

PARAMETRIZAÇÃO DA CURVA CICLOIDE E SUAS APLICAÇÕES.

Nathan Rodrigues da Silva¹, Antônio Ronaldo G. Garcia².

Resumo

O objetivo deste trabalho é fazer uma breve apresentação da curva cicloide, trazendo aspectos históricos de como se deu seu descobrimento, demonstrar sua parametrização, assim como as propriedades tautócrona e braquistócrona, além de discorrer como esta curva foi importante para o desenvolvimento do cálculo variacional e quais são suas principais aplicações. Com isto em vista, a definição e parametrização da cicloide são inicialmente desenvolvidas de maneira que possa ser útil para comparação e comprovação futura de suas propriedades e aplicações. São apresentados também as maneiras como foram descobertas de suas principais propriedades, como este descobrimento se relaciona com algumas das principais mentes matemáticas do século XVII e XVIII e quais são suas aplicações mais relevantes nos dias atuais.

Palavras-chave: Curva Cicloide; Parametrização; Tautócrona, Braquistócrona.

1. INTRODUÇÃO

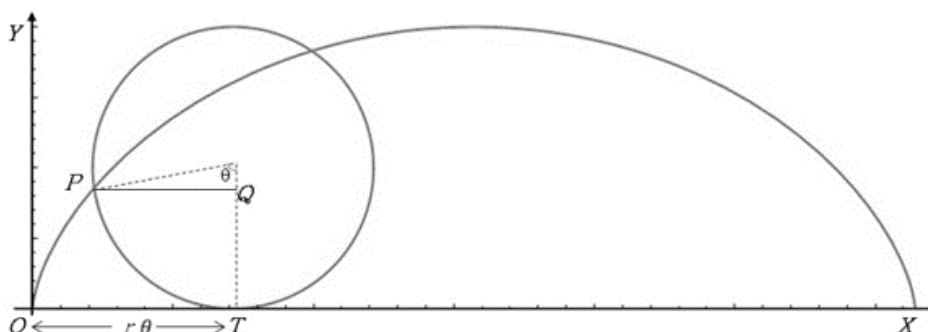
A curva cicloide já é estudada e admirada por anos, tendo algumas discordâncias sobre quem primeiro tratou sobre ela, mas é certo afirmar que sua notoriedade foi atingida durante o século XVII, um dos séculos onde mais ocorreram avanços na matemática, com inúmeros cientistas brilhantes desenvolvendo trabalhos e trocando informações sobre diversos assuntos. Um dos primeiros a desenvolver pesquisas sobre esta curva foi Giles Person de Roberval (1602-1675). Outro que desenvolveu estudos sobre a cicloide foi Galileu Galilei (1564-1642), o famoso matemático, físico, engenheiro e astrônomo, sendo até mesmo o responsável por sua nomenclatura atual. Galileu observou por sua janela a roda de uma charrete que passava pela rua e percebeu seu movimento, intrigado com o que viu resolveu estudá-lo. Estudos sobre a quadratura da cicloide e de como ela podia ser aplicada em construções arquitetônicas foram feitos por Galileu que se via encantado pela graciosidade desta curva. Dois discípulos de Galileu também fizeram estudos sobre a cicloide, Evangelista Torricelli (1608-1647) que conseguiu provar algumas das suposições de Galileu sobre a cicloide e Vincenzo Viviani (1622-1703) que obteve a reta tangente a cicloide.

Durante todo o século XVII e XVIII vários outros cientistas estudaram a curva cicloide e descobriram propriedades muito interessantes e úteis para a comunidade científica e geral, como a propriedade tautócrona e braquistócrona [1]. Sendo essa última o mote de um problema que foi proposto às mentes mais brilhantes da época e teve uma grande relevância para o desenvolvimento do cálculo variacional. Uma abordagem histórica mais aprofundada pode ser vista em [2].

Os principais objetivos deste trabalho são apresentar a curva cicloide, trazendo notas históricas de como se deu seu descobrimento e das propriedades, demonstrar sua parametrização, sua importância para o desenvolvimento de áreas da matemática e responder quais suas principais utilizações atualmente.

