

DESENVOLVIMENTO DE UMA PLANILHA PARA O CÁLCULO DE DESLOCAMENTOS EM VIGAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS ESTÁTICOS UTILIZANDO O MÉTODO DAS FORÇAS VIRTUAIS.

Pedro Henrique Castro Pereira¹, Rodrigo Nogueira de Codes²

Resumo: Presente na vida de grande parte dos engenheiros o Excel é um *software* de folha de cálculo de planilhas comercializado pela Microsoft Office®. As planilhas são criadas conforme a necessidade de seu usuário, colaborando assim na otimização de tempo e auxiliando na tomada de decisões. O vigente artigo tem por objetivo a elaboração de uma planilha, de fácil utilização, que realize os cálculos de deslocamento de uma viga submetida a carregamentos estáticos utilizando o método das forças virtuais. Para isso foram implementadas equações de equilíbrio na planilha para se obter as reações de apoio e realizar os cálculos de momento fletor tanto para o carregamento estático quanto para a força virtual, e conseguir aplicar a equação dos princípios das forças virtuais.

Palavras-chave: Planilha; otimização; *softwares* na engenharia; método das forças virtuais; redução de gastos; ensino.

1. INTRODUÇÃO

Presente na maioria dos escritórios de engenharia para as mais diversas funções devido à sua grande capacidade de processamento e sua gama de possibilidades, o Excel é um requisito quase que obrigatório na vida dos engenheiros. É um *software* que consiste em um programa de computador que utiliza planilhas eletrônicas, células, fórmulas e linhas de códigos para almejar o objetivo. Esse código de cálculo foi utilizado para aplicação do vigente trabalho, devido a sua grande abrangência no mercado, e na utilização empresas e instituições de ensino, tanto pelos alunos, quanto pelos professores.

O método de energia implementado no *software* para o presente trabalho foi o Princípio dos Trabalhos Virtuais, mais especificamente o método das Forças Virtuais, que, segundo Hibbler (2014), foi descoberto pelo físico John Bernoulli em 1717. Muito visto em sala de aula para calcular as deformações em vigas e treliças, esse método, cujo o objetivo é calcular as deflexões causadas por esforços externos, tais como cargas ou momentos em qualquer ponto dos elementos estruturais, consiste na aplicação de uma força virtual no ponto que se deseja calcular a deflexão, considerando-se o momento virtual interno e o momento real interno, desprezando assim o esforço cortante interno.

O método das seções é um método utilizado para analisar os esforços internos em elementos estruturais. O mesmo tem extrema importância ao longo do curso de engenharia, onde, para análise de vigas, é feito um corte entre pontos relevantes da estrutura e aplicam-se equações de equilíbrio para analisar seus esforços internos.

Segundo uma pesquisa publicada pelo site Cultura Mix em 2012, o primeiro *software* surgiu na Inglaterra em 1948, baseado em um sistema de cálculos criado pelo matemático húngaro John von Neuman, quando os computadores ainda eram grandes máquinas com poucas funções e baseadas em dois níveis de linguagem de programação.

Os *softwares* são indispensáveis quando se trata de automatização de tarefas repetitivas, visto que podem ser moldados a partir da necessidade do homem. Observando a questão institucional, os *softwares* desempenham um papel pedagógico muito importante, muito utilizados por alunos e também por professores, para melhorar sua metodologia, mostrando e exemplificando as aplicações de sua disciplina, seja demonstrando ensaio, projetos ou *softwares* que serão futuramente usados, melhor para ensino e aprendizagem. Atrelado a isso, a automatização do método das seções, no caso do vigente trabalho, para a resolução de análises de esforços internos em vigas, seja no meio acadêmico ou profissional é algo muito importante.

A exemplo do *Ftool*, um *software* gratuito idealizado pelo professor do departamento de engenharia civil Luiz Fernando, que, a princípio, foi desenvolvido apenas para o uso em sala e, segundo uma publicação feita no site do

CTC/PUC – Rio, tomou proporções grandiosas, ultrapassando 500 Mil downloads desde de seu lançamento nos anos 90. Ele utiliza do método de Euler-Bernoulli ou Timoshenko para calcular os métodos estruturais, diferentemente do método escolhido para esse trabalho.

1.1. OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem por objetivo a elaboração de uma planilha, de fácil utilização, que realize os cálculos de deslocamento de uma viga submetida à carregamentos estáticos utilizando o método das forças virtuais, solicitando dos usuários apenas os carregamentos e forças externas atuantes sobre o elemento, podendo também servir de auxílio para estudantes, em seu aprendizado, e engenheiros.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Calcular deslocamentos verticais em qualquer ponto em vigas biapoiadas, podendo existir ou não balanço nas extremidades, utilizando-se carregamentos externos pontuais, retangulares, triangulares ou trapezoidais.
- Contribuir na aprendizagem de alunos que estão cursando Resistência dos Materiais no ensino superior, servindo para comparativo de dados e auxílio na montagem do diagrama de momento fletor.

