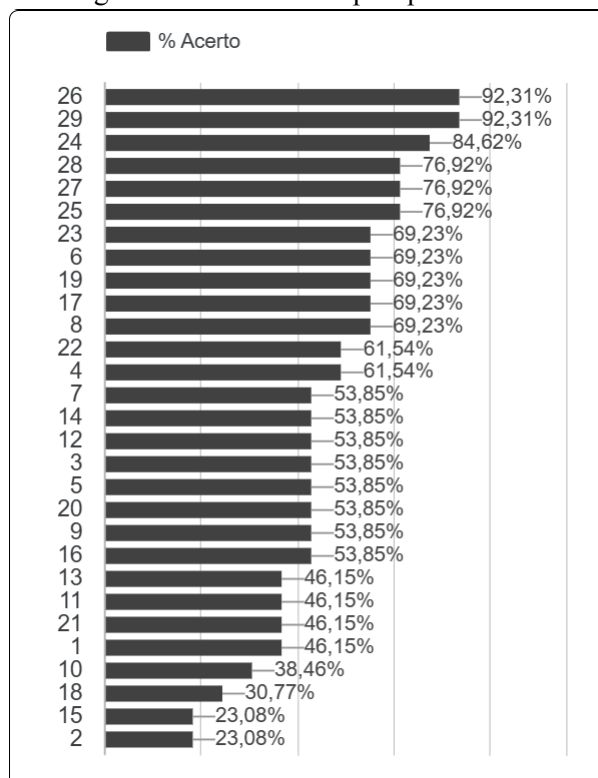
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 26 - % de acerto por questão.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 27 - % de acerto por questionário.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Quanto a participação e distribuição da amostra, conforme observado na Figura 24 (Distribuição das respostas por série escolar), a amostra de 29 alunos apresentou uma distribuição equilibrada entre as séries do Ensino Médio, com uma leve predominância dos

alunos do 2º ano (11 alunos), seguidos pelo 3º ano (10 alunos) e 1º ano (8 alunos). Essa heterogeneidade é benéfica para a pesquisa, pois permite avaliar como os conceitos de geometria e trigonometria, fundamentais para a astronomia de posição, estão retidos em diferentes estágios da formação escolar.

Em relação ao desempenho comparativo por série escolar, a análise da Figura 25 (% de acerto por série escolar) revela um dado contra-intuitivo e pedagogicamente relevante: observou-se uma relação inversamente proporcional entre o avanço na escolaridade e o desempenho no questionário. Os alunos do 1º ano obtiveram a maior média de acertos (61,54%), seguidos pelo 2º ano (60,14%), enquanto os alunos do 3º ano apresentaram o menor desempenho (54,62%). Este fenômeno pode ser explicado pela organização curricular tradicional. Os conteúdos de geometria plana e trigonometria no triângulo retângulo são, frequentemente, focos intensivos do 9º ano do Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. Portanto, para os alunos mais novos, esses conceitos ("subsunçores", na terminologia de Ausubel) estão mais vigentes na estrutura cognitiva. Já para os alunos do 3º ano, o distanciamento temporal desses conteúdos básicos, somado ao foco em conteúdos mais complexos de Física (como Eletromagnetismo) ou revisão geral para vestibulares, pode ter contribuído para o esquecimento ou a falta de prática na aplicação desses conceitos fundamentais.

Analisando o desempenho por questão e conteúdo, a Figura 26 (% de acerto por questão) permite um diagnóstico preciso das lacunas de aprendizagem. Nota-se uma disparidade clara entre o conhecimento declarativo (definições) e o conhecimento processual (aplicação de fórmulas):

- **Conceitos Consolidados:** As questões com maiores índices de acerto foram a 10ª (Graus em um círculo - 93,1%) e a 7ª (Definição de retas paralelas - 82,76%). Isso indica que os alunos possuem uma boa noção espacial e geométrica básica, essencial para a compreensão do paralelismo dos raios solares no Experimento de Eratóstenes.
- **Dificuldades na Aplicação:** Em contrapartida, as questões que exigiam manipulação algébrica ou distinção de fórmulas apresentaram os piores resultados. A 4ª questão, que solicitava a fórmula para calcular o cateto oposto ($\text{Cateto Oposto} = \text{Hipotenusa} \cdot \text{seno}(\theta)$), teve o desempenho mais crítico da avaliação (índice próximo a 20%), evidenciando que, embora os alunos possam lembrar das definições de seno e cosseno (questões 1 e 2, com ~ 44% a 62% de acerto), eles têm grande dificuldade em aplicar essas relações para encontrar uma medida desconhecida.

- Confusão Conceitual (Círculo): A 9ª questão, sobre o cálculo da circunferência usando o diâmetro ($\text{Circunferência} = \pi \cdot \text{diâmetro}$), obteve apenas 37,93% de acertos. É provável que muitos alunos tenham confundido com a fórmula que utiliza o raio ($2 \cdot \pi \cdot \text{raio}$), o que alerta para a necessidade de reforçar a relação entre raio e diâmetro antes das atividades práticas de medição da Terra e da Lua.

Quanto a heterogeneidade da turma, a Figura 27 (% de acerto por questionário) demonstra uma alta variabilidade no desempenho individual. Enquanto dois alunos (ID 26 e 29) alcançaram 92,31% de acerto, demonstrando domínio quase total dos pré-requisitos, outros estudantes (como ID 2 e 15) tiveram aproveitamento inferior a 25%. Essa disparidade confirma o desafio pedagógico enfrentado: a intervenção precisa ser capaz de engajar simultaneamente alunos com lacunas conceituais graves e alunos com alto domínio teórico. Esse cenário reforça a importância da aprendizagem colaborativa durante os experimentos práticos, onde a troca entre pares pode auxiliar no nivelamento do conhecimento da turma.

Por fim, os resultados do questionário pré-experimento indicam que a turma possui noções intuitivas de geometria (círculos, ângulos, paralelas), que servem como subsunçores iniciais. No entanto, há uma carência significativa na formalização matemática e na aplicação prática da trigonometria. Isso valida a proposta da UEPS apresentada neste trabalho, pois a intervenção não apenas utilizará esses conceitos, mas forçará os alunos a resgatá-los e aplicá-los em um contexto real (medição astronômica), promovendo a transição de um aprendizado mecânico (memorização de fórmulas esquecidas) para uma aprendizagem significativa, onde a matemática se torna uma ferramenta necessária para desvendar o cosmos.

4.2.3 Apresentação de situações-problema desafiadoras

A seguir, são apresentadas algumas imagens selecionadas das respostas dos alunos às situações-problema. Como o tempo disponível para a aplicação era limitado, estabeleceu-se um prazo de 15 minutos para que os estudantes refletissem sobre as três situações propostas. Após a aplicação, constatou-se que esse intervalo foi insuficiente, o que resultou em um número considerável de questões sem resposta.

Na situação-problema 1, “É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito?”, foram registradas 24 respostas entre os 29 alunos. Já a situação-problema 2, “Como podemos estimar o diâmetro da Lua utilizando um eclipse lunar total?”, recebeu 14 respostas.

Por fim, a situação-problema 3, “Seria possível determinar a distância entre a Terra e a Lua usando um simples furo em um pedaço de plástico fosco?”, obteve 11 respostas.

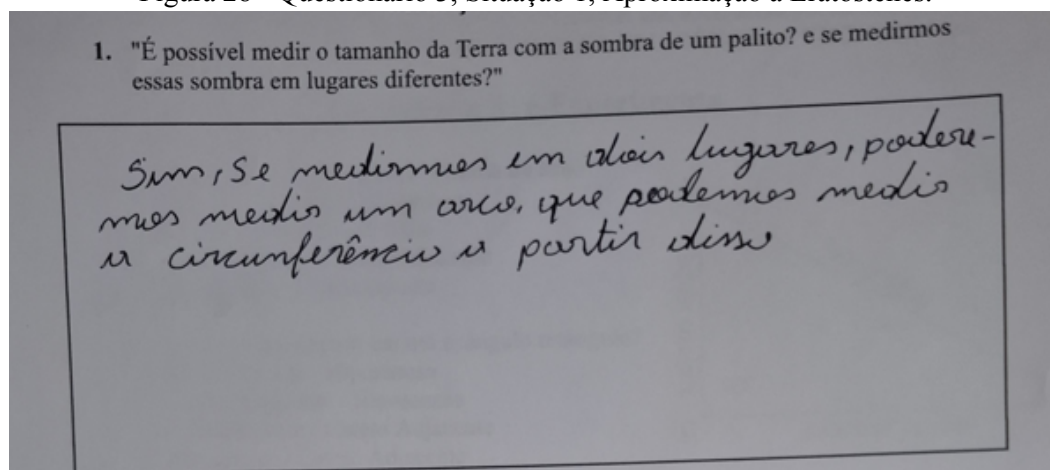
As imagens apresentadas a seguir representam categorias específicas de respostas identificadas para cada situação-problema. Posteriormente, são desenvolvidas análises detalhadas com base nessas respostas.

Na situação problema 1, as respostas foram agrupadas nas seguintes categorias:

- Aproximação a Eratóstenes (7 alunos): Sugestões semelhantes ou que remetem ao método de Eratóstenes.
- Respostas Inconclusivas (7 alunos): Afirmações vagas sem desenvolvimento metodológico claro.
- Variação Temporal (4 alunos): Sugestões focadas na mudança da sombra em intervalos de tempo.
- Hipótese de Impossibilidade (3 alunos): Afirmaram não ser possível realizar a medição proposta.
- Ilustração (2 alunos): Hipóteses expressas exclusivamente através de desenhos.
- Estratégias Atípicas (1 aluno): Proposta baseada em princípios físicos alternativos.

Segue agora alguns exemplares relevantes de cada categoria:

Figura 28 - Questionário 3, Situação 1, Aproximação a Eratóstenes.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 29 - Questionário 8, Situação 1, Aproximação a Eratóstenes.

Situações-Problemas

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Sim, se medirmos a sombra de um palito em uma ponta da linha no mesmo dia e hora e medirmos na outra ponta a sombra é diferente a distância de um ponto a outro é medida a sombra

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 30 - Questionário 6, Situação 1, Respostas Inconclusivas.

Situações-Problemas

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Acho que sim, ficaria com tamanhos quase iguais, porque depende de onde a sombra vem. e o local onde está fazendo

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 31 - Questionário 26, Situação 1, Respostas Inconclusivas.

Situações-Problemas

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Talvez, podemos medir assim com medidores as horas

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 32 - Questionário 18, Situação 1, Variação Temporal.

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Eu mediria, e escolheria um "tumo" para medir, escolheria de manhã cedo e a noite.

Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 33 - Questionário 12, Situação 1, Variação Temporal.

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Geis que não.
 Descrevendo o tempo de rotação e translação da Terra, que leva a dia e a noite, as
 particularmente para ocorrer, deixaria uma espécie de Tera fixada no chão por
 um ano inteiro e mediria as sombras todos os dias, em dois lugares diferentes



Fonte: Autoria própria (2025).

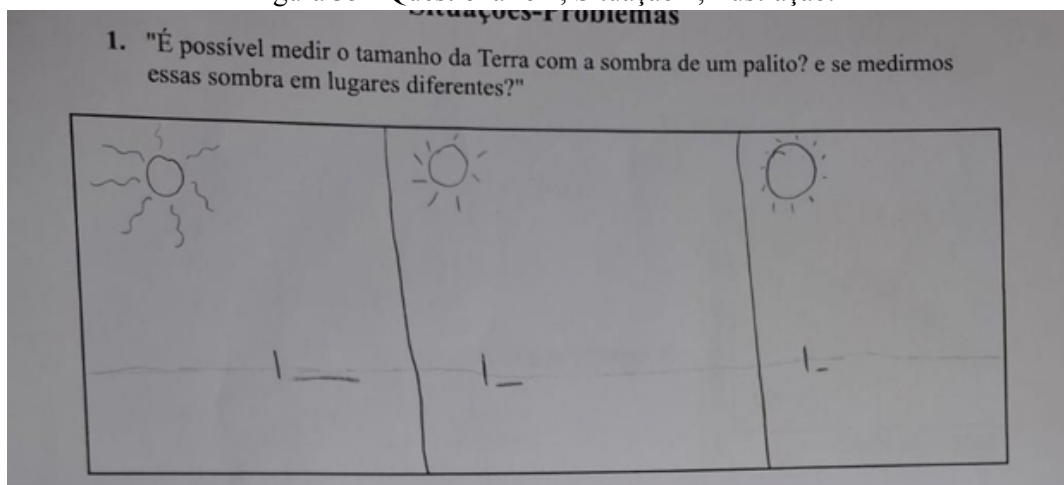
Figura 34 - Questionário 27, Situação 1, Hipótese de Impossibilidade.

1. "É possível medir o tamanho da Terra com a sombra de um palito? e se medirmos essas sombra em lugares diferentes?"

Não. Ainda consigo pensar que não, como seria possível
 obter tal medida com um palito? Acho impossível, mesmo
 que seja em lugares diferentes.

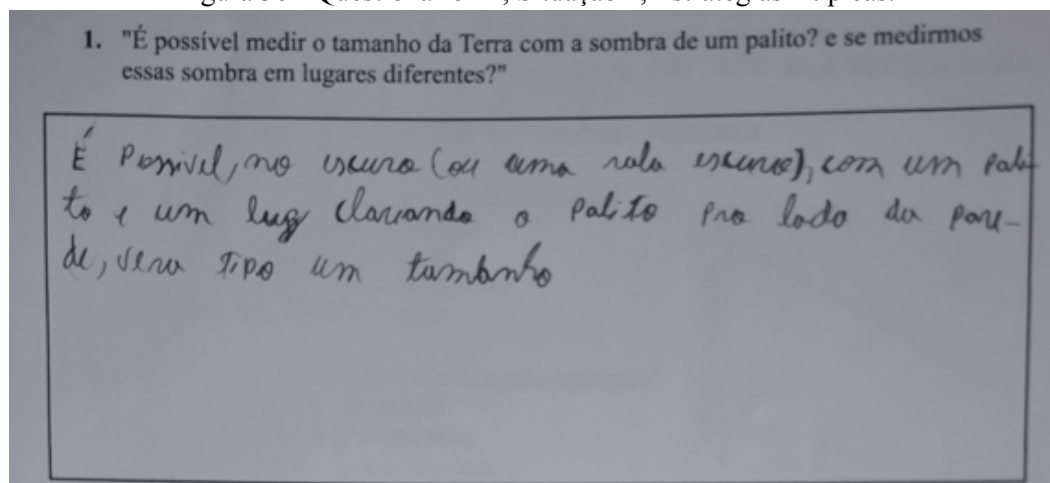
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 35 - Questionário 1, Situação 1, Ilustração.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 36 - Questionário 24, Situação 1, Estratégias Atípicas.



Fonte: Autoria própria (2025).

- Analisando as respostas da categoria "Aproximação a Eratóstenes":

Questionário 3 (Figura 28), o aluno respondeu: "Sim, se medirmos em dois lugares, poderemos medir um arco, que podemos medir a circunferência a partir disso."

Questionário 8 (Figura 29), o estudante elaborou uma hipótese complexa: "Sim, eu mediria a sombra ao meio-dia em uma ponta da Rússia no mesmo horário do que medirei no mesmo horário na outra Ponta e depois mediria a distância de um ponto a outro e mediria o ângulo."

Estas respostas são evidências claras da presença de subsunçores relevantes na estrutura cognitiva desses alunos. O Questionário 3 (Figura 28) demonstra uma compreensão da relação entre arco e circunferência, conceito fundamental para sair da medida local para a global. Já o Questionário 8 (Figura 29) é surpreendente pela precisão intuitiva: o aluno

identifica a necessidade de grande distância ("ponta da Rússia"), a questão temporal ("mesmo horário") e a correlação entre distância linear e angular. Para esses alunos, a intervenção didática servirá não para apresentar um conceito novo, mas para formalizar matematicamente uma intuição física já existente.

- Analisando as respostas da categoria “Variação Temporal”

Questionário 12 (Figura 33): "Creio que sim. Levando o tempo de rotação e translação da Terra, que leva 24hs e 1 ano, respectivamente para ocorrer, deixaria uma espécie de toco fincado no chão por um ano inteiro e mediria as sombras todos os dias, em dois lugares diferentes."

