



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS - DECEN
CURSO DE GRADUAÇÃO EM INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

KEWIM ALEXANDRE DA SILVA MAGALHÃES

**ANÁLISE E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS: UMA ABORDAGEM BASEADA EM
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

PAU DOS FERROS

2025

KEWIM ALEXANDRE DA SILVA MAGALHÃES

**ANÁLISE E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS: UMA ABORDAGEM BASEADA EM
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Monografia apresentada à Universidade Federal
Rural do Semi-Árido como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em
Interdisciplinar em Ciências e Tecnologia .

Orientador: Antônio de Pádua Farias de
Souza Filho Prof. Dr. - UFERSA

PAU DOS FERROS

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

M188a Magalhães, Kewim Alexandre da Silva .
Análise e solução de problemas físicos modelados
por equações diferenciais parciais elípticas: uma
abordagem baseada em cálculo diferencial e
integral / Kewim Alexandre da Silva Magalhães. -
2025.
81 f. : il.

Orientador: Antônio de Pádua Farias de Souza
Filho.

Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2025.

1. modelagem. 2. equações diferenciais
parciais. 3. equação de laplace . 4. equação de
poisson . 5. fenômenos físicos. I. Filho, Antônio de
Pádua Farias de Souza , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

KEWIM ALEXANDRE DA SILVA MAGALHÃES

**ANÁLISE E SOLUÇÃO DE PROBLEMAS FÍSICOS MODELADOS POR EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS: UMA ABORDAGEM BASEADA EM
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**

Monografia apresentada à Universidade Federal
Rural do Semi-Árido como requisito parcial
para obtenção do título de Bacharel em
Interdisciplinar em Ciências e Tecnologia .

Defendida em: 18/12/2025

BANCA EXAMINADORA

Antônio de Pádua Farias de Souza Filho , Prof.
Dr. (UFERSA)
Presidente

Antonio Diego Silva Farias, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Otávio Floriano Paulino, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

DEDICATÓRIA

Àqueles que me inspiram, me motivam e me
apoiam todos os dias.

AGRADECIMENTOS

Antes de qualquer palavra, agradeço a Deus. É Ele quem me dá sabedoria e luz, e a Ele devo cada passo desta caminhada. Nos momentos de dúvida e cansaço, senti sua presença me fortalecendo e me levantando, nos momentos de silêncio e solidão, encontrei nele a fé para continuar. Em cada conquista, vejo sua mão guiando meus passos e mostrando que os sonhos se realizam quando há esperança e esforço. Agradeço a Deus por me colocar no lugar certo, com as pessoas certas, nas situações que me ajudaram a crescer. Mesmo quando eu duvidei de mim, Ele acreditou. Quando me faltou força, Ele me sustentou. E quando me perdi nas incertezas, Ele me mostrou que tudo tinha um propósito maior. Sem Sua graça, nada do que construí até aqui teria sentido algum.

À minha companheira, Yvinna Thainara, expresso minha mais profunda e sincera gratidão. Você foi o meu porto seguro nos dias difíceis, o abraço que me devolveu a calma quando as horas pareciam pesadas demais. Sua presença constante, seu amor paciente e sua fé em mim foram forças invisíveis, porém poderosas, que me impulsionaram a seguir adiante mesmo quando o desânimo ameaçava dominar. Agradeço pelos momentos de carinho, pelas palavras doces, e por todos os instantes em que você me fez sorrir trazendo leveza aos meus pensamentos e serenidade ao meu coração. Nos dias em que o cansaço tomava conta, seu sorriso se tornava o alívio que eu precisava. Obrigado por compreender as ausências, por apoiar minhas escolhas, por dividir comigo tanto o silêncio das tardes de estudos quanto as alegrias das pequenas vitórias. Este trabalho é, de muitas formas, também fruto do amor, da compreensão e do incentivo que você me ofereceu com tanta generosidade.

À minha família, dedico uma parte especial desta conquista. Vocês são a base que me sustenta, a raiz que me mantém firme e o abrigo que me acolhe sempre que preciso. Agradeço pelo amor incondicional, pelo apoio silencioso e por acreditarem em mim mesmo quando eu duvidava de mim. Cada gesto, cada palavra de incentivo e cada demonstração de confiança moldaram o caminho que percorri até aqui. A vocês, devo não apenas este resultado, mas toda a formação humana e emocional que me permitiu chegar até ele.

Aos meus amigos, deixo registrada minha gratidão sincera. Por estarem presentes, mesmo quando o tempo foi curto e as obrigações eram muitas, por incentivarem minhas metas e comemorarem comigo cada pequena vitória. Foram vocês que trouxeram leveza aos dias difíceis e transformaram a rotina de estudos em momentos de riso, amizade e aprendizagem compartilhada. Estar com vocês sempre me lembrou que o caminho fica mais bonito quando não

é percorrido sozinho.

Por último, ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio de Pádua, deixo um agradecimento especial pela dedicação, paciência e orientação ao longo de todo este trabalho. Sua sabedoria, disponibilidade e atenção foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço não só pelos ensinamentos técnicos, mas também pelo exemplo de ética, compromisso e paixão pela área. Sou grato pelas horas do seu dia dedicadas a ler, corrigir e orientar este trabalho, tempo que poderia ter sido usado para outras tarefas, mas que o senhor escolheu investir na minha formação. Cada momento de atenção e cada retorno fizeram diferença nesta jornada, ajudando não apenas no amadurecimento deste estudo, mas também no meu crescimento acadêmico e pessoal.

“A matemática é o alfabeto com o
qual Deus escreveu o universo.”

(Galileu Galilei)

RESUMO

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais parciais (EDPs) do tipo elípticas, com foco nas equações clássicas de Laplace e Poisson, evidenciando sua importância na modelagem de fenômenos físicos. A pesquisa adota uma abordagem bibliográfica, de caráter qualitativo e exploratório, reunindo e organizando fundamentos teóricos essenciais, tais como a classificação das EDPs, propriedades das soluções harmônicas, condições de contorno, bem como resultados de existência e unicidade de soluções. Também é discutida a motivação científica associada a essas equações, evidenciando como elas surgem naturalmente na descrição de problemas de potencial elétrico, condução de calor em equilíbrio e comportamento de membranas elásticas. Além disso, o trabalho apresenta a resolução de problemas clássicos da física, explorando métodos analíticos como separação de variáveis, expansão em séries de funções trigonométricas e o uso de funções especiais, ressaltando a influência da geometria do domínio e das condições de contorno na estrutura das soluções. Por fim, o trabalho organiza e apresenta, de forma organizada, os principais conceitos e métodos relacionados às equações elípticas, estabelecendo uma visão integrada entre fundamentação teórica e aplicações físicas.

Palavras-chave: modelagem; equações diferenciais parciais; equação de laplace; equação de poisson; fenômenos físicos.

ABSTRACT

In this work we study elliptic partial differential equations (PDEs), with a focus on the classical Laplace and Poisson equations, highlighting their importance in the modeling of physical phenomena. The research adopts a bibliographic approach, of a qualitative and exploratory nature, gathering and organizing essential theoretical foundations, such as the classification of PDEs, properties of harmonic solutions, boundary conditions, as well as results of existence and uniqueness of solutions. The scientific motivation associated with these equations is also discussed, highlighting how they naturally arise in the description of problems of electric potential, heat conduction in equilibrium and behavior of elastic membranes. In addition, the work presents the resolution of classical problems of physics, exploring analytical methods such as separation of variables, expansion in series of trigonometric functions and the use of special functions, highlighting the influence of the geometry of the domain and of the boundary conditions on the structure of the solutions. Finally, the work organizes and presents, in an organized way, the main concepts and methods related to elliptic equations, establishing an integrated view between theoretical foundation and physical applications.

Keywords: modeling; partial differential equations; laplace's equation; poisson's equation; physical phenomena.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	REVISÃO DE LITERATURA	15
2.1	Equação Diferencial: visão geral	15
2.2	Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Parciais	16
2.3	Classificação das Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes	17
2.4	Método de Separação de Variáveis	19
3	METODOLOGIA	20
4	RESULTADOS	23
4.1	Apresentação e motivação da Equação de Laplace e Poisson	23
4.2	Solução Fundamental da Equação de Laplace	26
4.2.1	Identities de Green	37
4.3	Solução da Equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$	41
4.4	Propriedades das Funções Harmônicas	44
4.4.1	Valor médio	44
4.4.2	Princípio do Máximo fraco	48
4.4.3	Princípio do máximo forte	48
4.4.4	Unicidade	49
4.4.5	Suavidade das funções harmônicas	49
4.4.6	Teorema de Liouville	51
4.5	Aplicações	53
4.5.1	Membranas	53
4.5.1.1	Membrana Retangular	53
4.5.1.2	Membrana Circular	58
4.5.2	Potencial eletrostático	64

4.5.3	Temperatura em um cilindro	70
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	79
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

Segundo Baldor (2016), equação é uma expressão matemática que afirma que duas expressões são iguais, nelas temos valores desconhecidos, chamados de variáveis, o objetivo é encontrar os seus valores para tornar a igualdade verdadeira. As variáveis podem ser independentes, ou seja, o seu valor é livre, não depende de nenhuma outra variável, já a dependente, seu valor depende da variável independente. Por exemplo, temos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2 - my + n = 0$$

se isolarmos a variável x :

$$x = \sqrt{my - n}$$

a nossa variável y , é livre, logo o x é a variável dependente. Se isolarmos o y :

$$y = \frac{x^2 + n}{m}$$

então o x é a variável independente, enquanto o y é a variável dependente.

Segundo Zill (2016), uma equação que envolve a derivada de uma ou mais funções é chamada de equação diferencial. Ela pode ser uma equação diferencial ordinária ou parcial, o que diferencia é que a ordinária tem uma função desconhecida e derivadas em relação a uma única variável independente, então problemas que envolvem apenas uma única variável independente resultam em equações diferenciais ordinárias, por exemplo:

$$2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \sin t$$

enquanto na parcial temos uma função que depende de várias variáveis, e se temos um problema que envolve uma ou mais variáveis independentes, então temos uma equação diferencial parcial, como por exemplo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial t} = 2x^2 + e^t.$$

O estudo de Equações Diferenciais é de grande importância, segundo Figueiredo (2000), ele começou com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, a partir do século XVII, e é guiado por suas aplicações e formulações na área da física, matemática e engenharia. Foi um grande sucesso tratar problemas físicos com o cálculo diferencial, o que trouxe um estímulo para físicos e matemáticos da época em procurar modelos que expressasse os fenômenos em termos de

equações diferenciais como, vibrações transversais de uma corda, condução do calor em uma barra, equilíbrio de uma membrana sob a ação de certas forças e entre vários outros problemas da física.

Segundo Boyce e DiPrima (2012), com os trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, surgiram as equações diferenciais como ferramenta para modelar problemas da física, suas ideias permitiram modelar problemas que envolviam taxas de variação e acumulação. Newton, aplicou suas idéias a física formulando sua segunda lei do movimento, expressa como uma equação diferencial ordinária:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Com isso, a queda dos objetos, o movimento dos corpos e o movimento dos planetas passaram a ser descritos de forma matemática rigorosa. Logo no século seguinte, matemáticos como Leonhard Euler e Joseph Lagrange, expandiram técnicas para resolver as equações diferenciais e aplicar a sistemas físicos variados, como vibrações e óptica.

No século XIX, o estudo das equações diferenciais ganhou maior profundidade, com o surgimento das primeiras soluções formais para as equações diferenciais parciais, e sistemas mais complexos. Jean-Baptiste Joseph Fourier, foi de grande importância, pois criou e utilizou as séries trigonométricas para resolver a equação do calor, umas das equações diferenciais parciais mais importantes da física e matemática. Matemáticos como Cauchy e Dirichlet, estabeleceram bases rigorosas para condições iniciais e de contorno, importantes para garantir soluções únicas e definidas (Boyce; DiPrima, 2012).

Com a necessidade de exatidão, matemáticos como Cauchy, Weierstrass e Riemann, formalizaram conceitos fundamentais do cálculo e das equações diferenciais, como definições para limite, continuidade e convergência. Isso mudou os estudos das equações diferenciais em uma disciplina sólida, reconhecida pela exatidão e capacidade de prever fenômenos físicos reais.

A importância desse estudo está na presença com que as equações de Laplace e Poisson surgem naturalmente na descrição de fenômenos físicos, como estudo da distribuição de temperatura em sólidos em equilíbrio térmico, campos potenciais em eletrostática, na análise de fluxos de fluidos ideais, em problemas de elasticidade, entre muitos outros (Zill, 2016). Entender a derivação, as propriedades das soluções e os métodos de resolução dessas equações, é de grande importância para físicos, matemáticos e engenheiros que buscam modelar e prever o comportamento de sistemas em regime estacionário.

Podemos falar um pouco melhor sobre as aplicações, em que usamos modelagem para analisar e encontrar uma possível solução utilizando o cálculo diferencial e integral, como condução de calor estacionária, um exemplo fundamental de aplicação de equações diferenciais parciais. Segundo Figueiredo (2000), quando analisamos o comportamento térmico de um corpo ao longo do tempo, podemos usar as equações diferenciais parciais para descrever a distribuição de temperatura ao longo desse corpo, a equação que descreve esse fenômeno é:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde $u(x, t)$ representa a temperatura na posição x e no momento t , e α é a difusividade térmica do material. No regime estacionário, a temperatura não varia com o tempo, ou seja, a equação se reduz a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

e o sistema se encontra em equilíbrio térmico.

Segundo Gondar e Cipolatti (2011), a Equação da onda também é um problema fundamental para ser estudado ou uma generalização dela, devido a sua presença em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo, por exemplo, o estudo de oscilações longitudinais de uma barra elástica. Considerando uma barra metálica no formato cilíndrico, homogênea, suficientemente fina fazendo com que as variações nas seções transversais que ocorrem durante as vibrações possam ser desprezadas. Podemos estudar seu comportamento a partir da seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que $a^2 = E/\rho$, E é o módulo de Young e ρ a densidade do material. A equação é denominada Equação da Onda, neste caso simples ela descreve pequenas oscilações longitudinais de uma barra elástica, ou seja, ocorrem quando a deformação acontece na direção do comprimento da barra, sem a influência de forças externas, ou seja, são forças aplicadas na direção perpendicular ao comprimento da barra, que faria o deslocamento ocorrer perpendicular ao eixo como forças laterais ou momento fletor.

Outro exemplo é a eletrostática, área da física que estuda os campos elétricos gerados por cargas em repouso, então seu campo elétrico é estacionário, ou seja, não depende do tempo. Com a ausência de carga em uma determinada região do espaço, temos que:

$$\Delta \lambda = 0,$$

onde Δ representa o Laplaciano, e λ potencial elétrico.

Para esses problemas, encontrar soluções é uma tarefa difícil, ainda mais por se tratar de problemas que possuem uma alta complexidade e exigem bastante conhecimento do cálculo diferencial e integral. Mas, é fundamental a fim de entender seu comportamento, realizar modelagens e ter previsões. Por se tratar em muitas das vezes de fenômenos físicos, devemos fazer uso de equações diferenciais e integrais como ferramentas essenciais para seu desenvolvimento. Segundo Cengel e Palmlll (2014), o estudo de fenômenos físicos envolvem dois passos importantes, o primeiro é identificar todas as variáveis que afetam o fenômeno, e a dependência entre elas, assim podemos ter uma modelagem matemática na forma de equação diferencial. No segundo passo, a equação diferencial é resolvida utilizando métodos apropriados, obtendo a razão entre a função desconhecida e suas variáveis independentes.