2. A CURVA CICLOIDE

Um disco de raio R que rola, sem deslizamento, sobre uma reta numa superfície plana e rígida. A curva formada por um ponto P , localizado na periferia do disco é, por definição, a curva cicloide. (Figura 1)



2.1 PARAMETRIZAÇÃO DA CICLOIDE

Tendo θ o parâmetro da circunferência, variando entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e r o raio desta circunferência representada na Figura 1. Ao girar este círculo à uma determinada distância no sentido horário, teremos esta distância representada por

$$|OT| = r \theta.$$

Neste momento, o centro do círculo será dado por $C(r\theta, r)$ e um ponto P qualquer do círculo é $P(x, y)$. Temos então

$$\begin{aligned} x &= |OT| - |PQ| \\ y &= |TC| - |QC|. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} x &= r\theta - r \sin(\theta) = r(\theta - \sin(\theta)), \\ y &= r - r \cos(\theta) = r(1 - \cos(\theta)); \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas de P serão

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin(\theta)) \\ y = r(1 - \cos(\theta)) \end{cases} ; \theta \in [0, 2\pi]. \quad (1)$$

2.2 A PROPRIEDADE TAUTÓCRONA

Uma curva com a propriedade tautócrona é uma curva que, um objeto, independente do seu ponto inicial tomará a mesma quantidade de tempo para chegar em seu ponto mais baixo. A propriedade tautócrona (do grego *tauto*= de mesmo e *chronos*= tempo) em uma curva era buscada há muito por estudiosos, sendo feitos experimentos em diversas outras curvas, mas sempre sem sucesso.

Esta situação mudou apenas em meados do século XVII, quando o matemático holandês Christiaan Huygens (1629-1695), que desenvolvia uma pesquisa de como desenvolver e aperfeiçoar aparelhos para a medição de tempo, resolveu utilizar a cicloide em seus experimentos. A pesquisa de Huygens se resumia na obtenção de um pêndulo com esta característica, ou seja, um pêndulo que independente de sua amplitude tivesse o mesmo período. Um pêndulo simples não se encaixava nesta característica, apesar de Galileu Galilei já tivesse provado que, em pequenas amplitudes o período independe da amplitude, no pêndulo simples, para amplitudes maiores o período torna-se dependente.

Huygens já havia tentado inúmeras formas de trazer esta propriedade para o relógio de pêndulo, uma de suas tentativas foi adicionar obstáculos à trajetória de um pêndulo simples, fazendo com que o fio diminuísse ao encostar nos obstáculos e assim diminuir o comprimento efetivo do pêndulo, compensando sua amplitude e consequentemente o aumento do período. Várias tentativas foram necessárias até que Huygens, atraído pela notoriedade que a cicloide obtivera nos últimos anos, resolvesse utilizá-la em seus experimentos. Assim chegava ao fim as buscas de Huygens pelo pêndulo tautócrono (ou isócrono).

Com os obstáculos acoplados ao pêndulo simples tendo o formato cicloidal, Huygens conseguiu criar um pêndulo que, independentemente de sua amplitude de oscilação apresentará o mesmo período. A Figura 2 mostra a trajetória que o pêndulo descreve após ser adicionado os obstáculos cicloidais.

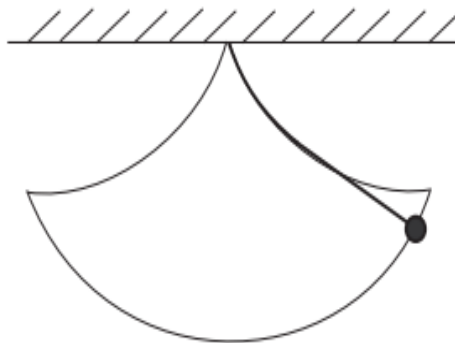


Figura 2. Trajetória cicloidal do pendulo de Huygen. [1]

Após os experimentos empíricos, Huygens conseguiu comprovar sua descoberta utilizando-se da mecânica clássica e outras propriedades já conhecidas da cicloide. A demonstração da independência do período em relação à amplitude podemos fazer uma análise considerando uma partícula que seja abandonada, a partir do repouso, de um ponto P_0 a uma altura H em relação ao ponto mais baixo da trajetória adotada. Deste modo, $y_0 = y(0) = H$. Pela lei de conservação de energia, que diz que a energia total de um sistema isolado é sempre constante, ou seja, a soma das energias cinética K e potencial U é constante para qualquer intervalo de tempo, pode-se calcular o módulo da velocidade desta partícula, v , ao se encontrar em um ponto P qualquer localizado a uma altura y em relação ao ponto mais baixo. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 &= mg(H - y), \\ v &= \sqrt{2g(H - y)}.\end{aligned}\tag{2}$$

