



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMILA CIBELLE ARAÚJO DE MEDEIROS

**EXPLORANDO A ESTÉTICA DAS CURVAS DE BÉZIER: UMA ABORDAGEM
ARTÍSTICA E COMPUTACIONAL NO GEOGEBRA**

PAU DOS FERROS/RN
2023

CAMILA CIBELLE ARAÚJO DE MEDEIROS

**EXPLORANDO A ESTÉTICA DAS CURVAS DE BÉZIER: UMA ABORDAGEM
ARTÍSTICA E COMPUTACIONAL NO GEOGEBRA**

Monografia apresentada à Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Ronildo
Nicodemos da Silva

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

M488e Medeiros, Camila Cibelle Araújo de .
Explorando a estética das curvas de Bézier:
uma abordagem artística e computacional no
GeoGebra / Camila Cibelle Araújo de Medeiros. -
2023.
38 f. : il.

Orientador: Ronildo Nicodemos da Silva.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Matemática, 2023.

1. Curvas de Bézier. 2. Estética. 3. Abordagem
artística. 4. GeoGebra. I. Silva, Ronildo
Nicodemos da , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Mossoró / Setor de Informação e Referência
Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB: 15/120

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

CAMILA CIBELLE ARAÚJO DE MEDEIROS

**EXPLORANDO A ESTÉTICA DAS CURVAS DE BÉZIER: UMA ABORDAGEM
ARTÍSTICA E COMPUTACIONAL NO GEOGEBRA**

Monografia apresentada à Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Mr. Ronildo Nicodemos
da Silva

Defendida em: 17 / 11 / 2023.

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

RONILDO NICODEMOS DA SILVA

Data: 18/12/2023 21:42:39-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Me. Ronildo Nicodemos da Silva (UFERSA)
Presidente



Documento assinado digitalmente

FLAVIANA MOREIRA DE SOUZA AMORIM

Data: 20/12/2023 10:19:27-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dra. Flaviana Moreira de Souza Amorim (UERN)
Examinadora



Documento assinado digitalmente

ANGELICA DE FREITAS ALVES

Data: 20/12/2023 07:43:56-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Me. Angélica de Freitas Alves (UERN)
Examinadora

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, a Deus, que permitiu superar as dificuldades durante o período de estudo e alcançar meus objetivos.

Aos meus familiares, meu marido José Dorenildo por sua paciência e companheirismo. Sou grata aos meus filhos, Nicholas e José Guilherme, por estarem comigo em todo esse processo. Agradeço em especial à minha mãe, Jevane, e à minha irmã, Isadora, pelo apoio ao longo desses anos de formação.

Ao professor Ronildo Nicodemos, por ser meu orientador na construção deste trabalho, pois mesmo teve um papel fundamental para o desenvolvimento dos estudos do tema da Monografia.

RESUMO

As curvas de Bézier, desenvolvidas pelos matemáticos franceses Pierre Bézier e Paul de Casteljau, desempenham um papel importante em diversas áreas, como, por exemplo, arquitetura e computação gráfica. Neste trabalho, exploramos a estética desse tipo de curva por meio de uma abordagem que une matemática e arte na qual foi utilizado o *software* de matemática dinâmica GeoGebra. Nosso objetivo é ilustrar como conceitos básicos da matemática podem ser utilizados na construção de belas imagens, tornando-se uma ferramenta que ajuda no despertar do interesse e compreensão entre os estudantes. Para este trabalho, exploramos os comandos de Sequências, criação de Pontos, criação de Segmentos, Listagem, dentre outras coisas. As construções artísticas desenvolvidas neste trabalho ilustram a versatilidade das curvas de Bézier no contexto visual, promovendo uma apreciação mais profunda da matemática e estimulando uma abordagem criativa e estética em relação aos conceitos trabalhados.

Palavras-chaves: Curvas de Bézier. Estética. Abordagem Artística. GeoGebra.

ABSTRACT

Bézier curves, developed by French mathematicians Pierre Bézier and Paul de Casteljaou, play an important role in various fields, such as architecture and computer graphics. In this paper, we explore the aesthetics of this type of curve through an approach that combines mathematics and art, using the dynamic mathematics software GeoGebra. Our aim is to illustrate how basic mathematical concepts can be used in the construction of beautiful images, making it a tool that helps to arouse interest and understanding among students. For this work, we explored the Sequences commands, creating Points, creating Segments, Listing, among other things. The artistic constructions developed in this work illustrate the versatility of Bézier curves in a visual context, promoting a deeper appreciation of mathematics and stimulating a creative and aesthetic approach to the concepts worked on.

Keywords: Bézier curves. Aesthetics. Artistic Approach. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Construção da Curva de Bézier.	11
Figura 2 - Construção da Curva de Bézier.	12
Figura 3 - Construção da Curva de Bézier.	12
Figura 4 - Construção da Curva de Bézier	13
Figura 5 - Criação de segmento no GeoGebra.	18
Figura 6 - Controle deslizante.	19
Figura 7 - Ferramenta Comando Sequência.	20
Figura 8 - Curvas de Bézier.	21
Figura 9 - Janela inicial do GeoGebra.	22
Figura 10 - Inserir Controle Deslizante.	22
Figura 11 - Comando Sequência	23
Figura 12 - Lista de Pontos e Segmentos.	23
Figura 13 - Estrela construída usando curvas.	24
Figura 14 - Curvas usando pontos	25
Figura 15 - Triângulo usando curvas.	25
Figura 16 - Quadrado usando curvas.	26
Figura 17 - Pentágono usando curvas.	27
Figura 18 - Lista de pontos sobre pontos.	28
Figura 19 - Segmentos sobre segmentos.	29
Figura 20 - Segmentos sobre segmentos.	30
Figura 21 - Desenho de Curvas de Bézier no plano cartesiano.	31
Figura 22- Triângulo usando Curvas de Bézier	32
Figura 23 - Quadrado usando Curvas de Bézier.	33
Figura 24 - Pentagono usando Curvas de Bézier.	34
Figura 25 - Triângulo Curvas de Bézier ($t=0,1$).	35
Figura 26 - Triângulo Curvas de Bézier ($t=0,6$).	35
Figura 27- Quadrado Curvas de Bézier ($t=0,1$).	36
Figura 28 - Quadrado Curvas de Bézier ($t=0,4$).	36

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	8
2. CURVAS DE BÉZIER.....	10
2.1. CONSTRUINDO CURVAS DE BÉZIER.....	10
3. SOFTWARES DE MATEMÁTICA DINÂMICA	15
3.1. O SOFTWARE GEOGEBRA	16
3.1.1. CRIAÇÃO DE PONTO.....	16
3.1.2. CRIAÇÃO DE SEGMENTO:.....	17
3.1.3. CONTROLE DESLIZANTE:	18
3.1.4. UTILIZAÇÃO DA FERRAMENTA DE SEQUÊNCIA PARA OTIMIZAR PROCESSOS:.....	19
4. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA DA CURVA DE BÉZIER .	21
4.1. CURVAS DE BÉZIER NO PLANO CARTESIANO	24
4.2. CURVAS DE BÉZIER UTILIZANDO PONTOS.....	24
4.3. CURVAS DE BÉZIER USANDO UM POLÍGONO REGULAR	26
4.4. CURVAS DE BÉZIER SOBREPOSTAS	28
5. RESULTADOS	30
5.1. CURVAS DE BÉZIER NO PLANO CARTESIANO	31
5.2. CURVAS DE BÉZIER UTILIZANDO PONTOS	32
5.3. CURVAS DE BÉZIER USANDO UM POLÍGONO REGULAR	33
5.4. CURVAS DE BÉZIER SOBREPOSTAS.....	34
6. CONCLUSÕES	37
REFERÊNCIAS.....	38

1. INTRODUÇÃO

As curvas de Bézier são amplamente utilizadas em diversas áreas, como design gráfico, modelagem de objetos tridimensionais e animação, devido à sua capacidade de gerar formas suaves e curvilíneas. Nesse contexto, o *software* GeoGebra se apresenta como uma ferramenta prática e acessível para a construção e visualização dessas curvas, visto que tem a potencialidade de proporcionar uma interação entre álgebra e geometria que facilita a compreensão dos conceitos matemáticos subjacentes.

A origem das curvas de Bézier remonta ao trabalho pioneiro do engenheiro mecânico francês Pierre Bézier (1910-1999). Rabut (2002) destaca que Bézier trabalhou na renomada empresa automobilística Renault, onde se dedicou ao desenvolvimento de métodos para modelar a programação de computadores com pouca memória. Sua pesquisa resultou na criação do que, posteriormente ficou conhecido como “curvas de Bézier” quando obteve a patente para o *software* Unisurf em 1966 Rabut (2002).

A colaboração de Bézier com outros pesquisadores, como M. de la Boixère e Paul de Casteljaou, foi fundamental para o avanço dos estudos sobre esse tipo de curva. Molinari e Retslaff (2019) destacam que esses pesquisadores trabalharam juntos na área de modelagem desde 1958, e somente em 1985 tiveram autorização de seus empregadores para publicar seus trabalhos, devido ao caráter confidencial dessas pesquisas, como afirmado por Simoni et al. (2005).

O *software* GeoGebra, por sua vez, desempenha um papel fundamental neste estudo. Araújo et al. (2018) ressaltam que o GeoGebra é uma ferramenta de matemática dinâmica que permite a interação entre álgebra e geometria em um mesmo ambiente. Sua interface intuitiva e recursos gráficos facilitam a construção de representações visuais e oferecem a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma concreta, rompendo com a abstração que muitas vezes limita o entendimento dos estudantes.

Diante desse contexto, este trabalho visa demonstrar as possibilidades estéticas das curvas de Bézier, utilizando o *software* GeoGebra como meio de construção e visualização. Serão apresentados exemplos práticos e um passo-a-passo detalhado para a construção das curvas, ilustrando diferentes configurações estéticas que podem ser alcançadas. Dessa forma, busca-se contribuir para o

conhecimento e a apreciação das curvas de Bézier como elementos-chave na produção de arte e design computacional.

A estrutura do trabalho segue da seguinte maneira: no Capítulo 1, é apresentada esta introdução, fornecendo uma visão geral do tema e dos objetivos da pesquisa. No Capítulo 2, será apresentada uma revisão bibliográfica sobre a teoria das curvas de Bézier, abordando suas propriedades e aplicações. No Capítulo 3, será discutido o *software* GeoGebra e suas funcionalidades relevantes para a construção das curvas. No Capítulo 4, serão apresentados exemplos práticos de construção de curvas de Bézier no GeoGebra, explorando diferentes configurações estéticas. Por fim, no Capítulo 5, serão apresentadas as considerações finais, destacando as principais conclusões e possíveis direções para trabalhos futuros.

2. CURVAS DE BÉZIER

A técnica de alinhar curvas, conhecida como "*curve stitching*", é um trabalho manual que incorpora fundamentos matemáticos e pode ser explorada pelos docentes para o ensino da geometria aos estudantes. Por meio dessa prática, é possível criar curvas belíssimas ao utilizar marcações de pontos igualmente espaçados ao redor de uma circunferência ou em linhas retas. Ribeiro (2010) destaca a importância do estudo da construção de curvas, que permite aos alunos refletir sobre os elementos criados, analisando retas, ângulos das curvas, posicionamento dos pontos e valores numéricos.

As "*curve stitching*" tem suas raízes nas atividades de "ponto curvo" desenvolvidas por Mary Everest Boole, esposa de George Boole, no final do século XIX. Essa prática foi criada com o intuito de tornar as ideias matemáticas mais acessíveis às crianças. No entanto, foi somente no final dos anos 1960, por meio de kits e livros, que a técnica ganhou popularidade e se tornou um artesanato decorativo. Coincidentemente, esse período também marcou, como veremos a seguir, a aplicação das curvas de Bézier na indústria automotiva.

