

MODELANDO FUNÇÕES TETO PARA A TARIFAÇÃO DAS CONTAS DE ÁGUA DA CAERN E CAGECE.

Renato Sousa Barros¹, Dra. Luiza Helena Felix de Andrade²

Resumo: Tendo em vista que uma parte considerável da população brasileira tem dificuldades de entender a matemática, este artigo tem o intuito de mostrar ao leitor que podemos aplicar alguns conceitos e definições da matemática de forma simples e didática, mostrando um exemplo concreto para essa aplicação, iremos introduzir o que é função teto e função piso e com esses conceitos e definições demonstrados, o mesmo verá que realmente podemos introduzir a matemática na nossas vidas e por fim ele poderá aplicar essas definições para outras ações do seu cotidiano visando uma maior facilidade e tendo um melhor benefício para o seu dia a dia. Essas aplicações serão para as taxas de distribuição de água das empresas Caern e Cagece, respectivamente e iremos analisar os dados das equações modeladas no software Geogebra.

Palavras-chave: teto; piso; Cagece; Caern; Geogebra.

1. INTRODUÇÃO

A matemática faz parte de nossas vidas desde os primórdios da existência humana, tudo está diretamente ou indiretamente associado ao uso e aplicação da mesma e não é de hoje que sabemos que boa parte da população brasileira tem a dificuldade de associar e aplicar funções matemáticas ao seu cotidiano, a fim de proporcionar agilidades e facilidades nas atividades do dia a dia.

Perante a isso, surgiu a ideia de mostrar de forma didática que a matemática pode ser aplicada de forma simples.

Isto posto, vamos demonstrar o conceito de função teto e função piso que por sua vez, são funções bem peculiares que quando plotadas em gráficos tomam formas de escadas, tendo descontinuidades. Posteriormente iremos mostrar que podemos aplicar a definição da função teto para o cotidiano do brasileiro, ou seja, iremos aplica-las e modelar equações para a tarifação de empresas de distribuição de água para os estados do Rio Grande do Norte e Ceará, Companhia de Águas e Esgotos do Rio Grande do Norte (Caern) e Companhia de Água e Esgoto do Estado do Ceará (Cagece), respectivamente.

Falando um pouco mais sobre as duas empresas, a Caern é uma empresa brasileira que detém a concessão dos serviços públicos de saneamento básico, captação, tratamento e distribuição de água no estado do Rio Grande do Norte e a Cagece é uma sociedade de economia mista de capital aberto que tem por finalidade a prestação dos serviços de abastecimento de água e coleta de esgoto em todo o estado do Ceará..

Por fim, iremos plotar essas equações modeladas no software Geogebra e analisar qual terá o melhor custo benefício para determinadas faixas de metros cúbicos.

2. TETO E PISO

A função teto é denominada por $\lceil x \rceil$ e a função piso é denominada por $\lfloor x \rfloor$ que, segundo [1] foi o cientista Kenneth E. Iverson que introduziu essas denominações no seu livro A Programming Language em 1962.

2.1 Função Teto

2.1.1 Definição

De acordo com [2] a função teto é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ denotada por $\lceil x \rceil$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o menor inteiro maior ou igual a x .

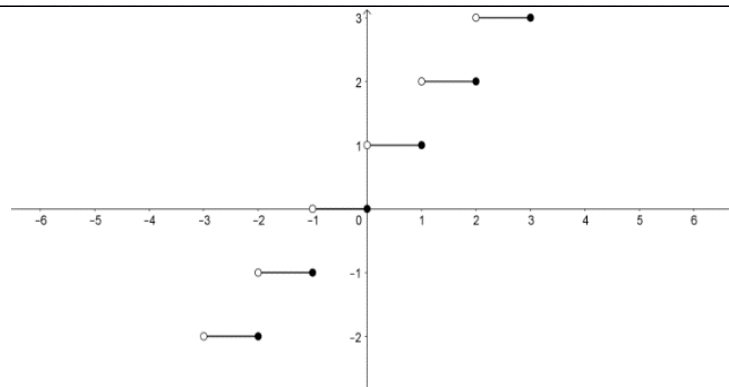


Figura 1: $f(x) = [x]$

2.2 Função Piso

2.2.1 Definição

Seguindo o conceito retirado em [2] a Função piso é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ denotada por $[x]$ que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o maior inteiro menor ou igual a x .