Igualando a definição de velocidade com a equação (2) encontrada

$$v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{2g(H - y)};$$

Desta maneira podemos definir a componente em y da velocidade como sendo

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\sqrt{2g(H - y)}\cos(\beta).\tag{3}$$

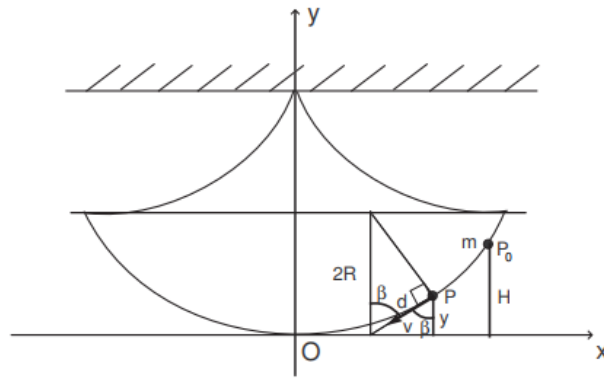


Figura 3. Projeção do movimento de uma partícula sobre a superfície da cicloide. [3]

Utilizando-se de uma proposição da cicloide que diz que a reta tangente à cicloide em um ponto P qualquer passa pelo topo do círculo gerador, a demonstração detalhada desta proposição pode ser vista em [1]. Temos

$$\cos(\beta) = \frac{d}{2R} \quad e \quad y = d\cos(\beta),$$

Onde β e d , estão representados na figura 3. tendo então

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{y}{2R}}.\tag{4}$$

Substituindo então, (3) em (4)

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(H - y)y}.\tag{5}$$

Como estamos buscando o período, a equação (5) pode ser rearranjada para

$$-\sqrt{\frac{g}{R}}dt = \frac{dy}{\sqrt{(H - y)y}},\tag{6}$$

Aplicando integral em ambas as partes de (6)

$$\int_0^{\frac{\tau}{4}} \sqrt{\frac{g}{R}} dt = \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}}; \quad (7)$$

Os intervalos de integração são definidos, sabendo que o intervalo de tempo entre o instante inicial de movimento da partícula até o ponto mais baixo da trajetória é dado por $\frac{\tau}{4}$, sendo τ o período de oscilação e a altura do ponto inicial P_0 a este mesmo ponto mais baixo é dado por H . ao integrar (7), obtém-se

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^H \frac{dy}{\sqrt{(H-y)y}}.$$

Para resolver esta integral é necessário uma mudança de variável, afim de extrair qualquer dependência de H . Sendo assim $\xi = \frac{y}{H}$ onde $dy = H d\xi$. Tem-se então

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}};$$

Agora, para obter a expressão de τ completa-se o quadrado, de tal maneira que

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2}}. \quad (8)$$

Faz-se necessária outra mudança de variável, onde $\xi - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin(\theta)$, com $d\xi = \frac{1}{2} \cos(\theta) d\theta$. Resultando em

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}} d\theta; \quad (9)$$

Para facilitar o entendimento dos cálculos, a integral na equação (9) será chamada de Γ . Assim

$$\tau = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \Gamma. \quad (10)$$

Para resolver Γ , utiliza-se a identidade trigonométrica $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Desta maneira teremos

$$\Gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} d\theta.$$

Eliminando a raiz quadrada do denominador

$$\Gamma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta;$$

Temos então, o resultado final de

$$\Gamma = \pi. \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10) tem-se

$$\tau = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{4R}{g}\right)}. \quad (12)$$

Observando a expressão final (12) do período nota-se que não há nenhuma dependência da amplitude das oscilações. Assim fica comprovado matematicamente a independência da amplitude no período do pêndulo de Huygens.

2.3 A PROPRIEDADE BRAQUISTÓCRONA

A descoberta de que a cicloide possui esta propriedade foi feita durante a resolução de um dos problemas matemáticos mais famosos da história. O desafio proposto por Johann Bernoulli (1667-1748) em 1696, que mais

tarde viria a ser chamado de o problema da braquistócrona, foi publicado na revista *Acta Eruditorum* com os dizeres “Dado dois pontos A e B em um plano vertical, para atribuir a uma partícula móvel M a trajetória AMB ao longo do qual, descendo sob seu próprio peso, passa do ponto A ao B no menor tempo.” Posteriormente Johann fez outra publicação complementando esta primeira onde dizia “Determinar a curva que junta dois pontos dados, a diferentes distâncias na horizontal e não na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob o seu próprio peso e começando o seu movimento no ponto superior, desça mais rapidamente ao ponto inferior.” Estava assim lança o desafio aos matemáticos da época.