As curvas de Bézier receberam esse nome em homenagem a Pierre Bézier (1910-1999) e foram desenvolvidas nas décadas de 1960 por dois matemáticos e engenheiros franceses, Paul de Casteljau (1930-2022) e Pierre Bézier. Embora tenham sido inicialmente concebidas para a indústria automobilística, Bézier obteve permissão para publicar seu trabalho e, assim, as curvas passaram a ser conhecidas por seu nome. Vale ressaltar que o algoritmo utilizado para calcular essas curvas é baseado nos cálculos de Casteljau.

De acordo com Molinari e Retslaff (2019), as curvas de Bézier são altamente flexíveis e possuem grande capacidade de adaptação, permitindo sua construção em diferentes formas e comprimentos, controlados pelos pontos de controle. Essa flexibilidade proporciona diversas perspectivas e possibilidades na construção das curvas, envolvendo diferentes conceitos matemáticos.

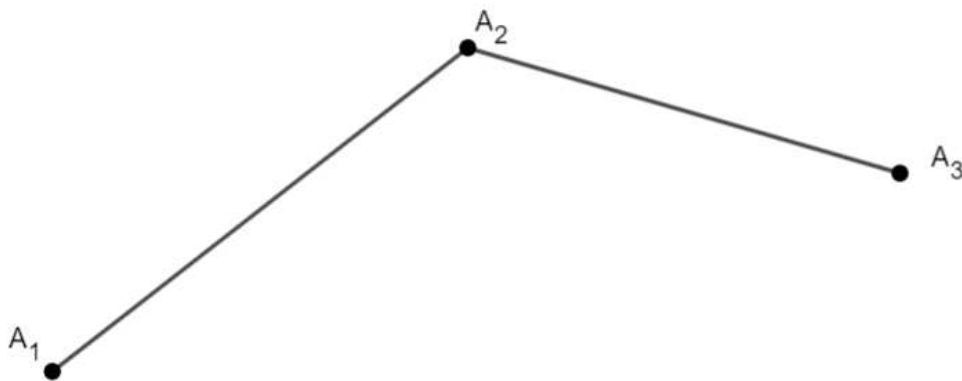
2.1. Construindo Curvas de Bézier

De maneira geral, podemos considerar a construção de curvas de Bézier como um processo simples e ele nos permite construir curvas suaves e esteticamente agradáveis com base em pontos de controle.

Para a construção das curvas de Bézier inicialmente, é necessário selecionar, pelo menos, três pontos distintos: A_1 , A_2 e A_3 . Esses pontos devem ser escolhidos de forma que não estejam em uma linha reta, para garantir a criação de curvas interessantes.

Em seguida, é traçado segmentos que conectam o ponto A_1 ao ponto A_2 e A_2 a A_3 . Os pontos A_1 e A_3 representam, para esse caso, as extremidades da curva de Bézier, como mostrado na Figura 01.

Figura 1- Construção da Curva de Bézier.



Fonte: Autoria própria (2023).

Em seguida, introduzimos a variável livre t como uma forma de controlar a proporção dos pontos intermediários B_1 e B_2 que estarão, respectivamente, entre os segmentos $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{A_2A_3}$

Para calcular os pontos intermediários B_1 e B_2 , utilizamos as expressões:

$$B_1 = A_1 + t(A_2 - A_1) \quad (1)$$

e

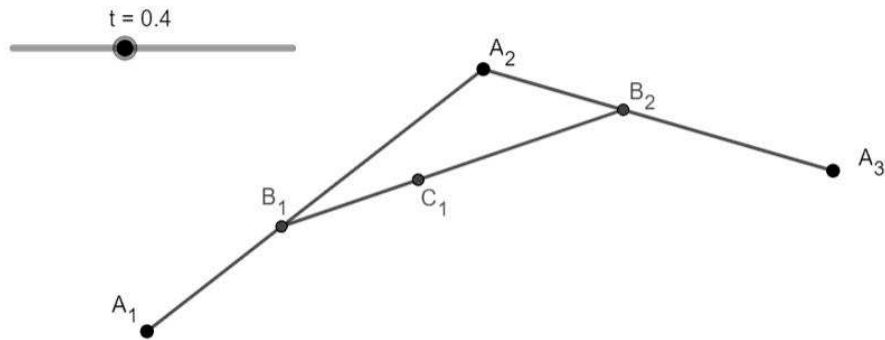
$$B_2 = A_2 + t(A_3 - A_2) \quad (2)$$

com $t \in [0,1]$.

Esses pontos B_1 e B_2 serão os novos pontos de controle para os segmentos intermediários. Observe que, quando t assume o valor zero, temos que $B_1 = A_1$ e $B_2 = A_2$. De modo análogo, quando $t = 1$ que $B_1 = A_2$ e $B_2 = A_3$.

Neste momento, conectamos B_1 a B_2 e repetimos o processo utilizando o mesmo parâmetro t para calcular os pontos C_1 dentro do segmento $\overline{B_1B_2}$. Esse ponto C_1 se tornou o novo ponto intermediário, como ilustrado na Figura 02.

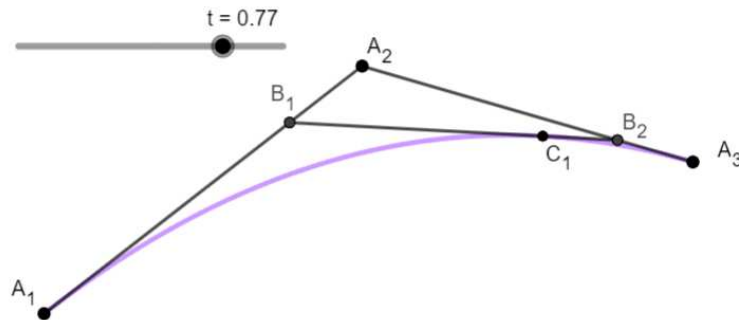
Figura 2 - Construção da Curva de Bézier.



Fonte: Autoria própria (2023).

Ao variarmos o parâmetro t fazemos com que o traço deixado pelo ponto C_1 forme o que aqui chamamos de Curva de Bézier, como pode ser visto na Figura 03.

Figura 3 - Construção da Curva de Bézier.



Fonte: Autoria própria (2023).

Observe, que o formato da curva construída na Figura 03 lembra uma parábola, o que de fato o é, e isso se dá porque, como

$$C_1 = B_1 + t(B_2 - B_1)$$

e, pelas Equações (1) e (2), onde temos expressões para B_1 e B_2 que dependem de A_1, A_2 e A_3 , então, temos que

$$C_1 = A_1 + 2t(A_2 - A_1) + t^2(A_3 - 2A_2 + A_1) \quad (3)$$

forma da curva. Em seguida, são criados os segmentos iniciais ligando os pontos de controle adjacentes. Para calcular os pontos intermediários ao longo desses segmentos, utilizamos o parâmetro t , que varia de 0 a 1. Lembremos que esse parâmetro t será aplicado para cada equação específica de todos os pontos intermediários.

Esse processo é repetido para criar níveis adicionais de curvas de Bézier. Cada repetição adiciona mais detalhes e refinamentos à curva, tornando-a mais suave e precisa. Caso tenhamos n pontos iniciais, o processo deverá ser repetido $n - 1$ vezes, resultando em curvas paramétricas formadas por polinômios de grau n . Essas curvas oferecem uma ampla gama de possibilidades para a representação de formas complexas, permitindo a criação de curvas suaves, com curvaturas variáveis e detalhes precisos.

Dessa forma, o método de construção de curvas de Bézier de múltiplos níveis se destaca pela flexibilidade que oferece, permitindo a criação de curvas com diferentes graus de complexidade e detalhamento refinado. É uma técnica amplamente utilizada em áreas como design gráfico, animação e modelagem 3D, proporcionando resultados esteticamente agradáveis e precisos.

3. SOFTWARES DE MATEMÁTICA DINÂMICA

Com o avanço da tecnologia, os *softwares* educacionais têm se mostrado ferramentas importantes nos processos de ensino e aprendizagem, desempenhando um papel relevante na assimilação dos conteúdos pelos alunos. Ao invés de simplesmente memorizarem informações, os estudantes constroem conhecimento por meio dessas ferramentas. Nesse contexto, é relevante destacar os *softwares* de matemática dinâmica.

Os *softwares* de matemática dinâmica são programas computacionais desenvolvidos para auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática, proporcionando interatividade entre os estudantes e os objetos matemáticos. Esses programas permitem que o usuário interaja e manipule objetos geométricos, realize cálculos, plote gráficos e varie parâmetros em tempo real, permitindo que mudanças instantâneas sejam visualizadas pelos usuários.

De acordo com Wassie e Zergaw (2020), ao interagirem com *softwares* de matemática dinâmica, os estudantes conseguem explorar e experimentar conceitos matemáticos de maneira visualmente atraente e envolvente. Eles podem visualizar as relações entre diferentes elementos matemáticos, testar hipóteses, realizar experimentos e fazer descobertas por meio de investigações ativas. Essa abordagem estimula a compreensão dos conceitos, a resolução de problemas e o desenvolvimento do pensamento matemático.

Além disso, conforme destacado por Silva et al (2020), o uso dessas ferramentas em sala de aula cria um ambiente de aprendizagem lúdico, que incentiva a resolução de problemas e a reflexão crítica por parte dos estudantes. Isso estimula a autonomia dos alunos e sua capacidade de análise, julgamento, decisão e posicionamento crítico no mundo. Dessa forma, os alunos passam a enxergar o ambiente de ensino como um espaço participativo no processo de aprendizagem.

No contexto específico do ensino de matemática, os *softwares* educacionais facilitam o entendimento dos conceitos e ampliam a capacidade de observação e compreensão dos conteúdos e atividades, proporcionando uma abordagem mais estimulante e prática da disciplina (SILVA et al, 2020). Embora haja diversos *softwares* de matemática dinâmica disponíveis, como o Desmos Geometry, CaRMetal e Geometer's Sketchpad, optamos por utilizar o GeoGebra, por ser um

software gratuito, com suporte para smartphones, computadores e acesso online ou em desktop, além de contar com extenso material disponível na internet.

3.1. O *Software* GeoGebra

A utilização de *softwares* no ensino de matemática é uma estratégia que facilita o entendimento dos conteúdos e amplia a capacidade de observação e compreensão dos estudantes. Essa abordagem proporciona um ensino mais estimulante e prático da matemática.

Um exemplo de *software* utilizado nesse contexto é o GeoGebra, que é um *software* livre matemático. Ele engloba áreas como álgebra, cálculo e geometria, e pode ser acessado online ou baixado para uso em computadores, celulares ou tablets. O GeoGebra foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwar, na Universidade de Salzburgo.

Uma das vantagens do GeoGebra é a possibilidade de trabalhar com matemática dinâmica. Ele permite a realização de construções envolvendo pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas e funções. Além disso, é possível modificar essas construções de acordo com as necessidades de trabalho (HOHENWARTER; HOHENWARTER, 2009).

No contexto do capítulo sobre comandos básicos para construção de curvas de Bézier no GeoGebra, é importante ressaltar algumas padronizações na utilização dessa ferramenta. Inicialmente, destacam-se as letras que possuem usos específicos e não podem ser utilizadas arbitrariamente. Entre elas, temos a variável independente, representada pela letra x , assim como as letras y e t .

No GeoGebra, há também convenções sobre o uso de letras maiúsculas e minúsculas. Em geral, as letras maiúsculas representam pontos, enquanto as letras minúsculas indicam vetores, retas ou segmentos. Essa distinção é relevante ao utilizar os comandos básicos disponíveis.

Dentre os comandos básicos do GeoGebra que são úteis para a construção das curvas de Bézier, destacaremos a seguir os principais.