Dentre as diversas modelagens de equações diferenciais, temos os modelos elípticos que descrevem fenômenos em equilíbrio, ou seja, não há variação temporal. As equações elípticas geralmente apresentam soluções estáveis e suaves dentro do domínio de interesse, isso torna a equação relevante para a análise matemática de fenômenos estacionários (Figueiredo, 2000).

Nesse contexto, destacam-se as equações de Laplace e de Poisson como modelos fundamentais no estudo das equações diferenciais parciais elípticas (Figueiredo, 2000). A equação de Laplace é dada por:

$$\Delta u = 0,$$

enquanto a equação de Poisson é expressa por

$$\Delta u = -f,$$

em que f é uma função conhecida que representa fontes internas no domínio considerado. De acordo com Figueiredo (2000), essas equações surgem naturalmente na modelagem de fenômenos físicos em regime estacionário, como a distribuição de temperatura em equilíbrio térmico, campos potenciais em eletrostática e problemas de elasticidade. Assim, o estudo dessas equações, juntamente com suas propriedades, condições de contorno e métodos de resolução, constitui o foco central deste trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 Equação Diferencial: visão geral

Uma Equação Diferencial, é uma equação que possui derivadas, que muitas vezes são chamadas de modelo matemático por descrever um fenômeno físico. Temos dois tipos de equações diferenciais, as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), e as Equações Diferenciais Parciais (EDPs).

As EDOs, basicamente são equações que contém uma função desconhecida, suas derivadas são em relação a uma única variável independente, por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

onde o y representa uma variável dependente e x, uma variável independente. Elas podem ser tanto lineares como não lineares, o que vai determinar isso, é como a minha variável dependente e suas derivadas vão estar na equação. Temos:

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

logo ela é uma equação não linear, pois o meu primeiro coeficiente (1-y) depende de y, supondo que esse coeficiente não dependesse de y e a potência de cada termo que envolve o y, seja um, logo minha equação seria linear.

Segundo Zill (2016), resolvendo uma EDO com valores de valor inicial, podemos garantir que existe uma única função que satisfaz tanto a equação como a condição de valor inicial, e para um dado intervalo na EDO, reduzimos a equação para uma identidade denominada de solução da EDO. Esse intervalo é conhecido como o domínio da solução, onde ele pode ser aberto ou fechado.

As EDPs são equações onde uma função envolvida depende de várias variáveis, diferente da equação diferencial ordinária onde ela depende somente de uma variável. Em muitos casos temos EDPs que são bastantes complexas e difíceis para resolver, mas vamos estudar algumas onde podemos aplicar técnicas para solucionar-las (Rojas, 2020).

As equações diferenciais ordinárias, podem ser usadas para descrever diversos fenômenos físicos, mas teríamos que simplificar ao máximo por se tratar somente de uma variável, então as EDPs são as ferramentas essenciais para descrever tais fenômenos que são importantes para a física e engenharia como dinâmica dos fluidos, eletromagnetismo, difusão de calor, deformação dos materiais elásticos e entre outros problemas.

As EDPs e EDOs são classificadas de acordo com a ordem, ou seja, a ordem da equação diferencial e dada a partir da maior derivada que se encontra na equação, por exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + Q \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

temos uma equação diferencial de segunda ordem. Elas podem ser lineares ou não lineares, as lineares são representadas por uma função que é linear, por exemplo:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

já as não lineares são por uma função não linear:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0.$$

Por fim, temos os sistemas de equações diferenciais, que se temos uma função para determinar, uma equação é suficiente, e se temos n função, então é preciso de um sistema de equações (Boyce; DiPrima, 2012). Exemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases},$$

onde representa um sistema de linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

2.2 Unicidade de Soluções para Equações Diferenciais Parciais

Dada uma equação diferencial parcial:

$$f\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots\right) = 0$$

podemos supor que vai existir sempre uma solução para a equação diferencial de maior derivada, mas não podemos garantir que seja única e que exista uma função $y = \theta(t)$ que a satisfaça, mas existe resultados que podem garantir soluções em determinadas condições, o que não representa uma preocupação puramente matemática pois se vamos resolver um problema devemos supor de início se vai existir uma solução pois (perder tempo em tentar encontrar seria desnecessário), e se um problema físico está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então devemos garantir que tenha solução, caso contrário, significa que há algo de errado na formulação (Boyce; DiPrima, 2012).

Tendo uma equação diferencial, podemos supor que ela tenha uma solução, mas isso nos deixa uma outra pergunta, será que temos apenas uma única solução? E quais condições

podemos impor para encontrar essa solução? Segundo Boyce e DiPrima (2012), essa é a questão da unicidade, pois nas equações diferenciais, as soluções sempre apresentam uma ou mais constantes arbitrárias, que podemos ter uma infinidade de escolhas possíveis para essas constantes.

Segundo Rojas (2020), vários exemplos de EDPs, não têm informações suficientes para garantir a unicidade da solução, logo vamos precisar de informações extras, que são novas condições de contorno. Em uma EDO, se encontrarmos uma solução geral, podemos determinar a unicidade da solução resolvendo o problema de valor inicial, mas nas EDPs vamos nos deparar com funções arbitrárias no lugar de constantes arbitrárias, então vamos precisar de condições de contornos para determinar as soluções particulares.

Para as condições de contorno de uma EDP classificadas como bem posto, devemos garantir três pontos, a existência de solução do problema, a unicidade de solução, por fim a solução depende continuamente dos dados de contorno. Essa última é importante para modelagem de problemas físicos, pois nem sempre vamos ter dados precisos, mas, precisamos garantir que pequenos erros de medição não tragam grandes mudanças na solução. Se temos um problema que não satisfaça ao menos uma condição, significa que temos um problema mal posto (Rojas, 2020).

2.3 Classificação das Equações Diferenciais Parciais Lineares de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

As equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem são de grande importância para o estudo de problemas que envolve as equações diferenciais pois com elas podemos encontrar uma estrutura teórica abrangente em diferentes métodos de solução e utilizá-las para diversas investigações na área da física e matemática.

Na classificação, temos três tipos de EDPs de segunda ordem, que são as parabólicas, hiperbólicas e as elípticas (Caso a ser estudado neste trabalho).

De acordo com a equação geral, definida no plano:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

em que A, B e C são números reais.

(referência)As EDPs de segunda ordem, são classificadas de acordo com o discriminante

da equação geral, então é dita parabólica quando:

$$B^2 - AC = 0,$$

é dita hiperbólica quando:

$$B^2 - AC > 0,$$

e é dita elíptica quando:

$$B^2 - AC < 0.$$

As EDPs parabólicas descrevem fenômenos físicos como transferência de calor e condução de calor em barras, esse estudo começou a partir de 1800, e até hoje continua a atrair a atenção de pesquisadores. Considerando um problema de condução de calor ao longo de uma barra de seção reta uniforme, temos uma equação da seguinte forma:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

onde o α^2 representa a constante de difusividade térmica, que depende apenas do material do qual é feita a barra e da posição, x , é a temperatura em um ponto ao longo do tempo (Boyce; DiPrima, 2012).

As EDPs hiperbólicas são de grande importância para a modelagem de fenômenos dinâmicos como o estudo de ondas, exemplo mais simples são as ondas mecânicas, onde as moléculas das substâncias que compõem o meio se deslocam de suas posições de equilíbrio sobre suas moléculas vizinhas, gerando um deslocamento progressivo ao longo do tempo. A equação da onda é descrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

onde o a^2 representa a razão da constante E (módulo de Young) e a densidade do material. (Gondar; Cipolatti, 2011)

Temos que a equação é elíptica quando $B^2 - AC < 0$, isso garante que as soluções sejam estáveis e suaves, em relação as outras variáveis nas condições de contorno (Boyce; DiPrima, 2012).

Segundo Gondar e Cipolatti (2011), as EDPs do tipo elíptica, são de grande importância para modelagem de diversos fenômenos estacionários, cujas as propriedades estáticas permanecem constantes ao longo do tempo, exemplos podem ser vistos na condução de calor estacionária,

eletrostática e membranas elásticas. Temos as equações de Laplace e Poisson que descrevem essas situações de equilíbrio, onde a equação de Laplace tem a forma:

$$\Delta u = 0$$

enquanto a de Poisson é:

$$\Delta u = f,$$

onde u é solução da equação com a função f .

Segundo Boyce e DiPrima (2012), métodos bastantes utilizados, como separação de variáveis, transformada de Fourier, expansão em série de Fourier e problemas de valor de contorno em coordenadas cartesianas, são técnicas essenciais para resolver as equações de Laplace e Poisson em regiões retangulares. Mas nem sempre os problemas que envolvem equações elípticas podem ser resolvidos analiticamente, podemos nos deparar com problemas de condições de contorno irregulares e domínios de maior complexidade onde é necessário utilizar métodos numéricos como métodos dos elementos finitos e diferenças finitas.

2.4 Método de Separação de Variáveis

Segundo Boyce e DiPrima (2012), o método de separação de variáveis é uma técnica clássica para a resolução de problemas de valores de contorno associados a equações diferenciais parciais, sendo amplamente aplicado às equações do calor, da onda e de Laplace. Esse método baseia-se na suposição de que a solução da equação diferencial pode ser escrita como o produto de funções, cada uma dependendo de uma única variável independente.

Frequentemente, a solução pode ser expressada na forma:

$$u(x, t) = X(x) T(t),$$

ou também

$$u(x, y) = X(x) Y(y),$$

dependendo do número de variáveis envolvidas no problema. Segundo Zill (2016), Ao substituir essa forma assumida na equação diferencial original, obtém-se uma separação das variáveis, resultando em equações diferenciais ordinárias independentes para cada função envolvida. As funções resultantes formam conjuntos ortogonais, o que possibilita a construção de soluções mais gerais por meio de séries, como as séries de Fourier. (Figueiredo, 2000)

3 METODOLOGIA

O seguinte trabalho de conclusão de curso (TCC), adota uma abordagem metodológica de pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa e exploratória, conforme a classificação proposta por Gil (2008), com ênfase na organização, análise e detalhamento de conceitos e deduções matemáticas fundamentais. Esta metodologia é justificada pela carência de detalhamento e compreensão sobre os princípios do cálculo e das equações diferenciais parciais (EDPs), em particular as equações de Laplace e Poisson, e sua aplicabilidade em fenômenos físicos.

De acordo com Gil (2008), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de materiais já formulados, formados por livros e artigos científicos. A importância acadêmica desta abordagem consiste na capacidade de identificar, reunir e analisar o conhecimento existente, fazendo com que se torne mais acessível e didático (Prodanov; Freitas, 2013), especialmente quanto ao detalhamento dos procedimentos intermediários das deduções matemáticas, muitas vezes apresentadas de forma rápida e resumida nas obras técnicas e especializadas.

- Coleta e seleção de fontes bibliográficas

O levantamento bibliográfico constitui a principal etapa inicial da pesquisa, foi realizado com base em pesquisadores tradicionais e atuais na área de equações diferenciais, matemática aplicada e modelagem física como Boyce e DiPrima (2012), Figueiredo (2000) e Ebert e Reissing (2018). Além do mais, foram utilizadas fontes indexadas nas bases como Google Acadêmico, Mathscinet e Litmaps, quanto livros e anotações disponibilizados por pesquisadores e instituições renomados, garantindo a solidez, a confiabilidade e a atualização das informações utilizadas no estudo. A escolha do referencial teórico seguiu os seguintes critérios: a relação direta com o tema, a clareza na fundamentação teórica e metodológica, confiabilidade dos autores e fontes, e a atualidade dos materiais.

- Análise e detalhamento das deduções

Após o material ser selecionado, procede a leitura crítica e analítica das obras, com ênfase na exploração conceitual e na construção passo a passo das deduções matemáticas. O objetivo principal dessa etapa é organizar e detalhar as deduções, enfatizando os fundamentos teóricos das equações de Laplace e Poisson, além da análise a respeito da classificação das EDPs, condições de contorno e métodos de resolução. Investigamos métodos e técnicas da perspectiva teórica, como métodos de separação de variáveis, transformada de integrais, o tratamento das condições de contorno (Dirichlet, Neumann, Robin), o conceito de unicidade e a existência de soluções.

Conceitos teóricos discutidos são aplicados a problemas clássicos da física, como a condução de calor e o equilíbrio eletrostático. Esses tipos de aplicações nos mostram como as EDPs são úteis para modelar fenômenos da natureza e destacam a importância do conhecimento teórico para uso futuro em cálculos computacionais ou aplicações práticas. Escolher esse método busca não só organizar o conteúdo, mas também torná-lo mais fácil de entender para estudantes e pesquisadores, oferecendo uma base sólida e clara para estudos futuros e uso didático. A maneira como os conceitos foram organizados foi feita com base na leitura e interpretação, além de categorização por temas, seguindo a abordagem de Gil (2008).

- Estruturação e redação do trabalho

Com base na análise teórica, o trabalho foi estruturado em tópicos temáticos que seguem uma sequência lógica: introdução aos conceitos básicos das EDPs com foco nas equações elípticas, estudo aprofundado nas equações de Laplace e Poisson, e análise das condições de contorno e aplicabilidade física. A análise é realizada com base na técnica de leitura exploratória seletiva e analítica (Gil, 2008), adotando um método sistemático por categorias temáticas, onde busca-se organizar os conteúdos de maneira integrada com os objetivos da pesquisa.

A escolha dessa metodologia qualitativa e exploratória justifica-se pelo aspecto teórico que fundamenta o objeto de estudo. Segundo Gil (2008) e Prodanov e Freitas (2013), essa forma abordada possibilita ao pesquisador analisar, compreender e interpretar dados teóricos de forma detalhada, levando em conta não apenas o conteúdo técnico, mas também os significados e impactos no entendimento e produção do saber. A redação não só buscou equilibrar rigor matemático com uma exposição clara, mas também a comunicação acessível sem perdas técnicas, conforme fala Prodanov e Freitas (2013) para trabalhos acadêmicos com foco na formação científica.

- Referências bibliográficas

A pesquisa elaborada é de característica bibliográfica e teórica, com uma abordagem descritiva e analítica, não tem como objetivo coletar dados empíricos, mas sim, a análise e interpretação de materiais científicos e acadêmicos. Com o principal objetivo de sistematizar os conhecimentos relacionados às EDPs elípticas e sua aplicabilidade na modelagem de problemas físicos estacionários. As fontes abordam livros técnicos e acadêmicos, artigos científicos e publicações institucionais importantes, que auxiliam na

fundamentação e enriquecimento da análise teórica proposta.

Dessa forma, a metodologia adotada permite uma abordagem sistemática e aprofundada do tema, assegurando coerência entre os objetivos propostos e os procedimentos metodológicos utilizados. Ao privilegiar a pesquisa bibliográfica de caráter qualitativo e exploratório, o trabalho busca não apenas reunir e organizar o conhecimento existente, mas também promover uma compreensão mais detalhada dos fundamentos matemáticos das equações diferenciais parciais elípticas e de sua aplicabilidade em problemas físicos. Assim, a estratégia metodológica escolhida contribui para a construção de uma base teórica consistente, organizada e didática, adequada tanto à formação acadêmica quanto ao desenvolvimento de estudos posteriores na área.

4 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se e discutem-se os principais conceitos e resultados teóricos que serão utilizados como ferramentas fundamentais no desenvolvimento do trabalho, com ênfase na aplicação das propriedades das equações diferenciais parciais elípticas na análise de problemas práticos. Inicialmente, são abordados aspectos gerais das equações de Laplace e de Poisson, destacando suas características essenciais e interpretações físicas. Em seguida, aprofunda-se a investigação por meio da resolução de problemas clássicos, evidenciando de maneira concreta como as condições de contorno e a geometria do domínio influenciam diretamente a estrutura das soluções.