Não demorou muito até que comesçassem a aparecer soluções para este problema. Johann, sendo o propositos foi um dos que conseguiram propor um método para chegar à resposta. Ele utilizou-se de uma analogia com o princípio de Fermat da trajetória de tempo mínimo para determinar que essa curva era uma cicloide. Outros cientistas como Gottfried Leibniz (1664-1716), Isaac Newton (1643-1727) (primeiro anonimamente e só depois assumiu a autoria) e o irmão mais velho de Johann, Jakob Bernoulli (1655-1705) também apresentaram soluções [4] e [5].

A solução de Jakob Bernoulli ganhará mais espaço neste trabalho por ter tido uma importante parcela de contribuição para o desenvolvimento do cálculo variacional. Sua resolução tem um caráter mais geral e pode ser aplicada em outros problemas. Baseia-se na semelhança de triângulos, fazendo uso do conceito de pontos estacionários de funções e parcelas infinitesimais de uma curva. Será apresentada aqui, uma versão resumida da resolução.

Como a braquistócrona é a rota de descida de menor tempo, o Δt deve ser zero em relação a uma variação infinitesimal deste percurso. Considerando a Figura 3

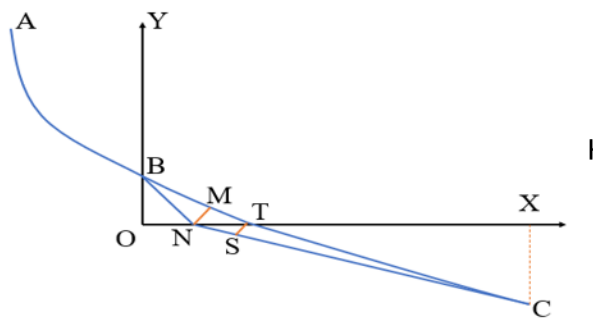


Figura 4. Seção da curva braquistócrona. (Autoria própria)

Considerando ABTC uma pequena seção da braquistócrona e H sua distância vertical, uma partícula que se mova ao longo da curva terá uma velocidade instantânea $\sqrt{H}$. sendo BT um segmento pequeno a ponto que uma partícula se move por ele com velocidade constante $\sqrt{|BT|}$, sendo $|BT|$ o comprimento de BT. Por analogia podemos definir a velocidade $\sqrt{|YO|}$ em TC.

Sendo a braquistócrona estacionária, a trajetória ABNC também deve ter o tempo mínimo. Sabendo então que os tempos de descida de ABTC e ABNC são iguais, podemos dizer que o tempo de descida entre MT e NS também são iguais. Tem-se então que

$$\frac{|MT|}{\sqrt{|BT|}} = \frac{|NS|}{\sqrt{|YO|}}. \quad (13)$$

Por estarmos lidando com distância infinitesimais, podemos considerar MS um arco de um círculo centrado em B e NTM sendo um ângulo reto. Assim, por semelhança de triângulos

$$\frac{|MT|}{|NT|} = \frac{|OT|}{|BT|}, \quad (14)$$

Tomando x como a distância horizontal e s como o comprimento do arco ao longo da braquistócrona, podemos reescrever as equações como

$$\frac{|MT|}{|NT|} = \frac{dx}{ds} \quad (15)$$

No segmento BT e

$$\frac{|OT|}{|BT|} = \frac{dx}{ds} \quad (16)$$

No segmento TC.

Reorganizando as equações (15) e (16) de modo a isolar $|OT|$ e $|MT|$ e aplicado à equação (11) tem-se

$$\frac{dx}{ds\sqrt{H}} = k. \quad (17)$$

Jakob Bernoulli reconheceu a equação (17) como sendo a equação diferencial da cicloide. Este método desenvolvido por Jakob mostrou-se muito eficiente para a resolução de problemas de otimização, também conhecidos como problemas de máximos e mínimos e por isso passou a ser estudado por outros matemáticos da época, afim de aperfeiçoá-lo.