3.1.1. Criação de ponto

Como sabemos, um ponto é uma entidade fundamental na matemática e no próprio Geogebra, representando uma localização no plano (ou no espaço). existem duas maneiras principais de criar um ponto:

- a) A primeira e mais simples é clicar no ícone de ponto na barra de ferramentas.
- b) A segunda maneira é inserir as coordenadas na caixa de diálogo. No caso de um plano bidimensional, o comando básico para criar um ponto é digitando (x_0, y_0) , onde se utiliza parênteses para delimitar as coordenadas, separadas por uma vírgula.

Além disso, é possível nomear um ponto, como A , por exemplo, usando a notação $A = (x_0, y_0)$. Vale ressaltar também que, se um ponto criado é movido na janela de visualização, as coordenadas são atualizadas automaticamente devido à natureza dinâmica do *software* GeoGebra.

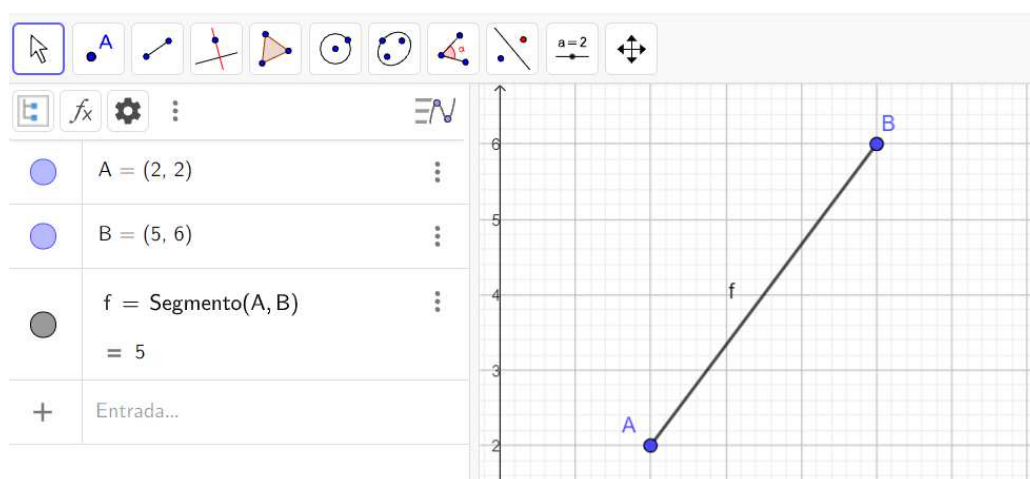
3.1.2. Criação de segmento:

A criação de segmentos é outra ferramenta importante no GeoGebra. Um segmento é uma entidade geométrica que representa uma linha reta entre dois pontos distintos. Existem duas maneiras básicas de criar um segmento:

- a) A primeira é usar a barra de ferramentas, selecionando a opção de segmento e clicando em dois pontos para criar o segmento automaticamente.
- b) A segunda maneira é usar a caixa de diálogo e digitar o comando "segmento". Em seguida, será possível inserir o ponto inicial e o ponto final do segmento desejado. Por exemplo, para ligar o ponto A ao ponto B , digita-se: `Segmento(A,B)`. O segmento será exibido na janela de visualização, juntamente com o seu tamanho, e será identificado por uma letra minúscula, como, por exemplo, " $f=Segmento(A,B)$ ".

Ao criar um segmento, ele é representado por uma linha reta que conecta os pontos inicial e final especificados. Além disso, o segmento exibe seu tamanho, que é a distância entre os dois pontos, na barra lateral, como pode ser conferido na Figura 05. Essa medida pode ser utilizada para análises e cálculos subsequentes.

Figura 5 - Criação de segmento no GeoGebra.



Fonte: Autoria própria (2023).

Os segmentos criados podem ser manipulados e movidos na janela de visualização, sendo atualizados automaticamente em relação às coordenadas dos pontos que os definem. Essa natureza dinâmica do GeoGebra permite explorar e estudar propriedades geométricas dos segmentos de forma interativa e intuitiva.

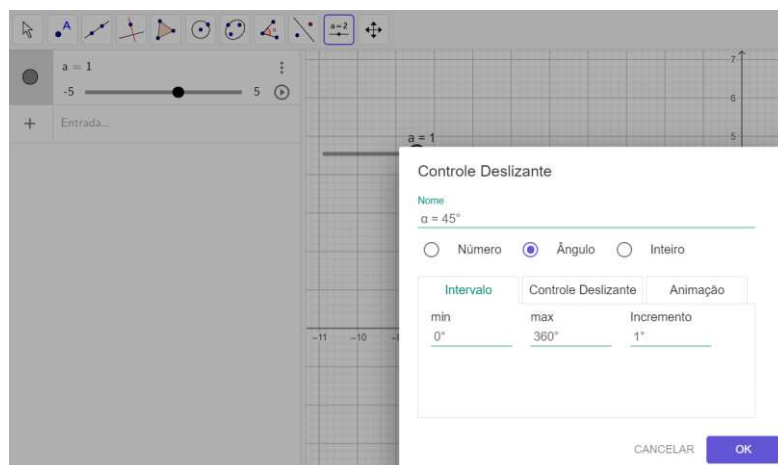
3.1.3. Controle deslizante:

O controle deslizante é uma ferramenta poderosa no GeoGebra, pois permite a manipulação e movimentação dos objetos. No *software*, é comum utilizar letras alfabéticas para representar variáveis livres que podem variar dentro de um intervalo pré-definido, enquanto as letras gregas são usadas para representar ângulos.

Existem duas maneiras de criar um controle deslizante:

- a) Através da barra de ferramentas: Na barra de ferramentas, é possível definir a variável, o valor mínimo e máximo que ela pode assumir, bem como o incremento desejado. Essas configurações podem ser ajustadas de acordo com as necessidades do usuário. (Veja a Figura 06.)
- b) Digitando uma letra ainda não utilizada na caixa de diálogo: Ao fazer isso, um controle deslizante será automaticamente criado com limites padrão entre -5 e 5. No entanto, é possível modificar posteriormente esses valores nas configurações, permitindo um controle mais preciso e personalizado.

Figura 6 - Controle deslizante.



Fonte: Autoria própria (2023).

Essas opções de criação do controle deslizante proporcionam uma ampla gama de possibilidades para explorar e interagir com os objetos no GeoGebra, facilitando o estudo e a análise de diferentes cenários e configurações. Além disso, ao adicionar rastros nos objetos que se movem em resposta aos ajustes do controle deslizante, é possível visualizar as mudanças ao longo do tempo e analisar o comportamento dos objetos de forma dinâmica.

3.1.4. Utilização da ferramenta de sequência para otimizar processos:

A ferramenta de sequência no GeoGebra é um recurso específico que oferece opções adicionais além das ferramentas básicas. Para utilizá-la, é necessário digitar o comando "Sequência", que apresentará cinco opções disponíveis, como ilustrado na Figura 07. Cada uma dessas opções gera uma lista de objetos como resultado.

As opções da ferramenta de sequência são as seguintes:

- a) **Valor final:** Nessa opção, apenas um "valor final" é especificado, resultando em uma lista de números inteiros.
- b) **Valor inicial e valor final:** Nessa opção, é solicitado um "valor inicial" e um "valor final", gerando uma sequência de números inteiros que se inicia no valor inicial e termina no valor final especificado.
- c) **Valor inicial, valor final e incremento:** Além do valor inicial e final, é possível especificar o incremento desejado, permitindo a criação de sequências de números reais.

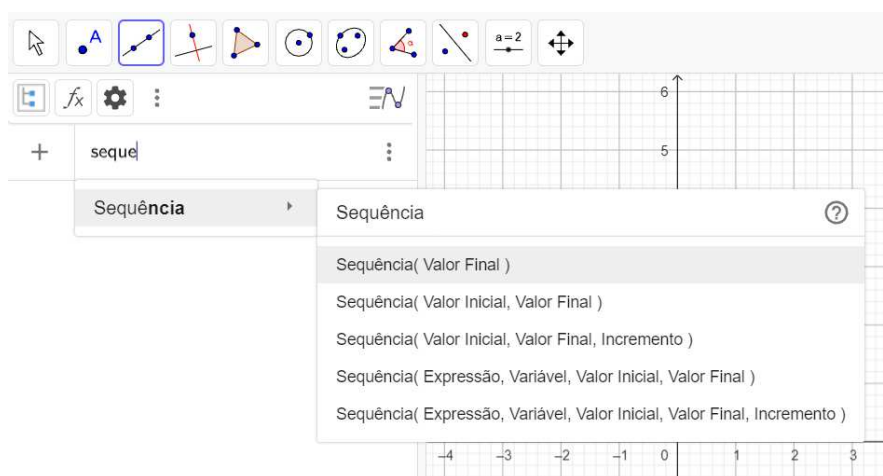
d) Expressão aplicada a objetos: Nessa opção, é possível utilizar uma expressão que pode ser aplicada a diversos objetos, como pontos, segmentos, círculos, ângulos e funções. Não há a opção de incremento nesse caso, o que indica que os objetos são alternados de um em um.

É importante ressaltar que, para utilizar as opções mencionadas em **d)**, é necessário criar uma variável que varie entre um valor mínimo e um valor máximo, ambos especificados no comando.

e) Expressão aplicada a objetos com incremento personalizado: A última opção é semelhante à quarta, porém adiciona a possibilidade de especificar um incremento personalizado, permitindo saltos personalizados entre os elementos da sequência.

Essas opções da ferramenta de sequência fornecem flexibilidade e versatilidade na criação de sequências de objetos no GeoGebra, permitindo explorar diferentes padrões e configurações de forma dinâmica.

Figura 7 - Ferramenta Comando Sequência.



Fonte: Autoria própria (2023).

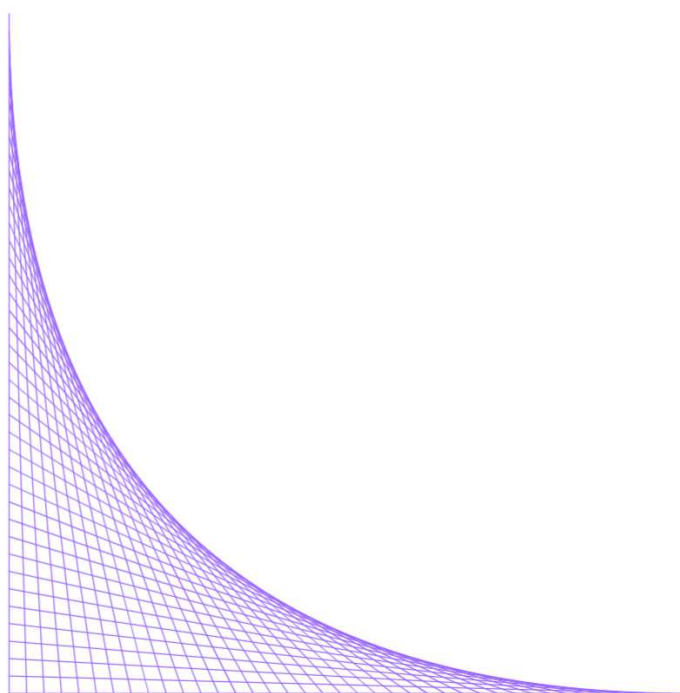
Como mencionado anteriormente, a sequência resultará em uma lista de elementos que podem ser localizados posteriormente. Por exemplo, se foi criada a lista $l1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, para localizar o quarto elemento, que é o número 6, deve-se digitar: $l1(4) = 6$.

É importante ressaltar que é possível criar uma sequência dentro de uma sequência, gerando uma matriz como resultado. O uso de sequências no GeoGebra é vantajoso para evitar trabalho repetitivo ao criar elementos individualmente.

4. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO GEOGEBRA DA CURVA DE BÉZIER

Sempre que pesquisamos sobre curvas de Bézier, a primeira imagem que surge é a da Figura 08. Usando os principais comandos percorridos no capítulo anterior, pretendemos construí-la, bem como utilizá-la como base para outras figuras.