Questionário 18 (Figura 32): "Eu mediria, e escolheria um 'turno' para medir, escolheria de manhã cedo e a noite."

Essas respostas indicam uma mistura de conceitos astronômicos. O aluno do Questionário 12 (Figura 33) demonstra um repertório rico (rotação, translação), mas aplica o conhecimento de forma a sugerir um experimento longitudinal (ao longo do tempo) em vez de transversal. O Questionário 18 (Figura 32) foca na mudança diária da sombra. Pedagogicamente, isso sinaliza a necessidade de o professor diferenciar, durante a UEPS, que a variação da sombra ao longo do dia mede o tempo (rotação), enquanto a diferença da sombra no mesmo horário em locais diferentes mede a curvatura (espaço).

- Analisando as respostas da categoria “Respostas Inconclusivas”

Questionário 6 (Figura 30): "Acho que sim, ficaria com tamanhos quase iguais, porque depende de onde a sombra vem. e o local onde esta fazendo."

Questionário 26 (Figura 31): "Talvez, podemos medir assim como medirmos as horas."

O Questionário 26 (Figura 31) reforça a forte associação prévia que os alunos fazem entre "sombra" e "horas" (relógio de sol), que atua como um subsunçor parcialmente interferente. O Questionário 6 (Figura 30), embora vago, traz um insight correto: "depende de onde a sombra vem". Para este grupo, a atividade prática é essencial para transformar essas noções difusas em compreensão concreta.

- Analisando a resposta da categoria “Hipótese de Impossibilidade”

Questionário 27 (Figura 34): "Não. Ainda consigo pensar que não, como seria possível obter tal medida com um palito? Acho impossível, mesmo que seja em lugares diferentes."

Esta resposta representa um obstáculo comum: a dificuldade de acreditar que uma ferramenta simples e pequena (palito) possa mensurar algo imenso (Terra). Esse ceticismo é

valioso para a UEPS, pois cria uma tensão cognitiva. Ao final do experimento, quando este aluno vê o resultado matemático funcionar, ocorre uma reestruturação cognitiva poderosa (aprendizagem significativa), pois sua ideia prévia de "impossibilidade" é confrontada e refutada pela experiência.

- Analisando a resposta da categoria “Ilustração”

Questionário 1 (Figura 35): O aluno desenhou uma sequência de três quadros mostrando o Sol em diferentes posições (nascer, zênite, poente) e as respectivas sombras projetadas por uma haste, alterando o comprimento e direção.

O desenho demonstra que o aluno compreende perfeitamente a óptica geométrica básica: a posição da fonte de luz determina o tamanho da sombra. No entanto, assim como no grupo da "Variação Temporal", o foco está na mudança local e temporal do Sol, e não na curvatura da Terra. O desafio didático aqui é expandir esse modelo visual: fazer o aluno imaginar que, se o Sol está em posições diferentes ao mesmo tempo para observadores distantes, isso se deve à forma da Terra.

- Analisando a resposta da categoria “Estratégias Atípicas”

Questionário 24 (Figura 36): "É Possível, no escuro (ou uma sala escura), com um palito e um luz clareando o palito pro lado da parede, vero tipo um tamanho."

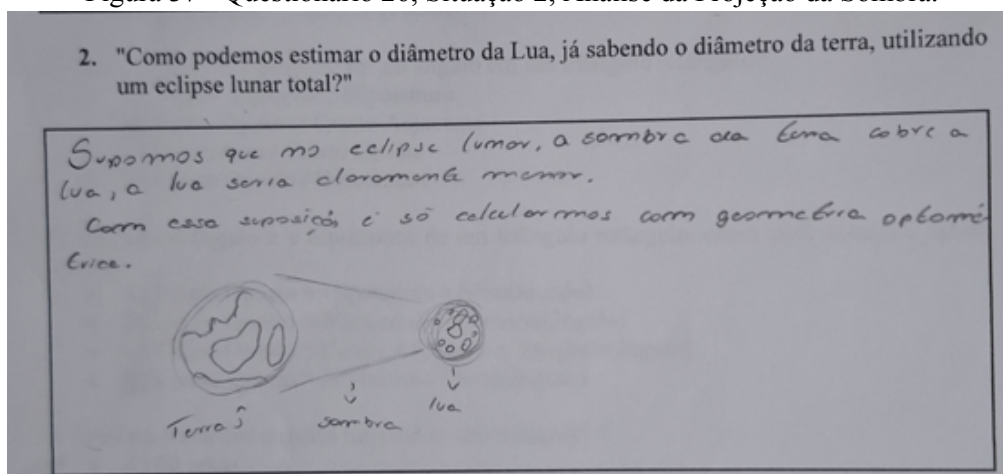
O aluno propõe um modelo de projeção (semelhança de triângulos em óptica), sugerindo projetar a sombra em uma parede para amplificá-la. Embora mostre criatividade, revela uma concepção desconectada da escala planetária, tratando a medição da Terra como um problema de bancada de laboratório. Isso evidencia a necessidade de contextualização da astronomia como uma ciência observacional de campo, e não apenas experimental de laboratório.

Já na situação problema 2, as respostas foram agrupadas nas seguintes categorias:

- Análise da Projeção da Sombra (5 alunos): Propostas que sugeriram comparar o tamanho ou a área da sombra da Terra projetada na Lua com o próprio disco lunar.
- Respostas Inconclusivas (5 alunos): Afirmações vagas ou genéricas que não apresentaram um desenvolvimento metodológico claro para a resolução do problema.
- Confusão Conceitual (2 alunos): Respostas que aplicaram a lógica do eclipse solar (sombra da Lua projetada na Terra), invertendo a geometria do fenômeno físico solicitado.
- Ilustração (2 alunos): Hipóteses expressas exclusivamente através de desenhos.

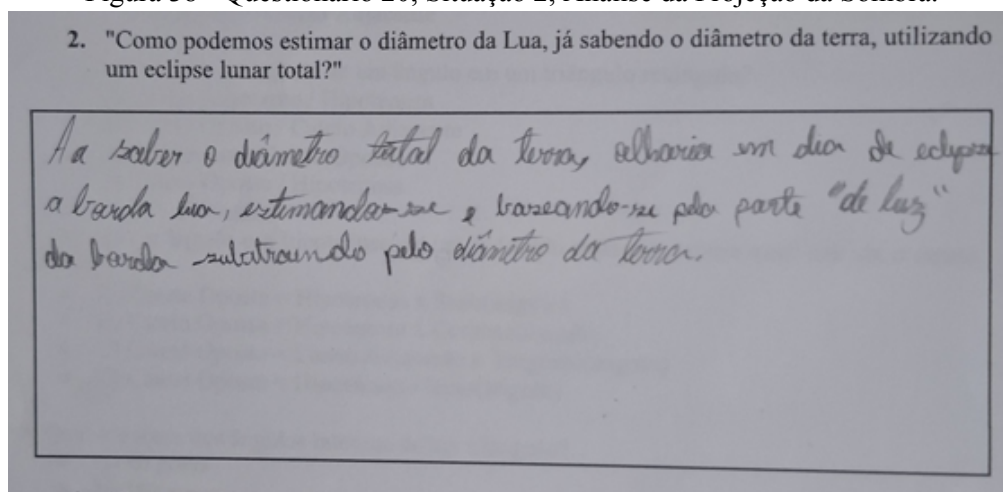
Segue agora alguns exemplares relevantes de cada categoria:

Figura 37 - Questionário 26, Situação 2, Análise da Projeção da Sombra.



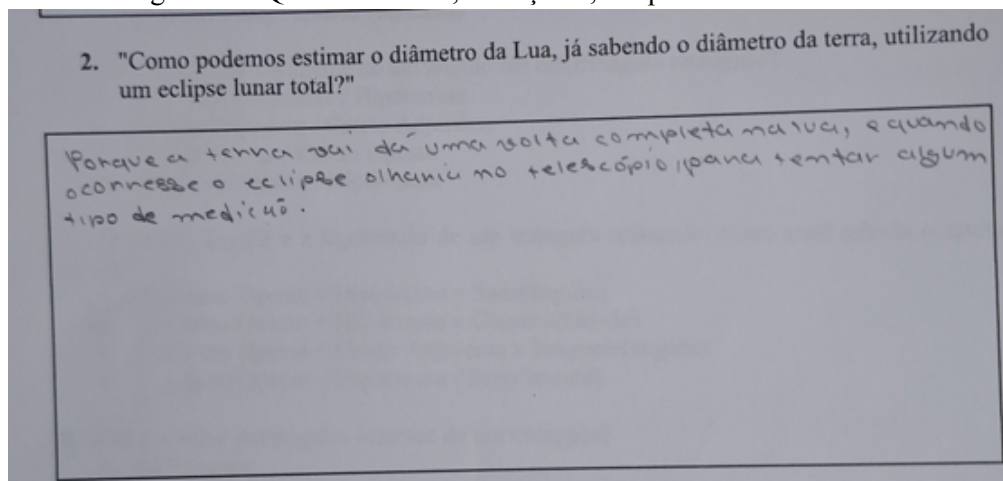
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 38 - Questionário 20, Situação 2, Análise da Projeção da Sombra.



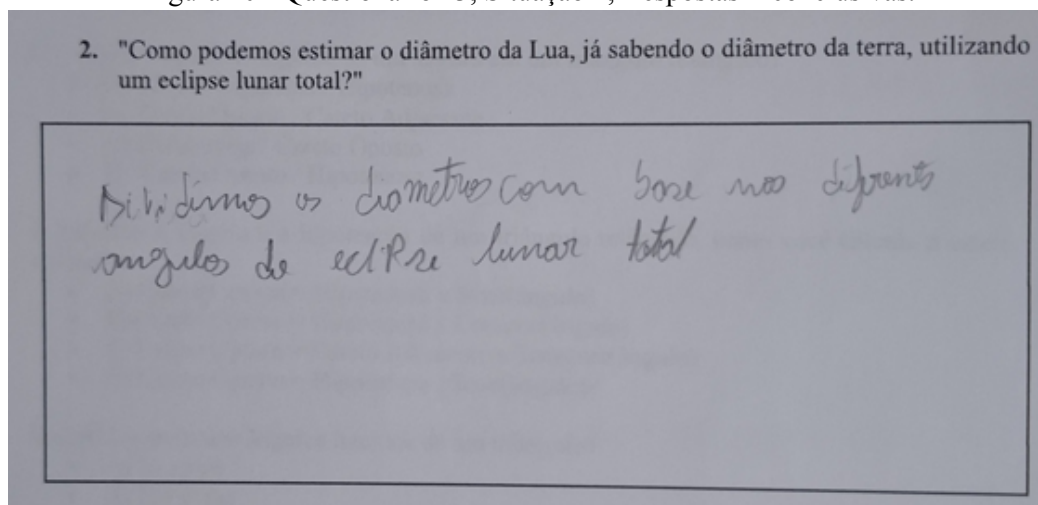
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 39 - Questionário 18, Situação 2, Respostas Inconclusivas.



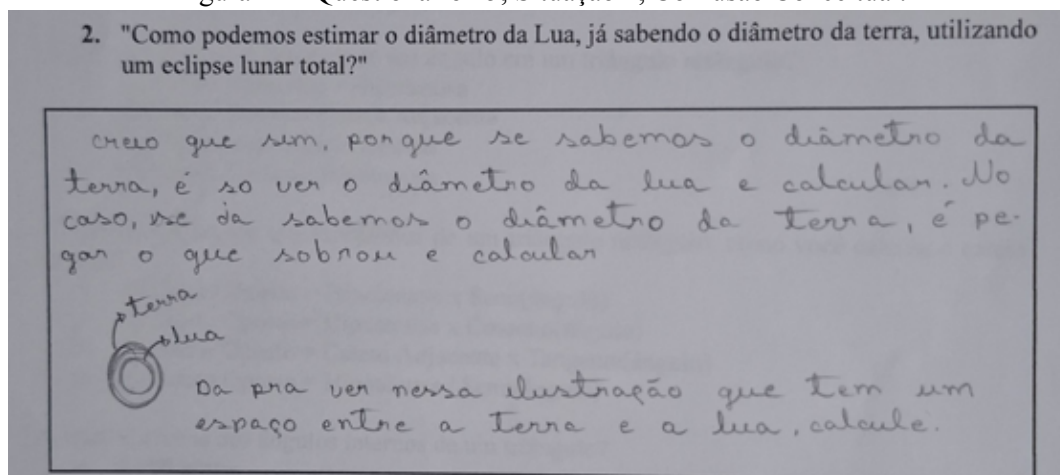
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 40 - Questionário 23, Situação 2, Respostas Inconclusivas.



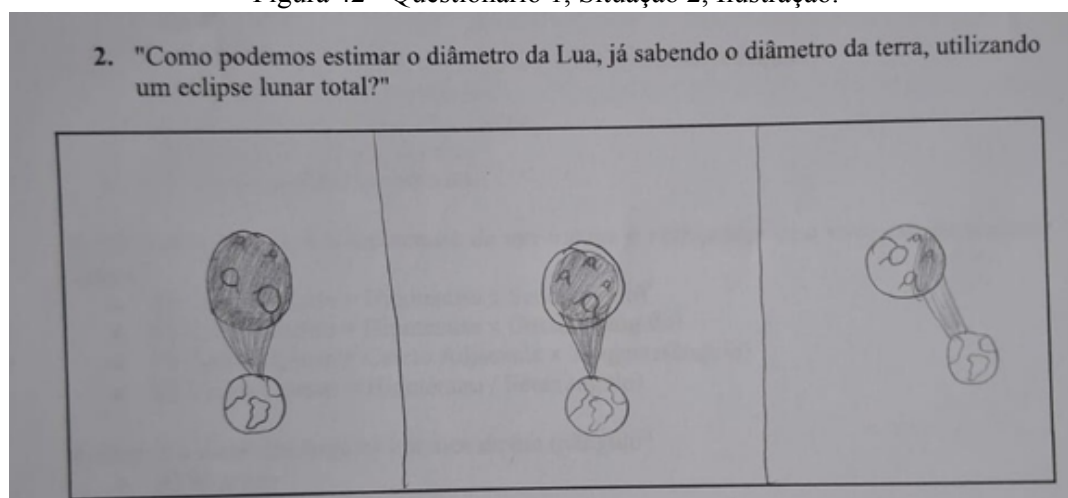
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 41 - Questionário 25, Situação 2, Confusão Conceitual.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 42 - Questionário 1, Situação 2, Ilustração.



Fonte: Autoria própria (2025).

- Analisando as respostas da categoria “Análise da Projeção da Sombra”

Questionário 26 (Figura 37): "Supomos que no eclipse lunar, a sombra da Terra cobre a lua, a lua seria claramente menor. Com essa suposição é só calcularmos com geometria optométrica.". O aluno acompanha a resposta com um desenho esquemático mostrando a Terra, um cone de sombra convergente e a Lua menor inserida nesse cone.

Questionário 20 (Figura 38): "Ao saber o diâmetro total da Terra, olharia em dia de eclipse a borda lua, estimando-se e baseando-se pela parte 'de luz' da borda subtraindo pelo diâmetro da Terra."

O Questionário 26 (Figura 37) é particularmente relevante pois o aluno, através do desenho, demonstra possuir o subsunçor da sombra cônica (umbra), conceito essencial para o método de Aristarco. A menção à "geometria" indica uma predisposição para a matematização do fenômeno. Já o Questionário 20 (Figura 38), embora apresente uma confusão ("subtraindo pelo diâmetro"), demonstra uma intuição correta de proporcionalidade: ele entende que existe uma relação direta entre o tamanho da sombra projetada e o tamanho do objeto (Terra).

- Analisando as respostas da categoria “Respostas Inconclusivas”

Questionário 18 (Figura 39): "Porque a Terra vai dá uma volta completa na lua, e quando ocorresse o eclipse olharia no telescópio, para tentar algum tipo de medição."

Questionário 23 (Figura 40): "Dividimos os diâmetros com base nos diferentes ângulos de eclipse lunar total"

A resposta do Questionário 18 (Figura 39) expõe uma concepção alternativa grave: a ideia de que "a Terra dá volta na Lua", sugerindo uma confusão fundamental sobre os movimentos orbitais. Além disso, a dependência do "telescópio" reforça a visão de que a ciência só se faz com instrumentos complexos, ignorando o poder da dedução lógica a olho nu. O Questionário 23 (Figura 40), por sua vez, utiliza um "vocabulário científico mímico" (ângulos, diâmetros), mas sem estabelecer uma relação causal válida, evidenciando a necessidade de ancorar esses termos em significados concretos durante a intervenção.