O que obteve mais sucesso nesta tarefa foi Leonhard Euler (1707-1783). Aluno de Johann Bernoulli, Euler sempre esteve muito envolvido nas pesquisas dos irmãos Bernoulli, a ponto de em 1744 publicar seu próprio método para descobrir linhas tendo uma propriedade máxima ou mínima da solução de problemas isoperimétricos. Trabalho esse que trazia pela primeira vez a equação que é hoje chamada equação de Euler. Ver [6], páginas 291-318.

Alguns anos à frente, o trabalho de Euler recebeu contribuições dadas por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) [2], páginas 598-600, que possibilitavam a dedução das equações das curvas minimizadoras para problemas mais gerais. Estava assim criado o cálculo variacional ou como também é chamado, cálculo das variações.

Após o desenvolvimento do cálculo variacional problemas desses tipos podiam ser respondidos de maneira mais simples e precisos. Por isso pode-se responder o problema da braquistócrona utilizando a equação de Euler-Lagrange, como pode ser visto a seguir.

2.3.1. A braquistócrona por Euler-Lagrange

Sendo a curva representada na Figura 4 a braquistócrona

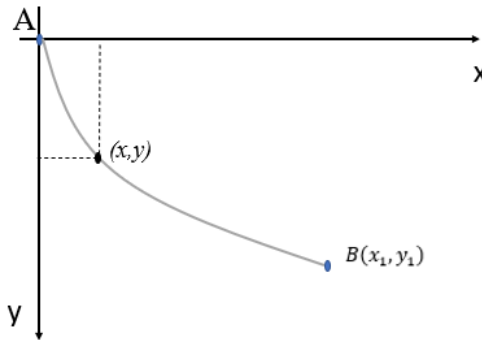


Figura 5. Curva de menor tempo ligando dois pontos. (Autoria própria)

Para encontrar o tempo em que uma partícula percorre esse percurso, pode-se utilizar a definição de velocidade, para chegar a

$$dt = \frac{ds}{v}; \quad (18)$$

Considerando uma fração infinitesimal ds desta curva, a equação fica decomposta a de tal forma que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (19)$$

A velocidade pode ser definida utilizando o princípio de conservação de energia. Tendo então uma partícula de massa m , em um ponto qualquer da curva, com deslocamento vertical y e v sendo o módulo da velocidade em um instante partindo do ponto A do repouso

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

Como a partícula partiu do repouso, pode-se dizer que a energia cinética K_A é nula, assim com a energia potencial U_B , temos então

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2;$$

Fazendo as manipulações necessárias

$$v = \sqrt{2gy}; \quad (20)$$

Substituindo então, as equações (19) e (20) em (18), tem-se que

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy}}. \quad (21)$$

Para fins de facilitar os cálculos, a equação toma a seguinte forma

$$dt = \frac{\left(\sqrt{\frac{dx^2}{dy^2} + 1} dy \right)}{\sqrt{2gy}};$$

Para obtermos o tempo total, aplica-se uma integral no intervalo de A a B de tal maneira que

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_A^B \frac{\sqrt{(x'^2+1)}}{\sqrt{y}} dy. \quad (22)$$

Note que foi mudada a notação de $\frac{dx}{dy}$ para x' .

Como o objetivo é descobrir qual a função $x = x(y)$ que torne Δt o menor possível, deduz-se que o integrando desta equação deve obedecer a equação de Euler-Lagrange, então

$$f(x, x', y) = \frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{y}};$$

Aplicando à equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{y}} \right)}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{y}} \right)}{\partial y'} \right) = 0; \quad (23)$$

Ao resolver as derivadas parciais tem-se que o primeiro termo é igual a zero, já que a função independe de x , o segundo termo por sua vez é igual a

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{x'^2+1}}{\sqrt{y}} \right)}{\partial y'} \right) = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y'}} , \quad (24)$$

Pela identidade de Beltrami, temos

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \frac{1}{\sqrt{y'}} = C. \quad (25)$$

Sendo C uma constante qualquer

Manipulando a equação (25) de maneira a eliminar as raízes e a constante aparece de uma maneira a facilitar os cálculos futuros, assim

$$\frac{x'^2}{1+x'^2} \frac{1}{y'} = \frac{1}{2a};$$

Agora, fazendo as devidas manipulações chega-se em

$$x' = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}; \quad (26)$$

Aplicando a integral na equação (26), chega-se em

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}} dy \quad (27)$$

Esta integral pode ser resolvida por substituição trigonométrica, onde

$$y = a(1 - \cos(\theta)) \quad (28)$$

$$dy = a \sin(\theta) d\theta. \quad (29)$$

Substituindo (28) e (29) em (27)

$$x = \int \sqrt{\frac{a(1-\cos(\theta))}{a(1+\cos(\theta))}} a \sin(\theta) d\theta. \quad (30)$$

A resposta desta integral se dá por

$$x = a(\theta - \sin\theta). \quad (31)$$

Fica claro, ao analisar as equações (28) e (31) que elas são as coordenadas parametrizadas da cicloide da equação (1).