Figura 8 - Curvas de Bézier.



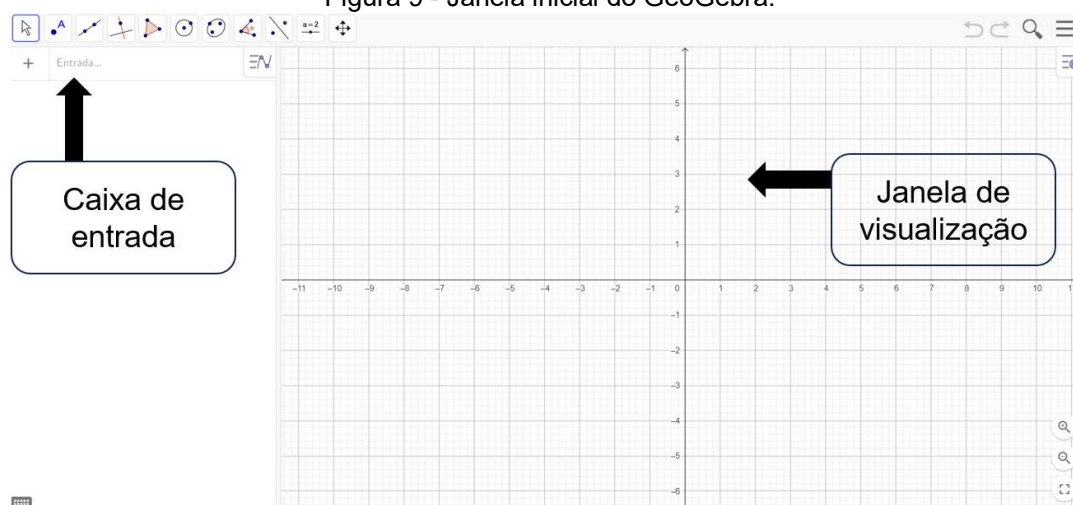
Fonte: Autoria própria (2023).

A construção de curvas de Bézier no GeoGebra envolve o uso de diversas ferramentas e propostas matemáticas. Uma abordagem inicial é utilizar o plano cartesiano como base, como ilustrado na Figura 09. No GeoGebra, encontramos o plano cartesiano como construção inicial, ao lado esquerdo da tela, onde podemos digitar equações na caixa de entrada. Além disso, na parte superior da tela, temos caixas de ferramentas que facilitam o desenvolvimento das construções geométricas.

Para a construção da curva, primeiro é adicionado um controle deslizante, editar o mesmo em números inteiros, valor mínimo um (1), valor máximo trinta (30), o incremento um (1) e o controle deslizante nomeado de “ n ”.

Na caixa de entrada, usar o comando, Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final).

Figura 9 - Janela inicial do GeoGebra.

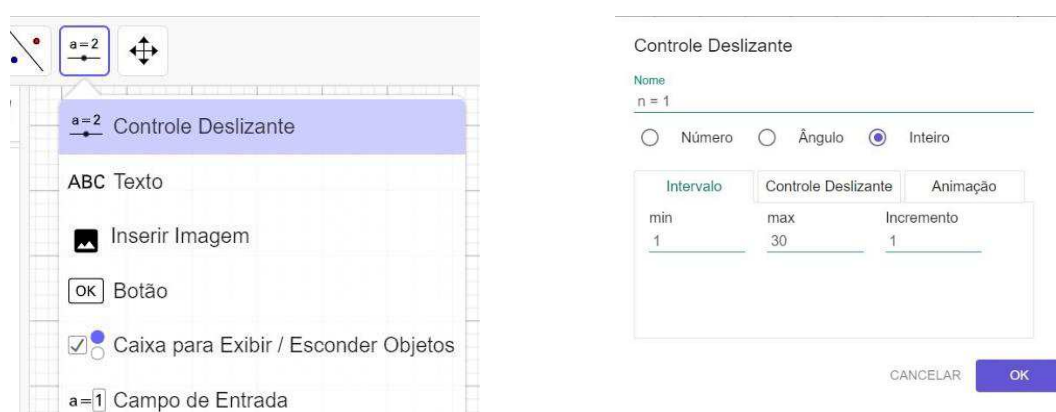


Fonte: Captura de tela do notebook do autor (2023).

Para criar uma sequência de pontos no GeoGebra, utilizamos o comando "Sequência". No lugar da expressão, substituímos pelas coordenadas do eixo y (ordenadas), representadas por $(0, k)$, onde k é uma variável. Definimos o valor inicial como 1 e o valor final como " n " (um controle deslizante) que varia até 30. Portanto, a expressão fica como lista 11=Sequência($(0, k)$, k , 1, n).

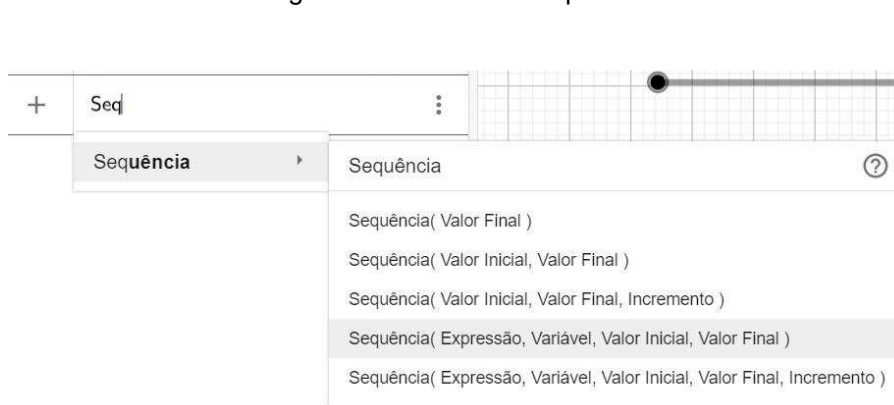
Da mesma forma, podemos usar o mesmo comando para o eixo x (abscissas), criando a lista 12=Sequência($(k, 0)$, k , 1, n). Com isso, é possível criar uma sequência de pontos interativa nos dois eixos, utilizando o controle deslizante para alterar os valores dos pontos de 1 a 30. As Figuras 10 a) e b), e a Figura 11 ilustram esses procedimentos de construção de controle deslizante e sequências.

Figura 10 - Inserir Controle Deslizante.



Fonte: Autoria própria (2023).

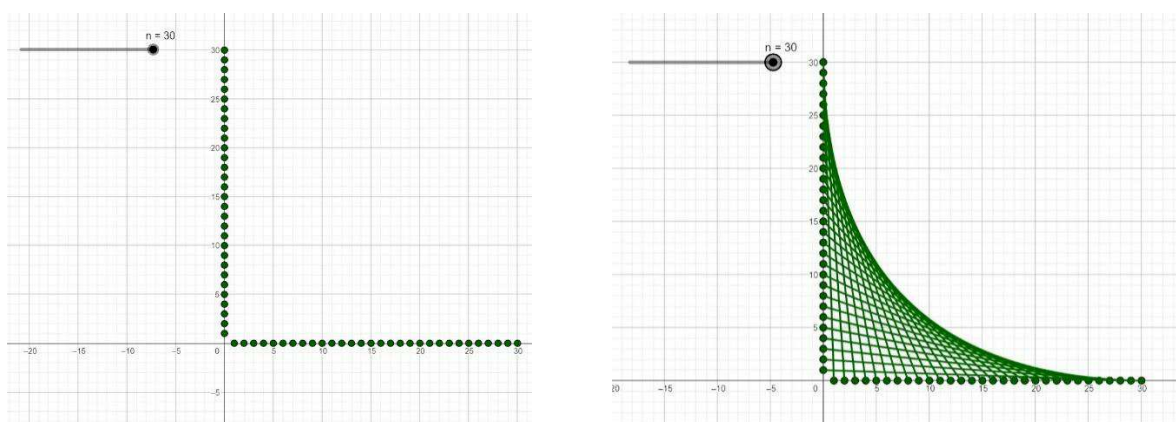
Figura 11 - Comando Sequência



Fonte: Autoria própria (2023).

Após esses procedimentos, concluímos a ideia básica da Figura 08, ilustrada nas Figuras 12 a) e b).

Figura 12 - Lista de Pontos e Segmentos.



Fonte: Autoria própria (2023).

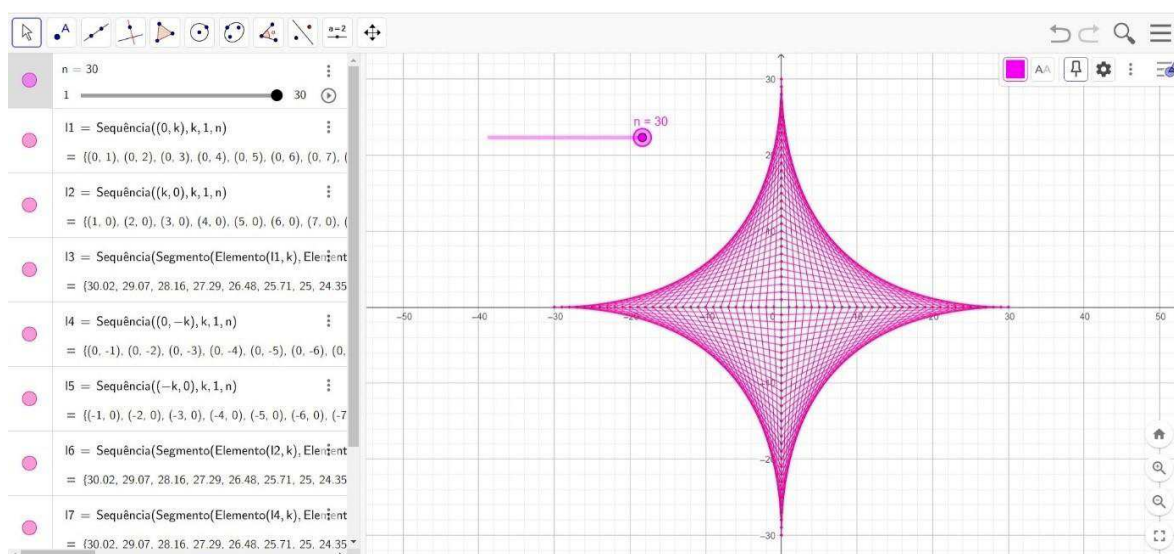
Agora temos que adicionar os segmentos automáticos, para indicar que os segmentos são gerados de um ponto a outro, para isso vamos usar o comando anterior Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final), porém no lugar a expressão será diferente vamos usar Segmento (Ponto, Ponto) e nos pontos adicionar Elementos (Lista, Posição), colocando as expressões das listas 11 e 12 já criadas no comando 13=Sequência (Segmento (Elemento (11,k), Elemento (12,n+1-

$k)), k, 1, n)$, teremos as Figura 8, e as Figuras 12 a) e b).

4.1. Curvas de Bézier no plano cartesiano

Essa construção pode ser transformada de maneira rápida é só preencher todos os quadrantes dos eixos, partindo da lista “13”, adicionar os comandos de pontos que serão $l4=Sequência((0,-k),k,1,n)$ e $l5=Sequência((-k,0),k,1,n)$, depois colocar outros comandos de segmentos $l6=Sequência(Segmento(Elemento(l2,k),Elemento(l4,n+1-k)),k,1,n)$, $l7=Sequência(Segmento(Elemento(l4,k),Elemento(l5,n+1-k)),k,1,n)$ e $l8=Sequência(Segmento(Elemento(l5,k),Elemento(l1,n+1-k)),k,1,n)$, fazendo algumas alterações de cores em configurações teremos a figura 13.

Figura 13 - Estrela construída usando curvas.



Fonte: Autoria própria (2023).

