



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E
TECNOLOGIA

WILLIE COSTA SANTOS

**MÉTODOS NUMÉRICOS DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES NÃO-LINEARES: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO**

Pau dos Ferros/RN

2014

WILLIE COSTA SANTOS

**MÉTODOS NUMÉRICOS DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES NÃO-LINEARES: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, *Campus* Pau dos Ferros, para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr Vinícius Samuel Valério de Souza – UFERSA.

PAU DOS FERROS-RN

2014

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Campus Pau dos Ferros (BCPDF)
Setor de Informação e Referência

S237m Santos, Willie Costa.

Métodos numéricos destinados a resolução de equações não-lineares: revisão bibliográfica e análise de desempenho do método da bissecção/ Willie Costa Santos -- Pau dos Ferros, 2015.

24f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Samuel Valério de Souza

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) –
Universidade Federal Rural do Semi-Árido.

1. Método Numérico - Bissecção. 2. Modelos matemáticos.
3. Análise de Desempenho. I. Título.

RN/UFERSA/BCPDF

CDD: 511.8

Bibliotecário: Eugênio Pacelli Ferreira da Costa
CRB-15/658

WILLIE COSTA SANTOS

**MÉTODOS NUMÉRICOS DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES NÃO-LINEARES: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E
ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-
Árido – UFERSA, *Campus* Pau dos Ferros, para a obtenção do
título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADO EM ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Vinícius Samuel Valério de Souza (Orientador)

Prof. Me. José Ferdinandy Silva Chagas (1º Membro)

Prof. Dr. Rodrigo Soares Semente (2º Membro)

AGRADECIMENTOS

A Deus, por encher minha vida de bênçãos e por ter me dado forças para seguir adiante quando meu corpo já estava exausto. Foi preciso quebrar vários obstáculos até aqui, porém por mais difícil que foi essa jornada, sem ele, eu não chegaria a lugar algum.

A minha família, que me deram todo o apoio possível, não só financeiramente, mas por ter me ensinado princípios éticos e morais em toda minha vida. Afinal de contas, uma boa educação se constrói a partir do “berço”.

Aos meus parceiros e parceiras de guerra, sim, aos meus amigos e amigas, que sempre estiveram do meu lado, laços que já duram uma eternidade e só tendem a se firmar mais e mais. Agradeço a galera do “Manicacas da Latinha”, do “Féguias” e a mais nova do “C&TOME”, pelos grandes momentos de lazer e companheirismo compartilhados. Nem é preciso citar nomes.

Aos meus primos, que estão do meu lado desde minha infância e que me deram todo apoio e a positividade necessária nesta caminhada. Saibam que vocês são irmãos.

Ao meu orientador, Professor Dr Vinicius Samuel Valério de Souza, que foi essencial no desenvolvimento desde trabalho, por ter prestado toda a assistência possível, pelas suas inúmeras cobranças e pelo conhecimento passado para este mero aluno.

Em resumo, a todos os amigos e amigas que contribuíram nesta fase acadêmica, seja direta ou indiretamente, principalmente aqueles que me ajudaram no processo de aprendizagem de alguma forma.

RESUMO

As equações não-lineares são importantes no ramo da ciência, pois diversas aplicações necessitam da resolução das mesmas para sanar ou amenizar problemas. Nesse ínterim, o presente trabalho objetiva realizar uma revisão bibliográfica dos principais métodos numéricos existentes na literatura voltados a resolver equações não-lineares, bem como efetuar também uma análise de um desses métodos, denominado método da Bissecção, através de sua implementação e extração de gráficos e tabelas com o auxílio da ferramenta computacional SCILAB 5.5.1.

Palavras-chave: Equações Não-Lineares, Métodos Numéricos, Análise de Desempenho, Método da Bissecção, SCILAB 5.5.1.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
1.1	Objetivos do trabalho	9
1.1.1	Objetivo Geral	9
1.1.2	Objetivos Específicos	9
1.2	Estruturação do trabalho	9
2	REFERENCIAL TEÓRICO.....	10
2.1	Método da Bissecção	10
2.2	Método Regula Falsi (Falsa Posição)	13
2.3	Método de Newton (Newton-Rapshon).....	14
2.4	Método da Secante.....	15
2.5	Método da Iteração Linear (Iteração de Ponto Fixo).....	16
3	ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO	18
3.1	Materiais e métodos.....	18
3.2	Resultados e Discussões	19
4	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	22
	REFERÊNCIAS	23

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Bissecção – Fonte: FRANCO (2006).	11
Figura 2.2: Ilustração gráfica do funcionamento do método Regula Falsi – Adaptada de FRANCO (2006).	13
Figura 2.3: Ilustração gráfica do funcionamento do método de Newton – Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM (2006).	14
Figura 2.4: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Secante – Fonte: FRANCO (2006).	15
Figura 2.5: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Iteração Linear (Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).	16
Figura 2.6: Ilustração gráfica de uma situação em que o Método da Iteração Linear, diverge do ponto fixo – Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM (2006).	17
Figura 3.1: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.4 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.	20
Figura 3.2: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.5 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.	21
Figura 3.3: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.6 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.	21

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Resultados das execuções do método da Bissecção para as equações 3.1, 3.2 e 3.3	20
---	----

1 INTRODUÇÃO

Na ciência, a resolução de diversos problemas necessita encontrar quais valores de x tornam uma função $f(x)$ igual à zero ($f(x) = 0$). Nesse ponto, tais valores são chamados de zeros ou raízes de $f(x)$, sendo que os mesmos raramente podem ser obtidos com exatidão, principalmente se a relação $f(x) = 0$ constituir-se numa equação do tipo não-linear (FRANCO, 2006).