3. APLICAÇÕES

As propriedades da cicloide citadas até aqui são muito versáteis, o que faz com que esta curva possa ser aplicada em diversas áreas, além da elegância e beleza que muitos consideram a cicloide ter, a ponto de ser chamada de a Helena da geometria, em referência à personagem do conto de Homero. As aplicações podem abranger para qualquer problema em que se deseje minimizar o tempo entre dois pontos, aumentar precisões de movimento ou que precisem ter características isócronas. Algumas destas serão apresentadas para fins de exemplificar sua versatilidade.

3.3. RELÓGIO DE PÊNDULO CICLOIDAL

O relógio de pêndulo cicloidal já foi citado anteriormente neste trabalho. Desenvolvido por Christiaan Huygens, este relógio contribuiu significativamente para as viagens marítimas, por exemplo, que devido a grande movimentação dos barcos pelas ondas do mar, não permitia a utilização de relógios de pêndulo a bordo e para outras tarefas que necessitavam de uma contagem de tempo mais precisa. Na seção 2.2 deste trabalho é demonstrado a independência do período de oscilação em relação a amplitude. Mais detalhes sobre este relógio podem ser vistos na referência [7].

3.2. PISTA DE SKATE

O skateboarding é um esporte muito dinâmico, com algumas modalidades distintas, onde o atleta que mostrar mais desenvoltura e habilidade com o skate em uma pista de skate, fazendo manobras e acrobacias. Os atletas têm um tempo limitado para poder efetuar sua série de manobras, por isso precisam aproveitar o tempo da melhor forma possível.

O skate vertical é uma modalidade praticada em pistas em formato de U, com as rampas descrevendo arcos de circunferência, onde os atletas começam em um lado superior da pista e ficam transitando, enquanto fazem suas manobras. Devido o tempo de cada atleta ser limitado, é aconselhável que esta pista tenha seu tempo de descida como sendo o menor possível, por isso, caso as pistas de skateboarding fossem feitas com formato cicloidal, considerando a propriedade braquistócrona já apresentada neste trabalho esta tarefa teria sua eficiência maximizada.

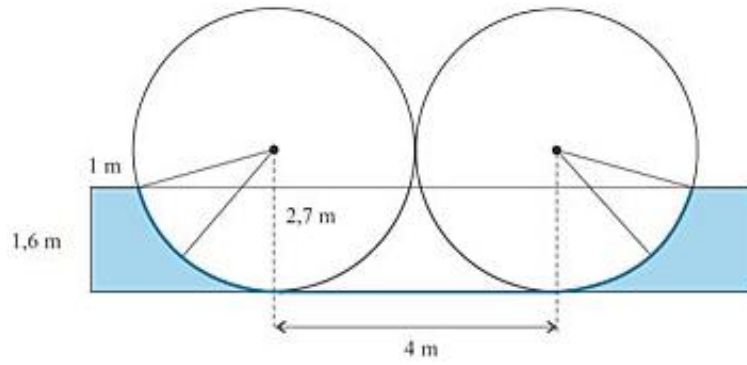


Figura 6. Pista de skate com formato cicloidal. [8]

Uma vez que os arcos de circunferência sejam trocados por arcos cicloidais na Figura 6, obtém-se uma rampa de tempo mínimo que liga os pontos de altura 1,6 metros a outro em 0 metros.