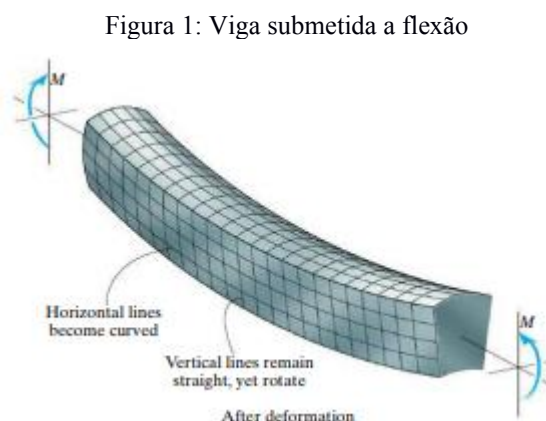
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. TRABALHO EXTERNO

Energia de deformação, segundo Hibbeler (2014), é toda a energia que um corpo consegue armazenar ao ser deformado. O trabalho é uma grandeza física que ocorre quando há transferência de energia, citando um exemplo corriqueiro, quando uma pessoa aplica uma força em um móvel para movê-lo, nesse processo há uma transferência de energia, logo, a mesma realizou trabalho.

Para Hibbeler (2014), energia de deformação representa a capacidade de um dado material armazenar energia ao sofrer deformação. Contanto que nenhuma energia seja dissipada para o meio em qualquer que seja a forma, o trabalho realizado pelas forças externas será totalmente convertido em trabalho interno.

Existe uma diferença entre o trabalho realizado por uma força e o trabalho realizado por um momento. Uma força realiza trabalho quando causa deslocamento longitudinal. Um momento realiza trabalho quando sofre deslocamento rotacional. Quando é aplicado um momento em uma estrutura – como por exemplo de uma viga – ela tende a sofrer uma curvatura, onde no caso exemplificado na Figura 1 na sua parte superior surge uma tensão interna de compressão e na sua parte inferior surge uma tensão normal de tração. Nas sequências, as equações (1), (2) e (3) definem a energia interna causada pela tensão normal, pela tensão de cisalhamento e pelo momento fletor, respectivamente.



Fonte: Hibbeler (2014)

$$U_{iN} = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV \quad \text{Eq. (1)}$$

$$U_{i\tau} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \quad \text{Eq. (2)}$$

$$U_{iM} = \int_V \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{Eq. (3)}$$

2.2. MÓDULO DE ELASTICIDADE E MOMENTO DE INÉRCIA

De acordo com Mendes (2005), em seu relatório técnico, o momento de inércia de uma seção transversal é uma grandeza física que mensura a dificuldade que a área avaliada tem de rotacionar em torno de um determinado eixo. Nessa perspectiva, para análise de momento de inércia é necessário deve-se escolher sempre um eixo para considerar como referência.

Um método que é frequentemente é o teorema dos eixos paralelos de superfícies planas, também conhecido como Teorema de Steiner, que diz que o momento de inércia de uma área é igual à soma do momento de inércia em relação a um eixo paralelo que é projetado no baricentro da área com o produto da área com a distância (d) medida perpendicularmente entre o eixo que passa no baricentro e o eixo de referência, MENDES 2005. Quando se calcula o momento de inércia em x utiliza-se I_x , assim como em y utiliza-se I_y .

Equações de momento de inércia de figuras planas segundo o Teorema dos eixos paralelos

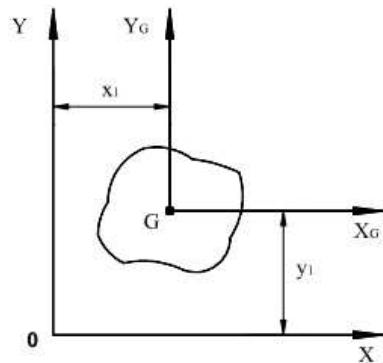
$$I_x = I_{x_G} + A \cdot d^2 \quad \text{Eq. (4)}$$

$$I_y = I_{y_G} + A \cdot d^2 \quad \text{Eq. (5)}$$

I_{x_G} e I_{y_G} são os momentos de inércia em relação ao eixo citado acima. A figura 5 foi colocada com intuito de esquematizar esse eixo que passa no baricentro.

D

Figura2: Eixos que passam pelo baricentro de uma área.



Fonte: Mendes (2005).