- Analisando as respostas da categoria “Confusão Conceitual”

Questionário 25 (Figura 41): "creio que sim, porque se sabemos o diâmetro da Terra, é só ver o diâmetro da lua e calcular. No caso, se já sabemos o diâmetro da Terra, é pegar o que sobrou e calcular [Desenho mostrando dois círculos concêntricos, indicando 'terra' fora e 'lua' dentro]. Dá pra ver nessa ilustração que tem um espaço entre a Terra e a lua, calcule."

A ilustração e o texto sugerem que o aluno está visualizando uma sobreposição de discos (como em um eclipse solar anular ou uma ocultação), e não a passagem da Lua pela sombra da Terra. A ideia de "pegar o que sobrou" sugere um raciocínio de subtração de áreas visuais. Este erro é fértil para a discussão em sala, pois permite ao professor diferenciar o bloqueio da luz (eclipse solar) da projeção de sombra (eclipse lunar), corrigindo a geometria do sistema.

- Analisando as respostas da categoria “Ilustração”

Questionário 1 (Figura 42): O aluno desenhou uma sequência de três quadros (estilo história em quadrinhos) mostrando a Terra e a Lua. O desenho representa a Lua entrando no cone de sombra, ficando totalmente coberta e saindo.

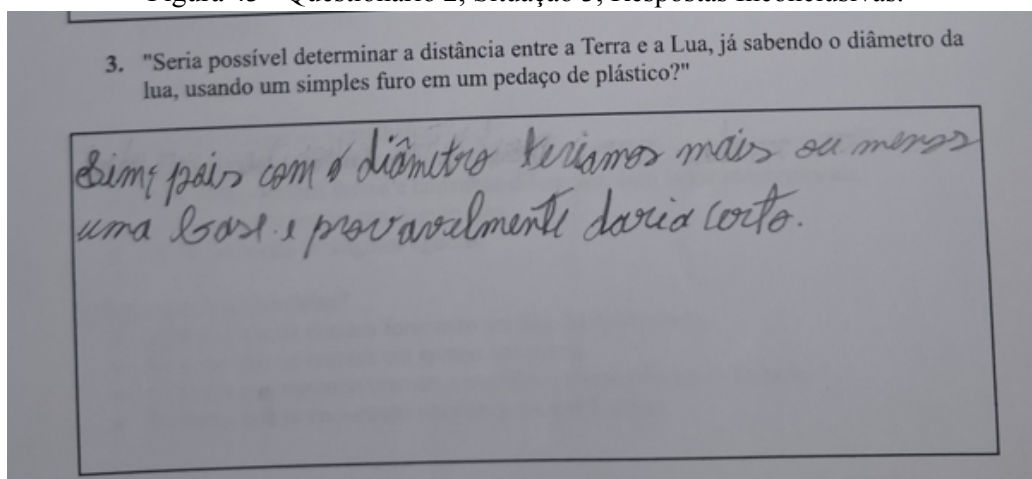
A representação gráfica está correta do ponto de vista sequencial e qualitativo: o aluno sabe o que acontece (a Lua entra na sombra da Terra). No entanto, falta a conexão quantitativa. O desafio da UEPS para este perfil de aluno é transformar a observação do "tempo" (duração do evento desenhado) em "espaço" (tamanho da Lua), utilizando a velocidade constante da órbita como chave de conversão.

Por fim, na situação problema 3, as respostas foram agrupadas nas seguintes categorias:

- Respostas Inconclusivas (6 alunos): Afirmações vagas sem desenvolvimento metodológico claro.
- Aproximação ao Método de Aristarco (2 alunos): Respostas que remetem ao método de Aristarco, tentando relacionar visualmente o furo e o disco da Lua.
- Hipótese de Impossibilidade (2 alunos): Afirmaram não ser possível realizar a medição proposta.
- Estratégias Atípicas (1 aluno): Proposta baseada em princípios físicos alternativos.

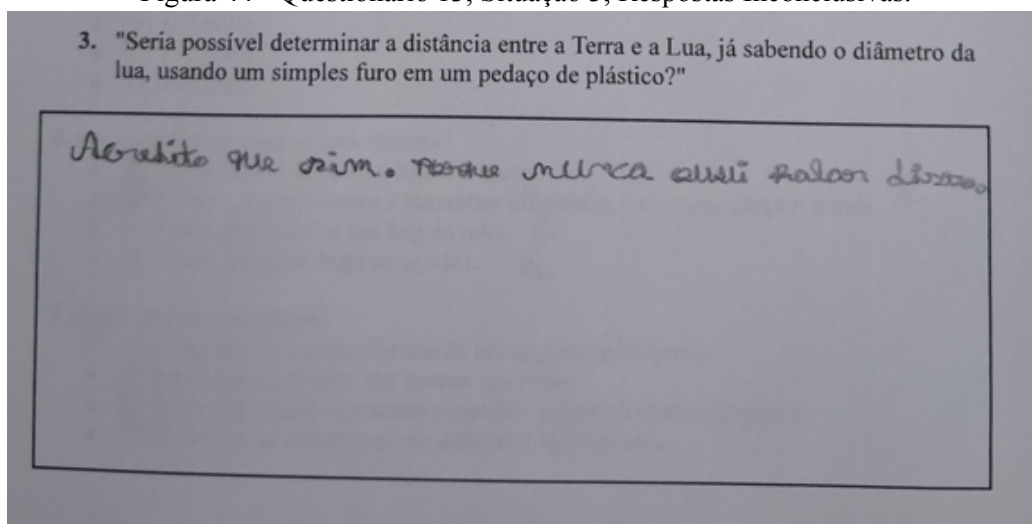
Segue agora alguns exemplares relevantes de cada categoria:

Figura 43 - Questionário 2, Situação 3, Respostas Inconclusivas.



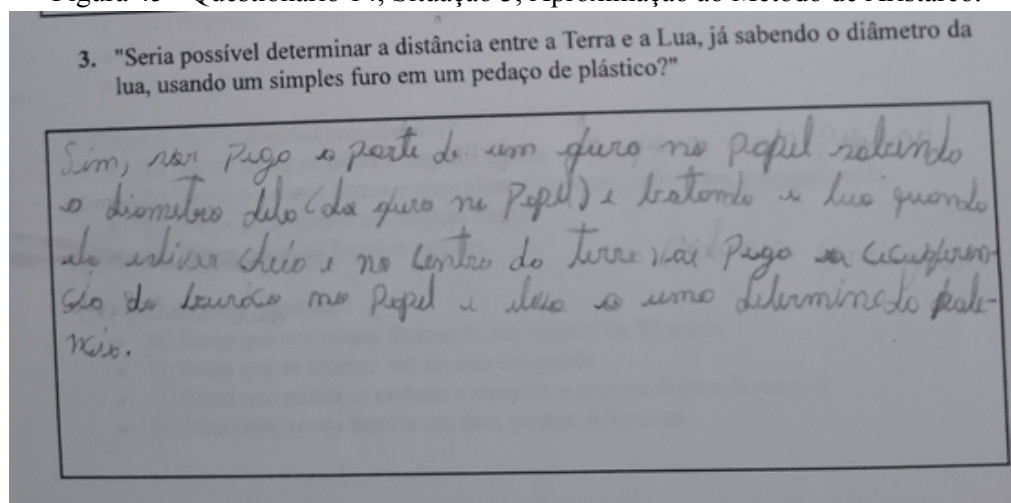
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 44 - Questionário 13, Situação 3, Respostas Inconclusivas.



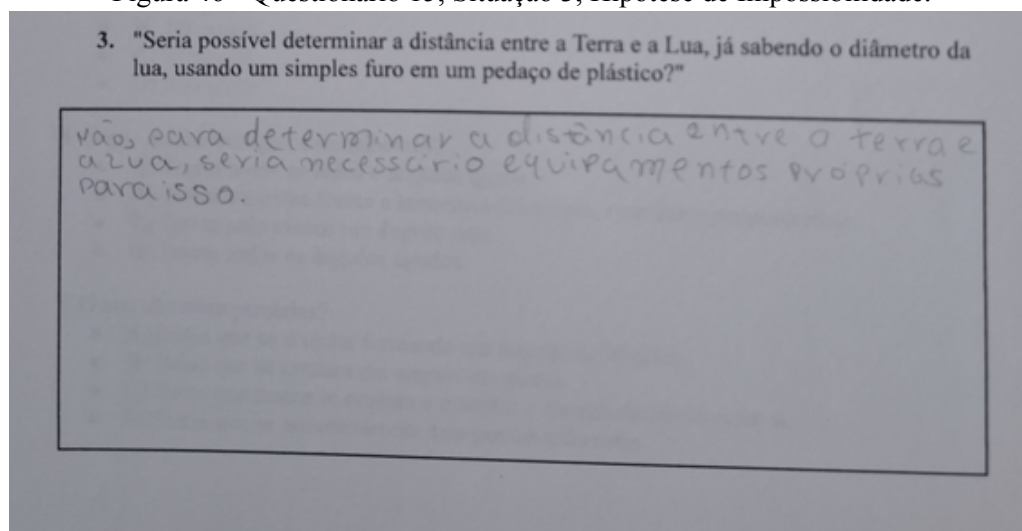
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 45 - Questionário 14, Situação 3, Aproximação ao Método de Aristarco.



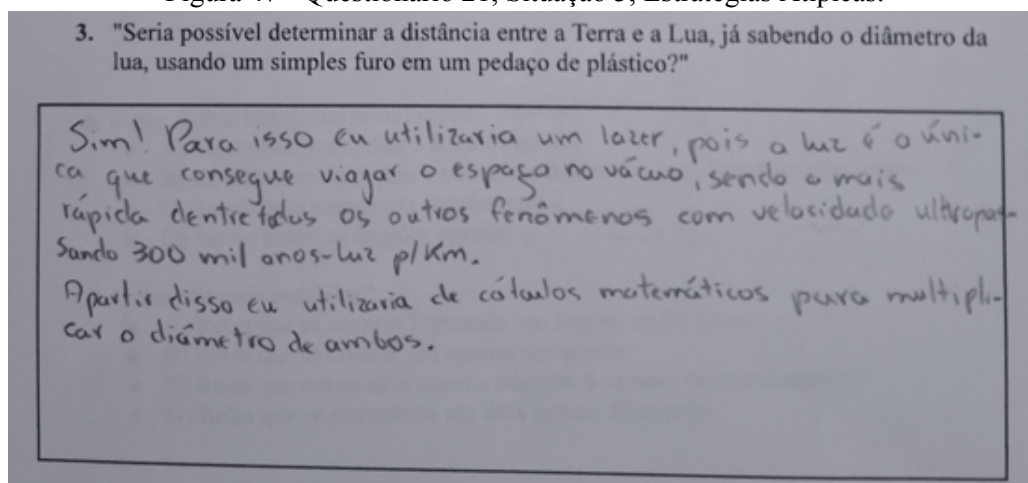
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 46 - Questionário 15, Situação 3, Hipótese de Impossibilidade.



Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 47 - Questionário 21, Situação 3, Estratégias Atípicas.



Fonte: Autoria própria (2025).

- Analisando as respostas da categoria “Respostas Inconclusivas”

Questionário 13 (Figura 44): "Acredito que sim. Porque nunca ouvi falar disso."

Questionário 2 (Figura 43): "Sim, pois com o diâmetro teríamos mais ou menos uma base e provavelmente daria certo."

O Questionário 13 (Figura 44) revela uma postura passiva diante do conhecimento científico: a validade de um método depende de "ter ouvido falar", e não da dedução lógica. O Questionário 2 (Figura 43), por sua vez, reconhece que o "diâmetro" é uma peça-chave ("uma base"), mas não consegue avançar para o como utilizá-lo. Pedagogicamente, isso indica que a intervenção precisa focar fortemente na demonstração prática: esses alunos precisam ver o fenômeno da semelhança de triângulos acontecer para preencher essa lacuna procedimental.

- Analisando as respostas da categoria “Aproximação ao Método de Aristarco”

Questionário 14 (Figura 45): "Sim, se pego a parte de um furo no papel sabendo o diâmetro dele (do furo no papel) e batendo a lua quando de esticar cheio e no centro da Terra vai pego a circunferência do buraco no papel e elevo a uma determinada distância."

Embora a redação apresente dificuldades de coesão, o raciocínio físico é surpreendentemente alinhado ao método de Aristarco. O aluno menciona variáveis cruciais: o "diâmetro do furo", a ação de "esticar" (indicando a importância da distância focal/visual) e a relação com a "circunferência" (tamanho aparente). Ele intui que existe uma posição específica ("determinada distância") onde o alinhamento ocorre. Para a UEPS, este é o subsunçor ideal: o aluno já possui a noção de escala visual, restando apenas formalizar a relação matemática.

- Analisando as respostas da categoria “Hipótese de Impossibilidade”

Questionário 15 (Figura 46): "Não, para determinar a distância entre a Terra e a lua, seria necessário equipamentos próprios para isso."

Esta resposta é um exemplo clássico de concepção alternativa sobre a natureza da ciência. O aluno associa "medir" exclusivamente ao uso de instrumentos de alta precisão ("equipamentos próprios"), desconsiderando a potência do raciocínio geométrico com ferramentas simples. Este é um ponto focal para a UEPS: desmistificar a astronomia, mostrando que a inteligência do método pode superar a simplicidade do instrumento. A realização bem-sucedida do experimento com o furo terá um alto impacto cognitivo para este perfil de estudante.

- Analisando as respostas da categoria “Estratégias Atípicas”

Questionário 21 (Figura 47): "Sim! Para isso eu utilizaria um laser, pois a luz é a única que consegue viajar o espaço no vácuo, sendo a mais rápida dentre todos os outros fenômenos com velocidade ultrapassando 300 mil anos-luz p/km. Apartir disso eu utilizaria de cálculos matemáticos para multiplicar o diâmetro de ambos."

O aluno propõe um método moderno (semelhante ao Lunar Laser Ranging usado pela NASA), demonstrando um repertório de física moderna (velocidade da luz, vácuo). No entanto, há confusões conceituais significativas: a unidade de velocidade ("anos-luz p/km") está incorreta e a proposta de cálculo final ("multiplicar o diâmetro") é incoerente com o método de tempo de voo da luz. Apesar dos erros, a resposta denota alto engajamento e curiosidade científica, que podem ser canalizados para a compreensão dos métodos históricos como precursores das técnicas modernas.

Em síntese, a análise das respostas às três situações-problema revela que, embora exista um repertório intuitivo valioso na turma, como a noção de que sombras e luz carregam informações geométricas, ele carece de formalização metodológica. Observou-se que, à medida que o nível de abstração aumentava, crescia também a dependência de concepções alternativas ou a crença na impossibilidade de realizar ciência sem equipamentos tecnológicos avançados. A recorrência de respostas inconclusivas e a confusão entre fenômenos distintos (como a inversão da lógica dos eclipses) evidenciam dificuldades conceituais que a simples exposição teórica dificilmente superaria.

Portanto, esses diagnósticos validam a pertinência da sequência didática proposta nesta UEPS. As atividades práticas não apenas auxiliarão no preenchimento dessas lacunas, mas servirão para confrontar os obstáculos identificados, especialmente o ceticismo quanto à medição com instrumentos simples. Ao transformar as intuições geométricas (identificadas nas categorias de 'Aproximação') em procedimentos experimentais concretos, a intervenção busca promover a evolução dessas concepções iniciais para um conhecimento científico estruturado, onde a matemática se revela como a ferramenta capaz de desvendar as escalas do universo.