Para a modelagem de uma rampa em formato cicloidal da Figura 6 deve-se levar em consideração a equação paramétrica da cicloide (equação (1)). Adotando $r = 0,8$, a equação fica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x(\theta) = 0,8(\theta - \text{sen}\theta) \\ y(\theta) = 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases};$$

Fazendo uma reflexão desta curva pelo eixo das abcissas, obtém-se

$$\begin{cases} x(\theta) = 0,8(\theta - \text{sen}\theta) \\ y(\theta) = -0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}; \quad (32)$$

Transladando a equação (32) 1,6 unidades no eixo das ordenas

$$\begin{cases} x(\theta) = 0,8(\theta - \text{sen}\theta) \\ y(\theta) = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}; \quad (33)$$

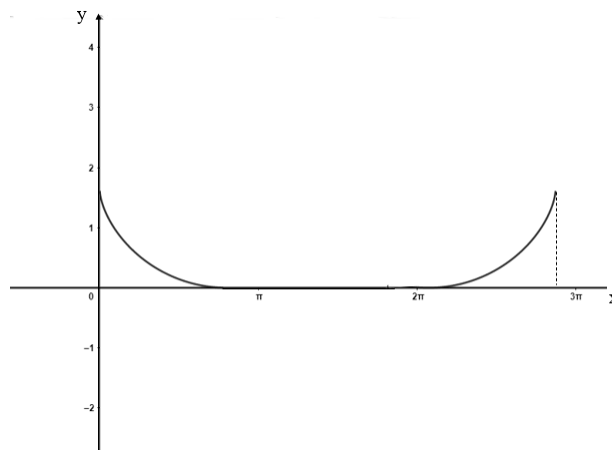
Considerando o eixo vertical de simetria da curva obtida, translada-se o semiarco direito 4 unidades para a direita. De maneira que

$$\begin{cases} x(\theta) = 0,8(\theta - \text{sen}\theta) \\ y(\theta) = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}; \theta \in [0; 0,8\pi] \quad (34)$$

$$y(\theta) = 0; \theta \in [0,8\pi; 0,8\pi + 4] \quad (35)$$

$$\begin{cases} x(\theta) = 4 + 0,8(\theta - \text{sen}\theta) \\ y(\theta) = 1,6 - 0,8(1 - \cos\theta) \end{cases}; \theta \in [0,8\pi + 4; 1,6\pi + 4], \quad (36)$$

A representação gráfica desta curva pode ser observada na Figura 7.



3.4. REDUTORES CICLOIDAIS

Redutores cicloidais são peças mecânicas que tem como principal função transformar movimento circular em movimento linear com máxima precisão. São utilizados em muitos equipamentos, principalmente máquinas que exigem muita precisão em seus movimentos.

O redutor cicloidal é uma complexa peça de engenharia, formada, além de outras coisas, por engrenagem que giram de forma a descreverem uma trajetória cicloidal, minimizando a quantidade de movimento e trabalho necessário para que a tarefa seja concluída [9].

Algumas das vantagens são a redução nos tamanhos das peças, maior eficiência, menor volume e maior durabilidade. São utilizados, por exemplo, em guindastes de construção civil, barcos, na robótica, em vários tipos de máquinas montadoras (montagens desde componentes eletrônicos até carros) entre outras aplicações.

3.5. ARQUITETURA

A cicloide é reconhecidamente uma curva considerada muito elegante, tanto em sua formulação matemática como quando aplicada em edificações. Por isso os engenheiros e arquitetos não demoraram para começar a utilizá-las em construções. Este formato é, na maioria das vezes aplicado ao teto de edificações.

Além da beleza, construções com formato cicloidal ainda guardam uma característica muito peculiar. A luz solar é distribuída em toda a sua superfície durante todo o dia, trazendo uma iluminação melhor e mais uniforme. Um exemplo de edificação em que a cicloide foi aplicada é o museu de arte Kimbell, localizado no Texas – EUA [10], criado por Louis Kahn e que é reconhecido mundialmente por sua beleza arquitetônica.

4. CONCLUSÕES

O estudo da cicloide e de suas propriedades vem trazendo muitos avanços em diversas áreas da matemática, física e engenharia, tendo cada dia mais, aplicações práticas que contribuem no desenvolvimento da sociedade como um todo. A modelagem matemática e algumas aplicações práticas da cicloide foram aqui apresentadas afim de demonstrar a variedade de aplicações que esta curva pode ter e como sua utilização pode otimizar o funcionamento de uma máquina, a prática de um esporte e até mesmo a construção de uma edificação.