Por definição, uma equação do tipo $f(x) = 0$ é não-linear se a função $f(x)$ possuir elementos não-lineares, tais como exponenciais, senos/cossenos, variáveis com expoentes maiores que 1, entre outros (KHALIL, 2002; SASTRY, 1999; SLOTINE e LI, 1991). Em relação à sua aplicação, tais equações são utilizadas para modelar uma série de fenômenos, dentre os quais podemos citar os seguintes (KHALIL, 2002):

- Previsão da variação dos preços ao longo do tempo, ou de como o aumento e queda dos preços de determinado item afetará sua venda;
- Descrição da trajetória de um projétil e expressão de conceitos como energia, inércia e diferença voltaica;
- Descrição de movimentações e rotas momentâneas de seres vivos (peixes, insetos, aves, por exemplo, todos ao acaso);
- Descrição de movimentos econômicos, atmosféricos ou meteorológicos.

Diante do exposto, é notável a importância das equações não-lineares, mas, conforme dito, a resolução das mesmas por vezes é difícil de ser realizada de forma direta e exata. Nesse ponto, existem diversos métodos numéricos definidos na literatura que são voltados a resolver tais equações e o presente trabalho tem como objetivo realizar uma revisão bibliográfica acerca desses métodos e efetuar uma análise de desempenho de um deles, denominado método da Bissecção. No caso, esta análise será realizada por meio de implementações desse método na ferramenta SCILAB 5.5.1, em que tais implementações serão destinadas a resolver uma série de equações não-lineares obtidas a partir do trabalho descrito em RIBEIRO (2012).

1.1 Objetivos do trabalho

1.1.1 Objetivo Geral

Efetuar uma revisão bibliográfica acerca dos principais métodos numéricos existentes na literatura destinados a resolver equações não-lineares e realizar uma análise de desempenho de um desses métodos, denominado método da Bissecção, por meio de sua implementação na ferramenta computacional SCILAB 5.5.1.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Realizar a revisão bibliográfica dos principais métodos numéricos existentes na literatura para resolver equações não-lineares;
- Implementar o método da Bissecção na ferramenta computacional SCILAB 5.5.1;
- Extrair gráficos e tabelas que contenham resultados que retratem a eficiência do método da Bissecção na resolução de uma série de equações não-lineares tomadas como exemplo;
- Efetuar uma análise dos resultados extraídos e verificar quais as principais características apresentadas pelo método da Bissecção na resolução das equações consideradas.

1.2 Estruturação do trabalho

O capítulo 2 descreve o referencial teórico do trabalho, o qual é composto pela descrição dos principais métodos numéricos existentes na literatura voltados a resolver equações não-lineares. O capítulo 3 descreve a metodologia empregada na análise de desempenho do método da Bissecção e apresenta os resultados e as discussões dessa análise. Por fim, o capítulo 4 descreve as conclusões e os trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo descreve o referencial teórico deste trabalho, o qual é composto pela revisão bibliográfica dos principais métodos numéricos definidos na literatura voltados a resolver equações não-lineares do tipo $f(x) = 0$. Nesse ínterim, antes de apresentar tais métodos, é importante destacar que os mesmos podem ser aplicados apenas se existir um conhecimento prévio acerca de qual intervalo dos valores de x pode conter pelo menos uma raiz da função $f(x)$. Dessa forma, o Teorema 2.1 descreve o seguinte:

Teorema 2.1 (FRANCO, 2006): *Se uma função continua da forma $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos de um intervalo $[a, b]$, isto é, se $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um valor x' pertencente à $[a, b]$, tal que $f(x') = 0$.*

Tendo em vista a ocorrência da situação descrita no Teorema 2.1, os métodos numéricos abordados a seguir realizam processos iterativos que geram uma seqüência de valores intermediários x_k pertencentes ao intervalo $[a, b]$, de tal sorte que quando $k \rightarrow \infty$, $x_i \rightarrow x'$, onde x' é uma raiz de $f(x)$ (FRANCO, 2006). Desse modo, os principais métodos numéricos existentes na literatura destinados a resolver equações não-lineares do tipo $f(x) = 0$ são descritos nas próximas seções.

2.1 Método da Bissecção

Considere uma função contínua $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ em que a condição expressa no Teorema 2.1 é atendida. Nesse ponto, o método da Bissecção define que inicialmente é preciso calcular o valor da função $f(x)$ no ponto médio $x_m = (a + b)/2$ para o qual existem três situações possíveis (FRANCO, 2006):

- **Situação 1:** O valor da função calculado no ponto x_m é igual à zero, isto é, $f(x_m) = 0$. Neste caso, x_m é a raiz da função $f(x)$ e, portanto, não é preciso fazer mais nada.
- **Situação 2:** Se $f(a) \times f(x_m) < 0$, então, de acordo com o Teorema 2.1, $f(x)$ tem uma raiz entre a e x_m . Portanto, o processo é repetido para o novo intervalo $[a, x_m]$.