4.1 Apresentação e motivação da Equação de Laplace e Poisson

A equação de Laplace é uma equação diferencial parcial homogênea, ela é representada da forma

$$\Delta u = 0,$$

onde o Δ , é o operador laplaciano, e em coordenadas cartesianas no $\mathbb{R}^n$, que é representado como

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Em $\mathbb{R}^3$, por exemplo, nas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , o laplaciano escreve-se como

$$\Delta := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

e já nas coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , o laplaciano é

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Note que a equação de Laplace, é um caso particular da equação de Poisson

$$\Delta u = f(x),$$

onde $f(x)$ é uma função dada e u é a que queremos encontrar. Essas equações são fundamentais para a física e matemática, surgindo naturalmente em problemas elétricos, gravitacionais, acústicos ou mecânicos. Essas equações diferenciais parciais (EDPs) descrevem como potenciais e campos se espalham pelo espaço, nos dando uma maneira padronizada de compreender

situações que estão em estado estacionário. Essas equações apesar de serem simples, são importantes para unir vários temas da física. Elas explicam desde a eletricidade que usamos no dia a dia até como as ondas de som se espalham pelo ar. Compreender por que elas foram criadas no passado ajuda os estudiosos do tema a verem o quanto são úteis e versáteis.

A história dessas equações surgiram no final do século XVIII e início do século XIX, quando cientistas como Pierre-Simon Laplace e Siméon Denis Poisson queriam mostrar como funcionavam os campos de gravidade e eletricidade. A equação de Laplace $\Delta u = 0$ foi criada para descrever áreas onde não há fontes, como cargas elétricas ou massas. Nesses lugares, ela mostra que a energia ou o potencial Φ se distribui de forma suave e estável. A equação de Poisson, $\Delta u = -f$, é uma versão mais completa da equação de Laplace. Ela inclui a influência de fontes, como as cargas elétricas. Com isso, essa equação consegue modelar sistemas onde as forças ou energias estão distribuídas no espaço, em vez de estarem em um ponto isolado. Em um problema de física clássica, como o de uma esfera metálica com carga, a história se divide em duas partes. Fora da esfera, onde não há cargas elétricas, o potencial segue a equação de Laplace. Isso significa que a eletricidade se espalha de forma suave, diminuindo à medida que nos afastamos da esfera. Por outro lado, dentro da esfera se a carga estiver distribuída em seu volume, e não apenas na superfície, a equação de Poisson é usada, pois ela considera a presença das cargas para determinar como o potencial elétrico se comporta. Essas equações foram cruciais para o avanço da física, ajudando a criar o eletromagnetismo clássico e depois as equações de Maxwell. Até hoje, elas são essenciais para o design de tecnologias modernas, como capacitores, antenas e outros aparelhos eletrônicos.

No estudo do eletromagnetismo, as equações de Laplace e Poisson são ferramentas matemáticas importantes para solucionar problemas envolvendo campos elétricos e potenciais. A equação de Laplace é utilizada em regiões onde não há presença de cargas elétricas, como em um vácuo, permitindo calcular o potencial elétrico em situações como interior das placas de um capacitor ou em volta de um condutor carregado. Já a equação de Poisson entra em cena quando há distribuição de carga, como em plasmas ou semicondutores, onde a densidade de carga influencia diretamente o potencial elétrico. Essas equações são importantes para determinar o comportamento dos campos elétricos em diversas aplicações, desde o projeto de circuitos eletrônicos até o desenvolvimento de aceleradores de partículas, sendo base tanto na engenharia quanto na física teórica e aplicada.

O comportamento de membranas vibrantes, como a superfície de um tambor, mostra

uma aplicação clássica das equações diferenciais no contexto físico. Quando essa membrana é esticada e mantida presa nas bordas, sua configuração de equilíbrio e os padrões de vibração podem ser descrito pela equação de Laplace. As soluções encontradas, geralmente por meio da técnica de separação de variáveis, revelam os modos naturais de vibração, que influenciam diretamente o som emitido, incluindo seu tom e timbre. Já a equação de Poisson é utilizada quando há atuação de forças externas sobre a membrana, como pressão ou distribuição de carga, sendo relevante em contextos de engenharia que envolvem estruturas delgadas, como placas ou cascos. Essa relação entre matemática e física foi aprofundada por estudiosos do século XIX, como Sophie Germain, que analisou superfícies elásticas, e permanece essencial no desenvolvimento de projetos estruturais, como pontes e componentes aeroespaciais.

Na acústica, as equações de Laplace e Poisson são cruciais na análise de fenômenos relacionados à propagação sonora e à distribuição de pressão em ambientes estáticos. Quando se trata de situações em que o tempo não influencia, como o estudo da pressão em salas de concerto ou cavidades ressonantes, a equação da onda se simplifica para a equação de Laplace, podendo modelar o comportamento do som em estado estacionário. Já a equação de Poisson é empregada quando há presença de fontes emissoras, como alto-falantes ou objetos que geram ondas acústicas, sendo essencial para descrever o campo sonoro resultante. Essas equações foram exploradas por pesquisadores como Hermann von Helmholtz no século XIX, em seus estudos sobre ressonância e acústica musical, e continuam sendo importantes no desenvolvimento de novas tecnologias, como sistemas de áudio, controle de ruído e equipamentos de ultrassom utilizados na medicina.

A elegância das equações de Laplace e Poisson está em sua aplicabilidade a diferentes áreas da física e da engenharia. Elas não se limitam ao estudo do eletromagnetismo, vibrações de membranas ou fenômenos acústicos, mas também são importantes na análise da condução de calor, do comportamento de fluidos e da gravitação. Na transferência de calor, por exemplo, a equação de Laplace é usada para descrever a distribuição de temperatura em materiais sem fontes internas de calor, enquanto a equação de Poisson incorpora os efeitos de geração térmica, como ocorre em reatores. Já na mecânica dos fluidos, a equação de Laplace representa fluxos irrotacionais, como o movimento de um fluido ideal ao redor de um corpo. Esse conjunto de equações, fruto das contribuições de Laplace, Poisson e outros estudiosos do século XIX, oferece uma estrutura matemática poderosa, permitindo que profissionais de diversas áreas enfrentem problemas complexos com uma metodologia única.

Para quem está se aprofundando nos estudos, entender as equações de Laplace e Poisson representa uma investigação da física clássica, onde a precisão matemática se alia à aplicação concreta. Essas equações mostram o pensamento de grandes nomes da ciência que moldaram os fundamentos da tecnologia atual. Ao aprender a resolvê-las por separação de variáveis ou outros métodos, o estudante desenvolve a habilidade de representar e antecipar o comportamento de sistemas físicos, como os campos elétricos em dispositivos eletrônicos, a acústica de ambientes ou as vibrações em estruturas aeroespaciais. O estudo dessas equações estimula tanto o pensamento lógico quanto a criatividade na solução de problemas, sendo uma excelente escolha para projetos finais que busquem associar teoria científica com aplicações práticas.

4.2 Solução Fundamental da Equação de Laplace

Uma solução fundamental, é uma função especial que representa a resposta da equação a uma fonte pontual, ou seja, mostra como a equação reage quando há uma fonte em um único ponto do espaço. No caso da equação de Laplace, essa ideia aparece como

$$\Delta\Phi = -\delta(x),$$

onde $\delta(x)$ é a distribuição de Dirac, que representa uma fonte localizada na origem, e Φ é a resposta do operador Laplaciano a essa fonte pontual. Temos que, a fonte $\delta(x)$ é invariante, pois ela pega o valor de $x = 0$, e a origem não muda quando giramos ou refletimos o espaço, então se o operador for invariante, logo a solução também deve ser, isto é, deve depender apenas da distância ao ponto da fonte.

Para que o operador Laplaciano seja invariante, o resultado dele deve permanecer o mesmo quando girarmos, refletirmos ou transladarmos o sistema de coordenadas. Para mostrar a invariância do Laplaciano, consideramos uma matriz P ortogonal, que pode representar uma rotação ou uma reflexão. Na rotação, temos que o determinante da matriz $P = +1$, e na reflexão o determinante da matriz $P = -1$. Além disso, incluímos um vetor de translação $t \in \mathbb{R}^n$. Definimos então a transformação afim completa

$$Q_t(x) = Px + t,$$

ou seja, uma transformação geométrica que combina uma transformação linear a uma translação, onde $x \in \mathbb{R}^n$ é a coordenada original e $Q_t(x)$ é a nova coordenada. Se $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , definimos a função transformada

$$u(Px + t) = u(Q_t(x)) = v(x).$$

Agora, vamos mostrar que o Laplaciano é invariante sob essa transformação, ou seja

$$\Delta v(x) = (\Delta u)(Q_t(x)).$$

Para isso, assumamos que P é da seguinte forma:

$$P = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

e então, vale o seguinte

$$Px = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ \vdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Realizando a soma de Px com um vetor $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ independente de x , temos

$$Px + t = \begin{bmatrix} p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n \\ p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n \\ \vdots \\ p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i + t_1 \\ \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i + t_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n p_{ni}x_i + t_n \end{bmatrix}.$$

Definamos $Px + t := y$, em que

$$Px + t = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n p_{1i}x_i + t_1 \\ \sum_{i=1}^n p_{2i}x_i + t_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n p_{ni}x_i + t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y,$$

que implica

$$v(x) = u(y).$$

Agora perceba que a função $u = u(y_1, y_2, \dots, y_n)$ em que cada y_j depende de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, isto é

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Portanto, calculando a diferencial total de v , tem-se

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n} dx_n.$$

Note também que a diferencial total de u é:

$$du = \frac{\partial u}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial u}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial y_n} dy_n,$$

onde cada $y_j = y_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ depende dos x_i , e a diferencial de y_j é

$$dy_j = \frac{\partial y_j}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_j}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial y_j}{\partial x_n} dx_n.$$

Como $y_j = \sum_{i=1}^n p_{ji} x_i + t_j$, temos

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = p_{ji}, \quad \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} = 0.$$

Substituindo na expressão de dv , temos

$$dv = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \sum_{i=1}^n p_{ji} dx_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} p_{ji} dx_i,$$

e então, concluímos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} p_{ji}. \quad (4.1)$$

Derivando novamente (4.1) em relação a x_i , temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} p_{ji} \right), \quad (4.2)$$

e $p_{ji} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, ao utilizarmos a derivada do produto na equação (4.2), segue que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) p_{ji} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ji}). \quad (4.3)$$

Agora derivando o primeiro termo da equação (4.3), obtem-se

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} p_{ki},$$

que substituindo na equação (4.3), chegamos em

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} p_{ki} p_{ji} + \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{ji}). \quad (4.4)$$

Agora, analisando o segundo termo da equação (4.3), temos que, y_j depende linearmente dos x_i e t_j , ou seja, y_j é uma função da forma

$$y_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + t_j,$$

em que os termos a_{ji} e t_j são constantes, e então suas derivadas são 0, o que nos faz concluir que

$$\left(\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i^2} \right) = 0.$$

Então, substituindo a derivada do segundo termo na equação (4.4), vem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} p_{ki} p_{ji} + \frac{\partial u}{\partial y_j} 0 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} p_{ki} p_{ji}. \end{aligned}$$

Como a matriz P é ortogonal, então $PP^T = I$, onde I representa a matriz identidade, e portanto

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(y) p_{ji} p_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(y) \sum_{i=1}^n p_{ji} p_{ki}, \quad (4.5)$$

para:

$$\sum_{i=1}^n p_{ji} p_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k, \\ 0 & \text{se } j \neq k, \end{cases}$$

onde, δ_{jk} é chamado de delta de Kronecker, que nos serve para comparar dois índices. Assim, podemos reescrever (4.5), e obtemos

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}(y) = \Delta u(y).$$

Como foi mostrado, devido a invariância do operador e da função fonte no lado esquerdo da equação pois a delta depende apenas da distância ao ponto, por rotações preservarem a distância, faz sentido procurar soluções harmônicas radiais, ou seja, funções u que dependam apenas da distância à origem. Isso significa que o comportamento da solução é o mesmo em todas as direções ao redor do ponto central, qualquer variação de ângulo não altera o valor da solução fundamental, pois todas as características da solução fundamental depende apenas de quão longe estamos do centro. Para a equação de Laplace, vamos procurar uma função harmônica u em $\mathbb{R}^n$, tal que $u(x) := v(r)$, onde $r = |x|$, então:

$$u(x) = v(r) = v(|x|),$$

utilizando regra da cadeia para derivar $u(x)$

$$u_{x_i} = v'(|x|) \cdot |x|_{x_i}, \quad (4.6)$$

temos que a derivada da $|x|_{x_i}$ é:

$$|x|_{x_i} = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_n^2})_{x_i} = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{|x|}, \quad |x| \neq 0.$$

Substituindo a derivada da $|x|$ na equação (4.6)

$$u_{x_i} = v'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \quad (|x| \neq 0). \quad (4.7)$$

Derivando (4.7), tem-se

$$u_{x_i x_i} = \left(\frac{|x|}{|x|^2} - \frac{x_i \cdot x_i}{|x|^3} \right) \cdot v'(|x|) + (v''(|x|) \cdot |x|') \cdot \frac{x_i}{|x|},$$

reorganizando

$$u_{x_i x_i} = \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3} \right) v'(|x|) + \left(\frac{x_i^2}{|x|^2} \right) v''(|x|),$$

que distribuindo, obtemos

$$u_{x_i x_i} = \frac{1}{|x|} \cdot v'(|x|) - \frac{x_i^2}{|x|^3} \cdot v'(|x|) + \frac{x_i^2}{|x|^2} \cdot v''(|x|) \quad (|x| \neq 0).$$

Agora, somando em i , para i de 1 a n , temos que:

$$\begin{aligned} \Delta u &= n \cdot \left(\frac{1}{|x|} \cdot v'(|x|) \right) - \frac{|x|^2}{|x|^3} \cdot v'(|x|) + \frac{|x|^2}{|x|^2} \cdot v''(|x|) \\ &= n \cdot \left(\frac{1}{|x|} \cdot v'(|x|) \right) - \frac{1}{|x|} \cdot v'(|x|) + v''(|x|) \\ &= \left(\frac{n-1}{|x|} \right) \cdot v'(|x|) + v''(|x|), \quad (|x| \neq 0). \end{aligned}$$

Sabemos que $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^n$ e como $r = |x|$, então

$$v''(r) + \left(\frac{n-1}{r} \right) v'(r) = 0 \quad (r \neq 0)$$

e assim obtemos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Agora vamos resolver essa EDO, isolando as derivadas no lado esquerdo, temos

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = - \left(\frac{n-1}{r} \right) = \frac{1-n}{r} \quad (r \neq 0). \quad (4.8)$$

Utilizando uma definição de derivada, temos

$$\frac{d}{dr} \ln(u) = \frac{1}{u} u',$$

para $u = v'(r)$, então

$$\frac{d}{dr}(\ln v'(r)) = \frac{1}{v'(r)} v''(r) = \frac{v''(r)}{v'(r)}.$$

Substituindo a derivada na equação (4.8), e integrando ambos os lados

$$\int \frac{d}{dr}(\ln v'(r)) = \int \frac{1-n}{r} dr = (1-n) \int \frac{1}{r} dr$$

temos

$$\ln v'(r) = (1-n) \ln r + c. \quad (4.9)$$

Aplicando a exponencial com base e na equação (4.9), onde e é o número de Euler, temos

$$v'(r) = r^{1-n} \cdot e^c = r^{1-n} \cdot c,$$

que aplicando o Teorema fundamental do cálculo, temos:

Para $n = 1$:

$$\int v'(r) = C \int 1 dr = Cr + C_2.$$

Para $n = 2$:

$$\int v'(r) = C \int \frac{1}{r} dr = C \ln r + C_2.$$

Para $n \geq 3$:

$$\int v'(r) = C \int r^{1-n} dr = C \frac{r^{2-n}}{2-n} + C_2.$$

O termo C_2 representa a parte regular da solução, ou seja, aquele que não se torna infinito quando $r \rightarrow 0$, já que o Laplaciano de uma constante é zero, esse termo não afeta a equação com a fonte pontual. Portanto, ao buscarmos a solução fundamental, podemos desconsiderar esse termo, pois ele não contribui para a singularidade gerada pela delta de Dirac. Logo:

$$v(r) = \begin{cases} Cr & n = 1, \\ C \ln r & n = 2, \\ C \frac{r^{2-n}}{n-2}, & n \geq 3. \end{cases}$$

A constante C controla a intensidade da singularidade da solução fundamental em $r = 0$. Essa singularidade representa uma fonte pontual concentrada na origem. Para que essa fonte tenha

intensidade correta, precisamos escolher C de modo que

$$-\Delta_x \Phi = \delta_0.$$

A função δ_0 é uma maneira de representar algo totalmente concentrado em $x = 0$, ela pode ser descrita como

$$\delta_0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

indicando que toda a massa está apenas na origem. Fora desse ponto, a solução fundamental é regular e satisfaz

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{para } x \neq 0,$$

portanto, a escolha de C não pode ser arbitrária, ele deve ser ajustado para que a singularidade produza exatamente uma fonte unitária na origem.