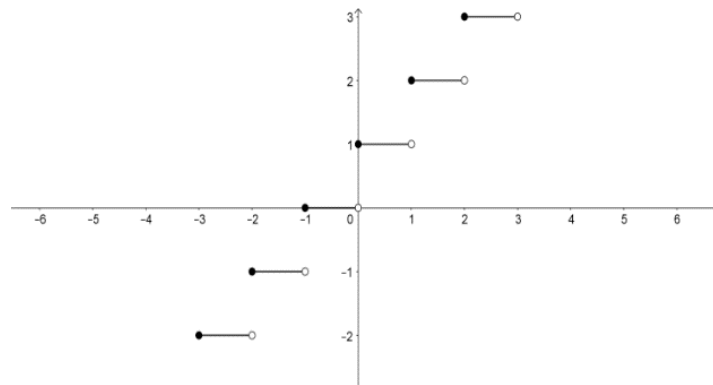


Figura 2: $f(x) = [x]$

2.3 APLICAÇÃO FUNÇÃO TETO E FUNÇÃO PISO

Partindo disso, para exemplificar as definições das funções teto e piso veremos uma aplicação para os números $\pi = 3,141592\dots$ e $-\pi = -3,141592\dots$, respectivamente, conforme mostra a Figura 3.

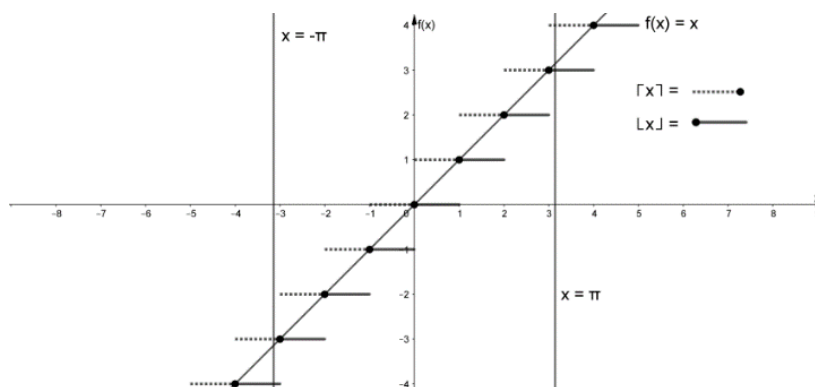


Figura 3: Gráfico função teto e função piso.

Como visto na ilustração acima temos que:

$$\begin{aligned} [3,141592\dots] &= 3 & [-3,141592\dots] &= -4 \\ [3,141592\dots] &= 4 & [-3,141592\dots] &= -3 \end{aligned}$$

3. APLICAÇÃO DA FUNÇÃO TETO PARA TARIFICAÇÃO DAS CONTAS DE ÁGUA

Como supracitado, podemos aplicar os conhecimentos da matemática nas demais tarefas do nosso cotidiano a fim de ter uma objetividade e facilidade nelas. Perante a definição do que é a função teto, vamos aplicá-la para modelar equações para a tarifação das contas de água das empresas Caern e Cagece, respectivamente, voltadas para taxas de classes residenciais e de instituições públicas.

3.1 Modelagem de funções teto para tarifação de água da empresa Caern

Conforme retirado em [3], a tabela a seguir mostra os dados referente as taxas de distribuição de água para residências e instituições públicas em função de metros cúbicos.

Tabela 01: Valores em R\$ para classes de consumo em função de m³ [3]

CLASSE DE CONSUMO	TARIFA MÍNIMA (R\$)	FAIXA DE CONSUMO EXCEDENTES PARA OS MEDIDOS (m ³)					
		11 – 15 m ³	16 – 20 m ³	21 – 30 m ³	31 – 50 m ³	51 – 100 m ³	> 100 m ³
RESIDENCIAL	43,77	R\$ / m ³	R\$ / m ³	R\$ / m ³	R\$ / m ³	R\$ / m ³	R\$ / m ³
PÚBLICA	140,75	-	-	12,11	12,11	12,11	12,11

Analisando a Tabela 01, podemos notar que na faixa abaixo de 10 metros cúbicos, têm-se valores são fixos e logo acima dessa faixa obedece a outro critério de tarifação. São nessas faixas, acima de 10 metros cúbicos, que vamos aplicar o conceito de função teto.

3.1.1 Modelagem para tarifação residencial

Nota-se que começa com um valor constante de R\$ 43,77 para os 10 primeiros metros cúbicos e para cada faixa de metros cúbicos excedentes o valor de tarifação muda. Vamos analisar a faixa de 11 – 15 m³, essa análise será análoga para as demais faixas.

O valor a ser pago nessa faixa é de R\$ 4,88, ou seja, a cada metro cúbico ou fração a mais, adiciona-se esse valor. Logo o critério a ser aplicado será:

$$[x] \cdot 4,88$$

Ou seja, se em um mês uma certa residência utilizar 11,48 metros cúbicos, valor que o cliente irá pagar será de $[11,48] \cdot 4,88 = 12 \cdot 4,88 = \text{R\$ } 58,56$.