- **Possibilidade 3:** Se $f(a) \times f(x_m) > 0$, então $f(b) \times f(x_m) < 0$, pois $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos. Portanto, de acordo com o Teorema 2.1, a função $f(x)$ tem uma raiz entre x_m e b e o processo é repetido para o novo intervalo $[x_m, b]$.

Uma interpretação geométrica dos passos descritos anteriormente para o método da Bissecção é dada na Figura 2.1.

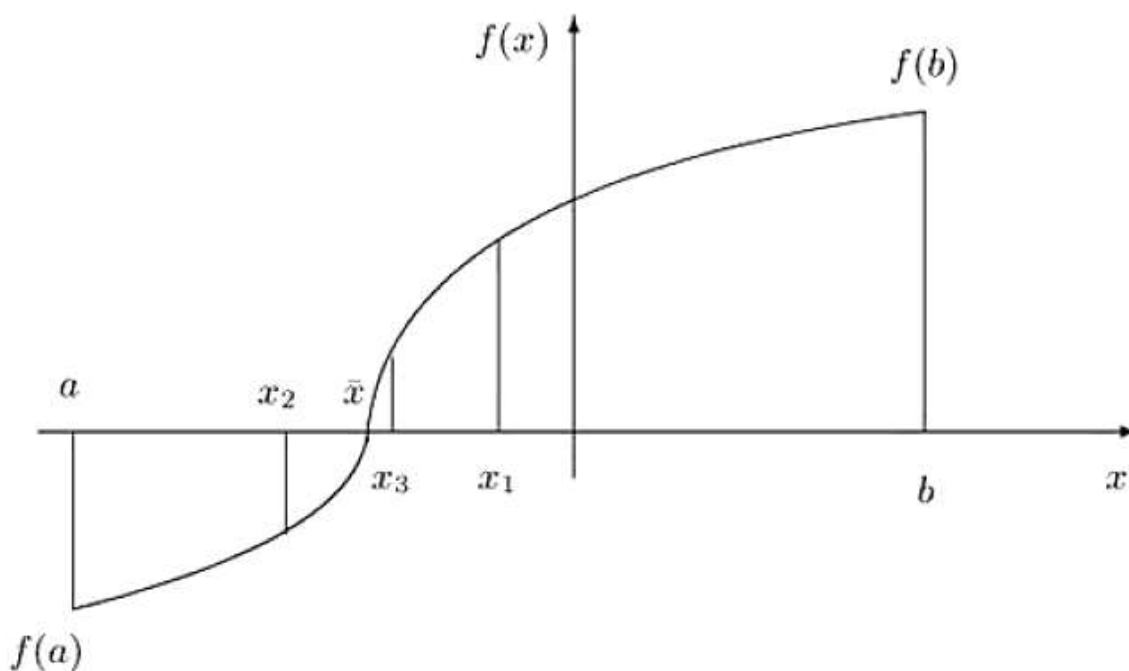


Figura 2.1: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Bissecção – Fonte: FRANCO (2006).

Conforme ilustrado na Figura 2.1, foi calculado o primeiro valor médio x_1 do intervalo $[a, b]$ para o qual ocorreu a Situação 2 ($f(a) \times f(x_1) < 0$). Em seguida foi calculado o valor médio x_2 do intervalo $[a, x_1]$, para o qual ocorreu a Situação 3 ($f(x_1) \times f(x_2) < 0$). Em seguida calculou-se o valor médio x_3 do intervalo $[x_2, x_1]$, no qual novamente ocorreu a Situação 2 ($f(x_2) \times f(x_3) < 0$). Diante do exposto, o procedimento continua até encontrar-se um x_k que seja igual a solução da equação, ou seja, $f(x_k) = 0$.

De acordo com o apresentado na Figura 2.1, nota-se que o procedimento definido no método da Bissecção irá parar apenas quando a raiz de $f(x)$ for encontrada. Todavia, existem outras métricas que podem ser adotadas no intuito de determinar em que ponto o processo definido irá ser finalizado. Tais métricas são denominadas critérios de parada e seus principais são (FRANCO, 2006):

- **Valor da função $f(x_k)$:** Esse critério procura verificar se o valor de um x_k calculado ao longo do método está próximo o suficiente de ser a raiz da função $f(x)$. Nesse ponto, dada uma constante positiva E pré-fixada

denominada precisão, após o cálculo de x_k , o critério descrito na equação 2.1 é analisado e, caso atendido, o método é finalizado e o valor de x_k é considerado como sendo a solução da equação $f(x) = 0$;

$$|f(x_k)| < E \quad (2.1)$$

- **Erro absoluto:** Esse critério procura verificar o quanto duas soluções intermediárias consecutivas x_{k+1} e x_k geradas pelo método são próximas uma da outra. Desse modo, dada uma constante positiva E pré-fixada denominada precisão, após a definição de x_{k+1} , a situação descrita na equação 2.2 é analisada e, caso atendida, o procedimento é finalizado e o valor de x_{k+1} é considerado como sendo a solução da equação $f(x) = 0$.