Ao integrarmos δ_0 vezes uma função teste, ela devolve apenas o valor dessa função no ponto:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta \Phi) \psi(x) dx = \psi(0),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é a ação de uma distribuição sobre uma função teste, ou seja, não estamos aplicando o Laplaciano ponto a ponto, mas exigindo que a identidade

$$\langle -\Delta \Phi, \psi \rangle = \langle \delta_0, \psi \rangle = \psi(0),$$

sirva para toda função teste $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, onde o delta de Dirac pega o valor da função exatamente no ponto zero. Vamos pedir a seguinte normalização, seja uma bola de raio ε centrada na origem, pela primeira identidade de Green

$$\int_{B_\varepsilon(0)} -\Delta \Phi(x) dx = \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial V} dS = 1,$$

para $\varepsilon > 0$, considere o anel

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < R\}.$$

Utilizando a segunda identidade de Green em Ω_ε

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Phi \Delta \psi - \psi \Delta \Phi) dx = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (\Phi \partial_\nu \psi - \psi \partial_\nu \Phi) dS.$$

Como Φ é harmônica em Ω_ε , o termo volumétrico com $\Delta\Phi$ cai, assim

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(-\Delta\psi)dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (-\Phi\partial_\nu\psi + \psi\partial_\nu\Phi)dS.$$

As fronteiras de Ω_ε são S_r e S_ε , como ψ é zero na esfera de raio R , pois foi escolhido com suporte compacto em $B_R(0)$

$$\int_{|x|>\varepsilon} \Phi(-\Delta\psi)dx = \int_{S_\varepsilon} (-\Phi\partial_\nu\psi + \psi\partial_\nu\Phi)dS,$$

fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, o lado esquerdo converge para $\langle\Phi, -\Delta\psi\rangle$, então

$$\langle\Phi, -\Delta\psi\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (-\Phi\partial_\nu\psi + \psi\partial_\nu\Phi)dS.$$

O primeiro termo de contorno tende a 0

$$\langle\Phi, -\Delta\psi\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int (\Phi\partial_\nu\psi)dS = 0,$$

pois $\partial_\nu\psi$ é limitado e o crescimento de Φ perto de 0 não é suficiente para passar do fator $|S_\varepsilon|$, assim tendendo a 0. No segundo termo, $\psi(x) \rightarrow \psi(0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \psi(x)\partial_\nu\Phi(x)dS = \psi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu\Phi dS$$

$$\langle\Phi, -\Delta\psi\rangle = \psi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu\Phi dS,$$

como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu\Phi dS = 1,$$

portanto

$$\langle-\Delta\Phi, \psi\rangle = \psi(0).$$

Agora calculamos $\int_{S_\varepsilon} \partial_\nu\Phi dS$ para a forma radial Φ .

Para $n=1$

Para $n = 2$:

$$\Phi = C \ln r,$$

derivando

$$\partial_r\Phi = \frac{C}{r}, \quad \partial_\nu = -\partial_r$$

$$\int_{S_\varepsilon} \partial_\nu \Phi dS = \frac{-C}{\varepsilon} \cdot 2\pi\varepsilon = -2\pi C = 1$$

$$C = \frac{-1}{2\pi},$$

logo

$$\Phi(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln|x|.$$

Para $n \neq 2$:

$$\Phi = Cr^{2-n},$$

derivando

$$\partial_r \Phi = C(2-n)r^{1-n}$$

$$\partial_r \Phi = -C(2-n)\varepsilon^{1-n},$$

como $\partial_\nu \Phi$ é constante sobre a esfera, a integral

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} \partial_\nu \Phi dS &= \partial_\nu \Phi(\varepsilon) \cdot |S_\varepsilon| \\ &= -C(2-n)\varepsilon^{1-n} \cdot |S^{n-1}| \varepsilon^{n-1} \\ &= -C(2-n)|S^{n-1}| = 1 \end{aligned}$$

e isolando C

$$C = \frac{-1}{(2-n)|S^{n-1}|} = \frac{-1}{n(n-2)\alpha(n)}, \quad |S^{n-1}| = n\alpha(n),$$

então

$$\Phi(x) = \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n}.$$

Portanto

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} |x|^{2-n} & n > 3, \end{cases}$$

e com isso, mostramos que o Laplaciano tem uma solução fundamental explícita. Nessa solução o $\alpha(n)$ representa o volume ou área da bola unitária em n dimensões.

Considere a esfera de raio $r > 0$, centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ por $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| = r\}$ e a bola aberta de $r > 0$ centrada em $x_0 \in \mathbb{R}^n$ por $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$. Denotamos por:

$$\begin{cases} x = ry, & r = |x|, & |y| = 1, \\ dx = r^{n-1} dr d\theta, \end{cases}$$

em que $d\theta$ é a medida de superfície em $S_1(0)$, $W_n = |S_1(0)| = \int_{S_1(0)} d\theta$. Para calcularmos W_n , introduzimos a função gama

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt, \quad \begin{cases} u = t^x, & dv = e^{-t}, \\ du = xt^{x-1} dt, & v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x).$$

Para $\Gamma(1)$:

$$\int_0^\infty e^{-t} t^0 dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Para $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \Gamma((n-1)+1) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)!.$$

Mudando as variáveis, $t = s^2$ com $s \geq 0$, $dt = 2s ds$, $t^{-1/2} = s^{-1}$, chegamos em

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^\infty e^{-s^2} s^{-1} (2s ds) = 2 \int_0^\infty e^{-s^2} ds.$$

Para a integral gaussiana unidimensional:

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$$

elevamos ao quadrado e aplicando o teorema de Fubini em seguida de modo a obter

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

e então, trocando pelas coordenadas polares $(r, \theta) : dx dy = r dr d\theta$ e $x^2 + y^2 = r^2$, temos

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr, \quad \begin{cases} u = r^2, \\ du = 2r dr \end{cases}$$

$$2\pi \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2} du = 2\pi \left[\frac{-e^{-u}}{2} \right]_0^\infty = 2\pi \left[0 - \left(\frac{-e^{0^2}}{2} \right) \right] = \pi$$

logo

$$I^2 = \pi$$

$$I = \sqrt{\pi},$$

portanto

$$\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para a integral gaussiana em $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto (r, \Omega)$, $r \geq 0$, $\Omega \in S^{n-1}$, $d\Omega$ é o elemento de área sobre a esfera unitária S^{n-1} é,

$$\int_{S^{n-1}} d\Omega = \omega_N,$$

então

$$I_n = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{-r^2} r^{n-1} d\Omega dr = \omega_n \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr.$$

Calculando a integral

$$J = \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr$$

e fazendo a mudança das variáveis $t = r^2$, $dt = 2r dr$, $r^{n-1} dr = \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-1} dt$, então

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1} dt.$$

Como definição, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$, obtem-se que

$$J = \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{2} t^{\frac{n}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

e portanto

$$I_n = \omega_n \cdot J = \omega_n \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Observação 1.

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} dx_1 \cdots dx_n$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2} dx_n = (\sqrt{\pi})^n = \pi^{n/2}.$$

Já que sabemos que $i_n = \pi^{n/2}$, logo

$$\pi^{n/2} = \omega_n \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

isolando o ω_n , temos

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Por outro lado, o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ é

$$\alpha(n) = \int_{B(0,1)} dx = \int_0^1 r^{n-1} dr \cdot \omega_n = \frac{\omega_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Pela propriedade da função gama:

$$\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

e assim

$$\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)}.$$

Portanto, o volume da bola unitária para dimensão finita n vem a partir da relação entre integral gaussiana e função gama.

4.2.1 Identidades de Green

As identidades de Green são ferramentas fundamentais na Análise Matemática, ainda mais em Equações Diferenciais Parciais. Elas aparecem com frequência nos métodos para resolver problemas elípticos, como a equação de Laplace, Poisson.

Lema 1. (*Identidades de Green*). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suficientemente suave e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então

$$(i) \quad \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} dS,$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega} Dv \cdot Du dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} u dS,$$

$$(iii) \quad \int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \, dS.$$

Demonstração. Para o item (i), vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \, dS,$$

onde

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

Essa identidade usada vem do Teorema da Divergência aplicado ao vetor

$$F = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}),$$

em que sua divergência é

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{x_i}) = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = \Delta u.$$

O Teorema da Divergência diz

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial \Omega} F \cdot \mathbf{v} \, dS,$$

onde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ é o vetor normal unitário exterior à fronteira $\partial \Omega$, substituindo o vetor F , temos

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \cdot \mathbf{v} \, dS,$$

onde

$$(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_i,$$

mas, temos que isso é a derivada normal

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} = \nabla u \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_{x_i} v_i,$$

portanto

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \, dS.$$

Para o item (ii), vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} Dv \cdot Du \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} \, dS,$$

onde o gradiente de v é

$$Dv = \nabla v = (v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n}),$$

e o gradiente de u é

$$Du = \nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}),$$

fazendo o produto interno entre eles

$$Dv \cdot Du = \sum_{i=1}^n v_{x_i} u_{x_i},$$

então

$$\int_{\Omega} Dv \cdot Du \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i} u_{x_i} \, dx. \quad (4.10)$$

Agora vamos utilizar integração por partes para resolver essa integral. No cálculo de uma variável, temos

$$\int_a^b g u' \, dx = [gu]_a^b - \int_a^b g' u \, dx,$$

onde $g = v_{x_i}$, mas em múltiplas variáveis, a fronteira a e b é substituída por $\partial\Omega$, e o papel do valor na fronteira é desempenhado por um termo de fluxo. Para aplicar divergência, construímos um vetor F que transforma a derivada u_{x_i} em uma divergência

$$F = (0, 0, \dots, gu, \dots, 0),$$

a única componente não nula é a componente i , dada por

$$F_i = gu,$$

logo

$$F = gu e_i,$$

onde e_i é o vetor padrão da direção x_i . A divergência de F , agora é

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x_i} (gu),$$

então, utilizando a derivada do produto temos

$$\operatorname{div} F = g_{x_i} u + g u_{x_i}.$$

O Teorema da Divergência diz

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{v} dS,$$

substitua a divergência de F

$$\int_{\Omega} (g_{x_i} u + g u_{x_i}) dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{v} dS,$$

reorganizando, temos

$$\int_{\Omega} g u_{x_i} dx + \int_{\Omega} g_{x_i} u dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{v} dS, \quad (4.11)$$

como $F = g u e_i$, logo

$$F \cdot \mathbf{v} = (g u e_i) \cdot \mathbf{v} = g u v_i,$$

então

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \mathbf{v} dS = \int_{\partial\Omega} g u v_i dS.$$

Substituindo na equação (4.11)

$$\int_{\Omega} g u_{x_i} dx + \int_{\Omega} u g_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} g u v_i dS,$$

então, isolando a integral de $g u_{x_i}$, temos

$$\int_{\Omega} g u_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u g_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u g v_i dS.$$

Voltando para a equação (4.10) e substituindo

$$\int_{\Omega} v_{x_i} u_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u v_{x_i x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} v_i dS,$$

somando em $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} v_{x_i} u_{x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u v_{x_i x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u v_{x_i} v_i dS,$$

como $v_{x_i} u_{x_i} = Dv \cdot Du$, então

$$\int_{\Omega} Dv \cdot Du dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} dS.$$

Para o item (iii), vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}} \right) dS.$$

Voltando para o item (ii), vimos que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dx = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS,$$

se trocarmos $u \leftrightarrow v$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS,$$

agora temos duas equações, se subtraírmolas, o lado esquerdo se cancela, restando apenas

$$0 = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS + \int_{\Omega} v \Delta u \, dx - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS,$$

portanto, reorganizando temos que

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS.$$

□

4.3 Solução da Equação de Poisson em $\mathbb{R}^n$

Seja Φ a solução de $-\Delta u = \delta_0$, $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte compacto. Defina

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(x) \, dx$$

em que u é de classe C^2 , então é uma solução para a equação de Poisson.