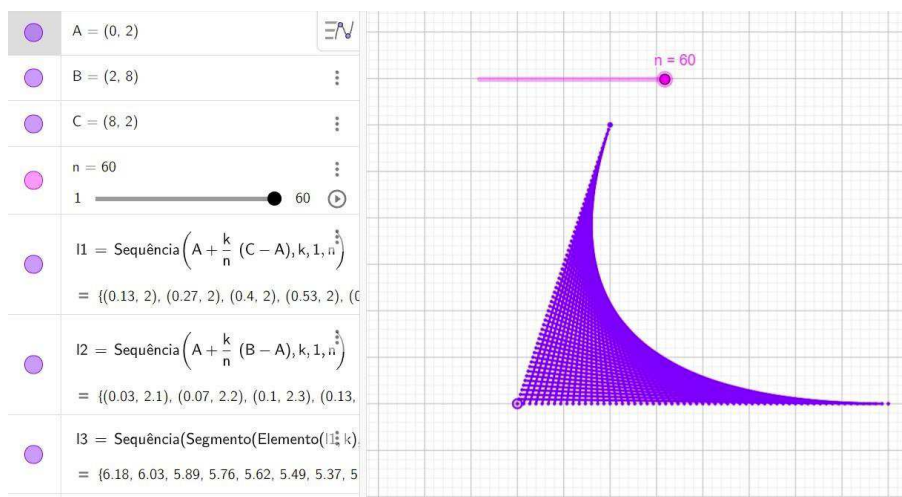
4.2. Curvas de Bézier utilizando pontos

A segunda proposta de construir curvas é referência pontos. Primeiro adicionar três (3) pontos A, B e C, e depois o controle deslizante de uma (1) a sessenta (60), como já mostrado anteriormente.

Criar sequência de pontos entre AB usando o comando $l1=Sequência(A+k/n*(B-A),k,1,n)$, agora entre AC $l2=Sequência(A+k/n*(C-A),k,1,n)$, agora interligando os pontos com seguimentos

13=Sequência (Segmento (Elemento (11,k), Elemento (12,n-k)),k,1,n).

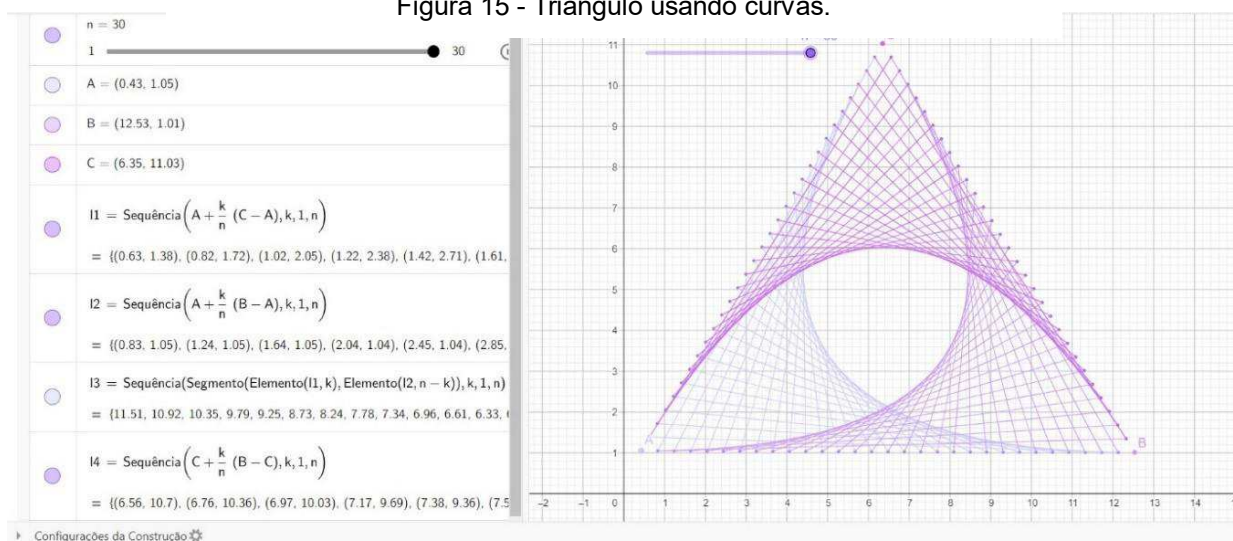
Figura 14 - Curvas usando pontos



Fonte: Autoria própria (2023).

Com a ideia de pontos pode-se construir outras curvas artísticas utilizando, adicionar mais duas sequencias de pontos e partindo dos pontos C e outro B, que seria 14=Sequência $(C + k/n * (B - C), k, 1, n)$ e 15=Sequência $(B + k/n * (C - B), k, 1, n)$, e por fim é só interligar os pontos usando segmentos de retas que são 16=Sequência (Segmento (Elemento (12,k), Elemento (14,n-k)),k,1,n) e 17=Sequência (Segmento (Elemento (15,k), Elemento (11,n-k)),k,1,n), assim teremos a figura 15:teremos a figura 15

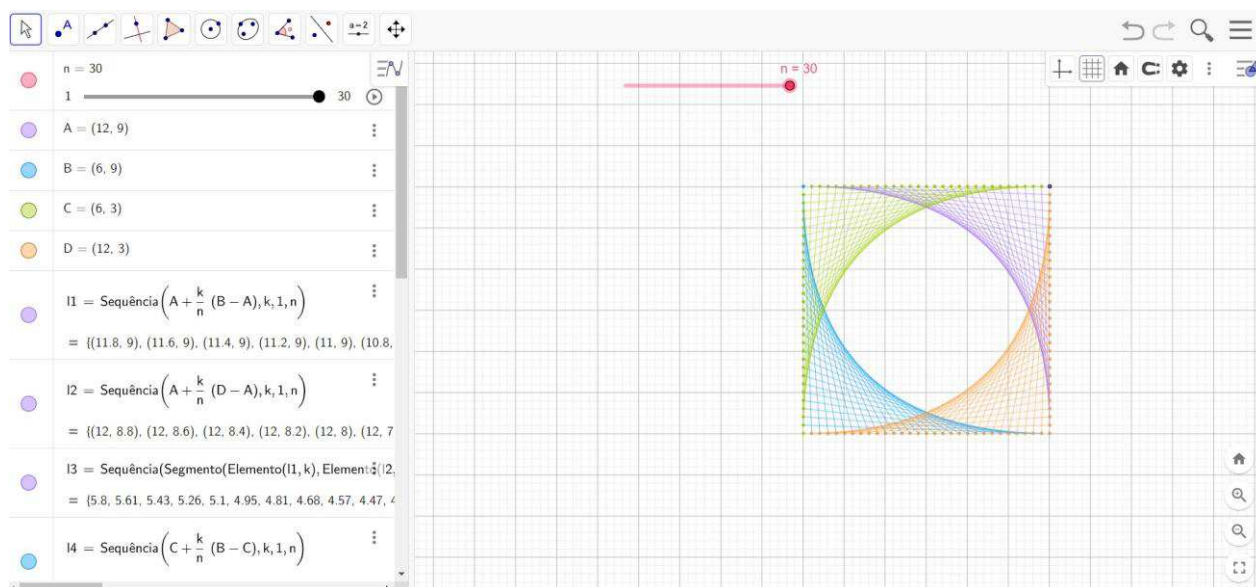
Figura 15 - Triângulo usando curvas.



Fonte: Autoria própria (2023).

Outra ideia é desenhar um quadrado, partindo da lista “14”, do desenho do triângulo é adicionado uma lista de pontos $15 = \text{Sequência}(C + k/n * (D - C), k, 1, n)$, depois uma comando de sequência de segmentos $16 = \text{Sequência}(\text{Segmento}(\text{Elemento}(14, k), \text{Elemento}(15, n - k)), k, 1, n)$, depois duas de pontos partindo do ponto B $17 = \text{Sequência}(B + k/n * (C - B), k, 1, n)$, $18 = \text{Sequência}(B + k/n * (A - B), k, 1, n)$, os segmentos $19 = \text{Sequência}(\text{Segmento}(\text{Elemento}(17, k), \text{Elemento}(18, n - k)), k, 1, n)$, duas listas de pontos partindo de D $110 = \text{Sequência}(D + k/n * (C - D), k, 1, n)$, $111 = \text{Sequência}(D + k/n * (A - D), k, 1, n)$ e por fim a ultima lista de segmentos $112 = \text{Sequência}(\text{Segmento}(\text{Elemento}(110, k), \text{Elemento}(111, n - k)), k, 1, n)$, assim se forma a seguinte a figura 16:

Figura 16 - Quadrado usando curvas.



Fonte: Autoria própria (2023).

4.3. Curvas de Bézier usando um polígono regular

A terceira proposta é construir as curvas a partir de um polígono regular, primeiro adicionar um controle deslizante e criar um polígono regular de cinco (5) vértices (pentágono).

Com o polígono já construído é criar sequências de pontos, entre os pontos

AB l1=Sequência $(A+k/n*(B-A), k, 1, n)$, BC l2=Sequência $(B+k/n*(C-B), k, 1, n)$, CD l3=Sequência $(C+k/n*(D-C), k, 1, n)$, DE l4=Sequência $(D+k/n*(E-D), k, 1, n)$ e por último EA l5=Sequência $(E+k/n*(A-E), k, 1, n)$. Agora é interligar os pontos com segmentos de retas, os comandos são:

1º. l6=Sequência (Segmento(Elemento(l1, k), Elemento(l2,k)), k, 1, n);

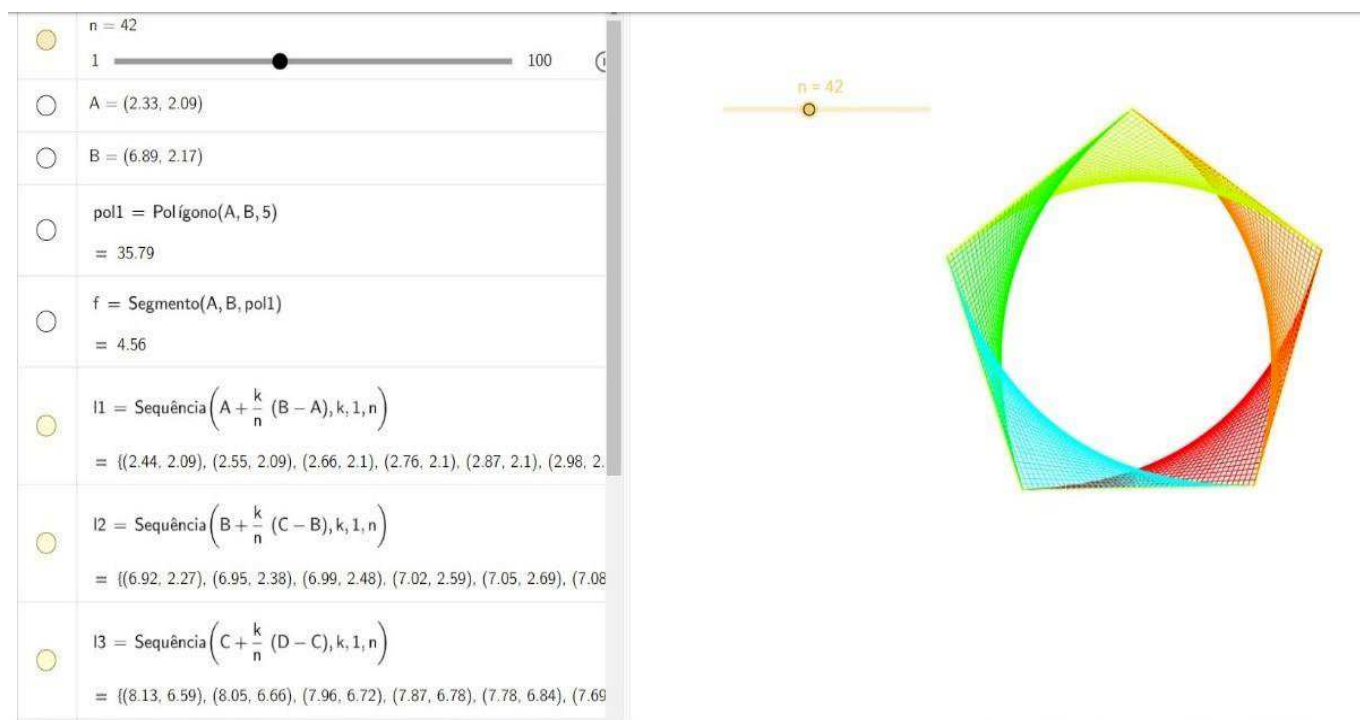
2º. l7= Sequência (Segmento(Elemento(l2, k), Elemento(l3,k)), k, 1, n);

3º. l8= Sequência (Segmento(Elemento(l3, k), Elemento(l4,k)), k, 1, n);

4º. l9=Sequência (Segmento(Elemento(l4, k), Elemento(l5,k)), k, 1, n);

5º. l10=Sequência (Segmento(Elemento(l5, k), Elemento(l1,k)), k, 1, n); assim teremos a figura 17:

Figura 17 - Pentágono usando curvas.