$$|x_{k+1} - x_k| < E \quad (2.2)$$

- **Erro relativo:** O erro relativo possui o mesmo significado do erro absoluto, porém retrata tal grandeza normalizada em relação ao valor de x_{k+1} . Nesse sentido, dada uma constante positiva E pré-fixada denominada precisão, após o cálculo de x_{k+1} , a situação descrita na equação 2.3 é analisada e, caso atendida, o procedimento é finalizado e o valor de x_{k+1} é considerado como sendo a solução da equação $f(x) = 0$;

$$\frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < E \quad (2.3)$$

- **Numero de iterações:** Uma iteração corresponde a um passo do procedimento definido em cada método numérico, no qual é calculado um valor de x_k . Nesse sentido, outro critério de parada que pode ser adotado corresponde a definição de um número máximo de iterações que serão realizadas durante a execução do método. Desse modo, ao término dessas iterações, o último valor de x_k calculado será considerado como sendo a solução da equação $f(x) = 0$.

2.2 Método Regula Falsi (Falsa Posição)

O método Regula Falsi (ou Método da Falsa Posição) utiliza um procedimento similar ao do método da Bissecção para encontrar a solução de equações não-lineares do tipo $f(x) = 0$, diferindo apenas na forma de obtenção dos valores de x_k . Conforme ilustrado na Figura 2.2, dado um intervalo $[a_k, b_k]$ que atenda a restrição imposta pelo Teorema 2.1 para a função $f(x)$, x_{k+1} irá corresponder ao valor do eixo x interceptado pela reta formada pelos pontos $(a_k, f(a_k))$ e $(b_k, f(b_k))$ (FRANCO, 2006). Desse modo, x_{k+1} poderá ser calculado através da equação 2.4.

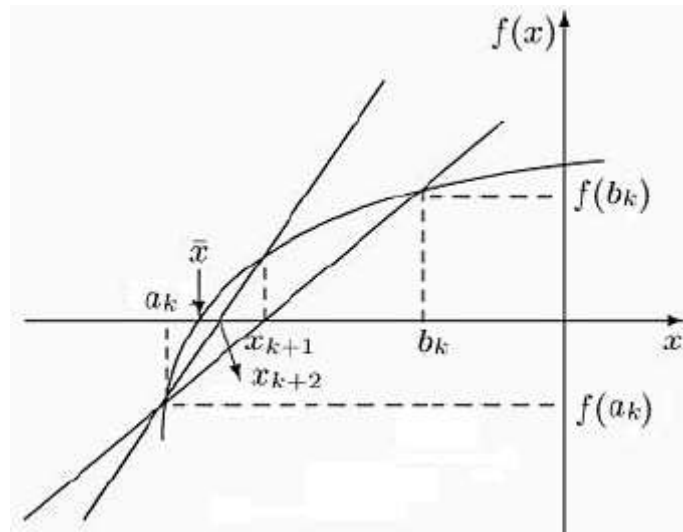


Figura 2.2: Ilustração gráfica do funcionamento do método Regula Falsi – Adaptada de FRANCO (2006).

$$x_{k+1} = \frac{a_k \times f(b_k) - b_k \times f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)} \quad (2.4)$$

Conforme ilustrado na Figura 2.2, após o cálculo de x_{k+1} , o método analisa qual das três situações descritas no método da Bissecção ocorre e repete o procedimento considerando um novo intervalo de análise $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ gerado a partir da situação ocorrida (FRANCO, 2006). Desse modo, tal como no método da Bissecção, esse procedimento repete-se até que a solução da equação $f(x) = 0$ seja encontrada, ou até que um ou mais critérios de parada utilizados (valor da função $f(x)$, erro absoluto, erro relativo e/ou número de iterações) sejam atendidos.

2.3 Método de Newton (Newton-Raphson)

O Método de Newton (ou Método de Newton-Raphson) é uma das técnicas mais populares para se determinar a solução de uma equação não-linear na forma $f(x) = 0$, desde que tal equação possua solução próxima a um ponto dado e $f(x)$ seja uma função contínua e diferenciável (FRANCO, 2006; GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).

Em termos gerais, o método de Newton determina a solução de uma equação não-linear $f(x) = 0$ através de estimativas sucessivas do valor x , ou seja, $x_1, x_2, \dots, x_n$, obtidas a partir de inclinações da reta tangente à função $f(x)$, denotada por meio da derivada $f'(x)$ da referida função (GILAT e SUBRAMANIAM, 2006). Diante disso, o procedimento utilizado nesse método é apresentado com maior clareza na Figura 2.3.

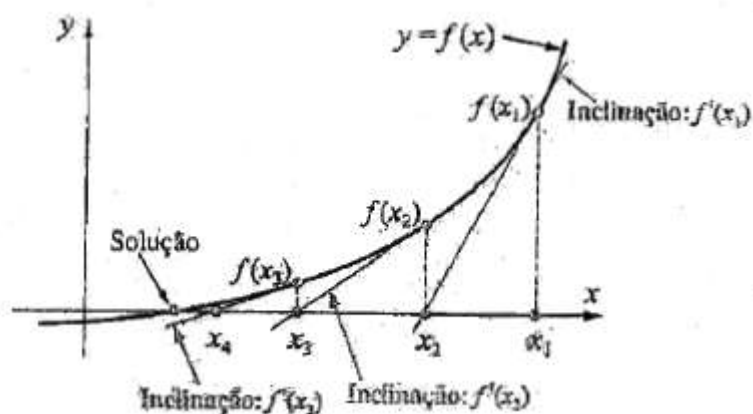


Figura 2.3: Ilustração gráfica do funcionamento do método de Newton – Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM (2006).