Nos casos mais recorrentes, vigas e pilares são figuras comuns e conhecidas da geometria plana, então, basta aplicar o teorema dos eixos paralelos e utilizar as equações já estipuladas para cada forma, como um retângulo ou

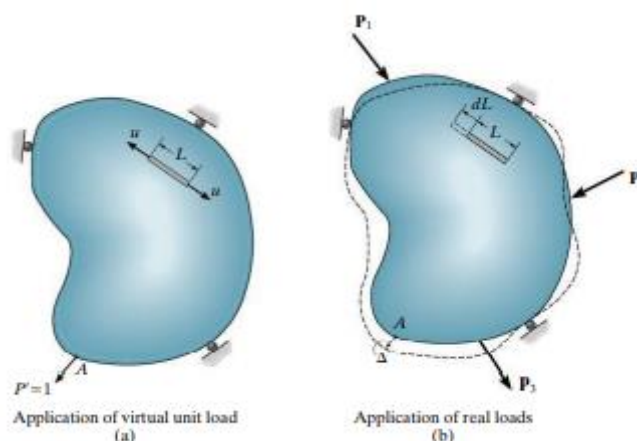
círculo, para calcular o momento de inércia no eixo paralelo e em seguida calcular a área e o centroide para aplicar o teorema.

2.3. PRINCÍPIO DAS FORÇAS VIRTUAIS

Segundo Hibbeler (2014), o Princípio dos Trabalhos Virtuais foi desenvolvido por John Bernoulli em 1717 e baseia-se na conservação de energia. Para esse método, deve-se entender primeiro que sempre que um corpo for impedido de se mover, as cargas externas devem satisfazer as condições de equilíbrio e compatibilidade, onde para a condição de equilíbrio as cargas externas devem se relacionar apenas com as cargas internas e na condição de compatibilidade os deslocamentos externos estejam relacionados apenas com as deformações externas. Imagine um corpo deformável de qualquer forma e tamanho (Figura 3) sujeito à aplicação de três forças distribuídas sobre ele. Essas cargas provocarão cargas internas e, como o corpo é deformável, essas cargas externas sofrerão um deslocamento (chamado de delta) e as cargas internas sofrerão também um deslocamento. Nesse caso, o princípio da conservação da energia se aplica ($U_e = U_i$).

Porém imagine que é esperado encontrar um deslocamento em um determinado ponto A, onde nem uma das 3 forças age sobre esse ponto. Como nenhuma força é aplicada nesse ponto o deslocamento nesse ponto não será incluído como um ‘termo de trabalho’. Então, para contornar isso Bernoulli percebeu que se aplicasse uma carga virtual chamada de P’ de valor conhecido no ponto desejado e agindo na mesma direção da deformação ele contornaria facilmente esse problema.

Figura 3: Corpo deformável de qualquer forma e tamanho



Fonte: Hibbler (2014)

Vale salientar que essa força é unitária e denominada virtual, pois ela não existe como parte da carga real. Essa carga virtual adicionada sofrerá um deslocamento real e provocará um deslocamento interno dL .

2.4. Aplicação em vigas

Anteriormente foi descrita a aplicabilidade do Método das Forças Virtuais para um corpo de forma qualquer. Para o caso de uma viga a analogia é exatamente a mesma. Sabe-se que as cargas reais aplicadas na viga também provocam cisalhamento e momento no interior da viga, porém, de acordo com Hibbeler (2014) essas deflexões na viga provocadas pelo cisalhamento são desprezíveis comparadas às deflexões causadas por momento quanto mais longas forem esses elementos estruturais. Como esse tipo de viga é muito presente na prática, torna-se viável essa aproximação. A seguir, tem-se a equação 6, que é utilizada para o cálculo da deformação em um determinado ponto pelo Método das Forças Virtuais, que é proveniente da equação de equilíbrio ($U_e = U_i$).

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{m \cdot M}{E \cdot I} dx \quad \text{Eq. (6)}$$

2.4. Unidades

As unidades utilizadas nesse artigo são as de força (N), as de momento de inércia, que podem ser definidas pelo usuário na planilha (m^4), as de comprimento (m), as de deformação (m e mm) e a unidade do Módulo de Elasticidade (Pa).

2.5. Equações

2.5. Equações

2.5.1 Equações para cálculos das reações no pino e no rolete e os esforços internos na viga.

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{Eq. (7)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \text{Eq. (8)}$$

$$\Sigma M = 0 \quad \text{Eq. (9)}$$

2.5.2 Equação para o cálculo da deformação na viga.

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{m \cdot M}{E \cdot I} dx \quad \text{Eq. (10)}$$

2.5.3 Equação para o cálculo do momento de inércia da seção transversal da viga.

$$I = \frac{1}{12} * b * h^3 + (b * h) * d^2 \quad \text{Eq. (11)}$$

2.5.4 Equações para realizar integração.

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{Eq. (12)}$$

$$I = \frac{h}{3} * (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(x_n)) \quad \text{Eq. (13)}$$

3. Metodologia

Para a realização do trabalho foi realizado um estudo de dois dos principais livros de Resistência dos Materiais, Hibbeler (2014) e Beer (1996), para a implementação do Método das Forças Virtuais em uma planilha de cálculo feita no Excel, através de combinação de células e linhas de códigos. Em seguida foi feito um comparativo de dados entre os resultados obtidos na planilha e no *software* Ftool.

