

# O SIGNIFICADO DE UMA POTÊNCIA COM EXPOENTE IRRACIONAL

*Francisco Charles Carvalho da Cruz, Dra. Luiza Helena Felix de Andrade.*

**Resumo:** É conhecido o significado de potência em todas as situações, exceto quando o seu expoente é irracional. Sabe-se que o significado de uma potência com expoente natural, inteiro e racional. Por exemplo para o expoente natural sabemos que  $2^2 = 2 \times 2$ , para um expoente inteiro negativo temos por exemplo  $2^{-1} = \frac{1}{2}$  e por fim também sabemos que uma potência com expoente racional, por exemplo  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ . Entretanto, é bem mais complicado saber quando temos uma potência com expoente irracional, pois no decorrer da nossa formação os números irracionais acabam ficando um pouco de lado, tendo assim mais dificuldade em entender seu significado. Com tudo, foi analisado e verificado que essa potência com expoente irracional é o limite de um intervalo de uma área compreendida pela função  $f(t) = \frac{1}{t}$  e eixo  $t$ , no qual o valor dessa área é logaritmo natural dessa potência. Também será visto que os números irracionais possuem mais termos que os números racionais, isso devido ao fato de que os números racionais são enumeráveis e os irracionais não-enumeráveis.

**Palavras-chave:** Números Irracionais; Potência; Função; Enumerabilidade ou Não-enumerabilidade.

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, conhecemos o significado de potência na maioria das situações, exceto quando o seu expoente é irracional. É notório que a maioria das pessoas sabem o significado de uma potência com expoente natural, inteiro e racional. Por exemplo para o expoente natural sabemos que  $2^2 = 2 \times 2$ , para um expoente inteiro negativo temos por exemplo  $2^{-1} = \frac{1}{2}$  e por fim também sabemos de forma trivial que uma potência com expoente racional, por exemplo  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ . Entretanto, quando se trata de uma potência com expoente irracional, apesar de ser fácil calcular, é bem mais complicado saber seu significado. Assim, qual seria seu significado ou como que poderíamos representar essa potência de outra forma. De acordo com o que foi informado acima, qual seria o significado de  $5^{\sqrt{2}}$ ? Ou seja, qual o significado de uma potência com expoente irracional? No qual, mostrar esse significado será o grande objetivo desse trabalho. Assim também iremos abordar assuntos como funções: logarítmicas e exponenciais, trabalhando em assuntos poucos explorados dentre outros autores. O trabalho está escrito em três seções. Na qual, na Seção 2, foi abordado um pouco da história sobre os irracionais, feita a demonstração da irracionalidade da  $\sqrt{2}$ , também será apresentado uma forma antiga e bem precisa de calcular a aproximação da raiz quadrada de um número e aplicado esse método a um software de planilha eletrônica. Ainda na Seção 2, será mostrado se o conjunto dos números irracionais é enumerável ou não-enumerável e também identificar que existe mais números irracionais do que racionais [1]. Já na Seção 3, será abordado propriedades das funções: logarítmicas e exponenciais, para resolução do problema desse trabalho, que é saber o que significa uma potência que possui seu expoente irracional.

## 2. NÚMEROS IRRACIONAIS

### 2.1 História dos números irracionais

Com o surgimento da geometria às margens do rio Nilo, para realizar as constantes medições de terras devido às mudanças no volume de água do rio, instigando os mesopotâmicos e os egípcios a usarem a geometria para resolver problemas práticos de cálculo de área. Todavia, essa matemática praticada pelos mesopotâmicos e egípcios era diferente da geometria grega, fundada em argumentações consistentes e demonstrações [2].

A descoberta dos números irracionais foi relacionada através de uma sequência de Cauchy. Essa sequência é uma sucessão tal que a distância entre os termos vai se aproximando de zero, intuitivamente é uma sequência na qual seus termos vão ficando cada vez mais próximos. Partindo do pressuposto de que já se conhecia os números racionais, com todas as suas propriedades. A partir da definição: diz-se que uma sequência  $(a_n)$  de números racionais é uma sequência de Cauchy se, qualquer que seja o número racional  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$  tal que  $n, m > N \rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ . Foi observado que existem pelo menos o mesmo número de sequências de Cauchy quanto de números racionais, pois, qualquer que seja  $r \in \mathbb{Q}$ , a sequência constante  $(r_n) = (r, r, r, \dots)$  é de Cauchy. Dentre as sequências de Cauchy, algumas são convergentes, como essas sequências constantes, uma sequência

como  $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$  e muitas outras. Mas foi visto que havia também uma infinidade de sequências que não convergiam, como a sequência das aproximações decimais por falta de  $\sqrt{2}$ ,  $(r_n) = (1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142\dots)$ , ou a sequência  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  que define o número  $e$ . Pois se tratava de uma época em que ainda não se conheciam os números irracionais [3].