Conforme ilustrado na Figura 2.3, o método de Newton tem início com uma primeira estimativa x_1 da solução. Feito isso, a segunda estimativa x_2 é obtida pelo cruzamento entre a reta tangente à $f(x)$, denotada por $f'(x)$, e o eixo x das abscissas. Novamente o processo é repetido para encontrar $x_3, x_4, \dots, x_n$, até que um ou mais critérios de parada utilizados (valor da função $f(x)$, erro absoluto, erro relativo ou número de iterações) sejam atendidos ou até que x_n seja a solução da equação $f(x) = 0$ (FRANCO, 2006; GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).

Em relação a formula matemática para encontrar um x_{k+1} qualquer, a mesma pode ser obtida através da equação 2.5 descrita a seguir, a qual é derivada por meio da relação trigonométrica apresentada na Figura 2.3 inerente ao triângulo retângulo formado entre os valores de x_{k+1}, x_k e $f(x_k)$, ou seja (FRANCO, 2006; GILAT e SUBRAMANIAM, 2006):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (2.5)$$

2.4 Método da Secante

O método da Secante utiliza os valores de x_k e x_{k-1} para determinar o valor da nova estimativa x_{k+1} da solução da equação não-linear $f(x) = 0$. Conforme ilustrado na Figura 2.4, x_k e x_{k-1} definem respectivamente os pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$, os quais formam uma reta, denominada reta secante. Nesse ponto, o valor de x_{k+1} corresponde ao valor do eixo x que intercepta tal reta, o qual pode ser calculado através da equação 2.6 (FRANCO, 2006).

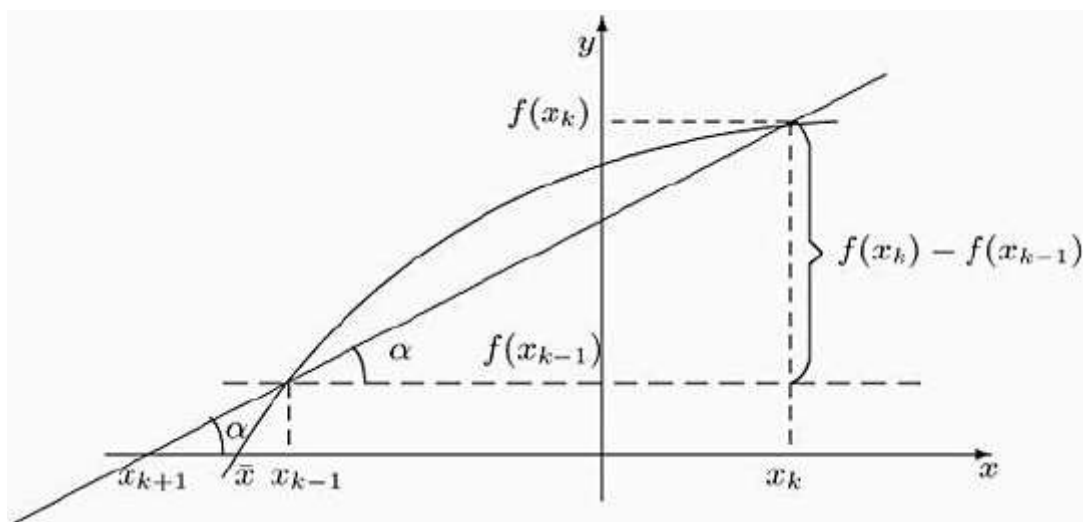


Figura 2.4: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Secante – Fonte: FRANCO (2006).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \times (x_k - x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_k)} \quad (2.6)$$

Tal como nos demais métodos descritos, o método da Secante define um processo iterativo que é finalizado quando a solução da equação $f(x) = 0$ é encontrada ou quando um ou mais critérios de parada (valor da função $f(x)$, erro absoluto, erro relativo e número de iterações) são atendidos ou quando o x_{k+1} encontrado equivale à solução da equação.

2.5 Método da Iteração Linear (Iteração de Ponto Fixo)

Considere a função linear $y = x$ e uma equação não-linear $f(x) = 0$ que pode ser reescrita na forma $x = g(x)$. Nesse ponto, denomina-se ponto fixo como sendo o valor de x que torna a igualdade $y = g(x)$ válida (GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).

Diante do exposto, dada uma equação não-linear $f(x) = 0$ reescrita na forma $x = g(x)$, o método da Iteração Linear (ou Método da Iteração de Ponto Fixo) define um procedimento que visa encontrar uma sequência de valores de x , ou seja $x_1, x_2, \dots, x_n$, de modo que x_n corresponda ao ponto fixo da equação que, por sua vez, também equivale a solução da mesma (GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).

Em relação ao procedimento utilizado no método da Iteração Linear, o valor de um x_{k+1} qualquer é encontrado sempre utilizando-se a função $g(x)$, denominada função de iteração, e o valor de x_k através da igualdade $x_{k+1} = g(x_k)$ (GILAT e SUBRAMANIAM, 2006). Desse modo, tal procedimento é ilustrado na Figura 2.5.