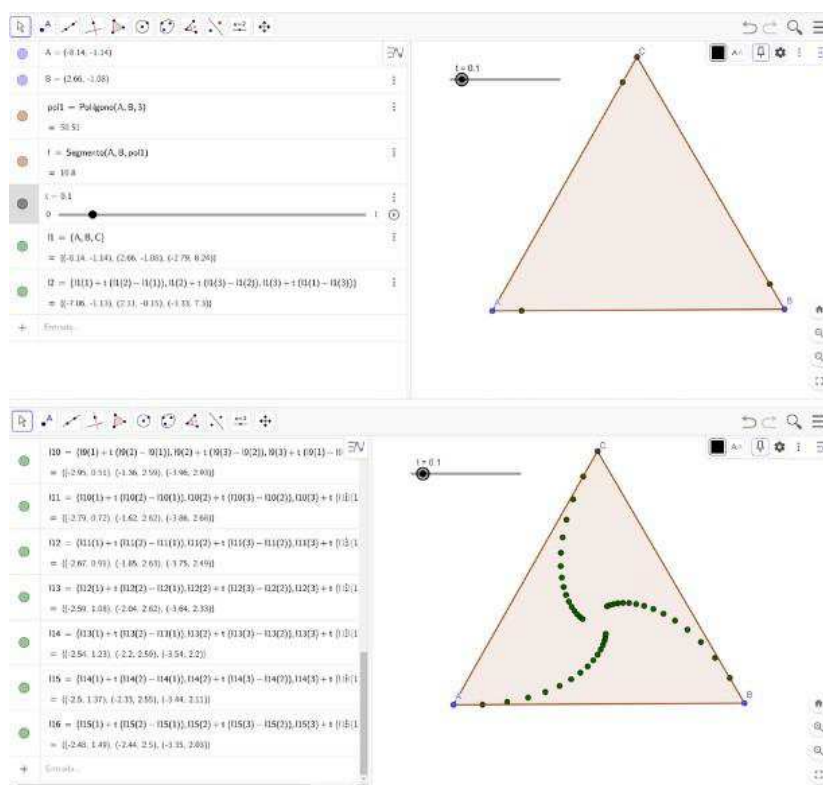
Fonte: Autoria própria (2023).

4.4. Curvas de Bézier sobrepostas

A quarta proposta é construir os pontos e curvas sobrepostas. Usar o comando de polígonos regulares, e adicionar um com três (3) vértices e em seguida criar um controle deslizante que será nomeado de t que o ponto mínimo é zero (0) e máximo um (1).

Criar uma lista usando os pontos A , B e C , na caixa de entrada para esse comando é usado as chaves "{}", assim A vai corresponder ao meu primeiro elemento da lista que é, B é o segundo e C o terceiro.

Figura 18 - Lista de pontos sobre pontos.



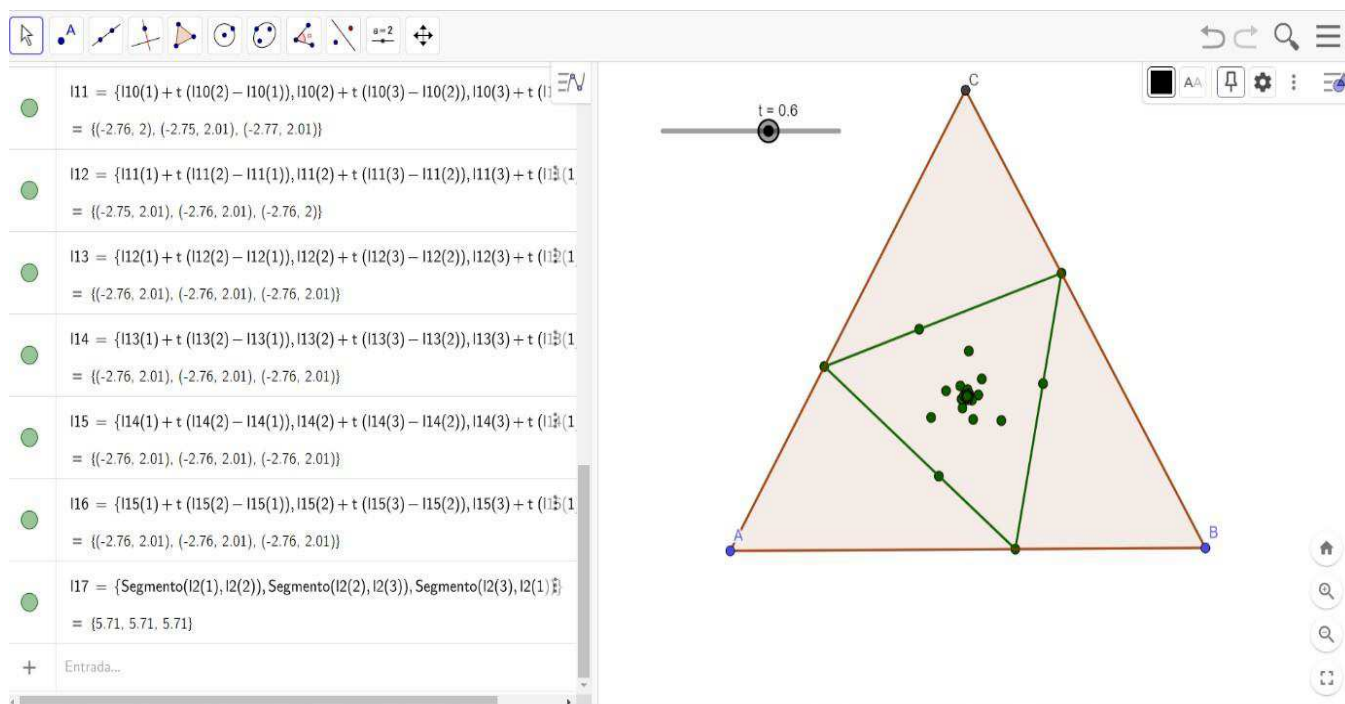
Fonte: Autoria própria (2023).

Depois criar três (3) pontos, um partindo de A até B, outro de B até C e por fim de C até A, como já temos um lista de pontos $l1=\{A, B, C\}$, sendo A o primeiro elemento, B o segundo e C o terceiro, para isso acontecer será criado novamente um comando de lista $l2=\{l1(1)+t*(l1(2)-l1(1), l1(2)+t*(l1(3)-l1(2)), l1(3)+t*(l1(1)-l1(3))\}$. Quero que esses três (3) pontos se repitam em 15 camadas dentro o meu polígono, então

para isso acontecer é substituir a lista de referência que em $l1$ será $l2$, assim acontecerá 15 vezes. Uma dica para agilizar a substituição uma lista pela outra é só usar um o Word e usar o comando substituir, em vez de trocar um por um.

Adicionar os segmentos de retas entre esses pontos é mesmo processo da criação dos pontos, mas agora é uma lista de segmentos, como já tem os segmentos da primeira lista, pois é polígono base da construção, então começa com o segundo que é $l2$, que fica $l17=\{\text{Segmento } (l2(1), l2(2), \text{Segmento } (l2(2), l2(3), \text{Segmento } (l2(3), l2(1))$, assim se repete mais treze (13) vezes, usando a dica do Word.

Figura 19 - Segmentos sobre segmentos.



Fonte: Autoria própria (2023).

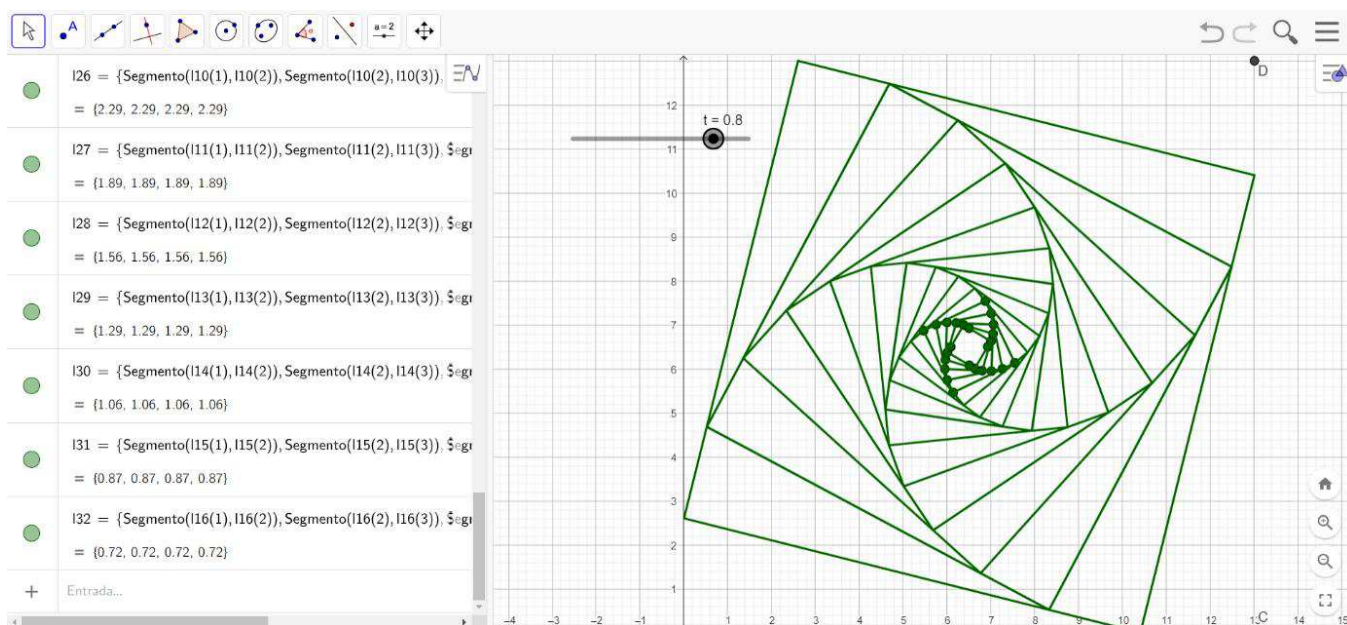
Pode-se construir essa mesma curva sobrepostas a partir de um quadrado, usando os mesmos comandos, primeiro adicionar uma polígono regular com quatro (4) vértices e em seguida criar um controle deslizante que será nomeado de t que o ponto mínimo é zero (0) e máximo um (1).

Nesse caso a lista de pontos será $l1=\{A, B, C, D\}$, sendo o A primeiro elemento, B o segundo, C o terceiro e D quarto, criando os pontos usando

mesmo comando, então como uma fileira a mais $l2=\{l1(1)+t*(l1(2)-l1(1)), l1(2)+t*(l1(3)-l1(2)), l1(3)+t*(l1(4)-l1(3)), l1(4)+t*(l1(1)-l1(4))\}$.