A matemática grega que se tornou muito conhecida devido a escola pitagórica, que acreditavam que os números eram resumidos aos inteiros e suas razões, de fato quando se é necessário enumerar os bens que possuímos, os números inteiros são suficientes. Entretanto existem outras necessidades como calcular área, volume ou distâncias que dificilmente os resultados desses cálculos serão números exatos. Assim, ao comparar grandezas como a diagonal e o lado do quadrado ou a diagonal e o lado de um cubo. A comunidade matemática foi surpreendida com a descoberta da incomensurabilidade, ou seja, que a geometria dos inteiros e suas razões não poderiam ser expressas por um número racional e, conseqüentemente, à necessidade de outros números para se descrever completamente a realidade [1].

Ao calcular a diagonal de um quadrado de lado 1, é obtido a raiz quadrada de 2. Como citado no parágrafo anterior, a medida da diagonal de um quadrado não é um número racional, então, se trata de um número irracional.

Na próxima seção será mostrado um método de aproximação da raiz quadrada, pelo fato da raiz quadrada de número primo ser um número irracional, e assim um termo muito importante do nosso estudo.

## 2.2 Método de aproximação da raiz quadrada

Muitos não conhecem esse método devido o fato de ser muito antigo. Já conhecido a 18 séculos antes de Cristo, e tão eficiente para extração da raiz quadrada, o método vai ser demonstrado e aplicado a um software de planilha eletrônica e assim trazendo essa grande descoberta do passado para os estudos de hoje. Vamos considerar uma sequência que tem origem nesse método. Dado um número positivo qualquer  $N$ , tendo como objetivo achar um número  $a$  tal que  $a \times a = N$ . Porém, em geral, não dispomos do exato valor da raiz, sendo assim, o número  $a$  é apenas um valor aproximado. Então concluímos que o fator que deve multiplicar  $a$  para obter  $N$  não é necessariamente  $a$ , e sim o termo  $\frac{N}{a}$ . Portanto, ao invés de  $a \times a = N$ , temos

$$a \cdot \frac{N}{a} = N$$

podemos perceber que quanto maior for o termo  $a$ , menor será o fator  $\frac{N}{a}$ , ou seja, o valor de  $a$  pode se alterar mudando o valor de  $N$ . Então, o valor desejado de  $a$  é aquele que faz com que ele seja igual a  $\frac{N}{a}$ , assim encontrando a raiz exata de  $N$ . Todavia, quando  $a$  é uma raiz aproximada por excesso,  $\frac{N}{a}$  será raiz aproximada por falta e vice-versa, de sorte a raiz exata esta compreendida no intervalo entre esses fatores. Por isso surgiu a ideia de tomar a média aritmética deles, assim temos,

$$a_1 = \frac{1}{2} \left( a + \frac{N}{a} \right)$$

esse valor talvez se aproxime melhor de  $\sqrt{N}$  do que o valor original de  $a$ . Sendo assim, utilizando esse argumento, podemos esperar que

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{N}{a_1} \right)$$

seja melhor aproximação ainda. Seguindo esse pensamento conseguimos construir uma sequência recorrente

$$a_0 = a; \quad a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

É de se analisar que essa sequência, originada na antiguidade, talvez seja o método mais eficiente de extração da raiz quadrada [3].

Na seção seguinte, veremos esse método de uma forma mais moderna, aplicando-o a um software de planilha eletrônica.

### 2.2.1 Método de aproximação da raiz quadrada utilizando um software de planilha eletrônica

Aqui iremos mostrar uma sequência que tem origem num método de extração da raiz quadrada e como pode ser utilizada essa sequência incorporada ao software de planilha eletrônica. Este método de aproximação da raiz quadrada, que já era conhecido na Mesopotâmia de 18 séculos antes de Cristo, foi retirado de [3]. É notável que esse método, cujas origens datam de tão alta antiguidade, seja talvez o método mais eficiente para a extração da raiz quadrada. Assim temos basicamente a sequência que melhor representa a aproximação da raiz quadrada. Essa sequência se trata de uma sequência recorrente, onde seu termo geral é definido por uma função de um ou mais de seus termos procedentes. Será demonstrado mais precisamente e também mostrado esse método através do software.