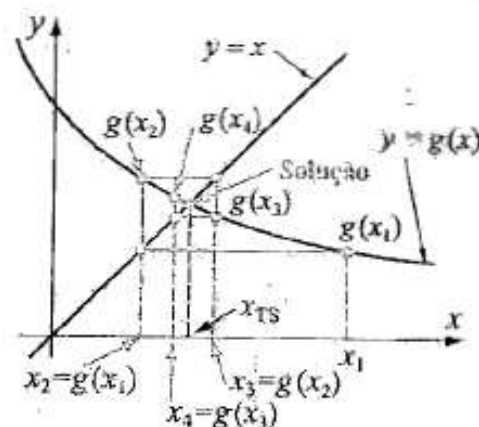


Figura 2.5: Ilustração gráfica do funcionamento do método da Iteração Linear (Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM, 2006).

Na Figura 2.5, a solução da equação $f(x) = 0$ corresponde à x_{rs} , o qual também equivale ao ponto fixo da mesma. Desse modo, é possível observar que o valor numérico da solução é determinado por meio de um processo iterativo que começa com a escolha de um valor x_1 próximo ao ponto fixo. Feito isso, o valor de x_2 é obtido através da substituição do valor de x_1 em $g(x)$, ou seja, $x_2 = g(x_1)$. Novamente o processo é repetido para encontrar x_3 ($x_3 = g(x_2)$), x_4 ($x_4 = g(x_3)$), até x_n . Nesse ponto, o término desse procedimento ocorre quando x_n corresponde ao ponto fixo da equação ou quando um ou mais critérios de parada previamente definidos para o método da Bissecção

(valor da função $f(x)$, erro absoluto, erro relativo ou número de iterações) (FRANCO, 2006; GILAT e SUBRAMANIAM, 2006) são atendidos.

Ainda em relação ao procedimento ilustrado na Figura 2.5, vale salientar que, dependendo da função $g(x)$ escolhida, nem sempre a sequência $x_2, \dots, x_n$ gerada irá convergir para o valor do ponto fixo (GILAT e SUBRAMANIAM, 2006). Nesse ponto, tal comportamento é ilustrado na Figura 2.6.

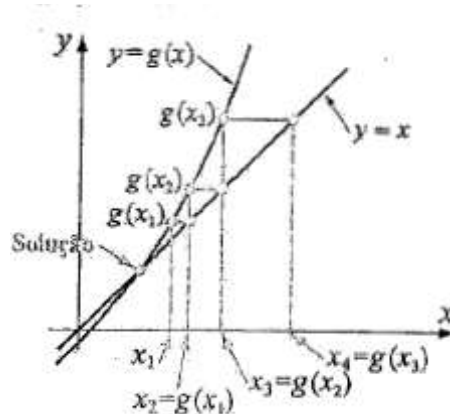


Figura 2.6: Ilustração gráfica de uma situação em que o Método da Iteração Linear, diverge do ponto fixo – Fonte: GILAT e SUBRAMANIAM (2006).

Diante do exposto, uma forma de evitar o problema apresentado na Figura 2.6 é usar uma função de interação $g(x)$ que garanta a convergência do método. Desse modo, segundo FRANCO (2006), visando atingir essa convergência, a condição Lipschitz contínua deve ser atendida, a qual define que o módulo da derivada da função de iteração $g(x)$ escolhida deve ser menor que 1, ou seja, $|g'(x)| < 1$.

3 ANÁLISE DE DESEMPENHO DO MÉTODO DA BISSECÇÃO

Este capítulo descreve a metodologia, as ferramentas empregadas, os resultados obtidos e as discussões realizadas acerca da análise de desempenho do método da Bissecção.

3.1 Materiais e métodos

A análise de desempenho do método da Bissecção foi realizada por meio de sua implementação na ferramenta SCILAB 5.5.1 , considerando as equações não-lineares 3.1, 3.2 e 3.3. Nesse ponto, vale salientar que tais equações foram escolhidas a partir do trabalho descrito em RIBEIRO (2012).

$$2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0 \quad (3.1)$$

$$5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0 \quad (3.2)$$

$$\sin(x)x + 4 = 0 \quad (3.3)$$

As equações consideradas estão no formato $f(x) = 0$. Desse modo, as funções $f(x)$ relacionadas às equações 3.1, 3.2 e 3.3 estão descritas nas equações 3.4, 3.5 e 3.6, respectivamente.

$$f(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 \quad (3.4)$$

$$f(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 \quad (3.5)$$

$$f(x) = \sin(x)x + 4 \quad (3.6)$$

Em relação aos intervalos de análise adotados, os mesmos foram de $[0, 3]$, $[-5, 5]$ e $[1, 5]$ para as equações 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente. Tais intervalos atendem ao critério descrito anteriormente no Teorema 2.1 e, portanto, podem ser adotados na execução do método da Bissecção.

Os algoritmos implementados para cada equação não-linear considerada foram executados para três valores distintos da precisão E : 10^{-2} , 10^{-4} e 10^{-6} . Além disso, nessas implementações adotou-se também dois critérios de parada, dentre os descritos anteriormente: o valor da função $f(x)$ ($|f(x)| < E$) inerente a cada equação e o número máximo de 1.000 iterações.