Partindo das informações adquiridas e aplicando o critério mencionado acima obtemos a seguinte equação:

$$CaernR(x) = \begin{cases} 43,77 & 0 < x \leq 10 \\ [x] \cdot 4,88 & 10 < x \leq 15 \\ [x] \cdot 5,77 & 15 < x \leq 20 \\ [x] \cdot 6,50 & 20 < x \leq 30 \\ [x] \cdot 7,49 & 30 < x \leq 50 \\ [x] \cdot 9,69 & 50 < x \leq 100 \\ [x] \cdot 11,01 & x > 100 \end{cases}$$

Plotando essa equação no software Geogebra obtemos o seguinte gráfico:

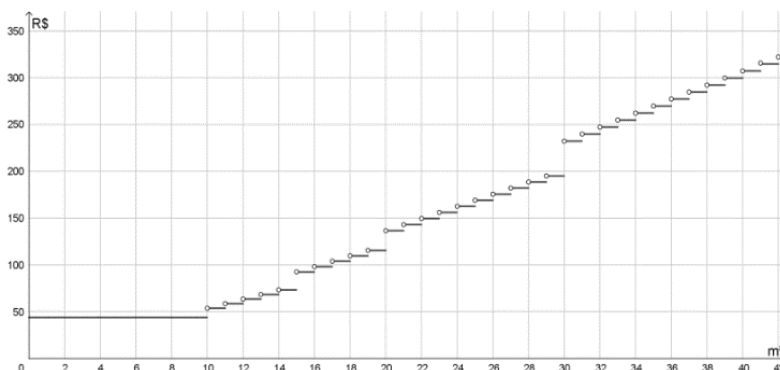


Figura 4: Gráfico função teto para taxa residencial da Caern

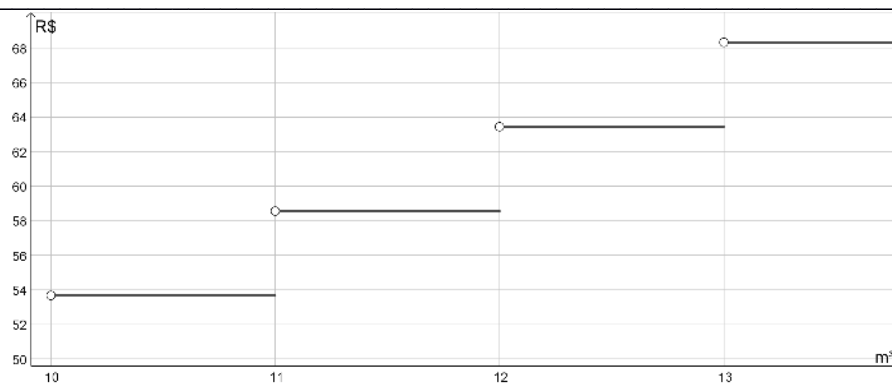


Figura 5: Ampliação Gráfico Figura 4

3.1.2 Modelagem para tarifação de instituições públicas

Assim como nas taxas residenciais, para instituições públicas também tem uma taxa inicial fixa para o consumo mensal abaixo de 10m³, que nesse caso é de R\$ 140,75 como consta na Tabela 01.

Porém, diferentemente das residenciais, o aumento da tarifação das faixas em metros cúbicos para instituições públicas começa somente acima dos 21 m³, ou seja, o consumo abaixo dessa faixa continuará com o mesmo valor fixo de R\$ 140,75.

Sabendo dessas informações, iremos aplicar o conceito para função teto. Como notado, o critério para a tarifação começará com taxa constante de R\$ 140,75 para os 20 primeiros metros cúbicos, logo após ultrapassar essa faixa, terá um critério para tarifação conforme a faixa que o cliente utilizará em um mês.

Logo, iremos utilizar a faixa de 21 – 30 m³ para demonstrar o critério de aplicação da função teto, analogamente aplica-se para as demais faixas de metros cúbicos. Nessa faixa a cada metro cúbico ou fração excedente aumenta R\$ 12,11, ou seja, podemos adotar o seguinte critério:

$$[x] \cdot 12,11$$

Portando, se em um mês uma certa instituição pública utilizar 23,44 metros cúbicos (m³), valor que o cliente irá ser de $[23,44] \cdot 12,11 = 24 \cdot 12,11 = \text{R\$ } 290,64$.

Vale salientar que, o custo de tarifação de R\$ 12,11 não muda, portanto podemos adotar um único critério para as demais faixas excedentes aos primeiros 20 m³.