3.1 Excel

O *software* Microsoft Excel® é um *software* do tipo planilha bastante conhecido na vida dos engenheiros. Para a otimização de tarefas no meio profissional da engenharia, realizações de atividades estudantis e entre outras coisas, o Excel é, muito importante e quando bem utilizado, tem um grande potencial em gerar economia, além de auxiliar professores de diversas maneiras e auxiliar alunos na realização de atividades estudantis.

O funcionamento do Excel baseia-se na combinação de células e funções pré-definidas, além de possuir módulos que utilizam as uma linguagem própria chamada de VBA e podem ser programados conforme a necessidade do usuário. Devido a sua multifuncionalidade, o referido código tem uma grande abrangência no mercado.

3.2 Reações de apoio e diagrama de momento fletor

Para o cálculo das reações de apoio foram aplicadas as equações de equilíbrio e implementadas no programa, onde a partir dos esforços solicitados pelo usuário a planilha consegue fornecer as reações nos apoios preestabelecidos.

Para traçar o diagrama de momento fletor foi necessário realizar uma automatização do conhecido método das seções, para entender o comportamento da viga quando submetida a esforços solicitantes. Para realizar essa automação foi, primeiramente, feita uma equação geral para cada seção calculada à mão que se aplicasse a todos os casos possíveis da planilha. Após isso foi-se incorporando na planilha aplicando para cada seção da viga.

3.3 Método de 1/3 de Simpson

O método de 1/3 de Simpson é um método de integração numérica que utiliza o mesmo princípio da integral convencional, porém utiliza de um polinômio do segundo grau para fazer a aproximação da função no intervalo de integração desejado. O método de Simpson é dado pela Equação (15), onde 'I' é o valor da integral, e 'h', calculado pela Equação (14), é o chamado passo de integração, onde 'n' é o número de termos. Os valores de f(n) são os pontos da função.

$$h = \frac{b-a}{2} \quad \text{Eq. (14)}$$

$$I = \frac{h}{3} * (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(x_n)) \quad \text{Eq. (15)}$$

3.4 Desenvolvimento da planilha

Para iniciar o desenvolvimento da planilha, partiu-se da ideia de que o usuário não necessitaria de realizar nenhum cálculo manual para o cálculo de deformações em vigas. Então, para suprir essa necessidade a planilha deveria realizar até mesmo os cálculos mais básicos de equilíbrios de forças e encontrar as reações dos apoios já pré-estabelecidos para todas as possibilidades de esforços solicitantes disponíveis na planilha.

Os hiperlinks são uma função do Excel que permite ao usuário ser redirecionado para sites externos ou diferentes da planilha apenas com um click. Os hiperlinks foram uma forma que foi atribuída à planilha para dar ao usuário a liberdade de navegar pelas planilhas para realizar os procedimentos de forma que achar melhor, por exemplo, se o usuário quer calcular apenas o momento de inércia ou observar apenas o diagrama de momento fletor.

Atrelado a essa ideia a planilha também fornece ao usuário a possibilidade de calcular o momento de inércia de alguns tipos de seções transversais (os mais comuns), como a seção em I comumente utilizada em diversos projetos da construção civil. A Figura 4 ilustra uma viga com seção transversal em I, muito utilizada em construções civis.

Figura 4: Vigas com seção I



Fonte: [Viga I 8 polegada - Tubo aço \(tuboaco.com.br\)](http://tuboaco.com.br)

Para a implementação do Método das Forças Virtuais foi utilizado o método das seções, já aproveitando o cálculo das seções para o gráfico de momento fletor e realizando o mesmo procedimento para encontrar os esforços internos causado pela força virtual. Após isso, fez-se a multiplicação dos momentos, real e virtual, e implementou-se o método de 1/3 de Simpson para resolver a integral da equação (6).

Uma dificuldade encontrada na implementação do Princípio das Forças Virtuais foi a de fazer coincidir os intervalos de integração dos esforços causados pelos solicitantes reais e os esforços causados pela força virtual, visto que os critérios para escolher as posições de cada uma eram diferentes. Uma solução foi a criação de novas seções entre as 6 já existentes, totalizando 12 seções, que variam e se anulam de acordo com as posições das forças virtuais.

As funções condicionais SE, E e OU foram utilizadas para a correção desse problema acima, e algumas outras vezes, visto que elas permitiram identificar em que ponto da viga está a força virtual, se é necessário ou não realizar

um corte naquela região.

Para a plotagem da linha elástica desenvolveu-se uma macro no Excel que realizasse o cálculo de deformação em todos os pontos da viga de forma sequencial e armazenasse em uma base de dados. Em consequência dessas linhas de código VBA implementadas no programa, tornou-se necessário que o usuário, após a abertura da planilha, clique no botão “Habilitar conteúdo”.

4. PLANILHA

4.1. FUNCIONAMENTO DA PLANILHA

A planilha funciona de maneira simples e intuitiva, com esquematizações e observações na tela para orientar o usuário e botões de navegação em todas as telas. O recomendado é que, primeiramente, o usuário monte a viga que deseja analisar, já que a página de cálculo de deformação depende da montagem da viga na página “Reações e diagrama de momento fletor”.