Sua importância é a muito reconhecida, tendo sido alvo de estudos de algumas das mentes mais brilhantes que já viveram. Disto isso, este trabalho vem com o intuito de ajudar, mesmo que de maneira mínima para a compreensão e popularização das propriedades e características desta magnífica curva e também contribuir com trabalhos futuros sobre a cicloide e suas aplicações.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PEDROSO, H. A.; PRECIOSO J.C. Aspectos históricos sobre a cicloide: a curva que desafia a intuição. C.Q.D. - Revista eletrônica de matemática, Bauru. vol. 3, p. 17-34. dez. 2014.
- [2] KATZ, V. J. A history of mathematics: an introduction. 3ª. ed., Addison-Wesley, 2009.
- [3] BURROWES, M.; FARINA, C. Sobre o pêndulo isócrono de Christiaan Huygens. Revista brasileira de ensino de física, vol. 27, n. 2, p. 175-179, fev. 2005.
- [4] BABB, J.; CURRIE, J. the brachistochrone problem: mathematics of a broad audience via a large context problem. The Mathematics Enthusiast, vol. 5, n. 2, article 2, 2008.
- [5] HERRERA, M. I. Galileo, Bernoulli, Leibniz and Newton around the brachistochrone problem. Revista Mexicana de Física, vol. 40, n 3, p. 459-475, jan. 1994.
- [6] ELSGOLTZ, L. Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional. Moscou. Editorial MIR, 1969.
- [7] KILHIAM, Kleber. Christiaan Huygens e o relógio de pêndulo. O Baricentro da Mente. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2013/12/christiaan-huygens-e-o-relogio-de.html>>. Acesso em: 5 outubro 2021.
- [8] MELLO, J. P. A Rampa de Skate do Tempo Mínimo. RPM 59. Disponível em <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/59/3.htm>>. Acesso em: 5 outubro 2021.
- [9] HWANG, Y.; HSIEH, C. Geometric desing using hypotrochoid and nonundercuttin coditions of na internar cycloidal gear. Journal of Mechanical Design. Taiwan, vol. 129, p. 413-420, abr. 2007
- [10] BALAKRISHNAN, Priji. Looking at light in the Kimbell art museum. Medium. Disponível em: <<https://medium.com/@priji/looking-at-light-in-the-kimbell-art-museum-3b85f2e3bc62>>. Acesso em: 06 outubro 2021.



SIGAA - BIBLIOTECAS

DECLARAÇÃO DE QUITAÇÃO

MATRÍCULA: 2017010899 (*identificador*)

USUÁRIO: Sr(a). NATHAN RODRIGUES DA SILVA

VÍNCULO DO USUÁRIO: ALUNO DE GRADUAÇÃO

CENTRO: UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

CURSO: INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA.

Declaramos, para os devidos fins, que em nome do usuário(a) supracitado(a), não existe débitos nas bibliotecas da UFERSA feitos com o vínculo ALUNO DE GRADUAÇÃO acima mostrado.

Esse vínculo foi quitado e não poderá mais ser usado para realizar empréstimos.

ATENÇÃO

Para verificar a autenticidade deste documento acesse <https://sigaa.ufersa.edu.br/sigaa/documentos/> informando o identificador, a data de emissão e o código de verificação **6bf9a34734**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às dez horas do dia dezessete de novembro de dois mil e vinte e um, de modo Online, via Google Meet cuja a gravação se encontra no link https://drive.google.com/file/d/1SRqn_5T-0c-yoyXYg9c81zQZnOuEEqil/view, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria do aluno **NATHAN RODRIGUES DA SILVA**, aluno do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula **2017010899**, com o título **“Parametrização da curva cicloide e suas aplicações”**. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Dr. Paulo Cesar Linhares da Silva e Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues, como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, em reunião fechada, tendo o aluno sido considerado **APROVADO**. E para constar, eu, Antonio Ronaldo Gomes Garcia, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 17 de novembro de 2021.

Assinatura dos membros da Banca Examinadora.

ANTONIO RONALDO
GOMES
GARCIA:27476273818

Assinado de forma digital por ANTONIO
RONALDO GOMES GARCIA:27476273818
Dados: 2021.11.19 14:54:33 -03'00'

Prof. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia – UFERSA
Presidente e orientador

Paulo César Linhares da
Silva

Assinado de forma digital por Paulo César
Linhares da Silva
Dados: 2021.11.23 18:36:02 -03'00'

Prof. Dr. Paulo Cesar Linhares da Silva – UFERSA
Primeiro Membro

Documento assinado digitalmente



WALTER MARTINS RODRIGUES
Data: 24/11/2021 08:00:19-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Segundo Membro