|    | A                                        | B                           | C                    | D                             |
|----|------------------------------------------|-----------------------------|----------------------|-------------------------------|
| 1  | <b>Aproximação da raiz quadrada de 2</b> |                             |                      |                               |
| 2  | <b>valor a(n-1)</b>                      | <b>valor N/a N=raiz n</b>   | <b>média a+N/a</b>   | <b>valor de a<sub>0</sub></b> |
| 3  | 100                                      | 0,02                        | 50,01                | 100                           |
| 4  | 50,01                                    | 0,039992002                 | 25,024996            | <b>valor da raiz</b>          |
| 5  | 25,024996                                | 0,079920093                 | 12,55245805          | 2                             |
| 6  | 12,55245805                              | 0,159331343                 | 6,355894695          |                               |
| 7  | 6,355894695                              | 0,314668524                 | 3,335281609          |                               |
| 8  | 3,335281609                              | 0,599649515                 | 1,967465562          |                               |
| 9  | 1,967465562                              | 1,016536217                 | 1,49200089           |                               |
| 10 | 1,49200089                               | 1,340481774                 | 1,416241332          |                               |
| 11 | 1,416241332                              | 1,412188696                 | 1,414215014          |                               |
| 12 | 1,414215014                              | 1,414212111                 | 1,414213562          |                               |
| 13 |                                          |                             |                      |                               |
| 14 |                                          |                             |                      |                               |
| 15 |                                          |                             |                      |                               |
| 16 | <b>Aproximação da raiz quadrada de 5</b> |                             |                      |                               |
| 17 | <b>valor a(n-1)</b>                      | <b>valor N/a N = raiz n</b> | <b>média a+(N/a)</b> | <b>valor de a<sub>0</sub></b> |
| 18 | 100                                      | 0,05                        | 50,025               | 100                           |
| 19 | 50,025                                   | 0,099950025                 | 25,06247501          | <b>valor da raiz</b>          |
| 20 | 25,06247501                              | 0,199501446                 | 12,63098823          | 5                             |
| 21 | 12,63098823                              | 0,395851845                 | 6,513420037          |                               |
| 22 | 6,513420037                              | 0,767645871                 | 3,640532954          |                               |
| 23 | 3,640532954                              | 1,373425282                 | 2,506979118          |                               |
| 24 | 2,506979118                              | 1,994432249                 | 2,250705683          |                               |
| 25 |                                          |                             |                      |                               |

Figura 1. Cálculo de aproximação da raiz quadrada em uma planilha eletrônica.  
(Autoria Própria)

Tendo a fórmula da aproximação da raiz  $a_n = \frac{1}{2} \left( a_{n-1} + \frac{N}{a_{n-1}} \right)$ , com  $a_0 = a$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Inicialmente podemos chutar qualquer valor para  $a_0$ , onde  $a_1 = \frac{1}{2} \left( a_0 + \frac{N}{a_0} \right)$  e assim sucessivamente, pegando sempre a soma da raiz aproximada por falta ( $a$ ) com a raiz aproximada por excesso  $\left( \frac{N}{a} \right)$  e calculando a média, depois de várias iterações, obtém-se o resultado exato da raiz quadrada.

Assim, agora na seção seguinte iremos demonstrar a prova da irracionalidade da  $\sqrt{2}$ .

### 2.3 Prova da irracionalidade da $\sqrt{2}$

Guedes de Figueiredo (2011, p. 2) aponta que os matemáticos da Escola Pitagórica fizeram a descoberta de que  $\sqrt{2}$  não é um número racional. A demonstração é bastante simples. Observemos. Suponhamos, por contradição, que  $\sqrt{2}$  seja racional. Nesse caso existem inteiros positivos  $p$  e  $q$ , primos entre si, tais que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  daí obtemos

$$\left( \frac{p}{q} \right)^2 = 2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

assim como  $p^2$  é múltiplo de 2, isso implica que  $p^2$  é um número par. Logo,  $p$  deve ser par também. Logo,  $p$  é da forma  $p = 2r$ , de onde se segue

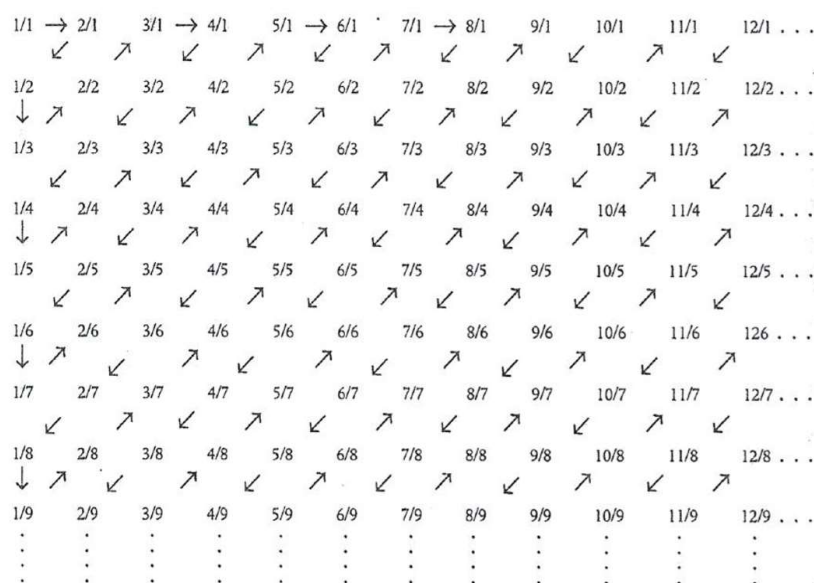
$$p^2 = (2r)^2$$

$$p^2 = 4r^2$$

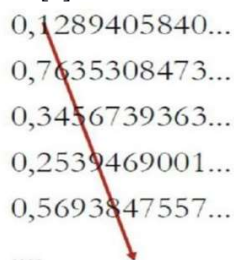
temos  $2q^2 = 4r^2$ , isto é,  $q^2 = 2r^2$ . Logo  $q^2$  é par, pois também é múltiplo de 2. Logo  $q$  deve ser par também, como visto acima. Ora se  $p$  e  $q$  são pares, eles não podem ser primos entre si. Essa contradição provém da hipótese, feita inicialmente, de que  $\sqrt{2}$  fosse racional, então  $\sqrt{2}$  é irracional [4].