3.2 Resultados e Discussões

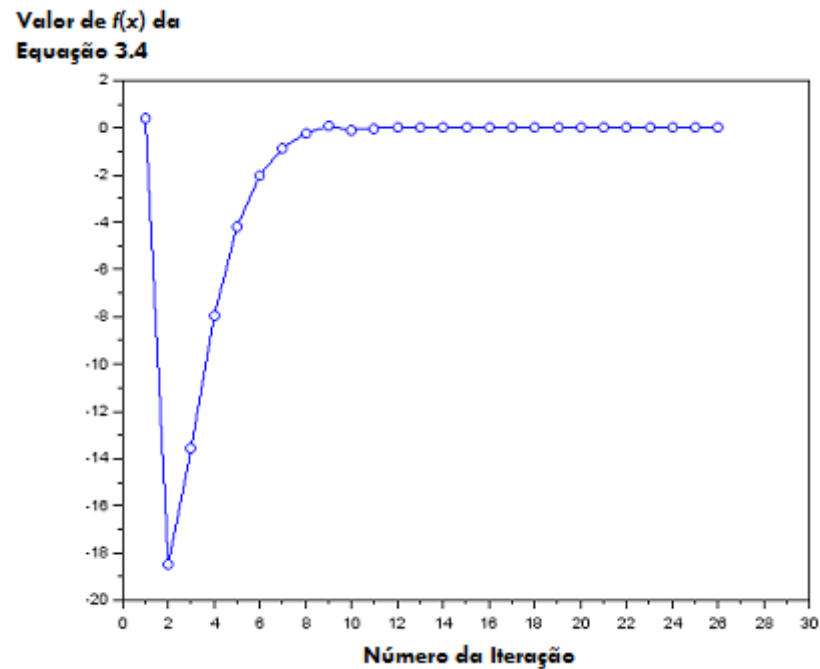
A Tabela 3.1 descreve o número de iterações que o método da Bissecção necessita para achar a solução de cada equação não-linear considerada, o valor dessas soluções e o valor que cada função $f(x)$ adotada assume nas mesmas. Além disso, a Figura 3.1, a Figura 3.2 e a Figura 3.3 ilustram, respectivamente, a evolução do valor das funções $f(x)$ descritas nas equações 3.4, 3.5 e 3.6 para cada solução intermediária gerada pelo método considerando a precisão E de 10^{-6} .

Em relação ao ilustrado nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3, é visível que o comportamento do método da Bissecção é similar para todas as funções consideradas, ou seja, na medida em que as iterações são realizadas, o valor da função $f(x)$ tende a zero. Esse aspecto atesta a validade do método para os exemplos considerados, uma vez que os valores de x_k intermediários são aprimorados a cada passo do mesmo, convergindo no final para uma aproximação da solução procurada.

Além dos gráficos, os resultados apresentados na Tabela 3.1 mostram que o valor da solução encontrada para cada equação varia pouco de precisão para precisão, mas o número de iterações necessárias aumenta na medida em que a precisão E diminui. Tal comportamento é justificado em virtude do critério de parada relativo ao valor da função $f(x)$ ($|f(x)| < E$) tornar-se mais difícil de ser atendido, o que irá requerer mais iterações para que o método possa atingir a solução desejada. Somado a esse aspecto, a Tabela 3.1 mostra também que o valor da função $f(x)$ torna-se mais próximo de zero na proporção em que a precisão E diminui de valor. Novamente esse aspecto justifica-se devido ao fato do critério de parada relativo ao valor da função $f(x)$ ($|f(x)| < E$) ser mais difícil de ser alcançado, uma vez que $|f(x)|$ deverá aproximar-se cada vez mais de zero na medida em que E decresce. Como resultado desse fato, o valor da função $f(x)$ na solução alcançada tenderá a zero quando a precisão adotada diminuir.

Tabela 3.1: Resultados das execuções do método da Bissecção para as equações 3.1, 3.2 e 3.3

	Equação 3.1			Equação 3.2			Equação 3.3		
	Valor da Precisão E			Valor da Precisão E			Valor da Precisão E		
	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
Número de Iterações	13	20	26	14	21	28	9	12	22
Solução encontrada	1,493042	1,492879	1,492879	-0,929565	-0,929561	-0,929560	4,320313	4,323242	4,323239
Valor da função $f(x)$ na solução encontrada	85×10^{-4}	11×10^{-6}	-1×10^{-6}	-2×10^{-4}	-9×10^{-6}	-1×10^{-6}	75×10^{-4}	-7×10^{-6}	1×10^{-6}

Figura 3.1: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.4 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.