4.2.4 Realização de atividades práticas (experimentos)

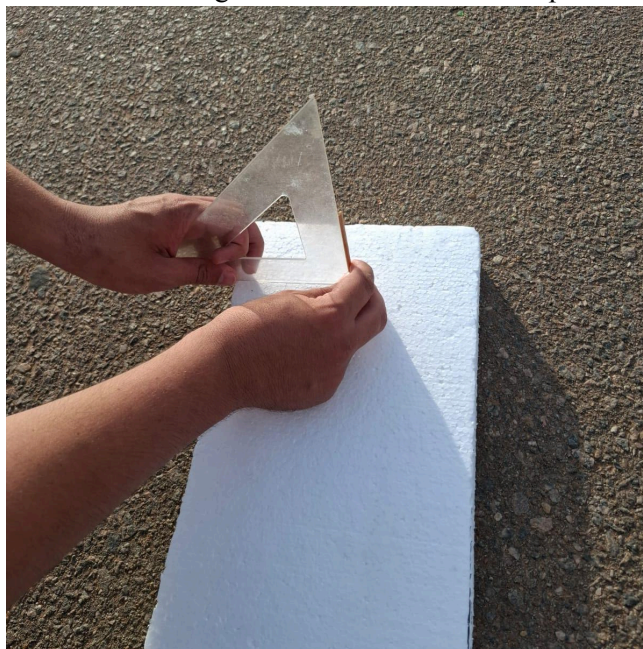
Esta etapa constituiu o núcleo da intervenção pedagógica, momento em que os estudantes transitaram da teoria para a ação investigativa. A realização dos experimentos ocorreu fora do ambiente tradicional da sala de aula, utilizando a praça de eventos pública próxima a escola. Essa mudança de cenário foi estratégica para permitir a observação direta dos fenômenos celestes e garantir o espaço necessário para as medições.

A dinâmica foi organizada em três momentos distintos, seguindo a ordem lógica de dependência dos dados:

1. A Experiência de Eratóstenes (Medição da Terra): A execução deste experimento envolveu a montagem dos aparatos compostos por base de isopor e palito de churrasco e a realização das medições. Devido à complexidade logística de montagem, esta etapa foi realizada exclusivamente pelo pesquisador e por três alunas voluntárias, onde cada participante montou seu próprio aparato e realizou sua medição. Observou-se que, apesar da simplicidade dos materiais, o grupo enfrentou desafios reais da experimentação científica, como garantir a verticalidade da haste (utilizando esquadros) e definir com precisão o final da

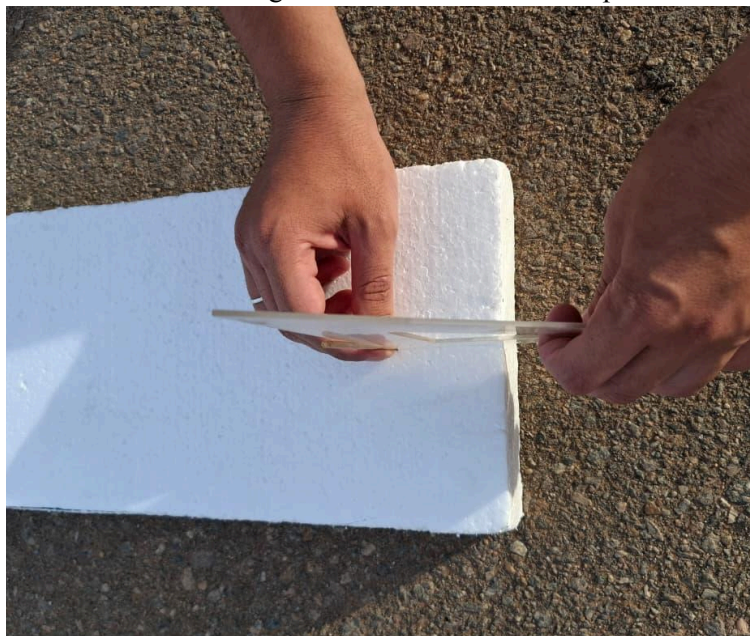
sombra projetada. A necessidade de analisar a inclinação do solo e assegurar que o palito estivesse perfeitamente perpendicular à base (Figuras 48 e 49) permitiu introduzir os discentes às variáveis e incertezas inerentes à implementação da prática científica, mostrando a necessidade de precisão para bons resultados.

Figura 48 - Simulando como foi garantido a verticalidade do palito usando esquadro.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 49 - Simulando como foi garantido a verticalidade do palito usando esquadro.

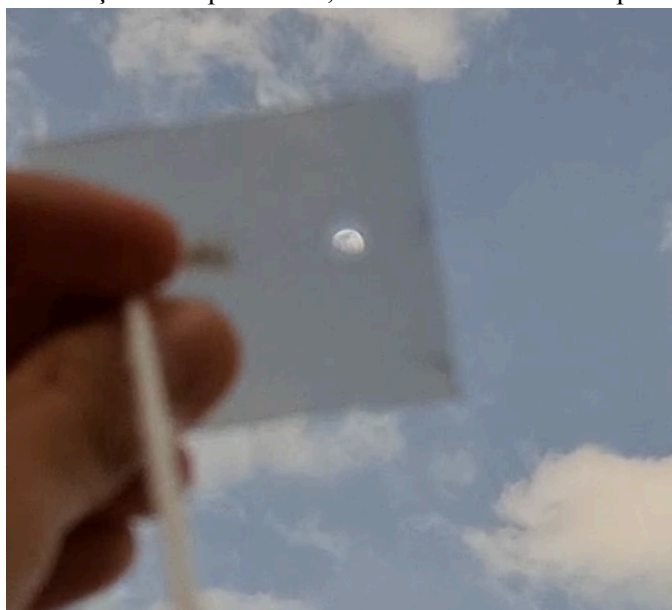


Fonte: Arquivo pessoal (2025).

2. A Experiência do Eclipse (Medição da Lua): Diferentemente da atividade anterior, esta etapa foi realizada através da observação de vídeo em sala, devido à impossibilidade de aguardar um eclipse real no momento da aula. A dinâmica concentrou-se na atenção visual e na cronometragem coletiva. Houve um engajamento colaborativo da turma para definir, em consenso, os instantes de tempo cruciais para o experimento. Essa etapa foi fundamental para demonstrar que a astronomia também se faz através da análise de dados secundários (vídeos e imagens), exigindo o mesmo rigor de interpretação que a observação direta.

3. A Experiência de Aristarco (Distância da Lua): Esta foi a atividade de maior envolvimento individual, na qual cada um dos 29 alunos recebeu seu próprio aparato experimental. A execução prática despertou a curiosidade da turma, mas também exigiu coordenação motora fina para alinhar o orifício de 6 mm com o disco lunar e, simultaneamente, esticar o cordão até a lateral do olho. Pedagogicamente, este foi o momento em que a abstração geométrica da semelhança de triângulos se tornou concreta. No entanto, foram observadas dificuldades operacionais: alguns alunos apresentaram dificuldade em posicionar corretamente a extremidade do cordão na lateral do olho (variando entre posições muito anteriores ou posteriores à linha ideal) e em determinar o momento exato do encaixe visual da Lua no orifício (Exemplo Figuras 50, 51 e 52), dada a subjetividade da percepção visual. A grande variabilidade das medidas individuais resultantes (de 21 cm a 77 cm) enriqueceu a experiência, evidenciando a necessidade de múltiplas medições para se obter uma média estatística confiável.

Figura 50 - Simulação do experimento, lua não encaixada com precisão no furo.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 51 - Simulação do experimento, lua encaixada com precisão no furo.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

Figura 52 - Lua visível durante o dia na praça, na direção leste.



Fonte: Arquivo pessoal (2025).

De modo geral, a realização das atividades práticas transcorreu de forma intensa. Embora a limitação de tempo tenha exigido uma condução mais diretiva por parte do pesquisador para garantir que todos os procedimentos fossem concluídos, notou-se que a manipulação direta dos instrumentos despertou o interesse genuíno dos alunos. Isso valida a premissa das UEPS de que a aprendizagem se torna significativa quando o aluno atua como agente da construção do conhecimento, superando a posição de mero receptor passivo de informações.

4.2.5 Análise e discussão coletiva dos resultados

Ressalta-se que, nesta etapa pedagógica realizada com os alunos, a discussão se restringiu aos resultados diretos e aritméticos simples (como cálculo de médias e erros percentuais básicos). Não houve aplicação de modelagem estatística complexa ou tratamentos de erros robustos (como Critério de Chauvenet ou Teste T de Student). Tais análises estatísticas foram realizadas posteriormente pelo pesquisador, fora do tempo de aula, para conferir a robustez metodológica dos dados.

A etapa de análise e discussão dos resultados ocorreu nos minutos finais da intervenção, o que impôs limitações à dinâmica originalmente planejada. Devido à escassez de tempo, a abordagem pedagógica precisou ser adaptada: ao invés de um debate amplo e investigativo onde os alunos construiriam as conclusões autonomamente, optou-se por uma exposição dialogada, conduzida majoritariamente pelo pesquisador. O objetivo foi garantir que os estudantes tivessem acesso à interpretação correta dos dados coletados antes do encerramento da atividade. Consequentemente, a interação dos alunos foi reduzida, limitando-se a observações pontuais e à concordância com os resultados apresentados.

Durante essa discussão, foram confrontados os valores obtidos pelos alunos com os valores reais aceitos pela literatura científica. Para o diâmetro da Terra, a aplicação da correção da inclinação do solo no momento da prática permitiu que a turma já visualizasse um resultado de alta precisão (erro de 0,07%). Da mesma forma, a estimativa do diâmetro da Lua manteve-se consistente (erro de $\sim 2\%$). No entanto, para a distância da Lua, o valor debatido em sala considerou a média aritmética de todas as medições realizadas pela turma, incluindo aquelas discrepantes, sem a aplicação de critérios estatísticos de exclusão naquele instante. Isso permitiu que os alunos percebessem como dados extremos podem influenciar a média final, servindo como gancho para a discussão sobre erros de medição. A Tabela 9 abaixo

resume os valores exatos apresentados e os seus erros (calculados com os respectivos valores de referência apresentados no tópico 4.1) e discutidos no momento da aula:

Tabela 9 - Resultados e erros apresentados aos alunos.

Diâmetro estimado da Terra	12.747 km	0,07%
Diâmetro estimado da Terra	3.551 km	2,19%
Distância estimada da lua	346.114 km	8,44%

Fonte: Autoria própria (2025).

A comparação desses dados brutos com os valores de referência serviu de base para a reflexão crítica sobre as limitações dos instrumentos e a importância da repetição das medidas.

Um ponto central dessa discussão foi a ênfase dada ao rigor experimental. Ressaltou-se para a turma a importância crítica de realizar correções finas nas medições, explicando especificamente a necessidade de considerar a inclinação do solo de $0,4^\circ$ no local do experimento. Foi demonstrado aos alunos que, em astronomia de posição, desconsiderar fatores ambientais aparentemente pequenos, como um leve desnível no chão, comprometeria toda a cadeia de cálculos subsequentes. Essa abordagem serviu para ilustrar, na prática, que a precisão científica depende tanto da coleta de dados quanto da capacidade de identificar e corrigir erros sistemáticos.

4.2.6 Sistematização dos conceitos científicos envolvidos

Imediatamente após a análise dos erros e discussão dos resultados, realizou-se a sistematização dos conceitos. Vale destacar que, devido ao término próximo do tempo de aula, esta etapa ocorreu de forma mais concisa do que o planejado originalmente. A abordagem adotada foi a exposição dialogada, focada em listar e exemplificar onde cada conceito teórico operou dentro dos experimentos, garantindo o fechamento cognitivo da atividade.

- No campo da Geometria e Trigonometria, foram revisados:
 - Triângulos Semelhantes: Identificados como a base para o cálculo da distância da Lua (relação entre o diâmetro do furo e a distância do olho);
 - Triângulos Retângulos e Tangente: Reforçou-se que a relação entre a altura da haste e o comprimento da sombra é descrita pela tangente do ângulo (cateto oposto sobre adjacente);

- Círculo versus Circunferência: Fez-se a distinção conceitual necessária para aplicar a fórmula correta na descoberta da circunferência terrestre;
- Retas Paralelas: Retomou-se a premissa de Eratóstenes de que os raios solares chegam paralelos à Terra, conceito essencial para a validade dos ângulos alternos internos.
- No campo da Física e Astronomia, a sistematização abordou:
 - Luz e Sombra: Discutiu-se brevemente a formação de umbra e penumbra, embora o modelo tenha sido simplificado para fins didáticos;
 - Tamanho Aparente: Houve uma discussão relevante sobre a "coincidência cósmica" que faz com que o Sol e a Lua tenham o mesmo tamanho aparente no céu. Explicou-se aos alunos que, embora o Sol seja cerca de 400 vezes maior que a Lua, ele também está 400 vezes mais distante, o que equaliza seus diâmetros angulares;
 - Movimentos Celestes: Relacionou-se a variação da sombra com a rotação da Terra e a geometria dos eclipses com o alinhamento orbital.

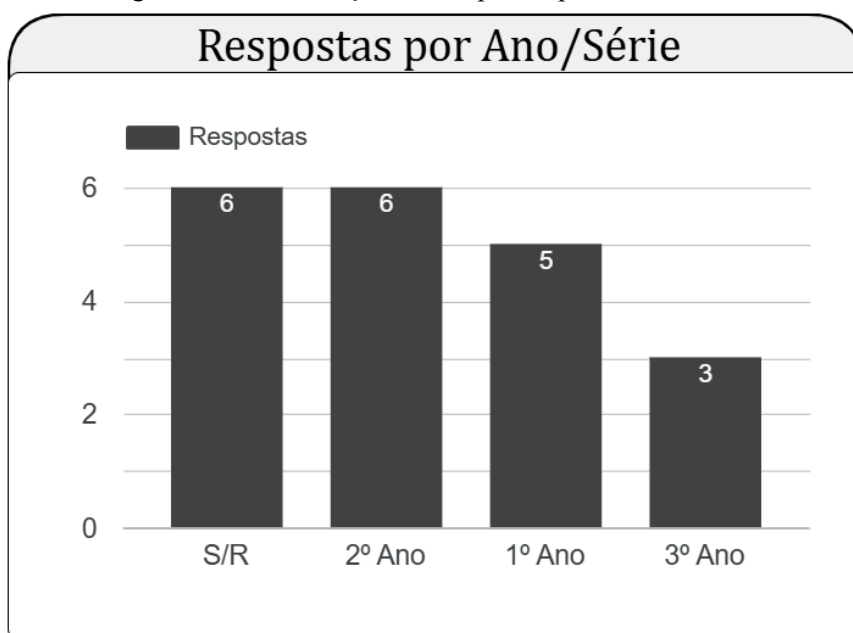
4.2.7 Avaliação do processo de aprendizagem

Este tópico destina-se à apresentação, discussão e análise dos resultados obtidos por meio do Questionário Pós-Experimento (Ver Apêndice B, para visualizar questões detalhadamente), visando mensurar a eficácia do processo de ensino-aprendizagem. O questionário, estruturado em dois eixos (Avaliação Cognitiva e Avaliação da Metodologia, conforme Apêndice B), utilizou 9 questões objetivas para conteúdos e 8 afirmações submetidas à escala Likert (de 1 a 5 pontos) para a didática empregada.

É relevante notar que, no questionário pós-experimento, foram obtidas apenas 20 respostas, em contraste com as 29 do pré-experimento. Essa redução ocorreu devido ao tempo reduzido no final da aplicação, pois o período de aula havia encerrado, e não foi possível que todos os alunos respondessem o questionário ainda em sala. Dessa forma, o instrumento foi entregue para que eles o devolvessem preenchido no dia seguinte. Entretanto, parte dos estudantes não o retornou, resultando na perda de 9 respostas.