Na próxima seção, iremos ver que existe mais números irracionais do que números racionais.

Para realizar esse estudo precisamos construir uma definição. Dizemos que um conjunto  $x$  é enumerável quando pode ser colocado em relação biunívoca com o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais. A relação biunívoca também é conhecida como relação um-a-um, isto é, para cada elemento em  $x$  existe um único elemento em  $\mathbb{N}$  [1]. Em uma curiosa observação, notamos que não podemos escrever todos os números racionais. Porém, através do matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918) realizou uma organização que permite chegar a qualquer número racional desejado. Por exemplo, o número  $23/15$  estará localizado no cruzamento da 23ª coluna com a 15ª linha. Segundo Broetto, *“Logo, a dificuldade da prova estava em como obter uma relação biunívoca entre os números naturais e as frações dispostas nessa matriz”*. Cantor resolveu esse problema ao sugerir que a mesma fosse percorrida pelas diagonais, conforme mostram as setas na Figura 2. Possuindo uma correspondência, que é a seguinte:  $1/1$  é associado a 1;  $2/1$  é associado a 2;  $1/2$  é associado a 3;  $1/3$  é associado a 4;  $2/2$  é associado a 5, e assim sucessivamente. Logo, esse caminho feito através das diagonais passará por cada número racional uma única vez, assim fica estabelecida uma relação biunívoca com os naturais, mostrando assim que o conjunto dos números racionais é enumerável.



Cantor buscou um jeito para resolver esse problema também para os números irracionais. O matemático utilizou os números irracionais do intervalo  $[0,1]$  para limitar sua análise, e assumiu que existia um modo de listar todos esses números, sem estabelecer nenhuma sequência especial, contando apenas com o fato de que todos os números irracionais que constam nesse intervalo, estará nessa lista. Assim por hipótese considerar que os irracionais são enumeráveis. Partindo da hipótese de que todos os irracionais do intervalo  $[0,1]$  podiam ser listados na Figura 3. Cantor, a partir da diagonal, construiu um determinado número totalmente diferente dos números listados  $(0,16598 \dots)$  – ver Figura 3. E através desse número obtido criou-se um novo número mediante a adição de 1 a cada dígito (caso o número seja 9, ao somar com 1 o dígito será mudado para 0). O novo número criado,  $0,27609 \dots$  não faz parte da lista, pois sofre alteração pelo menos em um dígito dos números listados. Segundo Broetto, “Cantor provava assim, por contradição à sua hipótese, que o conjunto dos números irracionais não pode ser enumerado”. Cantor mostrou que existem diferentes ordens de infinito. A ordem do infinito dos números irracionais é maior do que a ordem do infinito dos naturais, que é a mesma dos inteiros e dos racionais. Dizemos que os números irracionais são não enumeráveis [1].



---

4

### 3. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

#### 3.1 A Função Logarítmica Natural

A função logarítmica que conhecemos da Álgebra é baseada em potências. Podemos provar as propriedades dos logaritmos com posse das propriedades das potências. Uma dessas propriedades das potências é

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (1)$$

podemos decorrer a equação (1) da definição de potência de expoente inteiro positivo e da indução matemática, se os expoentes  $x$  e  $y$  forem inteiros positivos e se  $a$  for um número real qualquer. Já em outras situações onde os expoentes são inteiros quaisquer, sendo positivos, negativos ou zero e  $a \neq 0$ , então para que (1) seja válida é preciso definir potência de expoente negativo e zero por

$$a^0 = 1 \text{ com } a \neq 0 \text{ e } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ com } n > 0$$

se o expoente for um número racional com  $a \geq 0$ , então (1) será válida com  $a^{\frac{m}{n}}$  sendo definida por

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

já para definirmos  $a^x$  quando  $x$  for um número irracional não é tão simples. Por exemplo qual é o significado de  $2^{\sqrt{2}}$  ou  $2^{\sqrt{3}}$ ? De acordo com a definição de logaritmo dado em Álgebra Elementar é baseado na hipótese de que  $a^x$  existe se  $a$  for um número positivo qualquer e  $x$  um número real qualquer.