Demonstrando isso, temos

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y-x) f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) f(y-x) \, dx,$$

seja e_i , o vetor unitário na i -ésima direção:

$$e_i = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$$

na base canônica de $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{u(y + he_i) - u(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} \, dx.$$

Uniformemente em $\mathbb{R}^n$

$$\frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(y - x) \quad \text{quando } h \rightarrow 0,$$

temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(y-x) dx.$$

Derivando novamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(y-x) dx.$$

As expressões no lado direito são contínuas em relação à variável y , concluímos que $u \in C^2$. Além disso, como f possui suporte compacto e Φ é localmente integrável, então $u, Du, D^2u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Fixe $\varepsilon > 0$

$$\Delta u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx = \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx. \quad (4.12)$$

Resolvendo a primeira integral da equação (4.12), se $C_2 = \sup_{\mathbb{R}^n} \|D^2 f\|$, temos

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx \right| \leq C_2 \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) dx.$$

Se $n = 2$:

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) dx = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \ln(r) r dr d\theta = \frac{-1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_0^\varepsilon \ln(r) r dr$$

$$- \int_0^\varepsilon r \ln r dr, \quad \begin{cases} u = \ln r, & dv = r, \\ du = \frac{1}{r} dr, & v = \frac{r^2}{2}, \end{cases}$$

$$\frac{-r^2}{2} \ln r + \int_0^\varepsilon \frac{r}{2} dr = \frac{-\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Se $n \geq 3$:

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) dx = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_\varepsilon(0)} |x|^{2-n} dx,$$

usamos coordenadas polares $dx = |S^{n-1}| r^{n-1} dr$ com $|S^{n-1}| = n\omega_n$, assim

$$\frac{1}{n(n-2)\omega_n} \int_{B_\varepsilon(0)} |x|^{2-n} dx = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \cdot |S^{n-1}| \int_0^\varepsilon r^{2-n} r^{n-1} dr$$

e simplificando

$$\frac{1}{(n-2)} \int_0^\varepsilon r dr = \frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}.$$

Então

$$\left| \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx \right| \leq \begin{cases} C_2 \frac{-\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}, & n = 2, \\ C_2 \frac{\varepsilon^2}{2(n-2)}, & n \geq 3, \end{cases}$$

portanto

$$\int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Para a segunda integral da equação (4.12), usamos a primeira identidade de Green, obtendo

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \Delta f(y-x) dx = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(y-x) ds(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla f(y-x) dx, \quad (4.13)$$

neste caso, $\mathbf{v}$ representa o vetor unitário normal direcionado para o interior da bola $B_\varepsilon(0)$, com a convenção usual de orientação adotada para a fronteira de $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$. Resolvendo a primeira integral da equação (4.13), definimos $C_1 = \sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|$

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(y-x) ds(x) \right| \leq C_1 \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(x) dx = \begin{cases} C \varepsilon |\log \varepsilon|, & n = 2, \\ \frac{C}{n-2} \varepsilon, & n \geq 3, \end{cases}$$

Logo

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(x) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(y-x) ds(x) \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Para a segunda integral da equação (4.13), utilizando novamente a primeira identidade de Green, temos que

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla f(x-y) dx = - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}(x) f(y-x) ds(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \Phi(x) f(x-y) dx$$

o termo $\Delta \Phi(x) = 0$, logo a segunda integral é

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta \Phi(x) f(x-y) dx = 0,$$

então

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla f(x-y) dx = - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}(x) f(x-y) ds(x),$$

pela harmonicidade de Φ , como

$$\nabla \Phi(x) = \frac{1}{n} \frac{x}{|x|^n}, \quad \mathbf{v} = -\frac{x}{\varepsilon},$$

segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}(x) = \nabla \Phi(x) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{n \omega_n} \frac{|x|^2}{|x|^n} = \frac{1}{n \omega_n \varepsilon^{n-1}},$$

em $\partial B_\varepsilon(0)$, temos

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}(x) f(y-x) ds(x) = -\frac{1}{n \omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(y-x) ds(x) = -\frac{1}{|\partial B_\varepsilon(y)|} \int_{\partial B_\varepsilon(y)} f(x) ds(x).$$

Pelo teorema do valor médio

$$-\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla \Phi(x) \cdot \nabla f(x-y) dx \longrightarrow -f(y), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

portanto

$$\Delta u(y) = -f(y).$$

Concluimos que a função u definida pela convolução da solução fundamental de Laplace com uma função f satisfaz a equação de Poisson. Com isso, mostramos uma conexão fundamental entre as funções harmônicas e as soluções das equações de Poisson. Agora podemos mostrar algumas propriedades importantes das funções harmônicas, apresentando teoremas clássicos que descrevem o valor médio, o princípio do máximo, a unicidade da solução, bem como a suavidade e o teorema de Liouville, que juntas formam a base teórica fundamental para a compreensão e estudo das funções harmônicas.

4.4 Propriedades das Funções Harmônicas

Começamos esta seção com a definição das propriedades do valor médio.

4.4.1 Valor médio

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio conexo, e seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica, ou seja, que satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Então, veremos a seguir que u satisfaz a propriedade do valor médio. Para uma função u definida em $B(x, r)$ a média de u em $B(x, r)$ é dada por

$$u(x) := \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

como $B(x, r) = \alpha(n)r^n$, isso fica

$$u(x) := \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} u(y) dy,$$

onde $B(x, r)$ = bola de raio r centrada em x em $\mathbb{R}^n$, $\alpha(n)$ = volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Para uma função u definida em $\partial B(x, r)$, a média da função u em $\partial B(x, r)$ é dada por

$$u(x) := \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

substituindo $|\partial B(x, r)| = n\alpha(n)r^{n-1}$

$$u(x) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

onde $\partial B(x, r)$ = fronteira da bola de raio r centrada em x em $\mathbb{R}^n$ e $n\alpha(n)$ = área da superfície da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Observação 2. *Essas duas definições são equivalentes. De fato, se partimos da forma na esfera e integramos, obtem-se a forma na bola*

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

Multiplicando ambos os lados por $n\alpha(n)r^{n-1}$

$$n\alpha(n)u(x)r^{n-1} = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

integrando tudo de 0 até R

$$\int_0^R n\alpha(n)u(x)r^{n-1} dr = \int_0^R \left(\int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) \right) dr,$$

temos

$$n\alpha(n)u(x) \int_0^R r^{n-1} dr = \int_{B_R(x)} u(y) dy,$$

utilizando o Teorema fundamental do cálculo

$$n\alpha(n)u(x) \frac{R^n}{n} = \alpha(n)u(x)R^n = \int_{B_R(x)} u(y) dy,$$

isolando $u(x)$, obtemos

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{B_R(x)} u(y) dy.$$

Agora, diferenciando a forma na bola, obtemos a forma na esfera

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

Multiplicando ambos os lados por $\alpha(n) r^n$

$$\alpha(n) r^n u(x) = \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

Diferenciando ambos os lados

$$\frac{d}{dr} (\alpha(n) r^n u(x)) = \frac{d}{dr} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

temos

$$\alpha(n) n r^{n-1} u(x) = \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

dividindo tudo por $\alpha(n) n r^{n-1}$

$$u(x) = \frac{1}{n \alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Teorema 1. (Teorema do Valor médio). Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio conexo, se $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica, então

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy,$$

ou seja, o valor de u no centro da bola é igual à média dos valores de u tanto na superfície quanto no volume.

Demonstração. Supondo que $u \in C^2(\Omega)$ seja harmônica. Para $r > 0$, temos

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Para $r = 0$, definimos $\phi(r) = u(x)$. Veja que, se u é uma função suave, então $\lim_{r \rightarrow 0^+} \phi(r) = u(x)$, portanto, ϕ é uma função contínua. Se mostrarmos que $\phi'(r) = 0$, podemos concluir que ϕ é uma função constante, assim

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$

Vamos provar que $\phi'(r) = 0$, dessa forma

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y),$$

para uma esfera unitária $r = 1$, tome

$$y = x + rz, \quad z \in \partial B(0, 1),$$

então

$$dS(y) = r^{n-1} dS(z),$$

porque a área da superfície de uma esfera em $\mathbb{R}^n$ cresce como r^{n-1} , substituindo

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z)$$

derivando

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z),$$

como $z = \frac{y-x}{r}$, então

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \nabla u(x + rz) \cdot \frac{y-x}{r} dS(y),$$

o integrando $\nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}$ é a derivada radial de u na superfície

$$\nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(y),$$

assim

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(y) dS(y)$$

normalizando pela área da esfera

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{v}}(y) dS(y),$$

aplicando o teorema da divergência

$$\phi'(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} \nabla \cdot (\nabla u) dy = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x, r)} \Delta u(y) dy$$

como u é harmônica, então $\Delta u = 0$, logo $\phi'(r) = 0$. Resta provar que

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy,$$

fazemos isso utilizando o primeiro resultado

$$\begin{aligned}
 \int_{B(x,r)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u(y) dS(y) \right) ds \\
 &= \int_0^r \left(n \alpha(n) s^{n-1} \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,s)} u(y) dS(y) \right) ds \\
 &= \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} u(x) ds \\
 &= n \alpha(n) u(x) \int_0^r s^{n-1} ds \\
 &= n \alpha(n) u(x) \cdot \frac{s^n}{n} \Big|_0^r \\
 &= \alpha(n) r^n u(x),
 \end{aligned}$$

isolando o $u(x)$, temos

$$u(x) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

□

4.4.2 Princípio do Máximo fraco

Teorema 2. (*Teorema do Máximo fraco*). *Provamos que u é uma função harmônica em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então u atinge seu valor máximo na fronteira de Ω .*

Demonstração. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ seja aberto e limitado. Considere que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ seja harmônica, o princípio do máximo mostra que

$$\max_{\Omega} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x).$$

□

4.4.3 Princípio do máximo forte

Teorema 3. (*Teorema do Máximo forte*). *se Ω é conexo e existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que*

$$u(x_0) = \max_{\Omega} u(x),$$

então u é constante em Ω .

Demonstração. Vamos supor que existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que

$$u(x_0) = M = \max_{\Omega} u(x),$$

então, para $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, a propriedade afirma que

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(y) dy \leq M,$$

portanto

$$\int_{B(x_0, r)} u(y) dy = M,$$

e como $M = \max_{\Omega} u(x)$, temos que $u(y) \equiv M$ para todo $y \in B(x_0, r)$. $\square$

4.4.4 Unicidade

Teorema 4. (*Teorema da Unidade*). *Existe no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ para o problema de valor de contorno*

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que existe duas soluções u e v . Defina $w = u - v$ e $w_e = v - u$.

Então w e w_e satisfazem

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, usando o princípio do máximo, concluímos que

$$\max_{\Omega} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v| = 0,$$

ou seja, $u = v$ em Ω , garantindo a unicidade da solução. $\square$

4.4.5 Suavidade das funções harmônicas

Teorema 5. (*Teorema da Suavidade das funções harmônicas*). *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$. Se $u \in C(\Omega)$ e u satisfaz a propriedade do valor médio*

$$u(x) = \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y),$$

para a bola $B(x, r) \subset \Omega$, então $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Provando isso, introduzimos a função η definida por

$$\eta(x) \equiv \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

onde a constante C é escolhida de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1.$$

Observe que $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que η tem suporte compacto. Definimos a função $\eta_\varepsilon(x)$ por

$$\eta_\varepsilon(x) \equiv \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Portanto, $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp}(\eta_\varepsilon) \subset \{x : |x| < \varepsilon\}$. Além disso

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1,$$

escolha ε tal que $\varepsilon < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Defina

$$u_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy.$$

Afirmamos que $u_\varepsilon \in C^\infty$ e $u_\varepsilon(x) = u(x)$, provamos isso da seguinte forma, usando o fato de que $\text{supp } \eta_\varepsilon(x-y) \subset \{y : |x-y| < \varepsilon\}$. Portanto

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy,$$

onde η_ε é uma função de suavização, dada por

$$\eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{z}{\varepsilon}\right),$$

mudando as variáveis

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) dy,$$

passando para coordenadas esféricas, temos

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B(x,r)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) u(y) dS(y) \right) dr,$$

onde $r = |x-y|$ é o raio. Se u é harmônica, vale a propriedade da média, logo

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n) r^{n-1} u(x) dr$$

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n) r^{n-1} dr,$$

mudando as variáveis $r = \varepsilon s$, então $dr = \varepsilon ds$ e $r^{n-1} = \varepsilon^{n-1} s^{n-1}$. Substituindo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^1 \eta(s) n\alpha(n) (\varepsilon^{n-1} s^{n-1}) \varepsilon ds$$

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \int_0^1 \eta(s) n\alpha(n) s^{n-1} ds,$$

pela normalização em coordenadas esféricas

$$\int_0^\infty \eta(s) n\alpha(n) s^{n-1} ds = 1,$$

logo

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \cdot 1$$

$$u_\varepsilon(x) = u(x).$$

□

A seguir, vamos mostrar que as funções constantes são as únicas que são limitadas e harmônicas em $\mathbb{R}^n$.

4.4.6 Teorema de Liouville

Teorema 6. (*Teorema de Liouville*). *Suponha que $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja harmônica e limitada. Então u é constante.*

Demonstração. Seja $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja harmônica e limitada. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pela propriedade do valor médio, temos

$$u(x_0) = \int_{B(x_0, r)} u(y) dy$$

para toda bola $B(x_0, r)$, se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e u é harmônica, logo $u \in C^\infty$, então

$$\Delta u = 0 \implies \Delta u_{x_i} = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto, u_{x_i} é harmônica e satisfaz a propriedade do valor médio,

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0, r)} u_{x_i}(y) dy$$

$$u_{x_i}(x_0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, r)} u v_i(y) dS(y),$$

pelo teorema da divergência, onde o $v = (v_1, \dots, v_n)$ é o vetor unitário normal á superfície $\partial B(x_0, r)$. Temos que

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, r)} |u(y) v_i(y)| dS(y),$$

onde $\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))} = \sup_{y \in \partial B(x_0, r)} |u(y)|$. Então, para todo y na esfera $|u(y)| \leq \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}$ ou seja o valor absoluto de u em qualquer ponto y da esfera não excede a norma L^∞ . Assim

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, r)} |v_i(y)| dS(y),$$

e o componente $v_i(y)$ do vetor unitário satisfaz $|v_i(y)| \leq 1$ para todo y , temos

$$\int_{\partial B(x_0, r)} |v_i(y)| dS(y) \leq \int_{\partial B(x_0, r)} 1 dS(y) = |\partial B(x_0, r)|,$$

e substituindo, obtém-se

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}}{\alpha(n)r^n} |\partial B(x_0, r)|.$$

Como $|\partial B(x_0, r)| = n \alpha(n) r^{n-1}$, logo

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}}{\alpha(n)r^n} \cdot n \alpha(n) r^{n-1}$$

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))},$$

substituindo por uma norma global

$$\|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r))} \leq \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

logo

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

definimos uma constante C_n que depende de n e do supremo de u , já que u é limitado. Portanto

$$C_n = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{r} C_n,$$

então, isso vale para todo r , tomando o limite quando $r \rightarrow +\infty$, vemos que $|u_{x_i}(x_0)| = 0$, logo $u_{x_i}(x_0) = 0$, valendo para $i = 1, \dots, n$ e para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, portanto u é constante. $\square$

4.5 Aplicações

Nesta seção, vamos apresentar aplicações das equações estudadas e suas propriedades em contextos da física e engenharia. Como as soluções não dependem do tempo, as condições iniciais são irrelevantes e apenas as condições de contorno são especificadas. Existem dois tipos de condições de contorno que geralmente são associadas à equação de Laplace, condições de contorno de Dirichlet, onde a solução $u(x,y)$ para a equação de Laplace em um domínio D é necessária para satisfazer

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \text{para } \partial D,$$

com $f(x,y)$ uma função especificada definida no limite ∂D de D , e condições de limite de Neumann, onde a derivada direcional $\frac{\partial u}{\partial n}$ ao longo da normal externa à fronteira é necessário para satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = g(x,y) \quad \text{para } \partial D.$$

4.5.1 Membranas

Membranas retangulares e circulares são partes fundamentais de tambores, microfones, telefones, alto-falantes magnéticos planares e outros dispositivos, o que explica sua grande importância na engenharia. Quando uma membrana circular é plana e seu material é elástico, sem resistir a flexão, suas vibrações são modeladas pela equação de onda em duas dimensões em coordenadas polares.