Com essa análise, podemos montar a equação para função teto:

$$CaernP(x) = \begin{cases} 140,75 & 0 < x \leq 20 \\ [x] \cdot 12,11 & x > 20 \end{cases}$$

Plotando essa equação no Software Geogebra obtemos o seguinte gráfico:

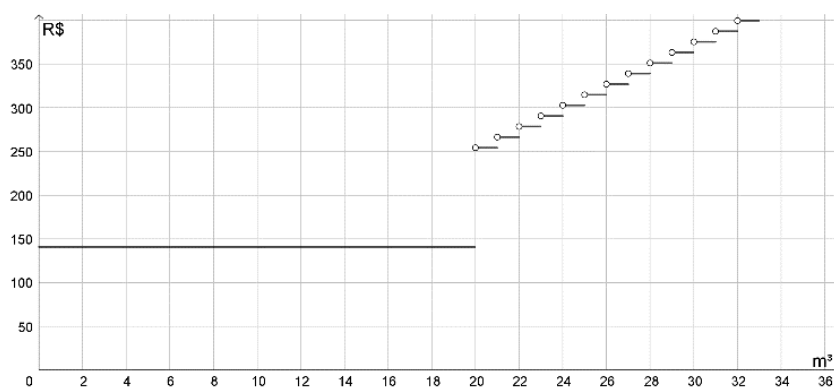


Figura 6: Gráfico função teto para taxa instituição pública da Caern

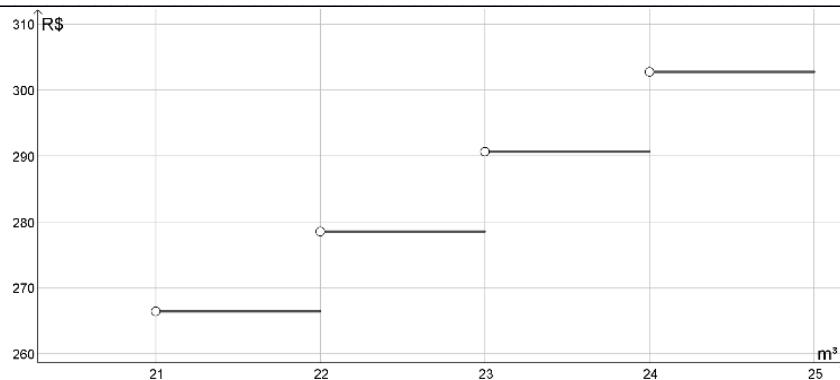


Figura 7: Ampliação gráfico Figura 6

3.2 Modelagem função teto para tarifação de água da empresa Cagece

Conforme podemos notar em [4], a tabela a seguir mostra os critérios para tarifação das residências e instituições públicas, respectivamente.

Tabela 02: Valores em R\$ para classes de consumo em função de m³

CLASSE DE CONSUMO	FAIXA DE CONSUMO EXCEDENTES PARA OS MEDIDOS (m³)				
	0 – 10 m³	11 – 15 m³	16 – 20 m³	21 – 50 m³	> 50 m³
	R\$/m³	R\$/m³	R\$/m³	R\$/m³	R\$/m³
RESIDENCIAL	4,03	5,23	5,65	9,69	17,11
PÚBLICA	5,89	5,89	8,77	8,77	14,07

Diferente da forma de taxação para distribuição de água da empresa Caern, a Cagece não tem valor fixo para os primeiros metros cúbicos, ou seja, desde de a faixa inicial já se tem uma tarifação que se aplica o conceito da função teto.

3.2.1 Modelagem para tarifação residencial

Analisando a Tabela 02, vamos utilizar a faixa 0 – 10 m³ para demonstrar a aplicação da função teto para a taxa mensal residencial.

Isto posto, vemos que o cliente pagará um valor de R\$ 4,03 para cada metro cúbico ou fração excedente dessa faixa, ou seja, aplicando a função teto obtemos:

$$[x] \cdot 4,03$$

Portanto, se em um determinado mês o cliente usar 8,66 m³ o mesmo irá ter que pagar $[8,66] \cdot 4,03 = 9 \cdot 4,03 = \text{R\$ } 36,27$, aplicando-se analogamente para as demais faixas de metros cúbicos obtemos a seguinte equação:

$$CageceR(x) = \begin{cases} [x] \cdot 4,03 & 0 < x \leq 10 \\ [x] \cdot 5,23 & 10 < x \leq 15 \\ [x] \cdot 5,65 & 15 < x \leq 20 \\ [x] \cdot 9,69 & 20 < x \leq 50 \\ [x] \cdot 17,11 & x > 50 \end{cases}$$