Com essa definição podemos estabelecer que

$$a^x = N$$

sendo  $a$  um número positivo qualquer diferente de 1 e  $N$  um número positivo, pode ser resolvido em  $x$  e que  $x$  é determinado de modo único por

$$x = \log_a N$$

Adiante vamos provar as propriedades de logaritmos utilizando as propriedades das potências:

$$\log_a 1 = 0 \quad (2)$$

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (3)$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (4)$$

$$\log_a M^n = n \log_a M \quad (5)$$

$$\log_a a = 1 \quad (6)$$

Agora usando o cálculo vamos definir a função logarítmica e a partir dessa definição iremos provar as propriedades dos logaritmos. Assim a função exponencial irá ser definida em termos da função logarítmica. Com isso será possível definir  $a^x$  sendo  $x$  um número real qualquer e  $a \geq 0$ . As propriedades das potências serão então provadas quando o expoente for qualquer número real.

Considere a fórmula

$$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

sendo que não é válida para  $n = -1$ . Para resolver o problema de calcular  $\int t^n dt$  para  $n = -1$ , precisamos ter de posse uma função que sua derivada seja  $\frac{1}{x}$ . Para ter tal função precisamos do teorema fundamental do cálculo [5].

### 3.1.1 Definição TFC (Teorema Fundamental do Cálculo) [6]

Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em todo intervalo  $[a, b] \subset I$  e  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  a integral indefinida de  $f$  baseada em  $c \in I$ . Se  $f$  é contínua em  $x_0 \in I$ , então  $F$  é derivável em  $x_0$  com  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

Que nos dá essa função:

$$\int_a^x \frac{1}{t} dt$$

na qual,  $a$  pode ser um número real qualquer possuindo o mesmo sinal que  $x$ . Podemos verificar na Figura 4, a seguir, a representação dessa função, na qual podemos identificar a área compreendida pela curva  $y = \frac{1}{t}$  com  $t > 0$ , pelo eixo  $t$  e pelas retas paralelas  $t = 1$  e  $t = x$  onde  $x > 1$ .

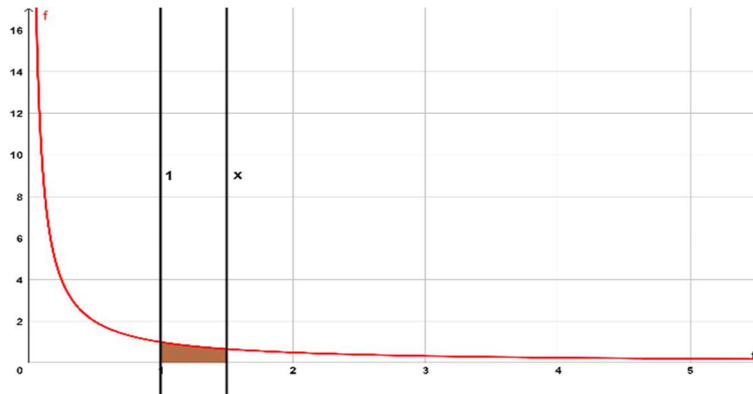


Figura 4. Gráfico da Função  $y = \frac{1}{t}$  com  $t > 0$ ,  $t = 1$  e  $t = x$  com  $x > 1$   
(Autoria Própria)

A medida dessa área é uma função  $x$ ; na qual chamaremos de  $A(x)$  definiremos pela integral definida

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

e para os casos em que  $0 < x < 1$ , consideramos:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

sendo assim, a integral  $\int_x^1 \frac{1}{t} dt$ , na Figura 5, representa a medida da área compreendida pela curva  $y = \frac{1}{t}$  com  $t > 0$ , pelo eixo  $t$  e pelas retas paralelas  $t = x$  e  $t = 1$ . Então essa integral será a medida da área da região pintada na Figura 5, com o sinal negativo.

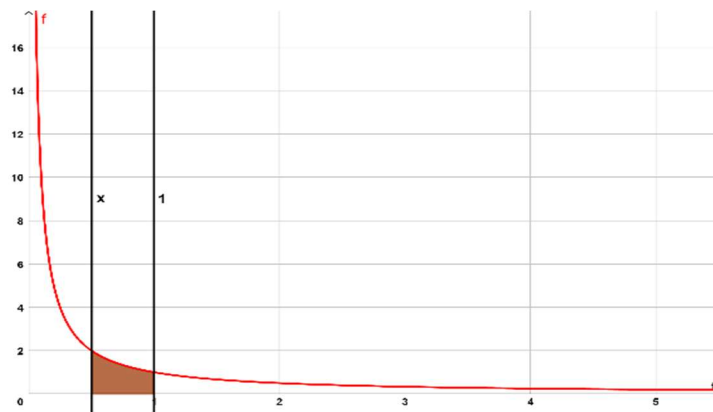


Figura 5. Gráfico da Função  $y = \frac{1}{t}$  com  $t > 0$ ,  $t = x$  e  $t = 1$  com  $x < 1$   
(Autoria Própria)

---

para  $x = 1$ , a integral  $\int_1^x \frac{1}{t} dt$  transforma-se em  $\int_1^1 \frac{1}{t} dt$ , que é igual a zero. Assim, as limitações à esquerda e à direita da região coincidem e a medida da área é 0.