4.5.1.1 Membrana Retangular

Considere uma membrana retangular presa ao longo de suas bordas, ocupando a região R definida pelos pontos (x,y) tais que $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. Desejamos determinar uma função $u(x,y)$ que descreva a deflexão da membrana e que seja harmônica em todos os pontos internos de R , assumindo valores prescritos nos quatro lados que formam sua fronteira ∂R . A função $u(x,y)$ satisfaz a equação de Laplace,

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, b) = (a - x)\text{sen}(x), & 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

Este problema representa uma membrana estacionária cuja borda inferior e as laterais estão fixas, enquanto a borda superior é mantida em uma forma determinada pela função $(a - x)\text{sen}(x)$. A solução pode ser obtida utilizando o método da separação de variáveis, o qual permite decompor $u(x, y)$ em termos de funções que satisfazem as condições de contorno em cada direção.

seja $u(x, y) = X(x)Y(y)$, substituindo na equação de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \\ \frac{X''(x)Y(y)}{X(x)Y(y)} + \frac{X(x)Y''(y)}{X(x)Y(y)} &= \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0, \end{aligned}$$

onde o primeiro termo depende somente de x , enquanto o segundo depende somente de y , para que a soma seja zero, cada termo precisa ser uma constante. Chamamos essa constante de λ

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \\ \begin{cases} X'' + \lambda X &= 0, \\ Y'' - \lambda Y &= 0, \end{cases} \end{aligned}$$

assim obtemos duas equações diferenciais ordinárias. Note que, da última condição de contorno, se escolhermos $x_0 > 0$ menor que $\min(a, \frac{\pi}{2})$, segue que

$$u(x_0, b) = (a - x_0)\text{sen}(x_0).$$

Por outro lado, escreve-se $u(x, y)$ como o produto entre $X(x)$ e $Y(y)$, o que, comparando com a última condição de contorno, nos diz que $X(x_0)Y(b)$ deve ser positivo e $\neq 0$. Portanto, $X(x_0)$ e $Y(b)$ são diferentes de zero. Então, se $X(0)Y(y) = 0$, para qualquer y no domínio, temos que $X(0)Y(b) = 0$, mas sabemos que $Y(b) \neq 0$, o que nos faz concluir que $X(0) = 0$ e similarmente $X(a) = Y(0) = 0$. Para as condições de contorno em x , temos

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & X(0) = 0, \\ u(a, y) = 0, & X(a) = 0, \end{cases}$$

podemos atribuir valores para λ , de modo que, consigamos resolver essas EDOs usando o método da equação característica.

Caso 1: $\lambda = 0$

$$X''(x) = 0$$

a solução geral desse tipo de equação é

$$X(x) = C_1x + C_2,$$

testando as condições de contorno $X(0) = X(a) = 0$, tiramos que $X(x) = 0$.

Caso 2: $\lambda < 0$

$$\lambda = -\mu^2$$

$$X'' - \mu^2 X = 0$$

a solução geral desse tipo de equação é

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x},$$

testando as condições de contorno $X(0) = X(a) = 0$, tiramos que $C_1 = C_2 = 0$.

Caso 3: $\lambda > 0$:

$$\lambda = \alpha^2$$

$$X'' + \alpha^2 X = 0$$

a solução geral desse tipo de equação é

$$X(x) = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x),$$

testando $X(0) = 0$:

$$C_1 = 0,$$

e para $X(a) = 0$:

$$X(x) = C_2 \sin(\alpha x),$$

$$0 = C_2 \sin(\alpha a)$$

se $C_2 = 0$, a solução é trivial, para ter uma solução não trivial, temos que

$$\text{sen}(\alpha a) = 0$$

$$\alpha a = n\pi$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{a},$$

logo

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,$$

portanto

$$X(x) = \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Agora utilizando λ na equação para Y , temos

$$Y'' - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y = 0$$

$$r^2 - \lambda^2 = 0$$

$$r = \pm\lambda = \pm\frac{n\pi}{a}$$

$$Y(y) = C_1 e^{\frac{n\pi}{a}y} + C_2 e^{-\frac{n\pi}{a}y},$$

podemos escrever usando funções hiperbólicas

$$Y(y) = C_1 \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + C_2 \cosh\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

testando a condição de contorno $Y(0) = 0$

$$0 = C_1 \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}0\right) + C_2 \cosh\left(\frac{n\pi}{a}0\right)$$

$$C_2 = 0,$$

logo

$$Y(y) = C_1 \text{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

assim, temos a solução geral

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Para satisfazer a condição de fronteira $u(x, b) = (a - x) \operatorname{sen}(x)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = (a - x) \operatorname{sen}(x),$$

utilizando série de Fourier, o lado direito da igualdade, logo acima, precisa ser escrito como série de senos na base $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, ou seja

$$(a - x) \operatorname{sen}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

a série de Fourier em senos para uma função $f(x)$ definida em $0 < x < a$ é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

com

$$C_1 = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx,$$

onde $f(x) = (a - x) \operatorname{sen}(x)$, portanto

$$C_1 = \frac{2}{a} \int_0^a (a - x) \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

Para resolver essa integral usamos a identidade $\operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b) = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$, onde

$$a = x \quad e \quad b = \frac{n\pi}{a}x,$$

substituindo

$$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\left(1 - \frac{n\pi}{a}\right)x\right) - \cos\left(\left(1 + \frac{n\pi}{a}\right)x\right) \right],$$

definimos $\alpha = 1 - \frac{n\pi}{a}$ e $\beta = 1 + \frac{n\pi}{a}$, assim

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^a (a - x) (\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)) dx \\ &= \int_0^a (a - x) \cos(\alpha x) dx - \int_0^a (a - x) \cos(\beta x) dx \\ &= \int_0^a a \cos(\alpha x) dx - \int_0^a x \cos(\alpha x) dx - \int_0^a a \cos(\beta x) dx + \int_0^a x \cos(\beta x) dx \\ &= \frac{a \operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^a - \frac{x \operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{\alpha} dx - \frac{a \operatorname{sen}(\beta x)}{\beta} \Big|_0^a + \frac{x \operatorname{sen}(\beta x)}{\beta} \Big|_0^a - \int_0^a \frac{\operatorname{sen}(\beta x)}{\beta} dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} \Big|_0^a + \frac{\cos(\beta x)}{\beta^2} \Big|_0^a \\ &= -\frac{\cos(\alpha a)}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\cos(\beta a)}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} \\ &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{\cos(\beta a)}{\beta^2} - \frac{\cos(\alpha a)}{\alpha^2}, \end{aligned}$$

temos que $\cos(L \pm n\pi) = (-1)^n \cos L$, então

$$\cos(\alpha a) = \cos(\beta a) = (-1)^n \cos a,$$

substituindo, temos

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\frac{4n\pi}{a}}{(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2(1 + (\frac{n\pi}{a}))^2} + \frac{(-1)^n \cos(a)}{(1 + (\frac{n\pi}{a}))^2} - \frac{(-1)^n \cos(a)}{(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \\ &= \frac{\frac{4n\pi}{a}}{(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} + \left(\frac{\alpha^2(-1)^n \cos(a) - \beta^2(-1)^n \cos(a)}{(1 + (\frac{n\pi}{a}))^2(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \right) \\ &= \frac{4n\pi}{a(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} + \left(\frac{\alpha^2(-1)^n \cos(a) - \beta^2(-1)^n \cos(a)}{(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \right) \\ &= \frac{4n\pi}{a(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} + \left(\frac{(1 - \frac{n\pi}{a})^2(-1)^n \cos(a) - (1 + \frac{n\pi}{a})^2(-1)^n \cos(a)}{(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \right), \end{aligned}$$

multiplicando por $\frac{2}{a}$

$$C_1 = \frac{8n\pi}{a^2(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} + \left(\frac{2(1 - \frac{n\pi}{a})^2(-1)^n \cos(a) - 2(1 + \frac{n\pi}{a})^2(-1)^n \cos(a)}{a(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \right),$$

portanto

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n\pi}{a^2(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} + 2(-1)^n \cos(a) \left(\frac{(1 - \frac{n\pi}{a})^2 - (1 + \frac{n\pi}{a})^2}{a(1 - (\frac{n\pi}{a}))^2} \right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

4.5.1.2 Membrana Circular

Considere a deflexão de uma membrana circular estacionária em relação à posição de equilíbrio. A superfície da membrana é descrita por uma função $u = u(r, \theta)$, que representa o deslocamento vertical em coordenadas polares. No caso estacionário, u satisfaz a equação de Laplace dentro do disco de raio R . Seja R o raio centrado na origem de um disco, em coordenadas polares, o problema se define a:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0, & 0 \leq r < R, -\pi \leq \theta \leq \pi, \\ u(R, \theta) = f(\theta), & -\pi \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

este problema corresponde a um problema de Dirichlet interior para o círculo, onde a condição de contorno $u(R, \theta) = f(\theta)$ determina o comportamento da membrana ao longo de sua borda.

A equação de Laplace em coordenadas polares é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

usando separação de variáveis, temos $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, substituindo na equação

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0,$$

dividindo por $R(r)\Theta(\theta)$

$$\frac{R''(r)\Theta(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)\Theta(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} + \frac{1}{r^2} \frac{R(r)\Theta''(\theta)}{R(r)\Theta(\theta)} = 0$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad \cdot r^2$$

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0,$$

agora temos a soma de duas expressões onde a primeira depende de r e a segunda de θ , e para ser zero, cada uma deve ser constante, ou seja:

$$\frac{r^2 R'' + r R'}{R} = \lambda, \quad -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0, \quad r^2 R'' + r R' - \lambda R = 0,$$

assim, obtemos duas EDOs. A função $\Theta(\theta)$ tem que ser periódica de período 2π , pois θ e $\theta + 2\pi$ representam o mesmo ponto, temos as seguintes soluções gerais:

Se $\lambda = -\mu^2$, então

$$\Theta'' - \mu^2 \Theta = 0$$

$$r^2 - \mu^2 = 0$$

$$r = \pm \mu$$

$$\Theta(\theta) = C_1 e^{\mu\theta} + C_2 e^{-\mu\theta},$$

substituindo por $\theta + 2\pi$

$$\begin{aligned} \Theta(\theta + 2\pi) &= C_1 e^{\mu(\theta+2\pi)} + C_2 e^{-\mu(\theta+2\pi)} \\ &= e^{2\pi\mu} (C_1 e^{\mu\theta}) + e^{-2\pi\mu} (C_2 e^{-\mu\theta}), \end{aligned}$$

para que $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, precisamos que $e^{2\pi\mu} = e^{-2\pi\mu} = 1$, o que só ocorre se $\mu = 0$.

Se $\lambda = 0$, então

$$\Theta'' = 0$$

$$\Theta(\theta) = C_1\theta + C_2,$$

verificando a periodicidade

$$\begin{aligned}\Theta(\theta + 2\pi) &= C_1(\theta + 2\pi) + C_2 \\ &= C_1\theta + C_12\pi + C_2,\end{aligned}$$

precisamos que $C_1 = 0$, para que $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$.

Se $\lambda = \mu^2$

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0$$

$$r^2 + \mu^2 = 0$$

$$r = \pm i\mu$$

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos(\mu\theta) + C_2 \text{sen}(\mu\theta),$$

verificando a periodicidade

$$\Theta(\theta + 2\pi) = C_1 \cos[\mu(\theta + 2\pi)] + C_2 \text{sen}[\mu(\theta + 2\pi)],$$

usando a identidade trigonométrica

$$\begin{cases} \cos(\mu(\theta + 2\pi)) = \cos(\mu\theta) \cos(2\pi\mu) - \text{sen}(\mu\theta) \text{sen}(2\pi\mu), \\ \text{sen}(\mu(\theta + 2\pi)) = \text{sen}(\mu\theta) \cos(2\pi\mu) + \cos(\mu\theta) \text{sen}(2\pi\mu), \end{cases}$$

substituindo, temos

$$\begin{aligned}\Theta(\theta + 2\pi) &= C_1 [\cos(\mu\theta) \cos(2\pi\mu) - \text{sen}(\mu\theta) \text{sen}(2\pi\mu)] \\ &\quad + C_2 [\text{sen}(\mu\theta) \cos(2\pi\mu) + \cos(\mu\theta) \text{sen}(2\pi\mu)] \\ &= [C_1 \cos(2\pi\mu) + C_2 \text{sen}(2\pi\mu)] \cos(\mu\theta) \\ &\quad + [C_2 \cos(2\pi\mu) - C_1 \text{sen}(2\pi\mu)] \text{sen}(\mu\theta),\end{aligned}$$

queremos que isso seja igual a $\Theta(\theta)$, então

$$\begin{cases} C_1 \cos(2\pi\mu) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = C_1, \\ C_2 \cos(2\pi\mu) - C_1 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = C_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1 + C_1 \cos(2\pi\mu) + C_2 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = 0, \\ -C_2 + C_2 \cos(2\pi\mu) - C_1 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 [\cos(2\pi\mu) - 1] + C_2 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = 0, \\ C_2 [\cos(2\pi\mu) - 1] - C_1 \operatorname{sen}(2\pi\mu) = 0, \end{cases}$$

se $C_1 = C_2 = 0$ a função seria nula, então o sistema precisa ter determinante zero, para que haja uma solução não trivial, ou seja, as equações devem ser linearmente dependentes

$$\det = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\mu) - 1 & \operatorname{sen}(2\pi\mu) \\ -\operatorname{sen}(2\pi\mu) & \cos(2\pi\mu) - 1 \end{bmatrix} = (\cos(2\pi\mu) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(2\pi\mu),$$

usando a identidade $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$

$$(\cos(2\pi\mu) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(2\pi\mu) = \cos^2(2\pi\mu) - 2\cos(2\pi\mu) + 1 + \operatorname{sen}^2(2\pi\mu)$$

$$(\cos(2\pi\mu) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(2\pi\mu) = 1 - 2\cos(2\pi\mu) + 1$$

$$(\cos(2\pi\mu) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(2\pi\mu) = 2 - 2\cos(2\pi\mu),$$

usando a identidade $1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$

$$2 - 2\cos(2\pi\mu) = 4\operatorname{sen}^2(\pi\mu),$$

para o determinante ser zero, precisamos que

$$\operatorname{sen}(\pi\mu) = 0,$$

isso acontece quando

$$\pi\mu = n\pi,$$

portanto $\mu = n$, repetindo seus valores a cada volta de 2π . Para resolver a função $R(r)$, utilizamos uma substituição onde $R(r) = r^m$, assim

$$R'(r) = mr^{m-1}, \quad R''(r) = m(m-1)r^{m-2}$$

$$r^2 [m(m-1)r^{m-2}] + r(mr^{m-1}) - \lambda^2(r^m) = 0$$

$$m(m-1)r^m + mr^m - \lambda^2(r^m) = 0$$

$$r^m [m(m-1) + m - \lambda^2] = 0$$

$$r^m (m^2 - m + m - \lambda^2) = 0$$

$$r^m (m^2 - \lambda^2) = 0,$$

como o r é maior que zero, então

$$m^2 - \lambda^2 = 0$$

$$m = \pm \lambda$$

$$R(r) = C_1 r^\lambda + C_2 r^{-\lambda},$$

precisamos decidir qual dessas duas funções são regular no centro, para o termo r^λ quando $r \rightarrow 0$:

Se $\lambda \geq 1$

$$r^\lambda \rightarrow 0,$$

fica cada vez menor, e para $\lambda = 0$

$$r^0 = 1$$

também é finito, então r^n é sempre regular no centro. Para o termo $r^{-\lambda}$

Se $\lambda \geq 1$

$$r^{-n} = \frac{1}{r^n} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad r \rightarrow 0,$$

o que significa que ele explode rapidamente, portanto esse termo não pode aparecer em uma solução física dentro do disco. Montando a equação de Laplace no disco, onde $\lambda = \mu = n$

$$u(r, \theta) = r^n [C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)],$$

pelo princípio da superposição, tente uma solução de modo que

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n [C_{1n} \cos(n\theta) + C_{2n} \text{sen}(n\theta)],$$

mas quando $n = 0$, temos que

$$r^0 [C_{10} \cos(0\theta) + C_{20} \text{sen}(0\theta)] = C_{10},$$

ou seja, o modo $n = 0$ é constante, o que resulta em uma constante c_{10} , multiplicamos por $\frac{1}{2}$ para uma convenção de Fourier, para que a fórmula dos coeficientes na fronteira $u(R, \theta) = f(\theta)$ fique simétrica

$$u(r, \theta) = \frac{c_{10}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n [c_{1n} \cos(n\theta) + c_{2n} \text{sen}(n\theta)],$$

para satisfazer as condições de fronteira, usamos a relação

$$u(R, \theta) = f(\theta)$$

$$f(\theta) = \frac{c_{10}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n [c_{1n} \cos(n\theta) + c_{2n} \text{sen}(n\theta)],$$

essa expressão tem exatamente o formato de uma série de Fourier

$$f(\theta) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n \cos(n\theta) + b'_n \text{sen}(n\theta)],$$

comparando os termos, temos que

$$a'_0 = c_{10}, \quad a'_n = R^n c_{1n} \quad \text{e} \quad b'_n = R^n c_{2n},$$

onde

$$c_{10} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi,$$

$$c_{1n} = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(n\xi) d\xi,$$

$$c_{2n} = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \text{sen}(n\xi) d\xi.$$

substituindo em $u(r, \theta)$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos(n\xi) d\xi \cos(n\theta) + \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \text{sen}(n\xi) d\xi \text{sen}(n\theta) \right)$$

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) [\cos(n\xi) \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\xi) \operatorname{sen}(n\theta)] d\xi,$$

usamos a identidade trigonométrica

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$$

para o termo

$$\cos(n\xi) \cos(n\theta) + \operatorname{sen}(n\xi) \operatorname{sen}(n\theta) = \cos[n(\xi - \theta)],$$

substituindo, temos

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos[n(\xi - \theta)] d\xi,$$

portanto essa é a fórmula de Poisson para o disco.