Adicionar os segmentos de retas entre esses pontos, começando pela lista então $l2$, que fica $l7=\{\text{Segmento}(l2(1), l2(2)), \text{Segmento}(l2(2), l2(3)), \text{Segmento}(l2(3), l2(4)), \text{Segmento}(l2(4), l2(1))\}$, repetindo treze (13) vezes.

Figura 20 - Segmentos sobre segmentos.



Fonte: Autoria própria (2023).

5. RESULTADOS

5.1. Curvas de Bézier no plano cartesiano

Nessa construção a estrutura de pontos é fixa e tem como base um eixo de pontos fixos, isso quer dizer não são maleáveis e o formato sempre será o mesmo. Foi usado k com variável, temos duas listas de pontos se conectando em cada quadrante usando o comando `l3=Sequência (Segmento (Elemento (l1,k), Elemento (l2, n+1-k)), k, 1, n)`, sendo $k = 1$ em $l1$, em $l2$ k tem que ser o ultimo valor da lista de pontos que nesse caso é 30 que é valor de n pontos, usando a formula:

$$n + 1 - k$$

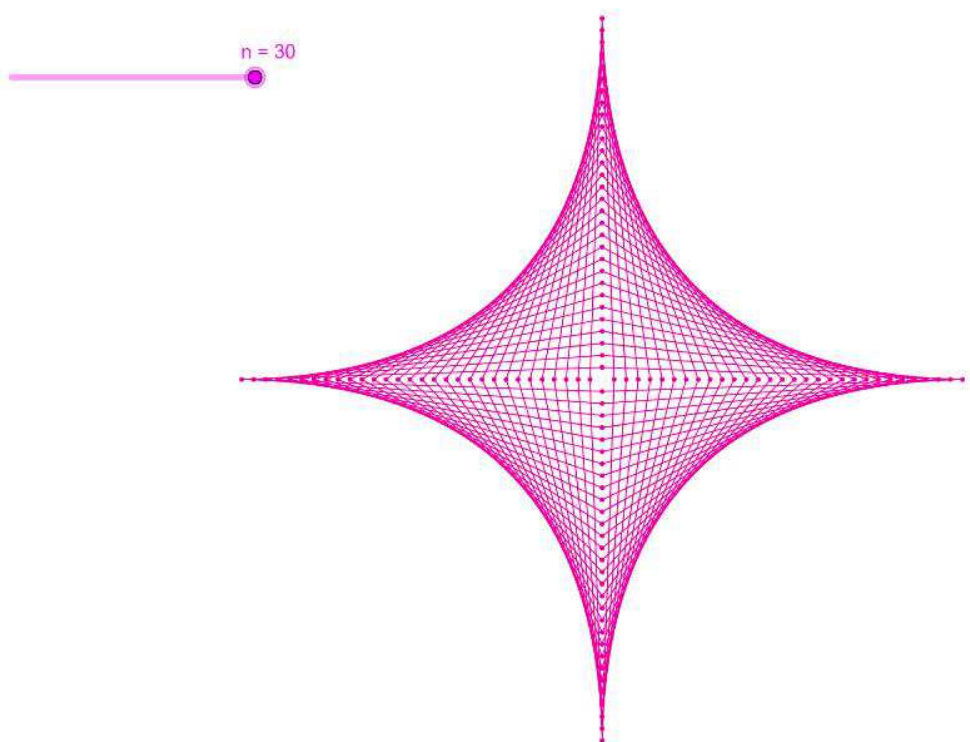
$$30 + 1 - 1 = 30$$

Outro exemplo, e se meu k for 5 ele se conecta a 26, pois:

$$n + 1 - k = 30 + 1 - 5 = 26$$

Porém isso varia de acordo com as quantidades de pontos que alterar como controle deslizante, e também o quadrante em a lista de pontos e segmentos se encontra. Na imagem abaixo as listas $l2$ se conecta com $l4$, $l4$ com $l5$, e $l5$ com $l6$:

Figura 21 - Desenho de Curvas de Bézier no plano cartesiano.



Fonte: Autoria própria (2023).

5.2. Curvas de Bézier utilizando pontos

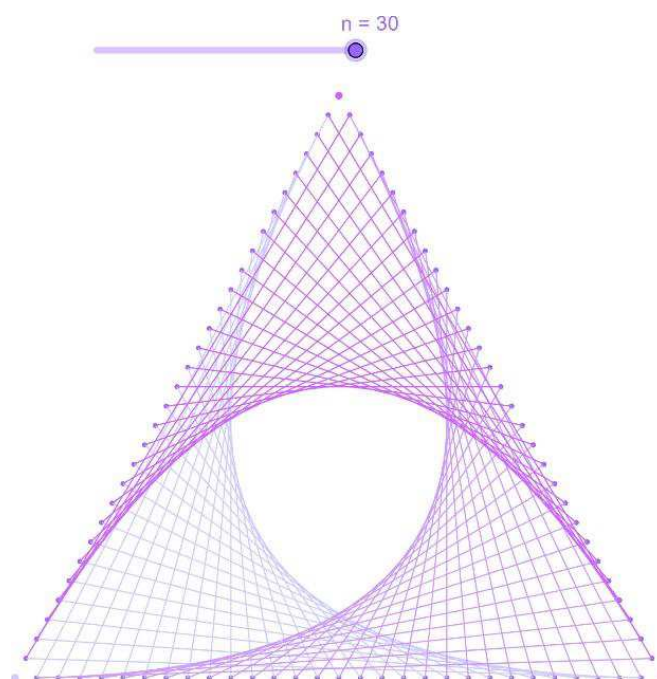
Nesse formato se permitir alterar as posições desses pontos os tornando maleáveis podendo mudar seu formato conforme a necessidade, além de construir formas geométricas usando os pontos como referência.

A lista de pontos foi utilizado Sequência $(A + k/n * (B - A))$, $k, 1, n$, para dividir igualmente em pontos a distância entre os pontos A e B , já para interligar os pontos como segmentos de retas, o primeiro ponto de uma determina lista se conecta ao último ponto de outra lista, a mesma lógica da proposta anterior, para é representado Sequência $(\text{Segmento}(\text{Elemento}(l1, k), \text{Elemento}(l2, n - k)), k, 1, n$, sendo n número de pontos que nessa proposta é 30 e k minha variável, então quando k for 1:

$$n - k = 30 - 1 = 29$$

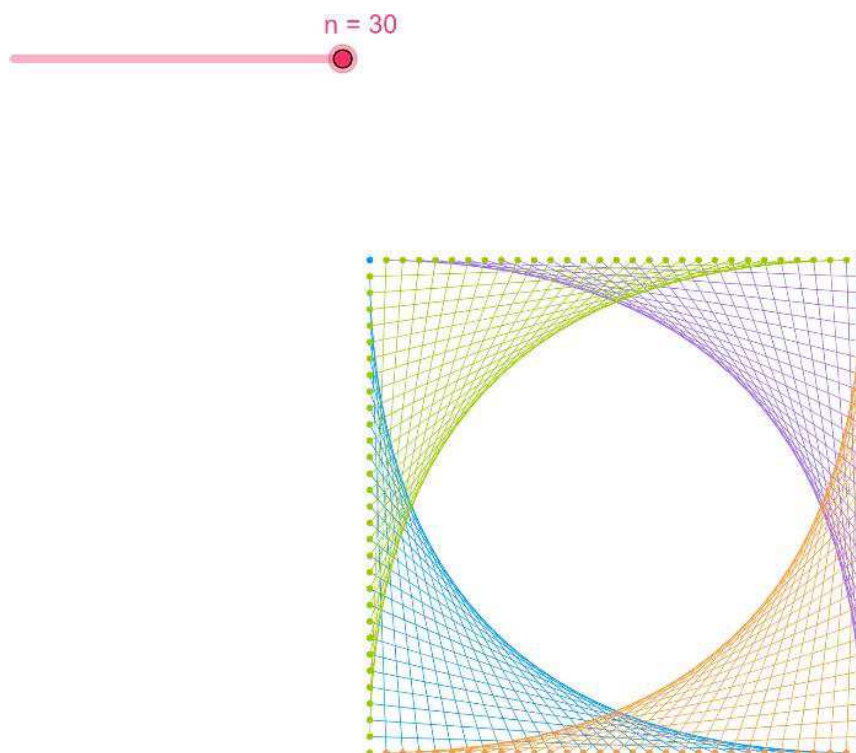
Como esse conceito pode ser representado algumas figuras geométricas, como triângulo e quadrado, como as imagens abaixo, a construção de curvas sempre que levar em consideração quais lados vão ser conectados com segmentos.

Figura 22- Triângulo usando Curvas de Bézier.



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 23 - Quadrado usando Curvas de Bézier.

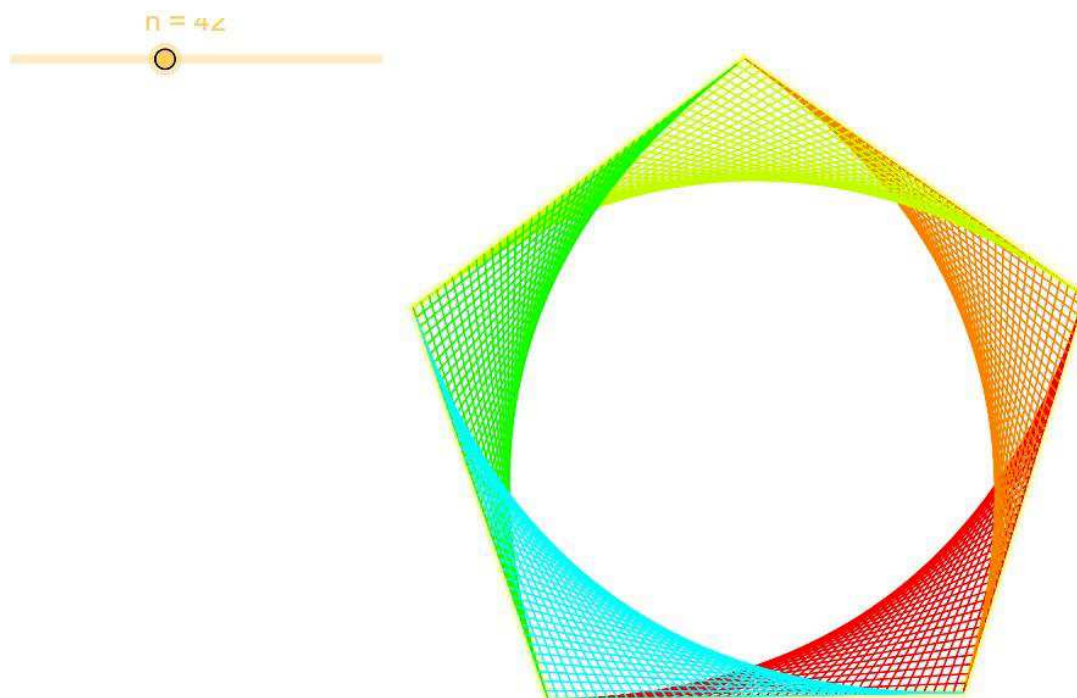


Fonte: Autoria própria (2023).

5.3. Curvas de Bézier usando um polígono regular

A terceira proposta é utilizar polígonos regulares para interligar os segmentos assim construir curvas, podendo alterar a quantidade vértices dessa forma podendo realizar a construção de diversos polígonos como triângulo, quadrado, pentágono entre outros, essa tem da facilidade de construir polígonos de várias verticais, sem se preocupar com uma distância entre eles, pois o GeoGebra configura automaticamente, para adicionar o uma sequência de pontos foi a mesma utilizada da segunda construção, porém a conexão dos segmentos é mais fácil, pois os lados são adjacentes a configuração do comando ficou `Segmento( Elemento( l1, k), Elemento (l2, k)), k, 1,n)`, nesse caso não precisou de um calculo especifico, pois como os lados são opostos e a variável k , de $l1$ se conecta com variável k de $l2$, assim sucessivamente até chegar a $l5$ com $l1$, para fechar as conexões.