Deste modo, a integral  $\int_1^x \frac{1}{t} dt$  para  $x > 0$  pode ser interpretada em termos da medida da área de uma região. Seu valor depende de  $x$  e será usada para definir a função logarítmica natural.

### 3.1.2 Definição da Função Logarítmica Natural [5]

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad x > 0$$

O domínio dessa função são todos os reais positivos e também a função é diferenciável, na qual sua derivada é  $\frac{1}{x}$ . Com esse resultado obtemos o seguinte teorema.

**3.1.3 Teorema [5]:** Se  $u$  for uma função diferenciável de  $x$  e  $u(x) > 0$ , então  $D_x(\ln u) = \frac{1}{u} D_x u$ .

$$\ln 1 = 0$$

**Prova:** Se  $x = 1$  na definição 3.1.2.

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt$$

o resultado após a igualdade, como já foi falado, é zero. Então  $\ln 1 = 0$ .

O teorema 3.1.3 corresponde a propriedade dos logaritmos dada por (2). Os três teoremas seguintes correspondem as propriedades dos logaritmos dados por (3), (4) e (5) e adiante a propriedade (6). ■

**3.1.4 Teorema [5]:** Se  $f$  for uma função tal que  $f'(x) = 0$  para todos os valores de  $x$  em um intervalo  $I$ , então  $f$  será constante em  $I$ .

**3.1.5 Teorema [5]:** Se  $f$  e  $g$  forem duas funções, tais que  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  no intervalo  $I$ , então haverá uma constante  $K$ , tal que  $f(x) = g(x) + K$  para todo  $x$  em  $I$ .

**Prova do Teorema 3.1.5:** Seja  $h$  uma função definida em  $I$  por

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

assim sendo, para todo  $x$  em  $I$ .

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

porém, seguindo uma hipótese em que,  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x$  em  $I$ . Temos

$$h'(x) = 0 \text{ para todo } x \text{ em } I$$

de acordo com o teorema 3.1.5. A função  $h$  possui a sua derivada igual a zero então existe uma constante  $K$ , tal que

$$h(x) = K \text{ para todo } x \text{ em } I$$

substituindo  $h(x)$  por  $f(x) - g(x)$ , temos

$$f(x) = g(x) + K \text{ para todo } x \text{ em } I$$

Assim o teorema está provado, e ele será utilizado para provar outros teoremas adiante. ■

**3.1.6 Teorema [5]:** Se  $a$  e  $b$  forem números positivos qualquer, então:  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

---

**Prova:** Considere a função  $f$  definida por  $f(x) = \ln(ax)$ , onde  $x > 0$ . Então:

$$f'(x) = \frac{1}{(ax)}(a)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Como as derivadas de  $\ln(x)$  e  $\ln(ax)$  são iguais, então há uma constante  $K$ , tal que

$$\ln(ax) = \ln x + K \text{ para todo } x > 0$$

para determinar  $K$ , seja  $x = 1$  nessa equação e temos

$$\ln a = \ln 1 + K$$

como  $\ln 1 = 0$ , obtemos  $K = \ln a$ . Substituindo  $K$  por  $\ln a$ , temos

$$\ln(ax) = \ln x + \ln a \text{ para todo } x > 0$$

tomando  $x = b$ , obtemos

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

■

**3.1.7 Teorema [5]:** Se  $a$  e  $b$  forem números positivos quaisquer, então  $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

**Prova:** Como  $a = \frac{a}{b} \times b$ ,

$$\ln a = \ln \left( \frac{a}{b} \times b \right)$$

aplicando o teorema 3.1.6 ao termo após a igualdade acima, temos

$$\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

■

**3.1.8 Teorema [5]:** Se  $a$  for um número positivo qualquer e  $r$  um número racional qualquer, então  $\ln a^r = r \ln a$

**Prova:** Do teorema 3.1.3, se  $r$  for um número racional qualquer e  $x > 0$ ,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} r x^{r-1}$$

$$D_x(\ln x^r) = \frac{r}{x}$$

e também

$$D_x(r \ln x) = \frac{r}{x}$$

logo,

$$D_x(\ln x^r) = D_x(r \ln x)$$

Vemos que as derivadas de  $\ln x^r$  e  $r \ln x$  são iguais: assim, do teorema 3.1.6, existe uma constante  $K$ , tal que

$$\ln x^r = r \ln x + K \text{ para todo } x > 0$$

substituindo  $x$  por 1 nessa equação, podemos determinar  $K$

$$\ln 1^r = r \ln 1 + K$$

Sabendo que  $\ln 1 = 0$ , então  $K = 0$ . Substituindo  $K$  por 0 na equação, temos

$$\ln x^r = r \ln x \text{ para todo } x > 0$$

tomando  $x = a$ , onde  $a$  é um número positivo qualquer, obtemos

$$\ln a^r = r \ln a$$

■

### 3.2 A Função Exponencial Natural

Será apresentado dois teoremas que mostram que a função logarítmica natural é crescente e que possui uma inversa também crescente. A função inversa do logaritmo natural é chamada de função exponencial natural, a qual passamos a definir[5].