Com a equação obtida, podemos plotá-la no software Geogebra e analisar os resultados:

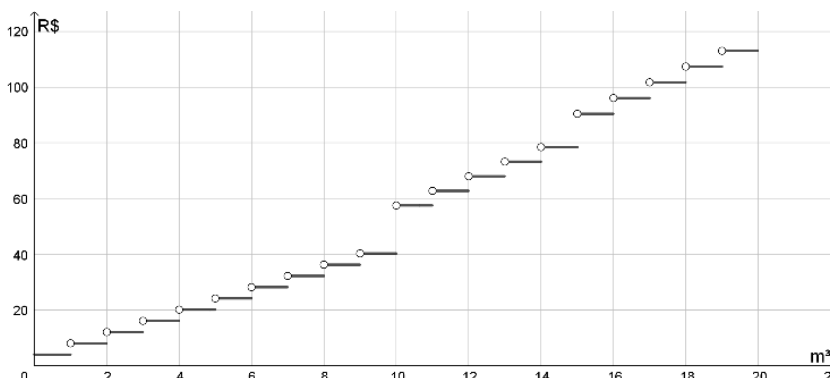


Figura 8: Gráfico função teto para taxa residencial da Cagece

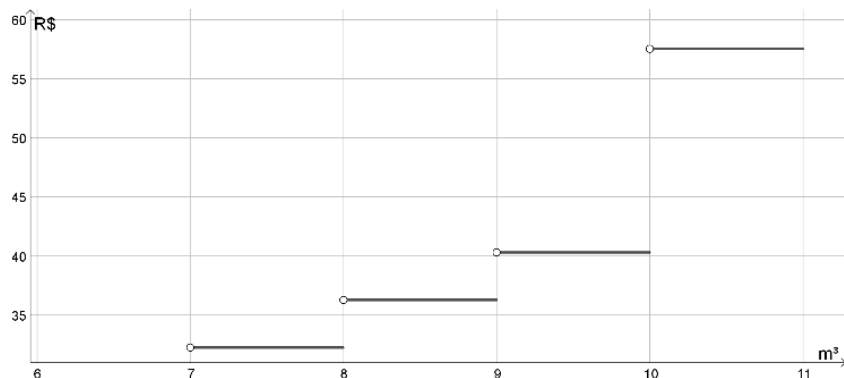


Figura 9: Ampliação gráfico Figura 8

3.2.2 Modelagem para tarifação de instituições públicas

Com a análise das informações para as instituições públicas retiradas na Tabela 02, percebemos que entre as faixas 0 – 10 m³ e 11 – 15 m³ têm-se a tarifação de R\$ 5,89 para cada metro cúbico ou fração excedente e entre as faixas 16 – 20 m³ e 21 – 50 m³ a tarifação será de R\$ 8,77 para cada metro cúbico ou fração excedente e acima de 50m³ será de R\$ 14,07. Dessa forma, para a aplicação da função teto iremos utilizar a faixa de 11 – 15 m³ para demonstrar a aplicação dessa função, ou seja, se uma instituição pública utilizar em um mês 13,01 m³ o critério para taxação será:

$$[x] \cdot 5,89$$

Então, a instituição irá pagar $[13,01] \cdot 5,89 = 14 \cdot 5,89 = \text{R\$ } 82,46$.

Logo, com a análise para essa faixa de metros cúbicos, analogamente, podemos aplicar para as demais faixas e com isso vamos montar a equação de tarifação para essa classe, portanto:

$$\text{CageceP} = \begin{cases} [x] \cdot 5,89 & 0 < x \leq 15 \\ [x] \cdot 8,77 & 15 < x \leq 50 \\ [x] \cdot 14,07 & x > 50 \end{cases}$$

Com a equação obtida, podemos plotar a mesma no Software Geogebra e analisar os resultados:

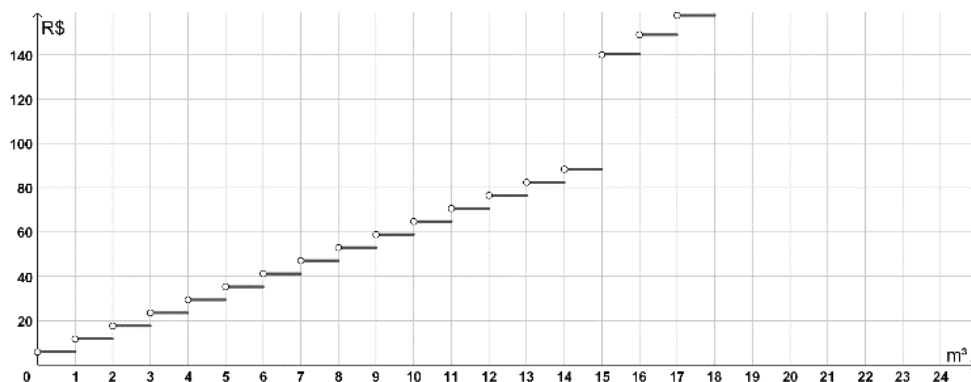


Figura 10: Gráfico função teto para taxa instituição pública da Caern

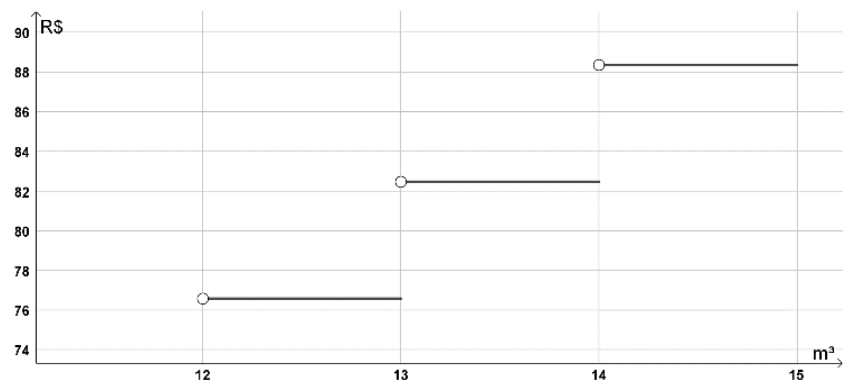


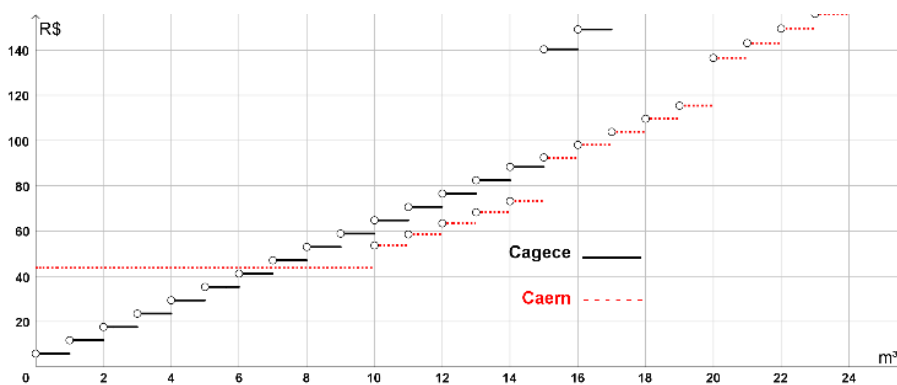
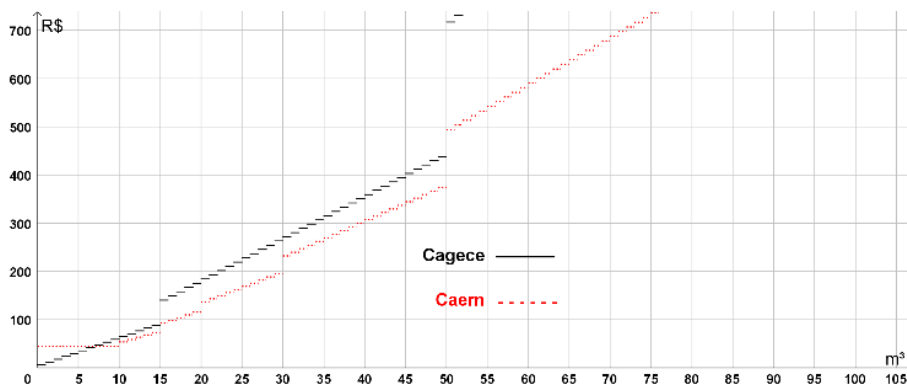
Figura 11: Ampliação gráfico Figura 10