4.1.1. PÁGINA INICIAL

Na página inicial o usuário escolherá o destino para o qual deseja. A Figura 5 ilustra a página inicial.

Figura 5: Página inicial da planilha.



Fonte: autor.

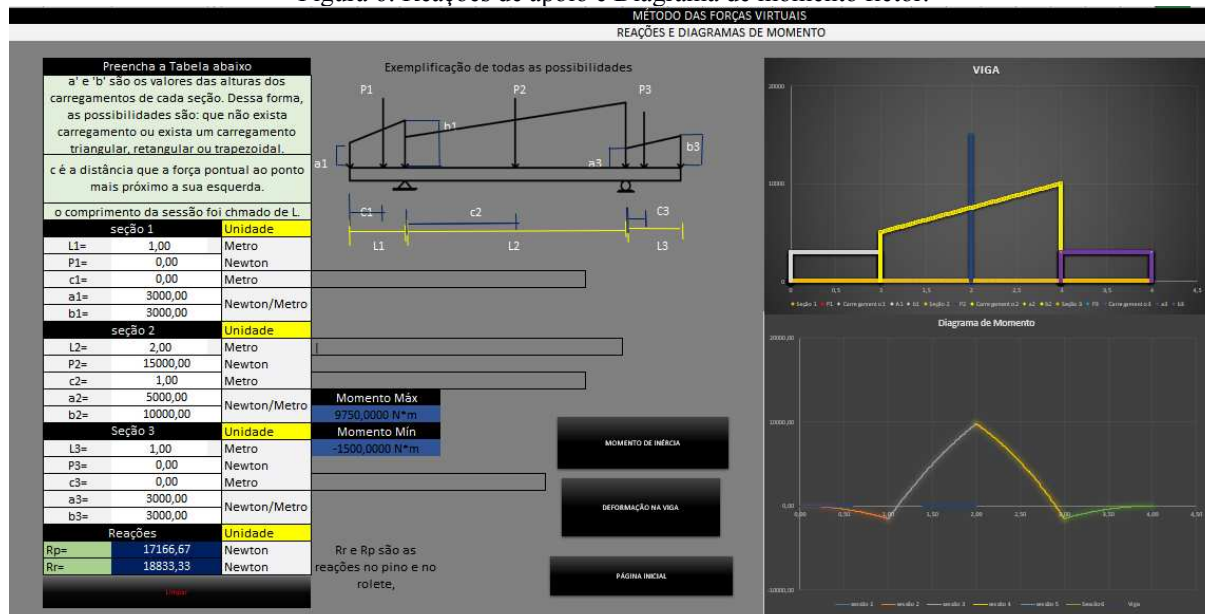
4.1.2. REAÇÕES DE APOIO E DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR

Ao entrar nessa aba o usuário encontrará uma aba para modelar sua viga. A viga padrão é uma viga biapoiada com um pino à sua esquerda e um rolete à direita, podendo ainda existir ou não uma carga em uma ou nas duas extremidades. Na mesma tabela também é necessário que o usuário informe quais esforços existem na viga e onde estão atuando, podendo adicionar, em cada seção, uma força pontual e um carregamento, que pode ser retangular, triangular ou trapezoidal. O botão limpar serve para zerar todos os valores adicionados pelo usuário. Essa etapa é fundamental para o cálculo da deformação.

Nesta etapa, após o preenchimento dos dados de entrada da viga, o usuário receberá as seguintes informações: as reações no pino e no rolete, o diagrama de momento fletor e o valor do momento fletor máximo e mínimo. A figura 6 ilustra essa etapa.

Nessa aba, acima do diagrama de momento fletor, foi adicionado um esboço de como ficará o modelo da viga.

Figura 6: Reações de apoio e Diagrama de momento fletor.