**3.2.1 Teorema [5]:** Suponha que o domínio da função  $f$  seja o intervalo fechado  $[a, b]$ . Então

- (i) Se  $f$  for contínua e crescente em  $[a, b]$ ,  $f$  terá uma inversa  $f^{-1}$  que estará definida em  $[f(a), f(b)]$ ;
- (ii) Se  $f$  for contínua e decrescente em  $[a, b]$ ,  $f$  terá uma inversa  $f^{-1}$  que estará definida em  $[f(b), f(a)]$ ;

**3.2.2 Teorema [5]:** Supondo que a função  $f$  seja contínua e crescente no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então, se  $f^{-1}$  for sua inversa, que está definida em  $[f(a), f(b)]$ .

- (i)  $f^{-1}$  crescente em  $[f(a), f(b)]$ .
- (ii)  $f^{-1}$  é contínua em  $[f(a), f(b)]$ .

Com esses dois teoremas confirmamos a afirmação acima e agora podemos definir a função exponencial natural.

**3.2.3 Teorema [5]:** Se  $f$  for uma função biunívoca tendo  $f^{-1}$  como sua inversa, então  $f^{-1}$  será uma função biunívoca tendo  $f$  como sua inversa. Além disso:  
 $f^{-1}(f(x)) = x$  para  $x$  no domínio de  $f$  e  $f(f^{-1}(x)) = x$  para  $x$  no domínio de  $f^{-1}$ .

#### 3.2.4 Definição Função Exponencial Natural

A função exponencial natural é a inversa da função logarítmica natural: assim sendo, ela é definida por

$$\exp(x) = y \text{ se e somente se } x = \ln y$$

Como a função logarítmica natural e a função exponencial natural são inversas, então a imagem da função logarítmica natural, que é o conjunto de todos os números reais, passa a ser o domínio da função exponencial natural. A imagem da função exponencial natural é o conjunto dos números positivos que consequentemente é o domínio da função logarítmica natural.

Assim segue do teorema 3.2.3 que

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ e } \exp(\ln x) = x \tag{7}$$

agora podemos definir  $a^x$ , no qual  $a$  é um número positivo e  $x$ , um número irracional. Para chegarmos numa definição razoável, iremos considerar o caso de  $a^r$ , no qual  $a > 0$  e  $r$  um número racional. Substituindo  $x$  por  $a^r$ , na equação  $x = \exp(\ln x)$ , obtemos

$$a^r = \exp(\ln(a^r)) \text{ com } 0 < a \neq 1$$

pelo teorema 3.1.8,  $\ln(a^r) = r \ln a$  então, da expressão acima  $a^r = \exp(r \ln a)$ . No membro após a igualdade  $r$  é um número real qualquer, assim usaremos isso em nossa definição[5].

---

### 3.2.5 Definição de $a^x$ com $a$ sendo um número positivo e $x$ um número irracional

Se  $a$  for um número positivo qualquer e  $x$  for um número real qualquer, definimos

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

O teorema 1.3.8 afirma que se  $a$  for um número positivo qualquer e  $r$  um número racional qualquer, então  $\ln a^r = r \ln a$ . Devido a definição 3.2.5, essa igualdade também é válida para quando  $r$  for um número real qualquer, assim será estabelecido formalmente essa afirmação através de teoremas [5].

**3.2.6 Teorema [5]:** Se  $a$  for um número positivo qualquer e  $x$  um número real qualquer, então  $\ln a^x = x \ln a$ .

**Prova:** Da definição 3.2.5, tem-se

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

da definição 3.2.4,

$$\ln a^x = x \ln a$$

■

Agora iremos ver a definição de um dos números mais importantes de matemática.

### 3.2.7 Definição do Número $e$ [5]

$$e = \exp 1 \quad e \approx 2,7182818$$

### 3.2.8 Teorema [5]:

$$\ln e = 1$$

**Prova:** Pela definição 3.2.7

$$e = \exp 1$$

logo,

$$\ln e = \ln(\exp 1)$$

como as funções logarítmicas e exponencial naturais são inversas, então o termo após a igualdade é 1. Assim

$$\ln e = 1$$

■

Observe que o teorema 3.2.8 corresponde a propriedade (6) da seção 3.1. Assim demonstremos que a função logarítmica natural satisfaz as propriedades de (2) à (6) dos logaritmos da seção 3.1.