4.5.2 Potencial eletrostático

Para compreender o comportamento de potenciais como eletrostática, é fundamental o conceito de campo. De maneira geral, um campo é um conjunto de funções que dependem das variáveis espaciais, e que descrevem uma grandeza física distribuída no espaço. Os campos materiais expressam propriedades físicas associadas a um meio, como densidade, temperatura ou magnetização, enquanto os campos de força descrevem a intensidade e a direção das forças que atuam em cada ponto do espaço. Esses campos podem ser escalares, quando definidos por uma única função, ou vetoriais, quando descritos por suas componentes em direções ortogonais.

Entre os campos vetoriais, destaca-se o campo elétrico, que pode ser expresso como o gradiente de uma função potencial. Essa função, chamada potencial eletrostático, satisfaz equações diferenciais parciais fundamentais, em particular, as equações de Laplace e de Poisson. Quando há presença de carga elétrica distribuída em uma região, o potencial u satisfaz a equação de Poisson, dada por

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

onde ρ representa a densidade de carga. Já na ausência de cargas, o potencial é harmônico, isto é, satisfaz $\Delta u = 0$.

Essas ideias permitem modelar situações físicas concretas. No problema a seguir, consideramos uma faixa infinita definida pelos pontos (x, y) com $0 < x < \pi$ e $y > 0$, sobre

a qual o potencial eletrostático é regido pela equação de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = -h, & 0 < x < \pi, y > 0, \\ u(0,y) = 0, \quad u(\pi,y) = 1, & y > 0, \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

esse problema descreve o potencial eletrostático em uma região com distribuição uniforme de carga de densidade $\frac{h}{4\pi}$ em toda a faixa. A partir das condições de contorno impostas nas bordas laterais e na base, buscamos determinar a função $u(x,y)$ que representa o potencial nessa configuração física.

Para resolver esse problema, como $y > 0$, devemos considerar uma transformada de Fourier em senos ou em cossenos em relação a y , mas como se trata da equação de Poisson, é preciso a transformada de $-h$, só que uma constante não possui transformada em senos e cossenos, então devemos primeiro avaliar se essa integral diverge

$$I = \int_0^\infty -h \sin(\omega x) dx,$$

fazemos isso da seguinte forma

$$\begin{aligned} I(A) &= \int_0^\infty -h \sin(\omega x) dx = -h \int_0^\infty \sin(\omega x) dx \\ &= -h \left[\frac{\cos(\omega x)}{\omega} \right]_0^A = \frac{h \cos(\omega A)}{\omega} - \frac{h}{\omega}, \end{aligned}$$

como $\cos(\omega A)$ varia entre -1 e 1 , então

$$\frac{h}{\omega}(-1 - 1) = \frac{-2h}{\omega} \quad \text{e} \quad \frac{h}{\omega}(1 - 1) = 0,$$

portanto essa integral oscila no intervalo $(\frac{-2h}{\omega}, 0)$, se existir $\lim_{A \rightarrow \infty} I(A)$ então todas as subsequências de $I(A)$ devem convergir para o mesmo limite. Defina

$$A_k = \frac{2\pi k}{\omega},$$

então

$$\omega A_k = \frac{2\pi k}{\omega} \cdot \omega,$$

logo $\cos(\omega A_k) = 1$,

$$I(A_k) = \frac{L}{\omega}(1 - 1) = 0.$$

Agora definindo

$$B_k = \frac{(2k+1)\pi}{\omega},$$

então

$$\omega B_k = \frac{(2k+1)\pi}{\omega} \cdot \omega,$$

logo $\cos(\omega B_k) = -1$,

$$I(B_k) = \frac{h}{\omega}(-1 - 1) = \frac{-2h}{\omega},$$

portanto, como $0 \neq \frac{-2h}{\omega}$, duas subsequências têm limites diferentes, o limite $I(A)$ não existe. Podemos usar uma transformada de Fourier finita em senos ou cossenos em relação a x , já que x varia de 0 a π .

Se usarmos a transformada de Fourier finita em cossenos, vamos precisar da derivada da função na origem, o que não temos. Entretanto, podemos usar a transformada finita em senos, o que requer apenas informações sobre o valor da função nos extremos dos intervalos, e isso é fornecido pelas condições de contorno para $y > 0$. Denotamos a transformada de Fourier finita em senos na variável x , como

$$S[u(n, y)] = u_S(n, y),$$

onde S é o operador, $u_S(n, y)$ é o coeficiente transformado, temos que

$$u_S(n, y) = \int_0^\pi u(x, y) \sin(nx) dx.$$

Aplicando S a equação de Poisson

$$S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -h \quad \text{para } 0 < x < \pi, \quad y > 0,$$

como S é linear

$$S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right] + S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = S(-h),$$

como a integral é em relação a x e $\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$ está para y , podemos fazer o seguinte

$$\begin{aligned} S \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] &= \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(nx) dx \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^\pi u(x, y) \sin(nx) dx \\ &= \frac{\partial^2 u_S(n, y)}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Para o termo em x , fazemos

$$S\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right] = \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \text{sen}(nx) dx, \quad \begin{cases} u = \text{sen}(nx), & dv = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ du = n \cos(nx), & v = \frac{\partial u}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} \text{sen}(nx) dx = \frac{\partial u}{\partial x} \text{sen}(nx) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) n dx,$$

o primeiro termo zera tanto para π quanto para 0, logo

$$S\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right] = -n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) dx,$$

integrando novamente, temos

$$-n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) dx, \quad \begin{cases} u = \cos(nx), & dv = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ du = -n \text{sen}(nx), & v = u, \end{cases}$$

$$-n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) dx = -n u \cos(nx) \Big|_0^\pi - n^2 \int_0^\pi u(x,y) \text{sen}(nx) dx$$

$$-n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) dx = -n u \cos(nx) \Big|_0^\pi - n^2 u_s(n,y)$$

$$-n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos(nx) dx = -n(u(\pi,y)(-1)^n - u(0,y)) - n^2 u_s(n,y),$$

portanto

$$S\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\right] = -n(u(\pi,y)(-1)^n - u(0,y)) - n^2 u_s(n,y)$$

$$= -n^2 u_s(n,y) - n u(\pi,y)(-1)^n + n u(0,y).$$

Para a constante $-h$, fazemos da seguinte forma

$$S(-h) = \int_0^\pi (-h) \text{sen}(nx) dx = -h \int_0^\pi \text{sen}(nx) dx$$

$$-h \int_0^\pi \text{sen}(nx) dx = \frac{h}{n} \cos(nx) \Big|_0^\pi = \frac{h(-1)^n - h}{n}.$$

Substituindo tudo na transformada, temos

$$(-n^2 u_s(n,y) - n u(\pi,y)(-1)^n + n u(0,y)) + \frac{\partial^2 u_s(n,y)}{\partial y^2} = \frac{h(-1)^n - h}{n},$$

reorganizando os termos, para que, $u_s(n, y)$ fique apenas de um lado da igualdade

$$\frac{\partial^2 u_s(n, y)}{\partial y^2} - n^2 u_s(n, y) = nu(\pi, y)(-1)^n - nu(0, y) + \frac{h(-1)^n - h}{n},$$

podemos aplicar as condições de contorno, para simplificar a expressão, onde $u(0, y) = 0$ e $u(\pi, y) = 1$

$$\frac{\partial^2 u_s(n, y)}{\partial y^2} - n^2 u_s(n, y) = n(-1)^n + \frac{h(-1)^n - h}{n},$$

assim, temos uma equação onde o lado direito não depende de y . Analisando bem, temos uma EDO não-homogênea, definimos

$$n(-1)^n + \frac{h(-1)^n - h}{n} = A_n,$$

então

$$u_s'' - n^2 u_s = A_n,$$

podemos resolver a homogênea associada, da seguinte forma

$$u_s'' - n^2 u_s = 0$$

$$r^2 - n^2 = 0$$

$$r = \pm n,$$

logo, a equação característica é

$$u_h(y) = C_1 e^{ny} + C_2 e^{-ny}.$$

Agora, resolvendo a solução particular $u_p(y)$ que satisfça a equação completa, como o termo à direita é uma constante, fazemos

$$u_p(y) = P_n$$

$$u_p'(y) = 0$$

$$u_p''(y) = 0,$$

e substituindo na equação

$$0 - n^2 P_n = A_n$$

$$\begin{aligned}
P_n &= -\frac{A_n}{n^2} \\
&= -\frac{n(-1)^n + \frac{h(-1)^n - h}{n}}{n^2} \\
&= -\frac{(-1)^n}{n} - \frac{h}{n^3}((-1)^n - 1) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{h}{n^3}((-1)^n - 1),
\end{aligned}$$

portanto, a solução geral é

$$u_s(n, y) = c_{1_n} e^{ny} + c_{2_n} e^{-ny} + P_n.$$

Agora, utilizamos as condições de contorno do problema para encontrar as constantes c_{1_n} e c_{2_n} . O problema nos mostra uma região ilimitada para $y > 0$, mas o problema deve ser limitado quando $y \rightarrow +\infty$, já que não há potencial infinito longe da região de carga, então o primeiro termo quando $y \rightarrow +\infty$, iria crescer exponencialmente, assim impomos que

$$c_{1_n} = 0,$$

logo, nossa solução se reduz para

$$u_s(n, y) = c_{2_n} e^{-ny} + P_n.$$

Para encontrarmos c_{2_n} , aplicamos a condição em que $y = 0$

$$\begin{aligned}
u_s(n, 0) &= c_{2_n} e^{-n0} + P_n \\
&= c_{2_n} + P_n,
\end{aligned}$$

mas, lembrando que a transformada finita em senos é

$$u_s(n, y) = \int_0^\pi u(x, y) \operatorname{sen}(nx) dx,$$

se $u(x, 0) = 0$, então

$$\begin{aligned}
u_s(n, 0) &= \int_0^\pi u(x, 0) \operatorname{sen}(nx) dx \\
&= \int_0^\pi 0 \operatorname{sen}(nx) dx = 0,
\end{aligned}$$

portanto

$$0 = c_{2_n} + P_n$$

$$c_{2_n} = -P_n.$$

Substituindo na expressão geral, temos

$$\begin{aligned} u_s(n, y) &= -P_n e^{-ny} + P_n \\ &= P_n (1 - e^{-ny}), \end{aligned}$$

substituindo P_n

$$u_s(n, y) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{h}{n^3} ((-1)^n - 1) \right) (1 - e^{-ny}),$$

então, por definição a inversão da transformada finita em senos é a expansão em série de senos

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} u_s(n, y) \text{sen}(nx),$$

portanto

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{h}{n^3} ((-1)^n - 1) \right) (1 - e^{-ny}) \text{sen}(nx).$$

4.5.3 Temperatura em um cilindro

Considere um cilindro sólido semi-infinito de raio a , cuja base é mantida a 100°C e cuja superfície lateral é mantida a 0°C . O objetivo é determinar a distribuição de temperatura $u(r, \theta, z)$ em regime estacionário ao longo do interior desse cilindro. Embora esse problema seja análogo ao da condução de calor em uma placa semi-infinita, a formulação em coordenadas cartesianas não é a mais adequada, pois a condição de contorno $u = 0$ é imposta em $r = a$, um valor fixo do raio, e não para valores constantes de y . Portanto, é mais conveniente descrever o sistema em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . Dentro do cilindro, a temperatura u satisfaz a equação de Laplace, uma vez que não existem fontes de calor na região considerada.

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Para separar as variáveis, assume-se uma solução da forma

$$u = R(r)\Theta(\theta)Z(z),$$

substituindo na equação, obtém-se

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (R\Theta Z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (R\Theta Z)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 (R\Theta Z)}{\partial z^2},$$

como cada função depende de uma única variável, as derivadas parciais se simplificam

$$\begin{aligned}\frac{\partial(R\Theta Z)}{\partial r} &= \Theta Z \frac{dR}{dr}, \\ \frac{\partial^2(R\Theta Z)}{\partial \theta^2} &= RZ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}, \\ \frac{\partial^2(R\Theta Z)}{\partial z^2} &= R\Theta \frac{d^2Z}{dz^2},\end{aligned}$$

e substituindo, temos que

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Theta Z \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} RZ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + R\Theta \frac{d^2Z}{dz^2} \\ &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Theta Z \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} RZ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + R\Theta \frac{d^2Z}{dz^2} \right) \cdot \frac{1}{R\Theta Z} \\ &= \frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}.\end{aligned}$$

O último termo é uma função apenas de z , enquanto os dois primeiros termos não dependem de z . Portanto, o último termo é uma constante, e a soma dos dois primeiros termos é o oposto dessa mesma constante. Observe que nenhum dos dois primeiros termos é constante isoladamente, pois ambos dependem de r . Assim, temos

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = K^2, \quad Z = \begin{cases} e^{Kz}, \\ e^{-Kz}, \end{cases}$$

como desejamos que a temperatura u tende a zero quando z tende ao infinito, definimos a constante de separação como $+K^2$ ($K > 0$) e utilizamos apenas a solução e^{-Kz} . Reescrevendo a equação, temos

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + K^2 = 0,$$

podemos separar as variáveis multiplicando por r^2

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + K^2 r^2 = 0,$$

o segundo termo é uma função apenas de θ , enquanto os demais termos são independentes de θ . Assim, temos

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -n^2, \quad \Theta = \begin{cases} \sin(n\theta), \\ \cos(n\theta), \end{cases}$$

aqui devemos usar $-n^2$ como constante de separação e exigir que n seja um número inteiro, pelo seguinte motivo, quando localizamos um ponto usando coordenadas polares, podemos escolher o ângulo como θ ou como $\theta + 2m\pi$, onde m é qualquer número inteiro. No entanto, independentemente do valor de m , trata-se do mesmo ponto físico, e portanto a temperatura nesse ponto deve ser única. Assim, a expressão matemática que representa a temperatura deve assumir o mesmo valor em θ e em $\theta + 2m\pi$, ou seja, a temperatura deve ser uma função periódica de θ com período 2π . Isso só ocorre se as soluções para Θ forem senos e cossenos, e não exponenciais, razão pela qual a constante de separação é negativa, e se o parâmetro n for um número inteiro (garantindo o período 2π). As soluções da equação $-n^2$ para $n = 0$ são θ e uma constante. Como θ não é periódica, apenas a solução constante é admissível, e ela já está incluída na solução $\cos n\theta$ quando $n = 0$. Portanto, a equação em r é