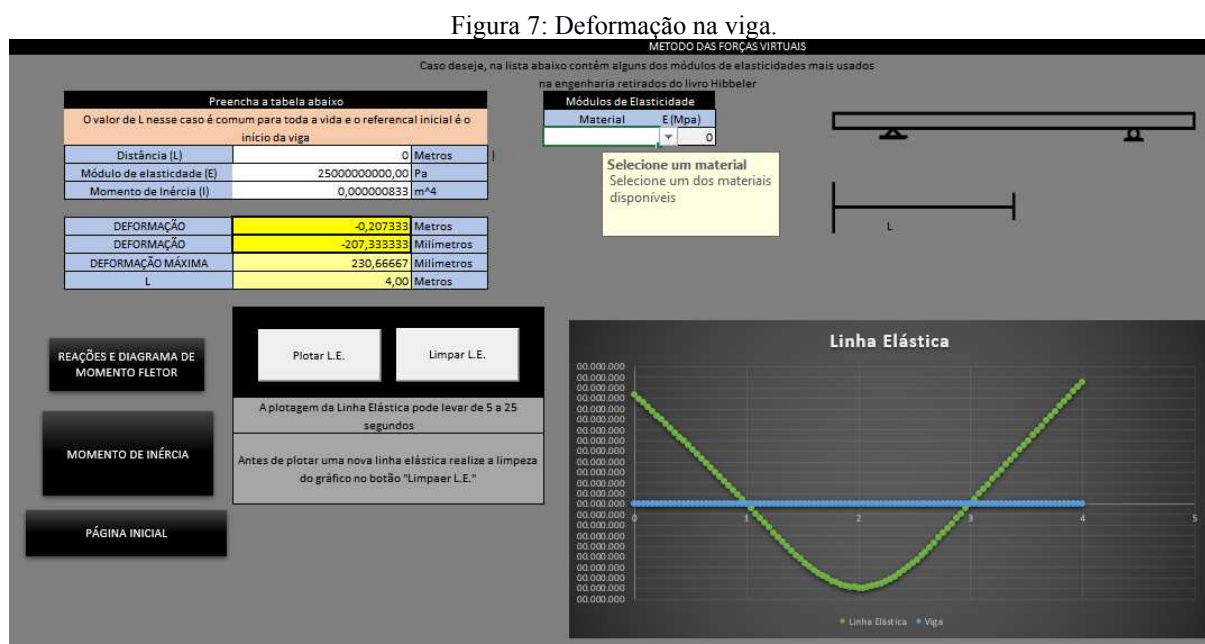
Fonte: autor.

4.1.3 DEFORMAÇÃO NA VIGA

Na aba de deformação da viga, o usuário deverá preencher em qual posição da viga ele deseja saber qual o deslocamento vertical, preencher o módulo de elasticidade e o momento de inércia da seção transversal. Caso ele deseje, na aba momento de inércia pode realizar o cálculo do momento de inércia de algumas seções pré-definidas. Ainda na aba de deformação foram adicionados alguns módulos de elasticidade diretamente da tabela “Propriedades mecânicas médias de materiais típicos de engenharia”, segundo Hibbeler (2014).

Para a plotagem da linha elástica o usuário deverá clicar no botão “Plotar L.E.” e aguardar entre 5 e 25 segundos. Esse tempo é necessário devido a linha de código de testagem e armazenagem de dados elaborada, uma força virtual percorre 100 pontos da viga pré-definida pelo usuário.

A figura 5 ilustra o funcionamento da página de deformação.



Fonte: autor.

4.1.4 MOMENTO DE INÉRCIA

Na aba “momento de inércia”, o usuário poderá calcular o momento de inércia de 3 tipos de seções transversais, a seção em T, em I e a seção retangular. A unidade do momento de inércia dependerá da unidade que o usuário preencherá as células. Esta seção é independente das demais. A Figura 8 ilustra o funcionamento desta aba.

Figura 8: Momento de inércia da seção transversal.

MOMENTO DE INÉRCIA DAS SEÇÕES TRANSVERSAIS

A unidade do momento de inércia depende das unidades com que você preencher as células (Caso preencha as dimensões em metro a unidade será m⁴)

Momento de inércia seção em T

Dimensões da aba (Parte de cima)	valor
Componente	valor
b1=	0
h1=	0
Centroide da mesa	
y1=	0
Dimensões da alma (Parte de baixo)	
Componente	valor
b2=	0
h2=	0
Centroide da alma	
y2=	0
Centroide da figura	
y=	0

RResultado
I= 0,0000E+00

Momento de inércia figura em I

Dimensões da aba (Parte de cima 1)	valor
Componente	valor
b1=	0
h1=	0
Centroide da aba superior	
y1=	0
Dimensões da alma (Parte do meio 2)	
Componente	valor
b2=	0
h2=	0
Centroide da alma	
y2=	0
Dimensões da aba (Parte de cima 3)	
Componente	valor
b3=	0
h3=	0
Centroide da aba inferior	
y3=	0
Centroide da figura	
y=	0

RResultado
I= 0,0000E+00

Momento de inércia figura retangular

Dimensões da figura	valor
Componente	valor
b1=	0,01
h1=	0,1
Centroide da figura	
y1=	0,05

RResultado
I= 8,3333E-07

REAÇÕES E DIAGRAMA DE MOMENTO FLETOR

DEFORMAÇÃO NA VIGA

PÁGINA INICIAL

Fonte: autor.