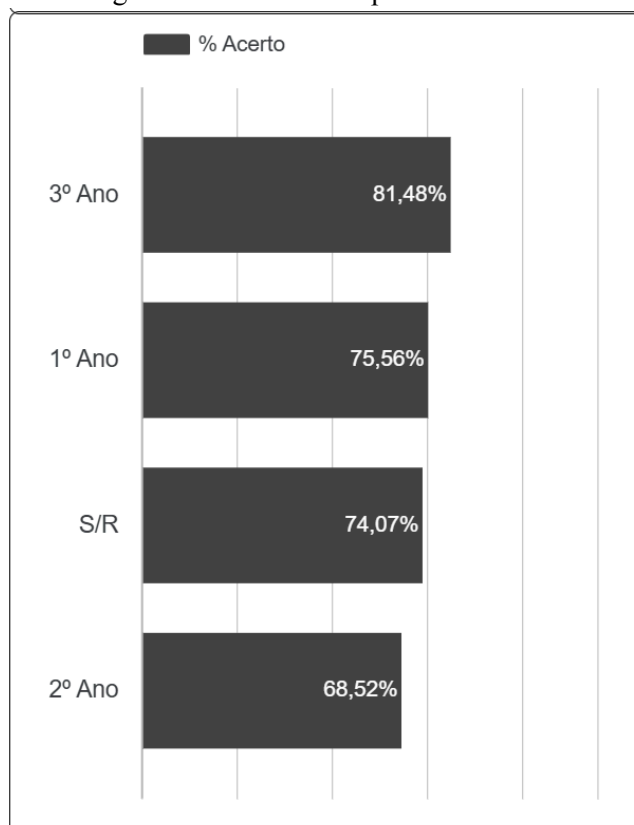
A seguir, são apresentados os gráficos de desempenho resultantes da avaliação cognitiva seguidos das discussões pertinentes.

Figura 53 - Distribuição das respostas por série escolar.



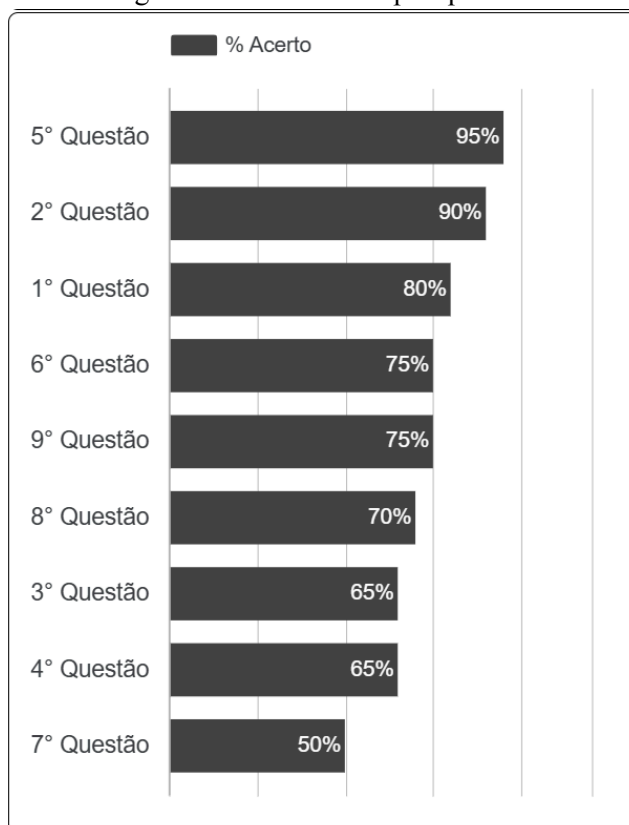
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 54 - % de acerto por série escolar.



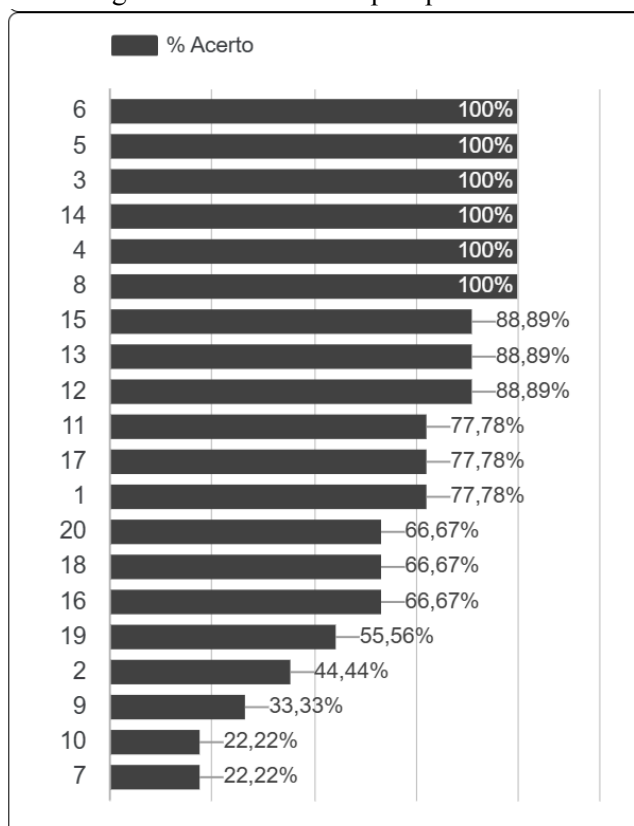
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 55 - % de acerto por questão.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 56 - % de acerto por questionário.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Quanto à participação e distribuição da amostra, a análise dos dados coletados no pós-experimento deve considerar, inicialmente, a redução amostral. Conforme ilustrado na Figura 53 (Distribuição das respostas série escolar), obtiveram-se 20 respostas válidas, em contraste com as 29 do pré-experimento. A distribuição contou com 6 alunos do 2º ano, 5 do 1º ano, 3 do 3º ano e 6 questionários sem identificação de série (S/R). Apesar da redução quantitativa explicada pela dinâmica de entrega extraclasse, a amostra permanece representativa para a análise qualitativa da evolução da aprendizagem.

Analisando o desempenho comparativo por série, ao analisar a Figura 54 (% de acerto por série escolar), observa-se um fenômeno notável quando comparado ao diagnóstico inicial. No pré-experimento, o 3º ano apresentou o pior desempenho (54,62%). No pós-experimento, esse cenário se inverteu drasticamente: o 3º ano assumiu a liderança com 81,48% de acerto, seguido pelo 1º ano (75,56%) e o grupo S/R (74,07%). Essa "recuperação" do 3º ano valida a hipótese levantada na análise inicial de que o baixo desempenho prévio se devia ao esquecimento e não à incapacidade cognitiva. A intervenção com a UEPS atuou eficazmente na reativação dos subsunçores desses alunos, permitindo que eles aplicassem sua maturidade cognitiva na resolução dos problemas, superando as lacunas de memorização. O 1º ano manteve um alto padrão, evidenciando que a metodologia também foi eficaz para quem está tendo o primeiro contato com a trigonometria.

A análise detalhada por questão, evidenciada na Figura 55 (% de acerto por questão), permite traçar a evolução conceitual da turma ao confrontar diretamente os conhecimentos prévios diagnosticados com os resultados finais. Esta comparação revela avanços qualitativos na estrutura cognitiva dos estudantes, segue abaixo 4 pontos cruciais nesta comparação:

1. Apropriação da Ferramenta Trigonométrica (Do Abstrato ao Concreto): No diagnóstico inicial, identificou-se uma ruptura entre a memorização de fórmulas e sua aplicação. A Questão 4 do pré-teste, que exigia calcular um cateto oposto, obteve o pior desempenho da avaliação (~20% de acerto), indicando que a trigonometria era, para a maioria, um conceito inerte. No pós-teste, a Questão 3 retomou esse conceito, mas contextualizado no experimento de Eratóstenes (uso da tangente para relacionar altura da haste e sombra). O índice de acerto saltou para 65%. Esse crescimento superior a 200 pontos percentuais sugere que a atividade prática funcionou como uma "ponte cognitiva": ao visualizar o triângulo retângulo formado fisicamente pelo palito e pela sombra, o aluno conseguiu atribuir significado real às variáveis da fórmula, superando a barreira da abstração matemática pura.

2. Resignificação de Conceitos Astronômicos (Tamanho Aparente): A evolução na compreensão de escalas e distâncias foi notável. No pré-teste, a Questão 12, sobre o conceito de "tamanho aparente", teve 58,62% de acerto. Após a intervenção, a Questão 5 do pós-teste, que abordava o mesmo tema (comparação entre tamanho aparente e real dependendo da distância), atingiu o topo da avaliação com 95% de acerto. Essa quase totalidade de acertos valida a eficácia do Experimento 3 (furo no plástico fosco). A experiência sensorial de "encaixar" a Lua em um pequeno orifício próximo ao olho provocou uma reconciliação integradora: os alunos internalizaram que o tamanho angular é uma função da distância, desfazendo a confusão intuitiva entre o tamanho do objeto e como ele é percebido visualmente.

O êxito expressivo na assimilação do conceito de tamanho aparente (95% de acerto) alinha-se à perspectiva defendida por Rodrigues e Scarano Jr (2022). Ao investigarem o uso de instrumentos simples em atividades de astronomia, os autores concluem que a postura ativa dos alunos na manipulação de recursos motivadores é determinante para a apropriação de conceitos abstratos. No presente trabalho, o uso do aparato de baixo custo (furo no plástico) permitiu que os estudantes vivenciassem fisicamente a geometria do problema, validando a tese de que a experimentação direta é superior à exposição passiva para a compreensão de fenômenos de escala astronômica

3. Consolidação da Geometria de Posição: A compreensão das propriedades geométricas angulares também se fortaleceu. A Questão 7 do pré-teste (sobre retas paralelas) obteve 82,76% de acerto. No pós-teste, a Questão 2 exigiu um passo além: não apenas definir retas paralelas, mas aplicar o teorema de Tales (ângulos alternos internos) para justificar por que o ângulo da sombra equivale ao ângulo da circunferência terrestre. O índice de acerto subiu para 90%. Isso demonstra que o conceito de paralelismo dos raios solares, fundamental para o método de Eratóstenes, foi não apenas retido, mas refinado e aplicado corretamente na modelagem do problema.

4. Persistência de Lacunas Algébricas Básicas: Apesar dos avanços, a comparação revela onde a intervenção encontrou limites. A Questão 9 do pré-teste (cálculo da circunferência pelo diâmetro) teve 37,93% de acerto. Sua correspondente no pós-teste, a Questão 7 (fórmula do diâmetro pela circunferência), alcançou 50%. Embora tenha havido melhora, este permaneceu como o tópico de menor desempenho. Isso indica que a dificuldade dos alunos não reside na astronomia ou na geometria visual, mas na manipulação algébrica elementar. Tal constatação aponta que, para futuras aplicações desta UEPS, pode ser

necessário um módulo introdutório de reforço em álgebra básica para garantir que a matemática não seja um entrave para a física.

A persistência das dificuldades em manipulação algébrica, contrastando com a boa apropriação dos conceitos geométricos visuais, dialoga diretamente com os apontamentos de Neves et al. (2021). Os autores ressaltam que experimentos como o de Eratóstenes exigem uma forte interdisciplinaridade entre Física, Geografia e Matemática. Nossos dados evidenciam que, embora a atividade prática tenha sido capaz de superar barreiras conceituais da astronomia, a falta de domínio das ferramentas matemáticas básicas (o 'fazer a conta') ainda atua como um limitador. Isso sugere que, conforme indicado por Neves et al., o sucesso pleno de atividades de astronomia de posição no Ensino Médio depende de um suporte matemático que seja tratado não apenas como pré-requisito, mas como parte integrante da construção do conhecimento físico

Essa barreira instrumental observada nos resultados dialoga com o alerta feito por Neves et al. (2021) sobre a interdisciplinaridade no ensino de Astronomia. Os autores argumentam que a execução de experimentos clássicos (como o de Eratóstenes) exige uma base matemática que, muitas vezes, não está consolidada no Ensino Médio. Nossos dados confirmam que a falta de domínio sobre razões, proporções e geometria básica atuou como um obstáculo epistemológico, impedindo que parte dos alunos relacionasse o fenômeno visual (sombra) com a linguagem formal (cálculo), travando o processo de ancoragem previsto na aprendizagem significativa.

A análise da heterogeneidade e nivelamento da turma, através da Figura 56 (% de acerto por questionário) demonstra uma elevação do "teto" de conhecimento da turma. Seis alunos atingiram 100% de aproveitamento, um feito não registrado no pré-experimento (onde o máximo foi ~92%).

Além disso, observa-se uma redução na cauda inferior de desempenho. No pré-teste, diversos alunos ficaram abaixo de 40% de acerto. No pós-teste, apenas três alunos (IDs 9, 10 e 7) permaneceram nessa faixa crítica. A grande maioria da turma (17 dos 20 respondentes) obteve notas superiores a 44%, com uma concentração expressiva acima de 60%. Isso indica que a metodologia ativa e colaborativa favoreceu o nivelamento da turma para cima, engajando tanto os alunos com facilidade quanto aqueles com dificuldades iniciais.

A evolução significativa no desempenho dos estudantes, especialmente a recuperação dos conhecimentos prévios observada nos alunos do 3º ano, corrobora as conclusões de Andrade (2020) sobre a eficácia das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas

(UEPS). Em sua pesquisa aplicada ao ensino de astronomia, o autor destaca que a estruturação didática baseada na Teoria de Ausubel favorece a transição de uma aprendizagem mecânica e fragmentada para uma compreensão integrada. Nossos resultados reforçam essa premissa, demonstrando que a contextualização histórica e a prática experimental funcionaram como organizadores prévios eficazes, permitindo que os estudantes reativassem e aplicassem conceitos matemáticos que estavam latentes, mas inacessíveis na estrutura cognitiva antes da intervenção.

Em suma, os dados comparativos entre pré e pós-experimento evidenciam que a intervenção pedagógica foi bem-sucedida em seus objetivos principais. Houve uma transição clara de um conhecimento fragmentado e memorístico para uma compreensão aplicada e contextualizada. O salto de desempenho na aplicação de conceitos trigonométricos e a apropriação dos modelos geométricos de Eratóstenes e Aristarco confirmam que a reprodução de experimentos históricos serviu como um organizador prévio eficaz, promovendo a Aprendizagem Significativa dos conteúdos de astronomia de posição.

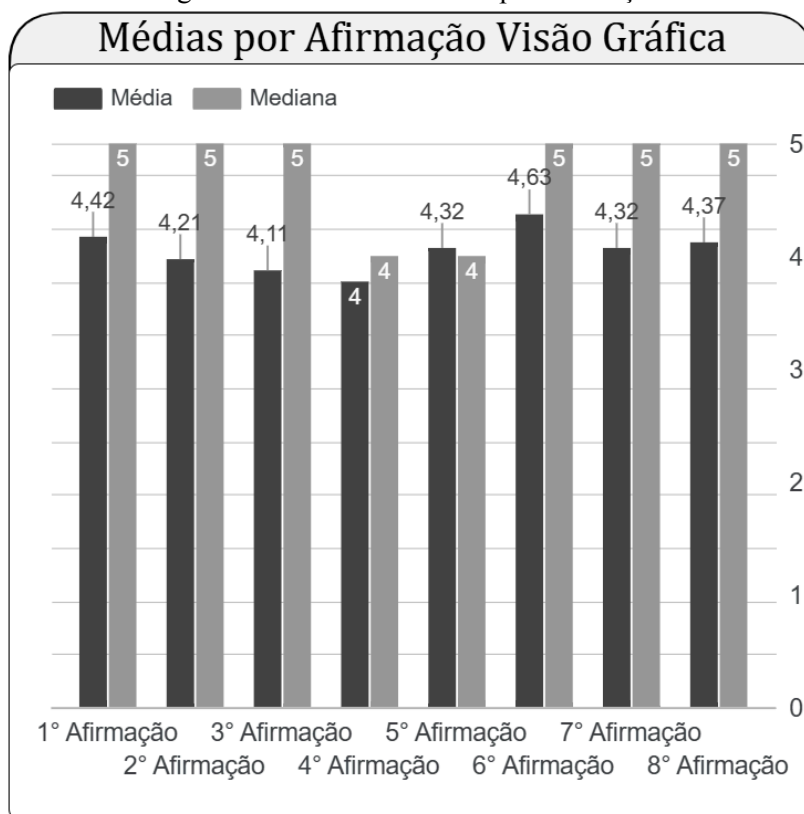
Partindo para a análise da avaliação da metodologia, a seguir, são detalhados os respectivos gráficos de desempenho e das análises pertinentes.

Figura 57 - Média e mediana por Ano/Série.