### 3.2.9 Teorema [5]: Para todo os valores de $x$ , $\exp(x) = e^x$

**Prova:** Pela definição 3.2.5, com  $a = e$

$$e^x = \exp(x \ln e)$$

logo, pelo teorema 3.2.8,  $\ln e = 1$ . Assim substituindo na equação acima, temos

$$e^x = \exp x$$

a partir de agora escreveremos  $e^x$  no lugar de  $\exp x$  e assim, da definição 3.2.4

$$e^x = y \text{ se e somente se } x = \ln y \quad (8)$$

com  $e^x$  no lugar de  $\exp(x)$ , (7) torna-se

$$\ln e^x = x \text{ e } e^{\ln x} = x$$

se substituirmos  $\exp(x \ln a)$  por  $e^{x \ln a}$  na equação da definição 3.2.5, temos

$$a^x = e^{x \ln a} \text{ para todo } a > 0$$

Essa igualdade também pode ser usada para calcular  $a^x$  quando  $x$  for um número real qualquer, ou seja, podemos utilizá-la para quando  $x$  for um número irracional.

Mostrando um exemplo, calcularemos o valor de  $5^{\sqrt{2}}$ .

$$5^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 5} = 9,738517 \dots$$

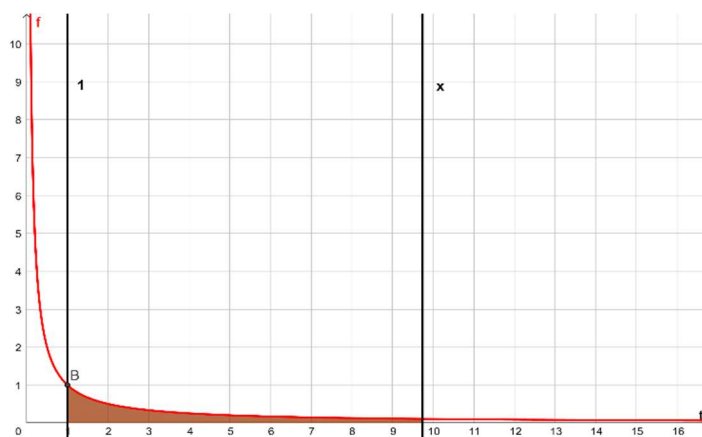


Figura 5. Gráfico da Função do Exemplo acima,  $y = \frac{1}{t}$  com  $t > 0$ ,  $t = 1$  e  $t = x$  com  $x = 9,738517 \dots$   
(Autoria Própria)

#### 4. CONCLUSÕES

Em virtude dos fatos mencionados é de se observar que cada expoente de determinada base possui um significado. Por exemplo, para uma potência com expoente natural, o resultado significa que seu número da base será multiplicado por si mesmo um determinado número de vezes, ou seja, é uma maneira de representar sucessivas multiplicações de um só fator, repetido um determinado número de vezes. Já para uma potência com expoente inteiro negativo, o resultado terá o inverso da base com seu denominador multiplicado, por si mesmo, o número de vezes indicado no expoente, que terá também seu sinal invertido. Para uma potência com expoente racional, temos uma relação da potenciação com a radiciação. Veremos o significado em um exemplo bem simples, onde  $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ , ou seja, tendo  $a$  um número real positivo e  $\frac{m}{n}$  uma fração, onde  $m$  é um número inteiro e  $n$  é um número natural diferente de 0, obtendo o resultado como  $\sqrt[n]{a^m}$ . No objeto estudo desse trabalho, que é a potência com expoente irracional, através de várias definições chegamos a um resultado, onde  $a^x = e^{x \ln a}$  com  $x$  sendo um número irracional. Em vista dos argumentos apresentados no decorrer do trabalho, tomamos

$$a^x = y \text{ com } x \in I$$

$$\ln y = \ln a^x$$

$$\ln y = x \ln a \text{ com } x \in I$$

conclui-se que  $y$  é o termo cuja a área tomada no gráfico da função  $f(t) = \frac{1}{t}$ , no intervalo de  $[1, y]$ , é igual a  $x \ln a$  com  $x$  sendo um número irracional. Assim mostrado no exemplo do final da seção anterior, onde pegou-se a potência  $5^{\sqrt{2}}$ , obtivemos

$$5^{\sqrt{2}} = y$$

$$\ln y = \sqrt{2} \ln 5$$

o resultado obtido dessa potência é 9,738517 .... Ou seja, para que a área tomada no gráfico da função  $f(t) = \frac{1}{t}$ , seja  $\sqrt{2} \ln 5$ , será necessário pegar o intervalo entre  $[1; 9,738517 \dots]$ . Assim, nesse trabalho foi mostrado algumas definições e aplicações sobre números irracionais e também o significado de uma potência com expoente irracional.

---

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Broetto, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**, 2016.
- [2] Lima, I. de Oliveira. **Números Irracionais**, 2016.
- [3] Ávila, G. **Introdução à Análise Matemática**, 2ª. São Paulo SP, 1999.
- [4] Figueiredo, Djairo G. **Números Irracionais e Transcendentes**, 3ª. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [5] Leithold, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**, 3ª. São Paulo SP: HARBRA, 1994.
- [6] Muniz Neto, A. C. **Fundamentos de Cálculo**, 1ª. Rio de Janeiro, 2015.