5. COMPARATIVO DE DADOS

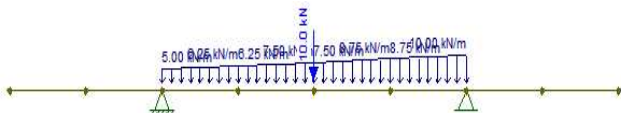
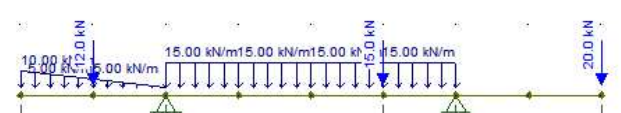
Para realizar um comparativo de dados, foi escolhida uma viga padrão de 4 metros de comprimento com duas extremidades em balanço, cada um com 1 metro de comprimento, e o vão central com dois metros. Nos primeiros modelos foram implementados esforços em apenas uma das seções e no último um caso com esforços externos em todas as seções da viga. Foi realizado um estudo comparativo de dados com resultados obtidos na planilha e resultados obtidos no código ftool para verificar a eficácia da planilha.

Vale salientar que, devido a convenções de sinais diferentes, as deformações nas planilhas são de sinais contrários aos do ftool.

Na Tabela 1, tem-se um modelo que foi aplicado aos dois *softwares*, aplicando diversos esforços e medindo as deformações em alguns pontos.

Tabela 1: Deformações.

Tabela Comparativa							
Modelo 1	Software	Pontos (m)					
		0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
							
	Deformação (mm)						
	Ftool	-6,5682	-3,1277	1,642	1,1729	-1,2511	-2,5022
Planilha	6,5682	3,1277	-1,642	-1,1729	1,25109	2,5022	
Modelo 2	Software	Pontos (m)					
		0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
							

		Deformação (mm)					
	Ftool	-10,744	-5,06368	2,67467	1,89619	-2,0226	-4,04521
	Planilha	11,0265	5,22397	-2,7367	-1,95484	2,08515	4,17031
Modelo 3	Software	Pontos (m)					
		0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
							
		Deformação (mm)					
	Ftool	7,42316	3,71158	-3,3672	-3,41608	3,79499	7,58997
	Planilha	-7,42316	-3,71159	3,0544	3,1033	-3,79499	-7,58997
Modelo 4	Software	Pontos (m)					
		0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
							
		Deformação (mm)					
	Ftool	-4,58735	-2,29367	2,15087	3,01045	-5,78193	-12,365
	Planilha	4,58734	2,29367	-2,15032	-3,01045	4,991233	10,1569
Modelo 5	Software	Pontos (m)					
		0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
							
		Deformação (mm)					
	Ftool	-92,54	-43,05	22,17	26,41	-74,26	-178
	Planilha	91,72	43,05	-22,156	-26,46	57,412	125,02

Fonte: autoria própria.

Na Tabela 2 foi feito um comparativo calculando-se a diferença entre os dois resultados no mesmo ponto e fazendo-se a média e o desvio padrão.

Tabela 2: Comparativo de dados.

Desvio padrão e média nos modelos						
Modelo 1						
Intervalo (m)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4
Diferença (mm)	0	0	0	0	-1E-05	0
Média da diferença	-1,66667E-06					
Desvio padrão (mm)	0	0	0	0	0	0
Modelo 2						
Intervalo (m)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4
Diferença (mm)	0,2825	0,16029	-0,06203	-0,058645	0,06255	0,1251
Média da diferença	0,084960833					
Desvio padrão (mm)	0,14125	0,080145	0,031015	0,0293225	0,031275	0,06255

Modelo 3						
Intervalo (m)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4
Diferença (mm)	-1E-06	-9E-06	-0,3128	-0,31278	2,77E-06	0
Média da diferença	-0,104264538					
Desvio padrão (mm)	5E-07	4,5E-06	0,1564	0,15639	1,385E-06	0

Modelo 4						
Intervalo (m)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4
Diferença (mm)	-1E-05	0	0,000551	4E-06	-0,790697	-2,2081
Média da diferença	-0,499708667					
Desvio padrão (mm)	5E-06	0	0,0002755	2E-06	0,3953485	1,10405

Modelo 5						
Intervalo (m)	0	0,5	1,5	2,5	3,5	4

Diferença (mm)	-0,82	0	0,014	-0,05	-16,848	-52,98
Média da diferença	-11,78066667					
Desvio padrão (mm)	0,41	0	0,007	0,025	8,424	26,49
Média dos desvios (mm)	1,25146783					

Fonte: autoria própria.

Na Tabela 3 foi calculado o erro percentual para cada ponto em cada modelo. Realizando uma análise crítica dos dados de erro percentual, é perceptível uma diferença de resultados entre os dois códigos. Isso ocorrerá devido a diferença de método utilizado. Uma vez que o ftool utiliza o método das forças para estruturas hiperestáticas, fazendo considerações de esforço cortante e momento fletor, caso exista recalque, molas ou temperatura também será considerado, realizando um somatório de todos os estados de tensão na estrutura e obtendo o resultado desejado. A planilha em discussão utiliza o método das forças para composições básicas de estruturas isostáticas, considerando como esforço interno relevante o momento fletor atuante na estrutura.

Tabela 3: Erro percentual.