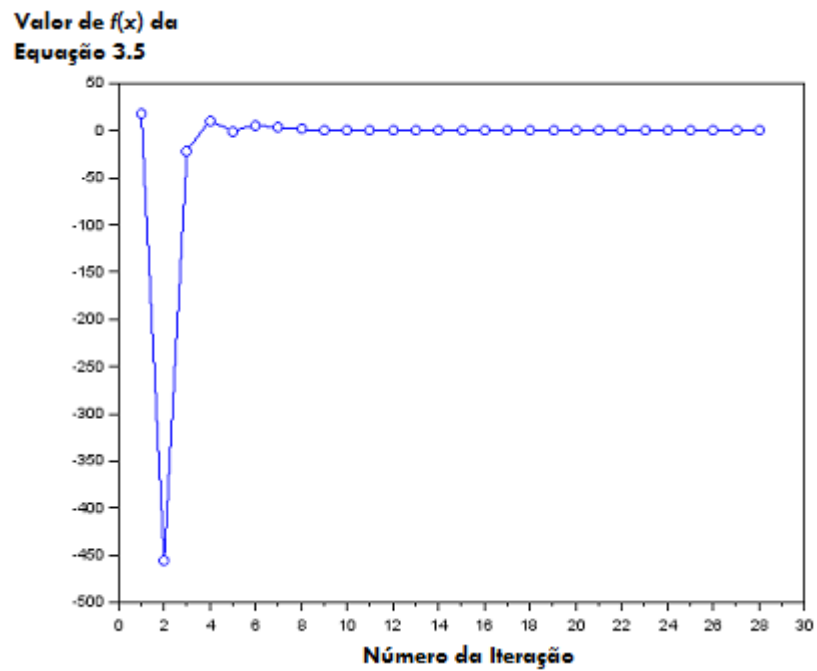


Figura 3.2: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.5 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.

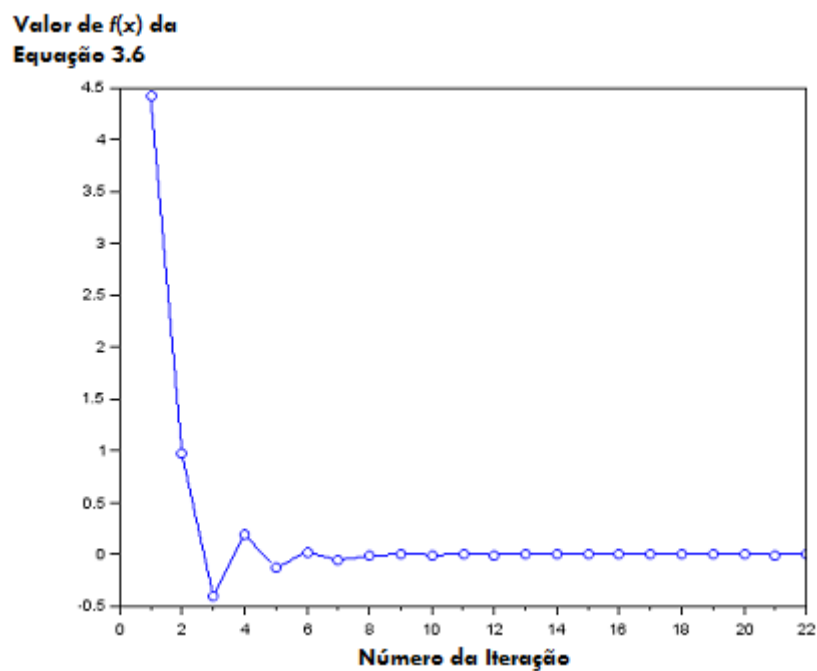


Figura 3.3: Valor da função $f(x)$ da Equação 3.6 para cada x_k gerado ao longo da execução do método da Bissecção e considerando uma precisão $E = 10^{-6}$ – Fonte: Autoria Própria.

4 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Conforme demonstrado nos resultados obtidos, o método da Bissecção encontrou as soluções das equações não-lineares consideradas e apresentou um comportamento inerente aos critérios de parada adotados. Desse modo, os seguintes trabalhos futuros podem ser realizados como continuação deste:

- **Análise de desempenho dos demais métodos numéricos existentes na literatura:** Além do método da Bissecção, existem outros métodos computacionais destinados a resolver equações não-lineares. Sendo assim, um trabalho futuro que pode ser realizado consiste na análise de desempenho destes métodos;
- **Execução do método da Bissecção considerando outros critérios de parada:** Conforme descrito no capítulo 3, a análise de desempenho do método da Bissecção foi realizada utilizando-se apenas dois, dentre os quatro critérios de parada apresentados no capítulo 2. Nesse ponto, outro trabalho futuro que pode ser realizado diz respeito à realização da mesma análise efetuada no capítulo 3, porém adotando outros critérios de parada;
- **Verificação dos métodos numéricos descritos na resolução de sistemas de equações não-lineares:** Segundo FRANCO (2006), os métodos numéricos descritos no capítulo 2 podem ser adaptados para resolver sistemas de equações não-lineares. Diante disso, outro trabalho futuro que pode ser realizado diz respeito à realização de análises de desempenho desses métodos na resolução desses sistemas.

REFERÊNCIAS

FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice-Hall, 2006.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos Para Engenheiros e Cientistas**: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Porto Alegre: Bookman, 2008. 480p.

KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3^a ed. Prentice-Hall, 2002. 750p.

RIBEIRO, R. R. J. **Revisão bibliográfica de alguns métodos numéricos para obtenção de zeros reais de funções transcendentais e polinomiais**. 2012. 65f. Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus* Angicos. Angicos/RN, 2012.

SASTRY, S. **Nonlinear systems**: analysis, stability and control. Springer, 1999. 669p.

SLOTINE, J. J.; LI, W. **Applied nonlinear control**. Prentice-Hall, 1991. 352p.