Médias por Ano/Série		
Ano/Série ▾	Média	Mediana
S/R	3,98	4
3º Ano	4,33	5
2º Ano	4,77	5
1º Ano	4,03	4
Total geral	4,3	5

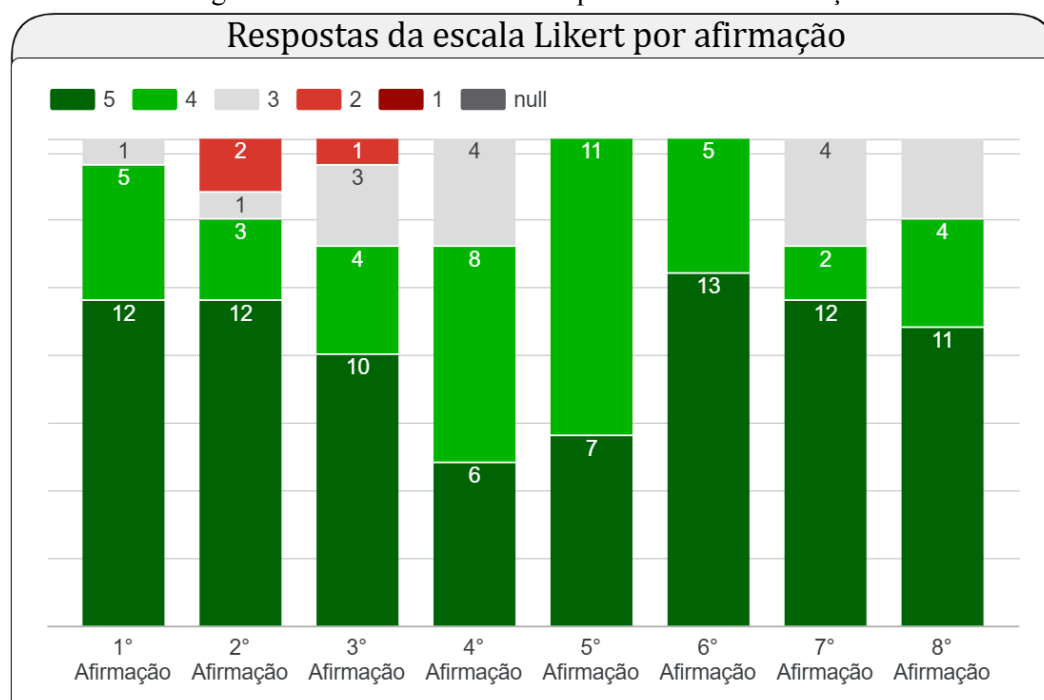
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 58 - Média e mediana por afirmação.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 59 - Detalhamento das respostas de cada afirmação.



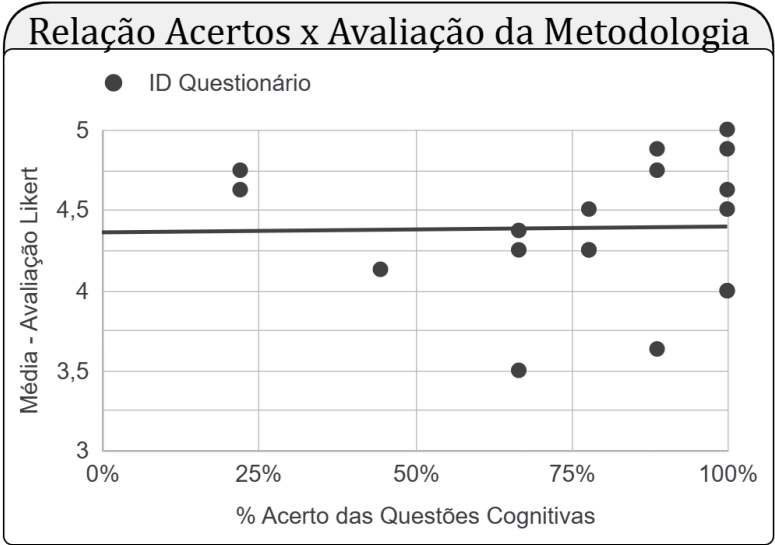
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 60 - Média e mediana por questionário.

Médias por Questionário		
ID ^	Média	Mediana
1	4,25	4
2	4,13	4
3	5	5
4	4,88	5
5	4	4
6	4	4
7	4,63	5
8	4,5	5
9	null	null
10	4,75	5
11	4,5	4,5
12	4,88	5
13	3,63	4
14	4,63	5
15	4,75	5
16	4,38	5
17	4,25	5
18	3,5	3,5
19	2,75	3
20	4,25	4,5
Total geral	4,3	5

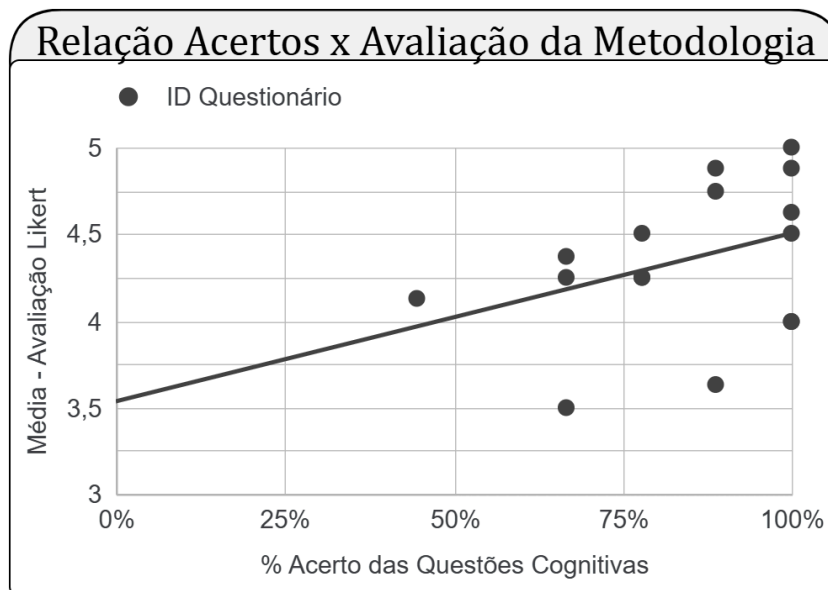
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 61 - Dispersão % de acertos (av. cognitiva) vs média av. da metodologia.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 62 - Dispersão % de acertos vs média, excluindo 2 questionários.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

A análise global dos dados da avaliação metodológica revela uma aceitação muito positiva da intervenção por parte dos discentes. Conforme o gráfico da Figura 57 (Média e mediana por Ano/Série.), a média geral das respostas foi de 4,3 (em uma escala de 5), com uma mediana de 5, indicando que a concordância total foi a resposta predominante.

Para uma compreensão mais profunda da recepção da UEPS, detalha-se a seguir a análise de cada uma das 8 afirmações, através da Figura 58 (Média e mediana por afirmação) e da Figura 59 (Detalhamento das respostas de cada afirmação), agrupados por eixos temáticos:

- Validação da Estratégia Prática (Itens 1 e 8) A espinha dorsal da intervenção, o uso de experimentos e desafios, foi amplamente validada.
 - Afirmação 1 (Experimentos Práticos): Obteve média de 4,42. A esmagadora maioria (17 de 18 respondentes) concordou parcial ou totalmente que a prática auxiliou na compreensão. Isso confirma a premissa de que a materialização dos conceitos astronômicos facilita a aprendizagem.
 - Afirmação 8 (Desafios/Situações-Problema): Com média de 4,37, os alunos reconheceram que as situações-problema iniciais incentivaram a criatividade. Isso sugere que a etapa de "problematização" da UEPS cumpriu seu papel de despertar o interesse investigativo antes da entrega do conteúdo.

- Eficácia da Transposição Didática dos Conceitos (Itens 4, 5, 6 e 7) Este bloco avaliou se os conceitos matemáticos abstratos se tornaram visíveis durante a prática.
 - Afirmação 6 (Tamanho Aparente): A Afirmação 6 obteve a maior média de toda a avaliação (4,63) e foi a única sem nenhuma resposta "Neutra" ou negativa. A unanimidade na concordância (notas 4 e 5) indica que o experimento do furo no plástico com a lua foi extremamente eficaz em tornar concreto o conceito de diâmetro angular.
 - Afirmação 4 (Triângulos Semelhantes): A Afirmação 4 apresentou a menor média da avaliação (4,0) e o maior número de respostas "Neutras" (4 alunos). Isso sinaliza que, embora os alunos tenham executado o experimento, a visualização geométrica dos "triângulos imaginários" formados no espaço (olho-furo-Lua) foi menos intuitiva do que a observação física direta.
 - Afirmações 5 e 7 (Proporcionalidade e Tangente): Ambos obtiveram média 4,32. No entanto, o Item 7 (Tangente) apresentou uma polarização interessante: apesar de 12 alunos concordarem totalmente, houve 4 votos "Neutros", sugerindo que para um grupo específico, a conexão entre a sombra e a função trigonométrica ainda permaneceu obscura.
- Dinâmica Pedagógica (Itens 2 e 3)
 - Afirmação 2 (Explicações Teóricas): Com média 4,21, a explicação foi bem avaliada, mas o registro de 2 respostas "Discordo Parcialmente" (nota 2) alerta que, para alguns alunos, a introdução teórica pode ter sido rápida demais ou complexa, possivelmente exigindo mais tempo de organizadores prévios.
 - Afirmação 3 (Trabalho em Grupo): A média de 4,11 reflete a complexidade das dinâmicas colaborativas. Embora a maioria tenha aprovado, a presença de notas 2 e 3 indica que nem todos os alunos se sentiram beneficiados pela interação social, apontando para possíveis dificuldades de cooperação ou dispersão em algumas equipes.

A percepção positiva dos estudantes sobre a dinâmica coletiva reforça a proposta de Rodrigues e Scarano Jr. (2022) sobre a aprendizagem ativa em Astronomia. Ao utilizarem métodos colaborativos (como a Rotação por Estações), esses autores destacam que a troca de saberes entre pares é fundamental para nivelar o conhecimento.

Observando a Figura 57 (Média e mediana por Ano/Série.), nota-se uma variação interessante na receptividade da metodologia. Os alunos do 2º Ano foram os mais entusiastas,

com uma média de avaliação de 4,77, seguidos pelo 3º Ano (4,33). Os alunos do 1º Ano e aqueles sem identificação (S/R) apresentaram médias ligeiramente inferiores (~4,0). Esse padrão pode indicar que alunos com maior maturidade escolar (2º e 3º anos) conseguiram valorizar mais a ruptura com a aula tradicional e a aplicação prática, enquanto os alunos mais novos (1º ano) podem ter sentido mais dificuldade em conectar a atividade lúdica com o rigor acadêmico esperado, refletindo a transição do Ensino Fundamental para o Médio.

Ao examinar as médias de avaliação atribuídas individualmente por cada estudante, conforme a Figura 60 (Média e mediana por questionário), verifica-se uma notável uniformidade na aprovação do método. Não houve uma polarização da turma (cenário onde metade adora e metade rejeita). Pelo contrário, identificou-se um consenso positivo:

- Alta Adesão: Dos 19 alunos que responderam a esta seção, 13 atribuíram uma média global superior a 4,0, sendo que o aluno de ID 3 avaliou a metodologia com a nota máxima (5,0) em todos os quesitos.
- O Caso Isolado: Apenas um estudante (ID 19) apresentou uma média inferior a 3,0 (ficando com 2,75), configurando-se como o único caso de rejeição clara à proposta.
- A ausência de médias na faixa de 1,0 ou 2,0 (exceto o outlier mencionado) demonstra que a metodologia UEPS não gerou resistência significativa, conseguindo atingir o "piso de satisfação" mesmo entre os alunos mais críticos.

Para investigar a relação entre a satisfação do aluno e seu efetivo aprendizado, realizou-se uma análise de correlação cruzando os dados de desempenho (acertos no teste) com a média da avaliação metodológica de cada estudante.

O gráfico de dispersão inicial (Figura 61 - Dispersão % de acertos (av. cognitiva) vs média av. da metodologia.) apresenta uma linha de tendência positiva, mas com uma dispersão considerável (R^2 visualmente baixo). A análise detalhada dos pontos (alunos) permite identificar três perfis de comportamento distintos:

- O Perfil "Engajamento Lúdico": Identificaram-se alunos, especificamente os de IDs 7 e 10, que situam-se no quadrante de "Baixo Desempenho / Alta Avaliação". Eles obtiveram apenas ~22% de acerto no teste, mas avaliaram a metodologia com notas altíssimas (média > 4,5).
 - Este fenômeno sugere que a aula foi percebida como "divertida" ou "motivadora" devido à ruptura com a rotina de sala de aula e à atividade ao ar livre. Para estes alunos, a metodologia teve sucesso no domínio afetivo-emocional (gostaram da aula), mas falhou no domínio cognitivo (não

aprenderam o conteúdo). Isso reforça que o engajamento prático, por si só, não garante a apropriação conceitual se não houver uma mediação teórica que alcance os alunos com maiores dificuldades de base.

- O Perfil "Coerência Crítica": O aluno de ID 19 destaca-se por apresentar um desempenho mediano (~55%) e a avaliação mais crítica da turma (média 2,75).
 - Este dado sugere uma autoavaliação coerente: o aluno provavelmente percebeu que não estava acompanhando plenamente o raciocínio ou não se adaptou à dinâmica proposta, refletindo sua frustração na avaliação do método.
- A Correlação Real (Cluster de Sucesso): Ao isolar os casos de "Engajamento Lúdico" (removendo os IDs 7 e 10), o segundo gráfico de dispersão (Figura 62 - Dispersão % de acertos vs média, excluindo 2 questionários.) revela uma correlação muito mais forte e linear.
 - Observa-se que, no grupo restante, o aumento da nota cognitiva é acompanhado proporcionalmente pelo aumento da avaliação metodológica.
 - Os alunos com desempenho superior a 80% (como o ID 3 e 14) tendem a avaliar a metodologia com nota máxima (5,0). Isso valida a hipótese de que, para os alunos que conseguem transpor a barreira inicial da matemática básica, a UEPS funciona de maneira sinérgica: entender o conteúdo faz a atividade prática fazer sentido, e fazer a atividade prática reforça o entendimento, gerando um ciclo virtuoso de satisfação e aprendizado.

A discrepância notada entre a satisfação afetiva ('diversão') e a baixa estruturação cognitiva em parte da turma pode ser explicada pelos fundamentos da UEPS de Moreira (2011). A atividade prática cumpriu com êxito a primeira etapa da metodologia: gerar a predisposição para aprender. Contudo, para o grupo que não avançou nas respostas conceituais, o engajamento emocional não foi suficiente para garantir a diferenciação progressiva dos conceitos. Como aponta Moreira, sem a intencionalidade do aluno em relacionar a prática com seus conhecimentos prévios (subsunçores), a atividade recai em uma aprendizagem mecânica, onde o aluno executa a tarefa com prazer, mas não atribui significados físicos duradouros ao que fez.

Em suma, a metodologia foi aprovada com louvor pela turma, com destaque absoluto para a concretização do conceito de Tamanho Aparente. A análise de correlação refinada demonstra que a proposta é altamente eficaz para quem possui os subsunçores mínimos, mas os casos de "alta satisfação sem aprendizado" deixam uma lição importante: a empolgação

com o experimento não pode substituir o rigor da conceituação. Para futuras aplicações, sugere-se um acompanhamento mais próximo dos grupos durante a execução prática para garantir que a "diversão" da atividade esteja sendo traduzida em estruturação cognitiva.