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

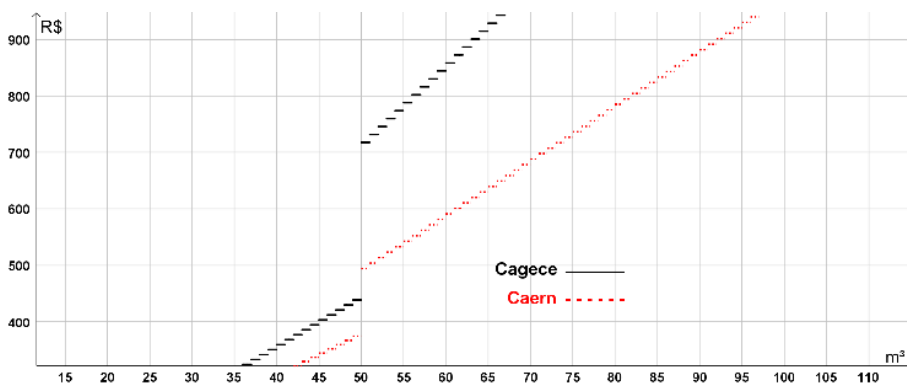
Com os dados expostos e com a aplicação das funções teto, para as empresas de distribuição de água Cagece e Caern para as classes residenciais e instituições públicas, vamos comparar os resultados das duas empresas, em suas respectivas classes em questão e analisar qual terá o melhor custo benefício para cada faixa de metros cúbicos.

4.1. Classe Residencial

A primeira análise será para a classe residencial conforme mostra a figura 12:



Analisando os critérios de taxaço das duas empresas, pode-se concluir que a empresa Cagece tem um melhor custo benefício para os primeiros 7m  : $7 \cdot 5,89 = R\$ 41,23$ em rela  o    Caern que tem um preço fixo até os primeiros 10m   de R\$ 43,77. A partir dessa faixa a empresa a empresa Caern passa a ter um melhor custo benefício porém, sendo que para a faixa de 7 – 14m   a diferença dos preços entre as duas empresas são quase equivalentes, não passando de R\$ 16,00 conforme podemos ver na Figura 13.



E por última análise para a classe residencial, vemos que acima dos 50 m³ a empresa Cagece tem um acréscimo de taxaço considerável em relação à Caern, ou seja, para a Cagece nessa faixa de metros cúbicos irá se pagar um valor de $[51] \cdot 14,07 = \text{R\$ } 717,57$ e na Caern será o valor de: $[51] \cdot 9,69 = \text{R\$ } 494,19$, como mostrado na Figura 14.

4.2. Classe Pública

Vamos analisar a comparação entre os critérios referentes as duas empresas para a classe de instituições públicas, como mostra na Figura 14:

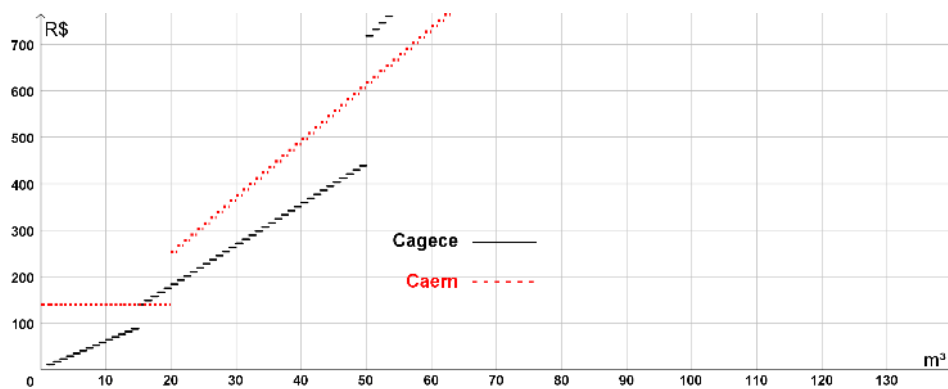


Figura 15: Comparação gráficos classe Públicas

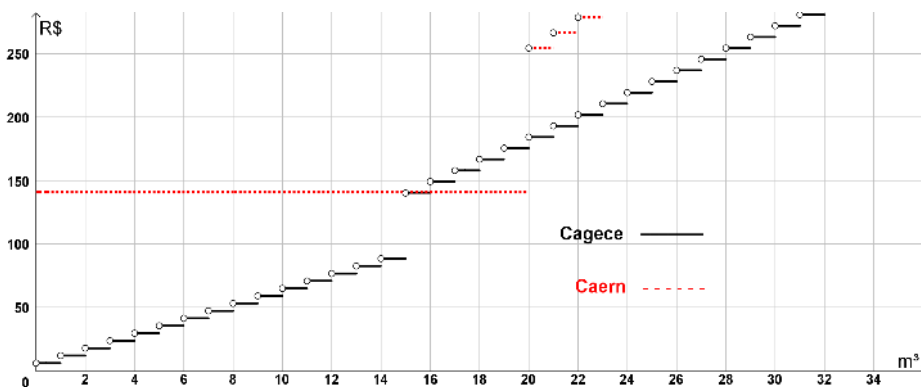


Figura 16: Ampliação (1) Figura 15

De forma análoga à avaliação da classe residencial, vemos na Figura 15 que nos primeiros metros cúbicos a tarifação da empresa Cagece para instituições Públicas tem um melhor custo benefício, ou seja, até os 16 m³, $[16] \cdot 8,77 = \text{R\$ } 140,32$ enquanto para Caern tem um valor fixo de R\$ 140,75 para os primeiros 20 m³. Entre a faixa de 17 – 19 m³ é a Caern que tem o melhor custo benefício, logo após essa faixa a Cagece volta a ter o melhor custo benefício.