Figura 24 - Pentágono usando Curvas de Bézier.

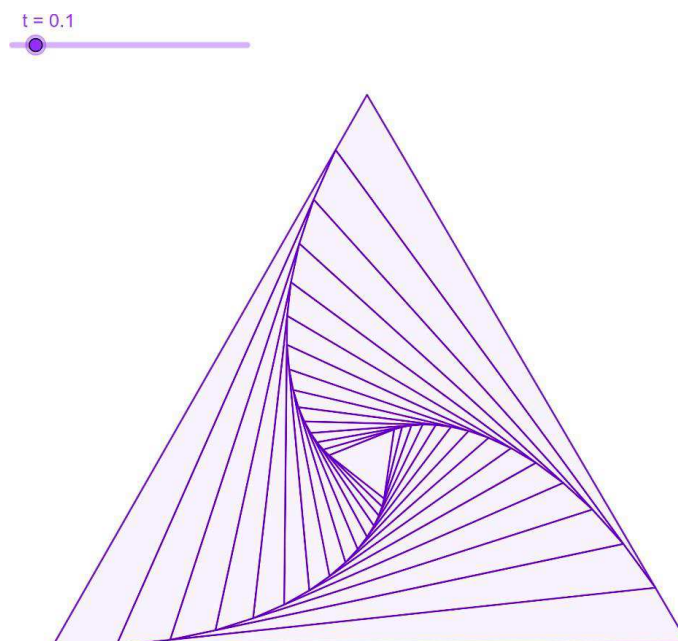


Fonte: Autoria própria (2023).

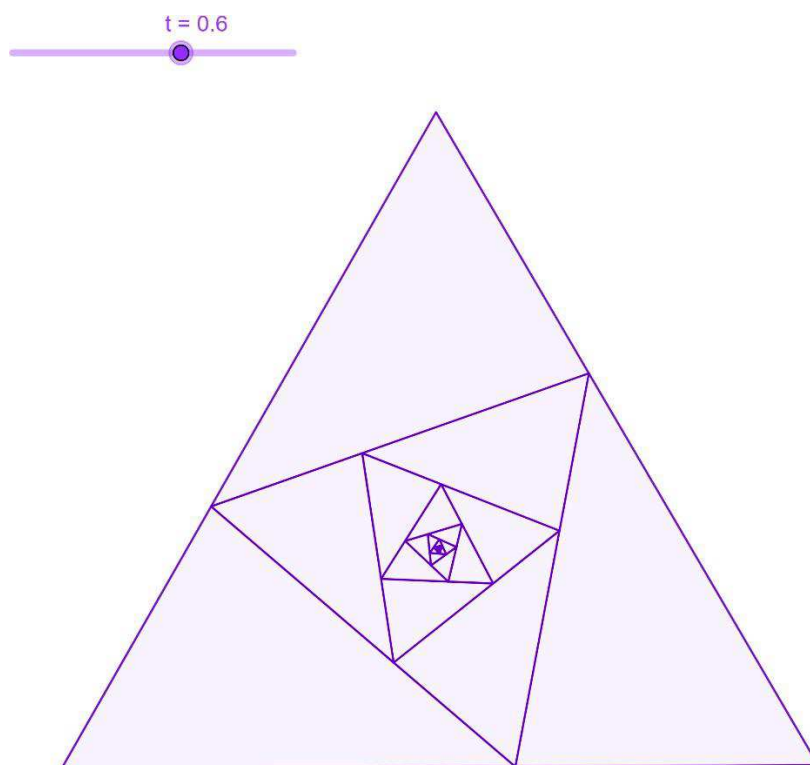
5.4. Curvas de Bézier sobrepostas

E a quarta e última proposta é deixar os pontos e curvas sobrepostas um e obter as mesmas curvas, porém nessa construção não foi utilizado comando sequência, mais sim listagem de pontos e de segmentos, nesse caso em específico tem um ponto entre dois pontos para conseguir ao resultado desejado foi usado a paramétrica da reta de Bézier, para conseguir esse resultado o cálculo usado foi $l2 = \{l1(1) + t * (l1(2) - l1(1)), l1(2) + t * (l1(3) - l1(2)), l1(3) + t * (l1(1) - l1(3))\}$, sendo $l1$ a lista de pontos A , B e C , sendo 1 , 2 e 3 suas respectivas posições, poderia ser só os pontos, contudo listagem facilita o processo de copiar e fazer as alterações necessárias quinze (15) vezes.

Percebe-se que cada vez que os pontos estão mais perto das extremidades dos segmentos, as curva fica mais perceptível, assim com a profundidade.

Figura 25 - Triângulo Curvas de Bézier ($t=0,1$).

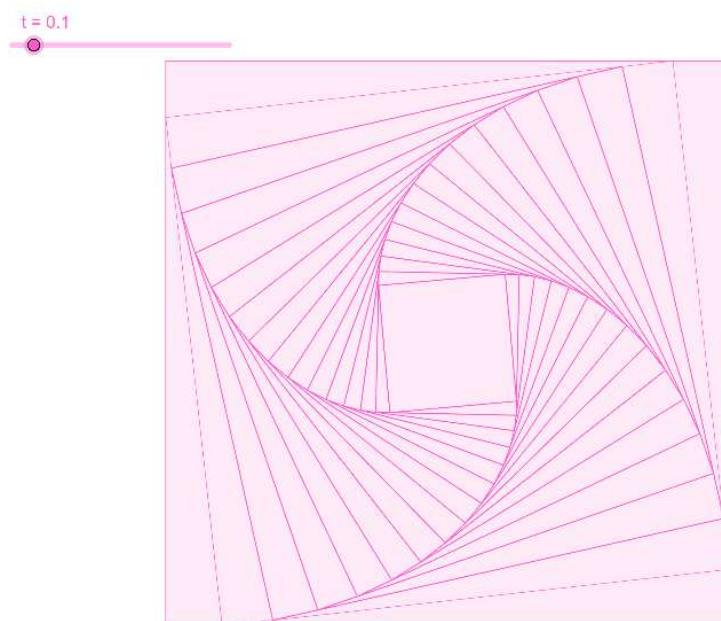
Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 26 - Triângulo Curvas de Bézier ($t=0,6$).

Fonte: Autoria própria (2023).

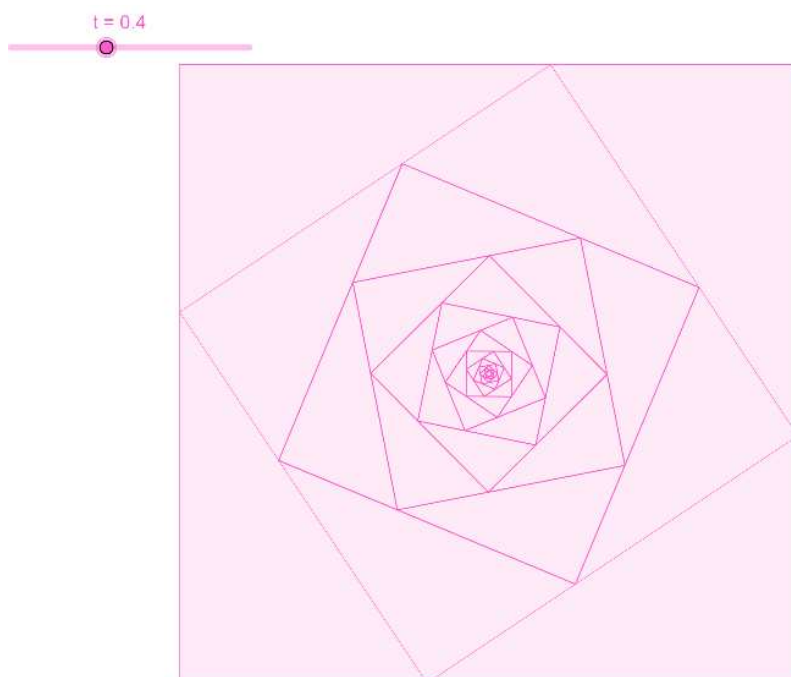
Na figura 27 do quadrado só foi acrescentado o ponto "D", e também mais uma sequência de ponto no calculo $l2=\{l1(1)+t*(l1(2)-l1(1)), l1(2)+t*(l1(3)-l1(2)), l1(3)+t*(l1(4)-l1(3)), l1(4)+t*(l1(1)-l1(4))\}$. Assim como na figura do triângulo as curvas são mais perceptíveis nas suas extremidades.

Figura 27- Quadrado Curvas de Bézier (t=0,1).



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 28 - Quadrado Curvas de Bézier (t=0,4).



Fonte: Autoria própria (2023).

6. CONCLUSÕES

O *software* GeoGebra possibilita realizar diversas construções geométricas, de funções gráficas, tabelas, e artísticas, a mesma possibilitou a construção de curvas em diversa perspectivas de utilização de criação.

As construções das três primeiras curvas são muito semelhantes, pois o comando sequência utilizado em todas foi o mesmo "Sequência (Expressão, Variável, Valor Inicial, Valor Final)", todavia a lógica de conexão dos pontos foi diferente assim como sua base de construção de cada uma foi diferente. O Geogebra permite usar diversos recursos da área da matemática, para do desenvolvimento de um mesmo objeto ou estrutura geometrias com perspectivas de ensino diferentes.

As curvas desenvolvidas usando o GeoGebra mostrou que os comandos são interligados, pois cada vez que o números de pontos " n " aumentava as curvas iriam aparecendo conforme o comando utilizado, e para isso acontecer sempre um primeiro elemento de lista se conectava com o ultimo de outra lista, porém com as a base das quatro construções em eram diferentes os cálculos também eram para chegar na curva desejada.

A última construção apesar de ser a mais diferente de todas, tanto pelos comandos utilizados ter sido diferente, uma construção e visual artístico distinto, o desenho das curvas é mesmo, o comando de variação foi usado " t " que nesse caso só muda a posição do pondo no segmento e não sua quantidade. A curva fica perceptível quando os pontos centrais estão perto da extremidade dos segmentos.

O GeoGebra permite desenvolver curvas artísticas assim com interação, em diversas maneiras de construções, usado possibilidades matemáticas e de raciocínio diferentes, porém sem chegando no mesmo resultado“ Curvas de Bézier”.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Cláudio Lourenço et al. Geogebra como recurso facilitador do processo de ensino-aprendizagem de curvas planas. 2018

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, J. Ajuda geogebra. <http://static.geogebra.org/help/docuPT.pdf>. Consultado, v. 10, n. 10, p. 2014, 2009.

MOLINARI, José Robyson Aggio; DE SOUZA RETSLAFF, Franciéle Maria. Curvas de Bézier no software GeoGebra e suas aplicações. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 26-43, 2019.

RABUT, Christophe. On Pierre Bézier's life and motivations. Computer-aided design, v. 34, n. 7, p. 493-510, 2002.

RIBEIRO, Manuela. Notas sobre o Ensino da Geometria: A arte de alinhar curvas. **Educação e Matemática**, n. 109, p. 42-44, 2010.

SILVA, Flavio Medeiros da; PITANGUI, Cristiano; OLIVEIRA, Thiago R. As potencialidades dos softwares educacionais no processo de alfabetização. XVII Congresso Brasileiro de Ensino Superior À Distância. Goiânia – GO, 2020.

SIMONI, Roberto et al. Teoria local das curvas. 2005.

WASSIE, Yismaw Abera; ZERGAW, Gurju Awgichew. Capabilities and contributions of the dynamic math software, geogebra---a review. **North American GeoGebra Journal**, v. 7, n. 1, 2018.