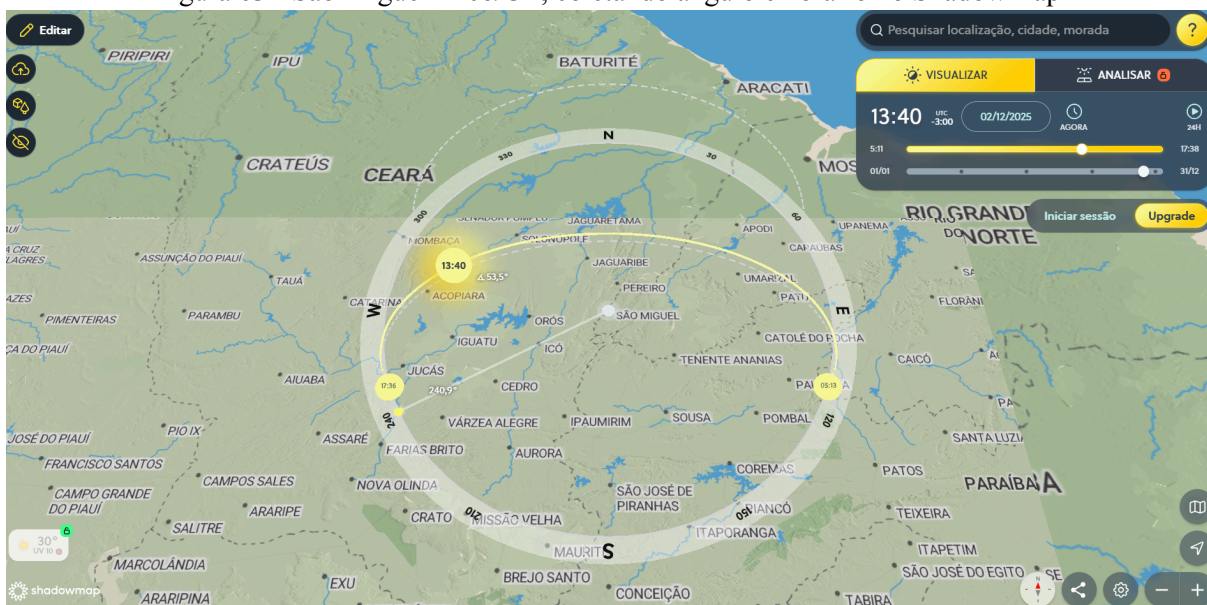
Por fim, a evolução observada nas respostas finais valida a estrutura sequencial da intervenção, alinhando-se com o defendido por Schinzel (2022) na aplicação de UEPS em temas astronômicos complexos. Assim como em sua abordagem sobre buracos negros, onde a progressão conceitual é vital, nosso estudo demonstrou que o momento de 'Reconciliação Integradora', a discussão final pós-experimento, foi muito importante para o aprendizado. Foi nessa etapa que as concepções alternativas puderam ser confrontadas e reestruturadas, provando que a astronomia prática escolar não deve ser um fim em si mesma, mas um veículo para a maturação do pensamento científico.

4.3 Estimativa do diâmetro da Terra: análise comparativa de fontes de erro.

O procedimento metodológico de simulação computacional, detalhado na seção 3.8, foi repetido para 20 cidades distintas, compondo o conjunto completo de dados utilizados para a análise de precisão e fontes de erro.

A seguir, apresentam-se os dados coletados (Tabela 10), as análises decorrentes e a Figura 63 demonstrando o procedimento com uma das cidades:

Figura 63 - São Miguel x Icó/CE, coletando ângulo e horário no ShadowMap



Fonte: ShadowMap (2025).

Tabela 10 - Dados brutos do teste, com cálculo do diâmetro e erro percentual.

Ângulo São Miguel (graus)	Horário	Cidade	Ângulo na cidade (graus)	Distância (km)	Diferença de altitude (m)	Diâmetro estimado (km)	Erro
43,0	08:20	Paulista/PB	44,0	106	620	12.147	4,78%
62,5	09:50	Tenente Ananias/RN	62,9	44	440	12.605	1,18%
63,4	09:55	Pombal/PB	64,3	99	602	12.605	1,18%
70,6	10:37	Coremas/PB	71,6	108	562	12.376	2,98%
72,5	10:52	Sousa/PB	73,1	68	560	12.987	1,81%
73,0	11:50	Ipaumirim/CE	73,6	68	505	12.987	1,81%
71,2	12:07	Aurora/CE	72,0	96	497	13.751	7,80%
61,9	13:00	Várzea Alegre/CE	62,9	109	480	12.490	2,08%
61,7	13:01	Cedro/CE	62,4	76	530	12.441	2,47%
53,5	13:40	Icó/CE	53,9	45	627	12.892	1,06%
57,1	13:23	Salitre/CE	59,3	247	180	12.866	0,86%
30,4	15:22	São Jose do Piauí/PI	33,4	337	610	12.872	0,91%
66,2	12:37	Betania do Piauí/PI	69,2	331	300	12.643	0,88%
72,1	11:59	Ourolândia/BA	77,4	598	204	12.929	1,36%
73,0	10:57	Itaíba/PE	75,9	325	302	12.842	0,68%
70,8	10:38	Caetés/PE	73,9	350	69	12.938	1,42%
64,4	10:00	Santa Cruz do Capibaribe/PE	67,3	318	342	12.566	1,49%
16,3	16:23	Amarante/PI	20,4	482	652	13.471	5,61%
11,0	16:46	Parauapebas/PA	21,5	1.262	612	13.773	7,97%
28,3	15:31	Conceição do Araguaia/PA	39,1	1.210	615	12.838	0,65%

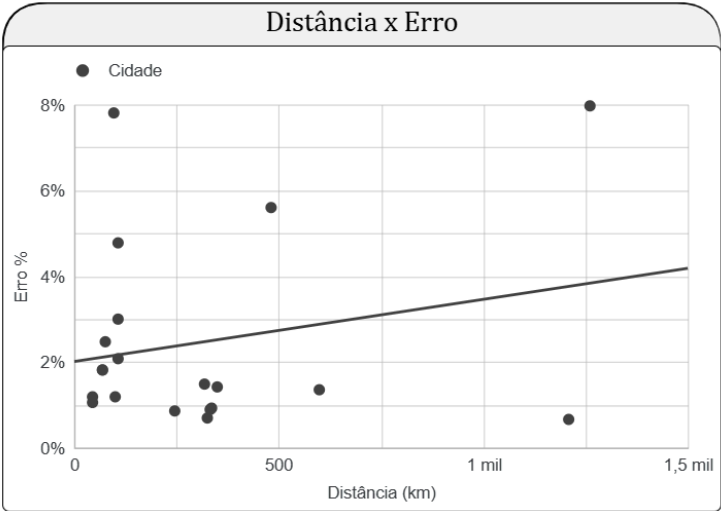
Fonte: Autoria própria (2025).

Tabela 11 - Médias do diâmetro, erro padrão e erros percentuais.

MÉDIA	12.851
ERRO PADRÃO	94,1
ERRO RELATIVO %	0,74%
MÉDIA ARREDONDADA	12.900
ERRO RELATIVO %	1,13%

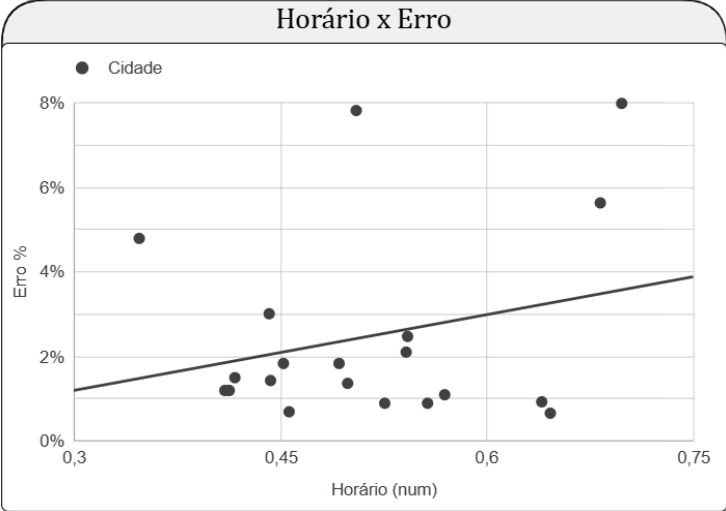
Fonte: Autoria própria (2025).

Figura 64 - Dispersão distância vs erro.



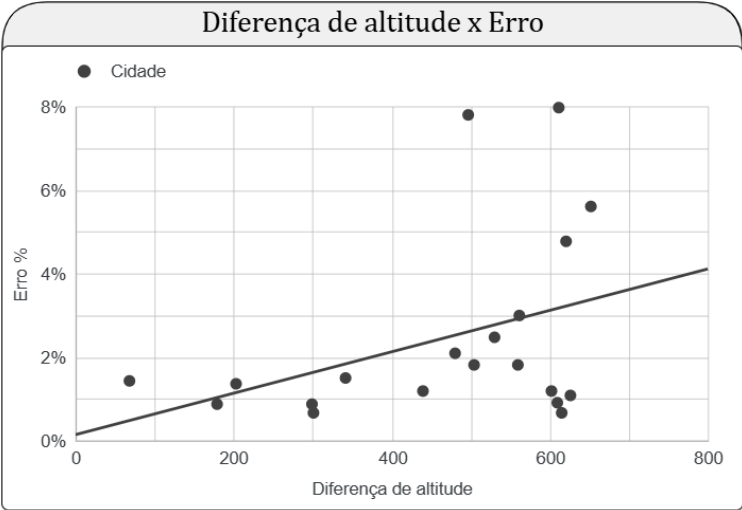
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 65 - Dispersão horário(num) vs erro.



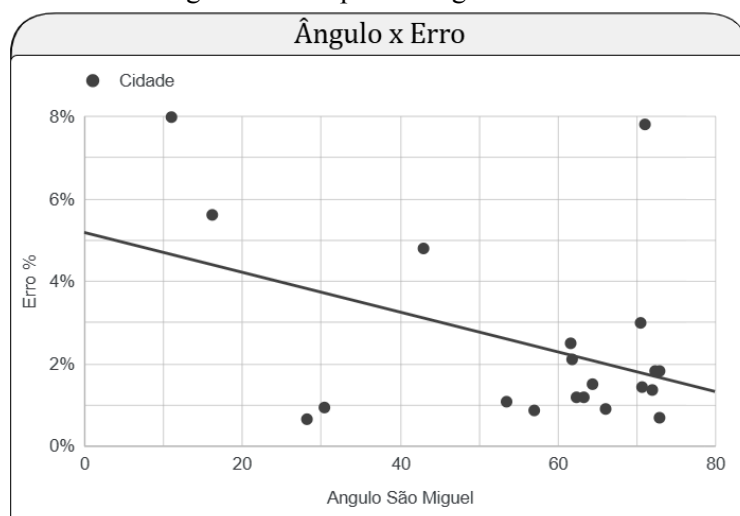
Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 66 - Dispersão altitude vs erro.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

Figura 67 - Dispersão ângulo vs erro.



Fonte: Elaboração do autor (2025).

A análise estatística global do teste, apresentada na Tabela 11, revela uma robustez surpreendente do método quando considerado em média. O valor do diâmetro estimado (12.851 km) apresentou um desvio mínimo em relação ao valor real, com um erro relativo de apenas 0,74%. Esse dado é fundamental pois valida a eficácia da ferramenta ShadowMap para fins didáticos: embora medidas individuais possam flutuar, a tendência central dos dados converge para a realidade física.

No entanto, ao dissecar os dados individuais na Tabela 10, nota-se uma amplitude de erro considerável, variando de 0,65% (Conceição do Araguaia) a 7,97% (Parauapebas). Para compreender a origem dessas flutuações, analisa-se o comportamento do erro em relação a quatro variáveis distintas, cujos dados geográficos (distância e altitude) foram extraídos do Google Earth e os dados angulares do ShadowMap. A análise visual dos gráficos de dispersão revela um cenário complexo e multifatorial:

A Figura 64 (Dispersão distância vs erro) apresenta uma leve tendência de crescimento do erro conforme a distância aumenta, mas com muita variação para as mesmas faixas, deixando a relação inconclusiva. Contudo, a dispersão é o fator mais notável: cidades com distâncias similares (próximas a 1.200 km) apresentaram comportamentos opostos, Conceição do Araguaia teve um dos menores erros do teste, enquanto Parauapebas teve o maior. Essa discrepância também sugere uma dificuldade operacional em garantir o alinhamento necessário (Sombra projetada em uma cidade alinhada com a outra) perfeito em grandes distâncias. Como a distância exata é obtida no Google Earth, mas o ângulo é medido no ShadowMap através de um alinhamento visual (reta branca), pequenos desvios na orientação

da visualização para cidades muito distantes podem fazer com que o ângulo coletado não corresponda exatamente ao vetor geodésico medido, introduzindo imprecisões geométricas.

A análise da Figura 66 (Dispersão altitude vs erro) sugere uma possível influência da topografia, porém os resultados mostram-se inconclusivos. Nota-se um padrão de estabilidade em desníveis menores ($< 400\text{m}$), onde os erros se mantiveram baixos. Por outro lado, na faixa acima de 600 metros de diferença, a variabilidade aumentou drasticamente, registrando simultaneamente erros mínimos e máximos para faixas de altitude semelhantes. Essa alta dispersão na mesma faixa impede afirmar que a altitude é a única responsável pelo erro. Embora seja plausível que discrepâncias entre a altitude real (Google Earth) e a malha 3D (ShadowMap) gerem ruído, a inconsistência dos dados sugere que o relevo é apenas um fator contribuinte em um cenário multifatorial, não sendo possível isolar sua influência direta.

A Figura 65 (Dispersão horário(num) vs erro) demonstra um comportamento aleatório, refutando a hipótese de que haveria um "horário ideal" para as simulações. Diferente de experimentos reais, onde a refração atmosférica interfere em medições com o Sol baixo, o ambiente virtual do software mostrou-se consistente. Os erros altos e baixos distribuem-se uniformemente ao longo do dia, indicando que o horário da coleta é uma variável neutra na precisão deste método digital.

A Figura 67 (Dispersão ângulo vs erro) sugere uma tendência visual de que ângulos de incidência maiores (Sol mais alto) estariam associados a erros ligeiramente menores. Isso poderia ser explicado pela melhor definição da sombra na interface do software quando ela é mais curta. No entanto, essa correlação também se apresenta inconclusiva para estabelecer uma regra geral. A presença de pontos com erros variados mesmo para ângulos similares indica que a inclinação dos raios solares não define a precisão isoladamente. Outras variáveis não controladas parecem atuar em conjunto, impedindo a confirmação definitiva de que ângulos maiores garantem, por si só, maior precisão.

A investigação das variáveis permite concluir que o erro no experimento é multifatorial e não-linear. Não há um único fator determinante, mas sim uma combinação entre a precisão do alinhamento visual (especialmente crítico em longas distâncias) e a fidelidade da topografia na simulação (crítica em grandes desníveis). Ainda assim, a observação de que a média dos erros permanece abaixo de 1% reforça que, se realizada com rigor e múltiplas medições para diluir os casos discrepantes (outliers), a metodologia integrando ShadowMap e Google Earth é uma ferramenta pedagógica poderosa e cientificamente válida para a estimativa de grandezas planetárias. Essa validação do método

através do teste com os softwares, demonstrou um resultado (erro médio inferior a 1%) que amplia as discussões de Caetano e Moreira (2022) e Gomes e Marques (2023) sobre o potencial das tecnologias digitais para superar barreiras geográficas em sala de aula. Enquanto esses autores defendem o uso de simuladores para viabilizar a execução de experimentos clássicos sem a necessidade de deslocamentos físicos, nossa análise das fontes de erro aprofunda essa perspectiva ao revelar que a precisão do alinhamento visual para cidades distantes atua como uma variável crítica. Esse dado corrobora experimentalmente as dificuldades geométricas apontadas por Gomes e Marques (2023) ao generalizarem o método de Eratóstenes para localidades fora do mesmo meridiano, demonstrando que, mesmo em ambiente virtual, o rigor no alinhamento da sombra permanece determinante para a confiabilidade dos resultados."

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho alcançou seu objetivo central de desenvolver e aplicar uma proposta de ensino de Astronomia para o Ensino Médio que transcendesse a mera exposição teórica, demonstrando a viabilidade de utilizar conceitos de Geometria e Trigonometria escolares para estimar, com rigor científico, grandezas astronômicas reais. A estruturação da intervenção pedagógica em Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) e a adoção de uma postura investigativa, fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, mostraram-se estratégias eficazes. Elas permitiram conectar o conhecimento formal matemático à curiosidade natural dos estudantes, transformando a sala de aula em um ambiente de descoberta ativa onde o aluno deixa de ser um espectador para se tornar um agente da construção do saber.

A metodologia inovou ao promover uma articulação híbrida entre a reprodução de experimentos históricos clássicos, os métodos de Eratóstenes e Aristarco, e o uso de tecnologias digitais contemporâneas, como ShadowMap e Google Earth. Essa abordagem demonstrou que materiais de baixo custo, quando aliados a ferramentas de geolocalização e simulação, podem produzir resultados de alta precisão, desmistificando a ideia de que a ciência de qualidade depende exclusivamente de laboratórios sofisticados. Os resultados quantitativos obtidos foram notáveis: a circunferência da Terra foi estimada com um erro ínfimo de 0,07%, o diâmetro da Lua com um erro de aproximadamente 2,2% e a distância da Terra à Lua com um desvio entre 6% e 8%. Tais índices validam a robustez dos procedimentos adotados e reforçam a capacidade dos estudantes de realizarem ciência com precisão.