Pontos	Percentual de erro					
	0,00 m	0,50 m	1,50 m	2,50 m	3,50 m	4,00 m
Modelo 1	00,0 %	00,0 %	00,0 %	00 %	00,0008 %	00,0 %
Modelo 2	02,629 %	03,165 %	02,319 %	03,093 %	03,093 %	03,093 %
Modelo 3	00,000 %	00,000 %	09,290 %	09,156 %	00,000 %	00,000 %
Modelo 4	00,000 %	00,000 %	00,026 %	00,000 %	13,675 %	17,858 %
Modelo 5	00,886 %	00,000 %	00,063 %	-00,189 %	22,688 %	29,764 %

Fonte: autoria própria.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O resultado obtido pela pesquisa foi a elaboração de uma planilha útil e simplificada que, promova uma melhor interação com o usuário, calcule a deformação em qualquer ponto de uma viga bi apoiada utilizando o Método das Forças Virtuais, além de fornecer ao usuário um suporte para calcular momento de inércia, reações de apoio, analisar o diagrama de momento fletor na viga e observar a linha elástica da estrutura.

Vale destacar que, quanto maior a variedade de ferramentas que existirem no meio profissional para auxiliar os Engenheiros e alunos de engenharia, melhor será para essa comunidade, além de aumentar a competitividade, culminando assim, em uma possível baixa nos valores de mercado de determinados *softwares*, além de aumentar a possibilidade de se escolher uma ferramenta que o profissional se sinta confortável para trabalhar, melhorando o seu desempenho no trabalho. Destacando o *software* Excel que, como já foi citado no vigente artigo, está presente em grande parte de computadores no meio profissional da engenharia. É importante o domínio do mesmo. Além disso, o Excel é um *software* multifuncional; então, quanto mais funções o profissional consegue manipular no código, obterá melhores resultados e mais possibilidades em sua função.

Baseado no estudo de dados feito demonstrando as Tabelas 1, 2 e 3, pode-se concluir que, na maioria dos casos, a proposta apresentou um resultado eficiente comparados aos dados obtidos pelo *software* Ftool. Observando os testes, foi notada uma maior discrepância nos modelos 3, 4 e 5.

Acredita-se que essas divergências nos resultados ocorrem da diferença de método utilizado pelas duas ferramentas, visto que, enquanto o Ftool utiliza o método dos elementos finitos, a planilha utiliza o Método das Forças Virtuais para o cálculo das deformações.

Vale salientar outra fonte de erro advinda do método de integração numérica, utilizado para realizar a resolução da Equação 6. Como dito mencionado no tópico 3.3, o mesmo faz uma aproximação por uma equação de grau dois e a Equação (6) pode resultar em um polinômio de até quarto grau, dependendo dos carregamentos aplicados, acarretando na imprecisão do resultado da mesma.

Como sugestão, é possível aumentar a precisão da planilha realizando melhorias no método, como por exemplo, adicionar os efeitos do esforço cortante e implementando um método numérico que realize uma

aproximação por um polinômio de, no mínimo, grau quatro. É possível ainda adicionar uma maior variedade de possibilidades, onde o usuário possa adicionar um número maior de forças pontuais e carregamentos, além de adicionar outros tipos de vigas, com vigas engastadas em balanço. A planilha ainda não calcula a rotação no elemento, o que possivelmente pode ser implementado em uma futura atualização.

No geral, a pesquisa alcançou um resultado satisfatório no que se propôs, realizando cálculos com uma precisão considerável e fornecendo um usuário um ambiente simplificado e intuitivo.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HIBBELER, R.C., **Resistencia dos Materiais**. Pearson Prentice hall, 7ª edição, São Paulo, 2014.

HIBBELER, Russell C. **Mechanics of Materials**. 9. ed. United States of America: Pearson, 2014. 905 p. ISBN 0-13-325442-9.

F.P. Beer e E. R. Johnston Jr, **Resistência dos Materiais**, Terceira Edição, MAKRON Books, São Paulo, 1996.

NOGUEIRA, L. G. O. **FERRAMENTA EM AMBIENTE EXCEL PARA ANÁLISE ESTRUTURAL DE TRELIÇAS ESPACIAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**.

https://repositorio.ufersa.edu.br/bitstream/prefix/5100/1/LuisGON_MONO.pdf: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2017.

MENDES, P. (2005). **Estudo de Centróides e Momentos de Inércia**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/313874157_Estudo_de_Centroides_e_Momentos_de_Inercia>.

MARTHA, L. F. **Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/decc/ECC1008/Downloads/Manual_Ftool.pdf>.

O Primeiro Software Criado: História da Informática. Disponível em:

<<https://tecnologia.culturamix.com/tecnologias/o-primeiro-software-criado-historia-da-informatica>>. Acesso em: 24 out. 2021.

Programa Ftool, criado no CTC/PUC-Rio, é sucesso dentro e fora do Brasil. Disponível em:

<<https://www.ctc.puc-rio.br/programa-ftool-criado-no-ctcpuc-rio-e-sucesso-dentro-e-fora-do-brasil/>>. Acesso em: 24 out. 2021