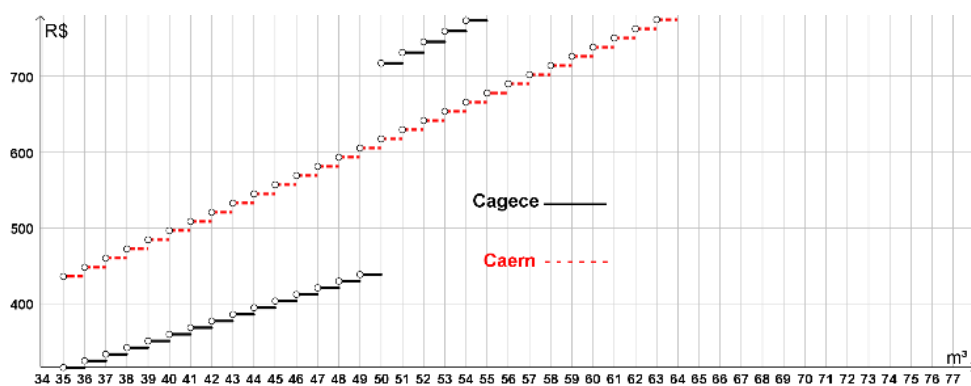


Figura 17: Ampliação (2) Figura 15

Como uma última análise para essa classe, vemos conforme a Figura 16 que até os 50 m³ a Cagece continua sendo a empresa que tem o melhor custo benefício, logo após essa faixa a Cagece tem um acréscimo considerável na tarifa, ou seja, para 52 m³ o cliente irá pagar $[52] \cdot 14,07 = \text{R\$ } 731,64$ enquanto na Caern para

mesma faixa o cliente irá pagar $[52] \cdot 12,11 = R\$ 629,72$, vale salientar que após os 50 m³ a Caern sempre terá o melhor custo benefício.

5. CONCLUSÃO

Com os dados analisados, podemos concluir que com relação as tarifas de distribuição de água tanto para classe residencial, quanto para de instituições públicas, a Cagece tem um melhor custo benefício para os primeiros metros cúbicos, ou seja, o cliente pagará um valor menor nessas primeiras faixas em relação a Caern, que tem suas tarifas constantes para esses metros cúbicos. Para os primeiros metros cúbicos acima da taxa fixa da Caern, vemos que as duas empresas adotam um critério para tarifação bem próximo tendo a Cagece valores pouco mais elevados do que a Caern. Já para faixas acima de 50m³, a empresa que tem um critério para tarifação muito mais elevado é a Cagece comparado com a Caern, como vimos nas Figuras 13 e 16, respectivamente.

Em vista disso, concluímos que a Cagece, com essa forma de tarifação incentiva o consumidor a economizar água a fim de ter um valor baixo a ser pago, pois o mesmo consumindo um valor elevado de água essa empresa tem a tarifação muito mais elevada que a Caern.

Com essas definições aprendidas e aplicadas para um exemplo real do cotidiano, vimos que podemos aplicá-las para outros problemas futuros, tanto para a aplicação da função teto, que foi o exemplo desse Artigo de TCC, quanto para a aplicação da função Piso.

REFERÊNCIAS

- [1] GRAHAM, Ronold L. et al. **A Foundation for Computer Science**. 2. ed. United States: Addison-wesley Publishing Company, 1988. 657 p.
- [2] ESQUEF, Rosa Maria Andrade. **Modellando situações do nosso dia a dia usando funções teto e piso**. 2012. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/78/10.html>>. Acesso em: 17 out. 2019.
- [3] CAERN. **TABELA TARIFÁRIA 2019** CAERN. 2019. Disponível em: <<http://adcon.m.gov.br/ACERVO/caern/DOC/DOC000000000219385.PDF>>. Acesso em: 17 out. 2019.
- [4] CAGECE. **Estrutura Tarifária - Portal Cagece**. 2019. Disponível em: <<https://www.cagece.com.br/produtos-e-servicos/precos-e-prazos/estrutura-tarifaria/>>. Acesso em: 17 out. 2019.