Um diferencial significativo desta pesquisa foi a ênfase no rigor metodológico e no tratamento de dados. A introdução de conceitos estatísticos, como o Erro Padrão, o Critério de Chauvenet para exclusão de outliers e o Teste T de Student, elevou o nível da discussão científica escolar, permitindo que os resultados simples conseguidos fossem altamente refinados posteriormente. Além disso, o estudo foi corroborado por um teste computacional realizado em 20 cidades distintas, o qual confirmou a consistência do método de Eratóstenes e permitiu uma análise aprofundada sobre como variáveis geográficas, como distância e topografia, influenciam a precisão das medições, oferecendo uma camada extra de validação científica ao trabalho.

No âmbito pedagógico, a comparação entre os questionários pré e pós-teste evidenciou um avanço significativo na apropriação conceitual. Houve uma clara evolução na compreensão de temas complexos, como o tamanho aparente e a aplicação prática das funções trigonométricas, sugerindo que a contextualização histórica e prática é superior ao ensino tradicional fragmentado. Contudo, o trabalho não esteve isento de desafios, a limitação temporal para a sistematização final e a complexidade inerente aos cálculos estatísticos exigiram adaptações na condução das aulas, apontando para a necessidade de um planejamento que contemple mais tempos de discussão em aplicações futuras.

Como perspectivas para a continuidade desta pesquisa, sugere-se o aprofundamento da aplicação do método de Aristarco para a estimativa da distância do Sol, o que permitiria aos alunos completarem o modelo de escalas do sistema Terra-Lua-Sol. Recomenda-se também o desenvolvimento de recursos digitais dedicados à automação dos cálculos estatísticos, facilitando a inclusão dessa análise rigorosa no cotidiano escolar sem sobrecarregar o tempo didático. Por fim, a realização de estudos longitudinais poderia mensurar a retenção desse conhecimento a longo prazo. Em suma, este trabalho conclui que a astronomia de posição, quando ensinada através de uma metodologia ativa, rigorosa e contextualizada, constitui uma ferramenta poderosa para promover a alfabetização científica e o pensamento crítico no Ensino Médio.

Adicionalmente, vislumbra-se que a utilização de materiais de baixo custo possui potencial pedagógico para a abordagem de temas de maior complexidade na Astronomia e Astrofísica. Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se o desenvolvimento de práticas que simulem a descoberta de exoplanetas utilizando pêndulos cônicos, bem como a demonstração de efeitos de lentes gravitacionais por meio de lentes ópticas acessíveis. Tais abordagens reforçam que a simplicidade experimental pode ser uma ferramenta poderosa para aproximar os estudantes de tópicos de fronteira da ciência.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, Cristiano de Oliveira. **Proposta de UEPS para ensino de tópicos de astronomia: dia/noite e as estações do ano**. 2020. 224 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Física) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2020.
- ARISTARCO DE SAMOS. **Sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua**. Tradução e edição de Rubens E. G. Machado. Santiago, 2016.
- AZEVEDO, Levi O. A. et al. **Revisitando o Experimento de Eratóstenes: medida do raio de Terra**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 44, e20210354, 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 13 jul. 2025.
- AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia educacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.
- BYNUM, William. **Uma breve história da ciência**. Tradução de Iuri Abreu. Porto Alegre: L&PM, 2017.
- CAETANO, Thiago Costa; MOREIRA, Camila Cardoso. **Uma proposta de atividade didática sobre a medição do raio da Terra baseada no método empregado por Eratóstenes**. Cadernos de Astronomia, v. 3, n. 1, p. 1-13, 2022.
- CENTRO DE ENSINO E PESQUISA APLICADA (CEPA/USP). **Experimentos de Física: Medindo experimentalmente o diâmetro da Lua**. São Paulo: Universidade de São Paulo. Disponível em: http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/ensinomedio/experimentos/cap04/cap4_09.php. Acesso em: 25 nov. 2025.
- CFP/UFCG. **O experimento de Eratóstenes**. Texto de divulgação. Portal CFP/UFCG. Disponível em: <https://cfp.ufcg.edu.br/portal/index.php/textos-de-divulgacao/529-experimento-de-eratostenes>. Acesso em: 26 jul. 2025.
- FREITAS, Lucas V.; SANTUCCI, Rafael M.; MARQUES, Ivo A. **Reinventando o método de Aristarco**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 43, e20210062, 2021. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 13 jul. 2025.
- Full Blood Moon Eclipse Transformation Time lapse**. YouTube, vídeo publicado em 27 jul. 2018. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3TcPO0wYflg>. Acesso em: 26 jul. 2025.
- GOMES, Tuan M.; MARQUES, Ivo A. **Reinventando o método de Eratóstenes**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 45, e20220307, 2023. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 13 jul. 2025.
- MARTINS, Alessandro. **Medindo o tamanho da Lua pela observação de um eclipse lunar**. Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 21, n. 39, 2021. Disponível em: <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/39/medindo-o-tamanho-da-lua-pela-observacao-de-um-eclipse-lunar>. Acesso em: 25 nov. 2025.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa: a teoria e textos complementares**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. (No original, é um capítulo intitulado "O que é afinal aprendizagem significativa?")

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. S. **Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2006.

MOREIRA, Marco Antonio. **Unidades de Ensino Potencialmente Significativas – UEPS (Potentially Meaningful Teaching Units - PMTU)**. Versão 6.0. Porto Alegre: Instituto de Física, UFRGS, 2007. Disponível em: <http://moreira.if.ufrgs.br/>. Acesso em: 13 jul. 2025.

NEVES, Marcos Cesar Danhoni et al. **Medindo o raio da Terra: uma experiência no ensino**. Revista Pontes, Paranaíba, v. 12, p. 1-9, 2021.

OLIVEIRA, T. B. de; LIMA, V. T.; BERTUOLA, A. C. **Aristarco revisitado**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 38, n. 2, e2304, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 13 jul. 2025.

PAULUCCI, L. et al. **Levantamento de recursos e uma avaliação atual do ensino de astrofísica estelar**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 44, e20210226, 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/rbef>. Acesso em: 13 jul. 2025.

PELIZZARI, Adriana et al. **Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel**. Revista Pedagógica, Curitiba, v. 2, n. 1, p. 37-42, jul. 2001.

RODRIGUES, M. C. S.; SCARANO JR, S. **A paralaxe como tema agregador interdisciplinar e a bússola como recurso motivador na aprendizagem ativa da Física**. Scientia Plena, São Cristóvão, v. 18, n. 08, 2022. Disponível em: <https://www.scientiaplenua.org.br/sp/article/download/6456/2516/29816>. Acesso em: 25 nov. 2025.

SAGAN, Carl. **Cosmos**. [S. l.: s. n.], 1980.

SCHINZEL, G. H. et al. **Buracos negros: uma proposta de sequência didática em forma de UEPS para o Ensino Fundamental e Médio**. In: ENCONTROS INTEGRADOS EM FÍSICA E SEU ENSINO, 2022, Brasília. Anais... Brasília: UnB, 2022.

SOARES, D. **Eratóstenes e Newton, a ciência em ação**. Disponível em: <https://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/extn/adou/20/adou23.htm>. Acesso em: 26 jul. 2025.

TAYLOR, John R. **Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas**. Tradução de Waldir Leite Roque. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

ZURITA, Marcelo; LUCENA, André (ed.). **Com um eclipse lunar, uma moeda e uma vela, Ariscarco calculou a distância entre a Terra e a Lua 2,2 mil anos atrás**. Olhar Digital, São Paulo, 23 nov. 2021. Disponível em: <https://olhardigital.com.br/2021/11/23/colunistas/com-um-eclipse-lunar-uma-moeda-e-uma-vela-ariscarco-calculou-a-distancia-entre-a-terra-e-a-lua-22-mil-anos-atras/>. Acesso em: 13 jul. 2025.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PRÉ-EXPERIMENTO

- 1) Em um triângulo retângulo, qual a fórmula do seno?
 - a. Cateto Adjacente / Hipotenusa
 - b. Cateto Oposto / Hipotenusa
 - c. Cateto Oposto / Cateto Adjacente
 - d. Hipotenusa / Cateto Oposto
- 2) Qual é a fórmula do cosseno em um triângulo retângulo?
 - a. Cateto Oposto / Hipotenusa
 - b. Cateto Adjacente / Hipotenusa
 - c. Cateto Oposto / Cateto Adjacente
 - d. Hipotenusa / Cateto Adjacente
- 3) Como se calcula a tangente de um ângulo em um triângulo retângulo?
 - a. Cateto Adjacente / Hipotenusa
 - b. Cateto Oposto / Cateto Adjacente
 - c. Hipotenusa / Cateto Oposto
 - d. Cateto Oposto / Hipotenusa
- 4) Sabendo o ângulo e a hipotenusa de um triângulo retângulo, como você calcula o cateto oposto?
 - a. $\text{Cateto Oposto} = \text{Hipotenusa} \times \text{Seno}(\text{ângulo})$
 - b. $\text{Cateto Oposto} = \text{Hipotenusa} \times \text{Cosseno}(\text{ângulo})$
 - c. $\text{Cateto Oposto} = \text{Cateto Adjacente} \times \text{Tangente}(\text{ângulo})$
 - d. $\text{Cateto Oposto} = \text{Hipotenusa} / \text{Seno}(\text{ângulo})$
- 5) Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?
 - a. 90 graus
 - b. 180 graus
 - c. 270 graus
 - d. 360 graus
- 6) O que define triângulos semelhantes?
 - a. Terem todos os lados e ângulos iguais.
 - b. Terem a mesma forma e tamanhos diferentes, com lados proporcionais.
 - c. Terem pelo menos um ângulo reto.
 - d. Terem todos os ângulos agudos.
- 7) O que são retas paralelas?
 - a. Retas que se cruzam formando um ângulo de 90 graus.
 - b. Retas que se cruzam em apenas um ponto.
 - c. Retas que nunca se cruzam e mantêm a mesma distância entre si.

- d. Retas que se encontram em dois pontos diferentes.
- 8) O que é a circunferência de um círculo?
- a. O espaço total dentro do círculo.
 - b. A linha que vai de um lado ao outro, passando pelo centro.
 - c. A distância da borda do círculo até o centro.
 - d. A distância ao redor da borda, ou o perímetro, do círculo.
- 9) Como calcular a circunferência de um círculo usando o diâmetro?
- a. $\pi \cdot r \cdot 2$
 - b. $2 \cdot \pi \cdot r$
 - c. $\pi \cdot d$
 - d. $d \cdot 2$
- 10) Quantos graus tem um círculo completo?
- a. 90 graus
 - b. 180 graus
 - c. 270 graus
 - d. 360 graus
- 11) O que faz a Lua escurecer durante um eclipse lunar?
- a. A Terra passa na frente do Sol.
 - b. A sombra da Terra cobre a Lua.
 - c. A Lua se afasta do Sol.
 - d. O Sol brilha com menos intensidade.
- 12) O que você entende por "tamanho aparente" de um objeto no céu?
- a. O tamanho real do objeto.
 - b. A distância que o objeto está da Terra.
 - c. O ângulo sob o qual o objeto é visto da Terra.
 - d. O brilho do objeto.
- 13) Os raios de sol chegam paralelos na Terra?
- a. Sim, chegam em linhas praticamente paralelas devido à grande distância.
 - b. Não, eles chegam em feixes aleatórios.
 - c. Não, eles chegam convergindo para um único ponto.
 - d. Depende da estação do ano.

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PÓS-EXPERIMENTO

Avaliação Cognitiva:

- 1) No experimento para estimar o tamanho da Terra, a haste, sua sombra e os raios solares formam um:
 - a) Triângulo equilátero.
 - b) Triângulo isósceles.
 - c) Triângulo escaleno.
 - d) Triângulo retângulo.
- 2) No experimento de Eratóstenes, qual o conceito geométrico fundamental que permite que o ângulo da sombra na haste seja o mesmo ângulo no centro da Terra?
 - a) A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .
 - b) Retas paralelas cortadas por uma transversal formam ângulos correspondentes iguais.
 - c) A circunferência de um círculo é calculada a partir do diâmetro.
 - d) Triângulos semelhantes têm ângulos iguais.
- 3) Como a função trigonométrica tangente ($\tan$) foi usada para calcular no experimento de Eratóstenes?
 - a) $\tan() = (\text{Altura} / \text{Sombra}) = (\text{Cateto Adjacente} / \text{Hipotenusa})$.
 - b) $\tan() = (\text{Altura} / \text{Sombra}) = (\text{Cateto Oposto} / \text{Hipotenusa})$.
 - c) $\tan() = (\text{Sombra} / \text{Altura}) = (\text{Cateto Oposto} / \text{Cateto Adjacente})$.
 - d) $\tan() = (\text{Sombra} / \text{Altura}) = (\text{Hipotenusa} / \text{Cateto Adjacente})$.
- 4) Qual a suposição chave sobre os raios solares que chegam à Terra no método de Eratóstenes?
 - a) Eles chegam perpendicularmente à superfície da Terra.
 - b) Eles chegam em um ângulo de 45° .
 - c) Eles são considerados paralelos uns aos outros.
 - d) Eles chegam com intensidade diferente em cada cidade.
- 5) Descobrimos o tamanho da lua, se víssemos outro objeto no céu com o mesmo tamanho aparente, eles teriam de fato o mesmo tamanho?
 - a) Sim, pois o tamanho aparente é sempre o tamanho real.
 - b) Não, porque o tamanho aparente depende da distância do objeto.
 - c) Não é possível saber sem medir a distância.
 - d) Sim, independente da distância deles.
- 6) O que significa dizer que os raios do sol chegam paralelos na Terra?

- a) Que eles se cruzam no centro da Terra.
 - b) Que eles mantêm a mesma direção, facilitando o cálculo do ângulo de incidência.
 - c) Que eles formam um ângulo reto com o solo.
 - d) Que eles chegam em linhas curvas.
- 7) Medimos a circunferência da Terra, qual seria a fórmula para encontrar o seu diâmetro?
- a) $\text{Diâmetro} = \text{Circunferência} \times \pi$.
 - b) $\text{Diâmetro} = \text{Circunferência} / \pi$.
 - c) $\text{Diâmetro} = \pi / \text{Circunferência}$.
 - d) $\text{Diâmetro} = \text{Circunferência} + \pi$.
- 8) Ao medir a diferença angular entre as cidades para calcular a circunferência da Terra, quantos graus consideramos no total para toda a circunferência da Terra?
- a) 90° .
 - b) 180° .
 - c) 360° .
 - d) 45° .
- 9) No experimento da distância da Lua, criamos dois triângulos. O que esses triângulos tinham em comum, de acordo com o princípio de triângulos semelhantes?
- a) Os tamanhos dos lados.
 - b) As áreas.
 - c) As proporções entre os lados correspondentes e os ângulos.
 - d) A base e a altura.

Avaliação da Metodologia:

1. O uso dos experimentos práticos ajudou a compreender melhor os conceitos de geometria e astronomia.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
 () 3 - Neutro
 () 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

2. A clareza das explicações teóricas antes dos experimentos foi suficiente para que eu entendesse o que iríamos fazer.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
 () 3 - Neutro
 () 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

3. A metodologia de realizar os experimentos em grupo e discutir os resultados me ajudou a aprender mais do que se eu tivesse estudado o tema sozinho.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

4. Consegui observar os conceitos de "Triângulos Semelhantes" na prática durante os experimentos.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

5. Consegui observar os conceitos de "Proporcionalidade" na prática durante os experimentos.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

6. Consegui observar os conceitos de "Tamanho Aparente" na prática durante os experimentos.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

7. Consegui observar os conceitos de "Tangente e ângulos" na prática durante os experimentos.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente

8. Os desafios propostos antes dos experimentos me incentivaram a pensar em soluções criativas para os problemas.

- () 1 - Discordo Totalmente () 2 - Discordo Parcialmente
() 3 - Neutro
() 4 - Concordo Parcialmente () 5 - Concordo Totalmente