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 + K^2 r^2 &= 0 \\ r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (K^2 r^2 - n^2) R &= 0, \end{aligned}$$

expandindo o primeiro termo

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = r \left(\frac{dR}{dr} + r \frac{d^2 R}{dr^2} \right) = r \frac{dR}{dr} + r^2 \frac{d^2 R}{dr^2},$$

e substituindo, temos

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (K^2 r^2 - n^2) R = 0,$$

para simplificar, definimos uma nova variável

$$x = Kr,$$

assim

$$\frac{dR}{dr} = K \frac{dR}{dx}, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} = K^2 \frac{d^2 R}{dx^2},$$

e substituído, temos

$$(Kr)^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + (Kr) \frac{dR}{dx} + (K^2 r^2 - n^2) R = 0$$

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - n^2) R = 0.$$

A equação obtida é exatamente a equação diferencial de Bessel de ordem n , e sua solução geral é conhecida e dada por

$$R(x) = AJ_n(x) + BN_n(x),$$

onde $J_n(x)$ é a função de Bessel de primeira espécie, $N_n(x)$ é a função de Bessel de segunda espécie. Como o cilindro contém o eixo $r = 0$, precisamos que $R(r)$ permaneça finita em $r = 0$, entretanto, $N_n(x)$ diverge quando $x \rightarrow 0$. Portanto, ficamos apenas com

$$R(x) = AJ_n(x),$$

voltando à variável original r

$$R(r) = J_n(Kr).$$

Podemos determinar os possíveis valores de K a partir da condição de que a temperatura é nula na superfície lateral do cilindro. Assim, $u = 0$ quando $r = a$ (para todo θ e z), o que implica que $R(r) = 0$ quando $r = a$. Pela Equação $R(r)$, temos então que $J_n(Ka) = 0$, ou seja, os possíveis valores de Ka correspondem aos zeros da função de Bessel J_n . Definindo $k = Ka$, ou $K = \frac{k}{a}$, então

$$R(r) = J_n\left(\frac{kr}{a}\right) \quad \text{e} \quad Z(z) = e^{-\frac{kz}{a}},$$

Assim, as soluções para u são

$$u = \begin{cases} J_n\left(\frac{kr}{a}\right) \sin(n\theta) e^{-\frac{kz}{a}}, \\ J_n\left(\frac{kr}{a}\right) \cos(n\theta) e^{-\frac{kz}{a}}, \end{cases}$$

onde k é um zero de J_n .

No problema considerado, a base do cilindro é mantida a uma temperatura constante de 100°C , se girarmos o cilindro por qualquer ângulo, as condições de contorno não se alteram, portanto, a solução não depende do ângulo θ . Isso significa que utilizamos $\cos(n\theta)$ com $n = 0$ na equação u . Os possíveis valores de k são os zeros da função de Bessel J_0 , chamamos esses zeros de k_m , onde $m = 1, 2, 3, \dots$, assim, obtemos as funções base do problema e expressamos a solução em termos delas

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right) e^{-\frac{k_m z}{a}},$$

quando $z = 0$, queremos que $u = 100$, então

$$u_{z=0} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right) = 100.$$

Isso deve lembrar uma série de Fourier, onde queremos expandir 100 em uma série de funções de Bessel em vez de uma série de senos ou cossenos. Podemos então determinar os coeficientes c_m pelo mesmo método usado para encontrar os coeficientes em uma série de senos ou cossenos de Fourier.

$$100 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right),$$

para isolar o coeficiente c_m , multiplicamos ambos os lados da equação por

$$r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right),$$

fazendo

$$100r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right)\right) r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right),$$

e integramos de $r = 0$ até $r = a$

$$\begin{aligned} \int_0^a 100r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) dr &= \int_0^a \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right)\right) r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) dr \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_0^a r J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right) J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) dr, \end{aligned}$$

a propriedade de ortogonalidade das funções de Bessel diz que

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{k_m r}{a}\right) J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) dr = \begin{cases} 0, & m \neq \mu, \\ \frac{a^2}{2} [J_1(k_\mu)]^2, & m = \mu, \end{cases}$$

ou seja, todas as integrais cruzadas se anulam, exceto aquela cujo índice coincide $m = \mu$, então de toda a soma, sobra apenas o termo com $m = \mu$. Portanto, o lado direito fica apenas com esse termo

$$c_\mu \int_0^a r \left[J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) \right]^2 dr,$$

assim, obtemos

$$c_\mu \int_0^a r \left[J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) \right]^2 dr = \int_0^a 100r J_0\left(\frac{k_\mu r}{a}\right) dr,$$

Agora precisamos isolar c_μ e, para isso, temos que encontrar a solução dessas integrais. Calculando a primeira, temos que

$$\int_0^a r \left[J_0 \left(\frac{k_m r}{a} \right) \right]^2 dr = \frac{a^2}{2} [J_1(k_m)]^2,$$

e para a segunda integral

$$\int_0^a r J_0 \left(\frac{k_m r}{a} \right) dr,$$

usamos uma identidade das funções de Bessel

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x),$$

fazemos uma substituição de variáveis, onde $x = \frac{k_m r}{a}$, então

$$\frac{d}{dr} = \frac{k_m}{a} \frac{d}{dx},$$

e substituindo na identidade

$$\frac{a}{k_m} \frac{d}{dr} \left[\frac{k_m r}{a} J_1 \left(\frac{k_m r}{a} \right) \right] = \frac{k_m r}{a} J_0 \left(\frac{k_m r}{a} \right),$$

e simplificando

$$r J_0 \left(\frac{k_m r}{a} \right) = \frac{a}{k_m} \frac{d}{dr} \left[r J_1 \left(\frac{k_m r}{a} \right) \right],$$

integrando de 0 até a

$$\begin{aligned} \int_0^a r J_0 \left(\frac{k_m r}{a} \right) dr &= \frac{a}{k_m} \left[r J_1 \left(\frac{k_m r}{a} \right) \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{k_m} J_1(k_m). \end{aligned}$$

Substituindo o valor das integrais, temos

$$c_m \left(\frac{a^2}{2} [J_1(k_m)]^2 \right) = 100 \left(\frac{a^2}{k_m} J_1(k_m) \right),$$

isolando c_m e simplificando

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{100 \frac{a^2}{k_m} J_1(k_m)}{\frac{a^2}{2} [J_1(k_m)]^2} \\ &= \frac{200}{k_m J_1(k_m)}. \end{aligned}$$

Suponha que a temperatura dada na base do cilindro seja mais complicada do que apenas um valor constante, digamos $f(r, \theta)$, alguma função de r e θ . Agora a solução em série é mais complicada, pois devemos incluir todos os J_n , em vez de apenas J_0 . Precisamos de um duplo subscrito nos números k , que são os zeros das funções de Bessel, por k_{mn} entenderemos o m -ésimo zero positivo de J_n , onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 0, 1, 2, \dots$. A temperatura u é uma série dupla infinita, somada sobre os índices m, n de todos os zeros de todas as funções J_n :

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{mn}r}{a}\right) (A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta)) e^{-k_{mn}z/a}$$

onde $J_n\left(\frac{k_{mn}r}{a}\right)$ é a parte radial, $(A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta))$ é a parte angular e $e^{-k_{mn}z/a}$ é a parte longitudinal. Aplicando as condições de contorno no plano $z = 0$, temos

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{mn}r}{a}\right) (A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta)) = f(r, \theta),$$

para determinar os coeficientes A_{mn} , multiplicamos a igualdade por $J_\nu\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(\nu\theta)$ e integramos em toda a base do cilindro (0 a 2π para θ , e 0 a a para r), para o lado direito, temos

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_\nu\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(\nu\theta) r d\theta dr,$$

para o lado esquerdo, a ortogonalidade em θ

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(\nu\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq \nu, \\ \pi, & n = \nu \neq 0, \\ 2\pi, & n = \nu = 0, \end{cases}$$

isso garante que somem todos os A_{mn} e B_{mn} , logo sobra só $A_{\mu\nu}$, e a ortogonalidade radial dos Bessel

$$\int_0^a r J_\nu\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) J_\nu\left(\frac{k_{m\nu}r}{a}\right) dr = \begin{cases} 0, & \mu \neq m, \\ \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(k_{\mu\nu}), & \mu = m, \end{cases}$$

assim, só resta o termo com $m = \mu$, depois de aplicar as duas ortogonalidades, sobra

$$A_{\mu\nu} \int_0^a \int_0^{2\pi} J_\nu^2\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos^2(\nu\theta) r d\theta dr,$$

agora calculamos as integrais separadamente

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\nu\theta) d\theta = \pi,$$

e

$$\int_0^a r J_v^2\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu\nu}),$$

multiplicando as integrais angular e radial, temos

$$A_{\mu\nu} \left(\frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu\nu})\right) \pi,$$

agora juntando a igualdade

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(v\theta) r d\theta dr = A_{\mu\nu} \frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu\nu}) \pi,$$

e isolando $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu} = \frac{2}{\pi a^2 J_{v+1}^2(k_{\mu\nu})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(v\theta) r d\theta dr.$$

Para achar $B_{\mu\nu}$, Multiplicamos a condição na base por $J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \sin(v\theta)$ e integramos em (r, θ) .

Partimos de

$$f(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{mn}r}{a}\right) (A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta)),$$

fazendo

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \sin(v\theta) r d\theta dr = \sum_{m,n} A_{mn} I_{mn}^{(A)} + \sum_{m,n} B_{mn} I_{mn}^{(B)},$$

onde

$$I_{mn}^{(A)}(\mu, \nu) := \int_0^a \int_0^{2\pi} J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(v\theta) J_n\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \cos(n\theta) r d\theta dr,$$

e

$$I_{mn}^{(B)}(\mu, \nu) := \int_0^a \int_0^{2\pi} J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \sin(v\theta) J_n\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) \sin(n\theta) r d\theta dr,$$

usando a ortogonalidade angular

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(v\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq v, \\ \pi, & n = v \neq 0, \\ 0, & n = v = 0, \end{cases}$$

todos os termos com A_{mn} caem, dos B_{mn} sobra apenas os com $n = v$. Portanto a soma reduz-se ao termo com $m = \mu, n = v$ por causa da ortogonalidade radial. Para $m \neq \mu$

$$\int_0^a r J_v\left(\frac{k_{mn}r}{a}\right) J_v\left(\frac{k_{\mu\nu}r}{a}\right) dr = 0,$$

e para $m = \mu$

$$\int_0^a r J_v^2\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu v}),$$

juntando tudo, após as ortogonalidades, temos

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) \text{sen}(v\theta) r d\theta dr = B_{\mu v} \left[\int_0^a r J_v^2\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) dr \right] \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(v\theta) d\theta \right],$$

resolvendo as integrais

$$\int_0^a r J_v^2\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu v}), \quad \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(v\theta) d\theta = \pi,$$

e substituindo

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) \text{sen}(v\theta) r d\theta dr = B_{\mu v} \frac{a^2}{2} J_{v+1}^2(k_{\mu v}) \pi,$$

e isolando $B_{\mu v}$, temos

$$B_{\mu v} = \frac{2}{\pi a^2 J_{v+1}^2(k_{\mu v})} \int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_v\left(\frac{k_{\mu v} r}{a}\right) \text{sen}(v\theta) r d\theta dr,$$

portanto, substituindo os valores dos coeficientes $A_{\mu v}$ e $B_{\mu v}$ na equação

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{mn} r}{a}\right) (A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \text{sen}(n\theta)) e^{-k_{mn} z/a},$$

encontramos a solução do problema.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Esse trabalho teve como objetivo analisar e detalhar de maneira clara, organizada e didática, os fundamentos teóricos e algumas aplicações físicas das equações diferenciais parciais (EDPs) elípticas, com foco nas equações de Laplace e Poisson. A partir de uma pesquisa bibliográfica qualitativa e exploratória, foi possível organizar definições importantes muitas vezes apresentadas de forma resumida e enxuta em livros especializados, preenchendo uma lacuna importante para estudantes e pesquisadores que buscam entender de forma mais detalhada os métodos clássicos utilizados na resolução dessas equações.

A revisão teórica permitiu organizar os tópicos essenciais, como classificação das EDPs, propriedades de unicidade e regularidade, pontos importantes para o entendimento do comportamento de sistemas estacionários na física e engenharia. Além disso, a exposição das metodologias analíticas, como separação de variáveis, transformadas de Fourier e expansões em séries, mostrou ser ferramentas poderosas para entender as soluções e interpretar fenômenos físicos com precisão.

Os problemas abordados reforçam a relevância das EDPs elípticas na modelagem de fenômenos físicos, além de mostrarem como as equações de Laplace e Poisson surgiram naturalmente em situações onde o sistema não varia com o tempo. Ao conectar teoria e aplicação, evidenciou-se a necessidade da precisão matemática, reforçando a importância dessas equações. Dessa forma, o trabalho cumpriu com o objetivo de oferecer uma estrutura organizada, clara e acessível sobre as equações elípticas, contribuindo para a formação acadêmica e servindo como material de apoio a estudantes que buscam conhecimentos mais avançados das EDPs.

A partir do trabalho desenvolvido, diversas possibilidades de continuidade podem ser exploradas, tanto no aprofundamento teórico quanto nas aplicações práticas. Entre elas destacam-se o estudo de métodos numéricos para equações elípticas, que permitem tratar domínios irregulares e condições de contorno complexas, e a ampliação da análise para outras classes de EDPs, como as parabólicas e hiperbólicas, possibilitando compreender melhor a relação entre regimes dinâmicos e estacionários. Também se mostram relevantes investigações envolvendo a equação com operador de perfusão geral, aplicada em modelos biofísicos e problemas de transferência de calor em meios biológicos. Além disso, estudos sobre a equação biarmônica e a equação poliarmônica ampliam a compreensão de fenômenos mais complexos, especialmente na elasticidade e em operadores de ordem superior. Por fim, a equação de Helmholtz constitui outra direção promissora, por modelar ondas estacionárias em diversos

contextos físicos.

REFERÊNCIAS

- BALDOR, A. **Álgebra**. [S.l.]: Grupo Editorial Patria, 2016.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. [S.l.]: LTC, 2012.
- CENGEL, Y. A.; PALMLLL, W. J. **Equações diferenciais**. [S.l.]: Porto Alegre: AMGH Editora, 2014.
- EBERT, M. E.; REISSING, M. **Partial Differential Equations: An Introduction to Theory and Applications**. [S.l.]: Cham: Springer, 2018.
- EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 1998.
- FIGUEIREDO, D. G. de. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. [S.l.]: Brasília: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. [S.l.]: São Paulo: Atlas, 2008.
- GONDAR, J. L.; CIPOLATTI, R. **Iniciação à Física Matemática: modelagem de processos e métodos de solução**. [S.l.]: Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 2011.
- O'NEIL, P. V. **Matemáticas avanzadas para ingeniería**. [S.l.]: Cengage Learning, 2015.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. [S.l.]: Novo Hamburgo: Feevale, 2013.
- ROJAS, M. R. A. **Introdução às equações diferenciais parciais**. [S.l.]: Curitiba: InterSaberes, 2020.
- ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. [S.l.]: São Paulo: Cengage Learning, 2016.