



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

DAVI EUCLIDES DE OLIVEIRA

**PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONEXÕES E
APLICAÇÕES**

PAU DOS FERROS – RN

2021

DAVI EUCLIDES DE OLIVEIRA

**PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONEXÕES E
APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFERSA, Campus Pau dos Ferros, em cumprimento às exigências legais como requisito para a obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Me. Paulo Henrique das Chagas Silva

PAU DOS FERROS – RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

048p Oliveira, Davi Euclides de.
Progressões Aritméticas de Ordem Superior:
conexões e aplicações. / Davi Euclides de
Oliveira. - 2021.
66 f. : il.

Orientador: Paulo Henrique das Chagas Silva.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2021.

1. Progressões Aritméticas de Ordem Superior .
2. Somatório. 3. Somas de Riemann. 4. Aplicações e
correlações. I. Silva, Paulo Henrique das Chagas,
orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

DAVI EUCLIDES DE OLIVEIRA

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR: CONEXÕES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFRSA, Campus Pau dos Ferros, em cumprimento às exigências legais como requisito para a obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Pau dos Ferros-RN, 25 de maio de 2021.

BANCA EXAMINADORA

PAULO HENRIQUE
DAS CHAGAS
SILVA:05359369400

Assinado de forma digital por
PAULO HENRIQUE DAS
CHAGAS SILVA:05359369400
Dados: 2021.05.26 11:13:46
-03'00'

Prof. Me. Paulo Henrique das Chagas Silva – Presidente
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA

Mônica Paula de Sousa Martins

Assinado de forma digital por
MONICA PAULA DE SOUSA
MARTINS:01926741374
Dados: 2021.05.25 21:15:52 -03'00'

Profª. Ma. Mônica Paula de Sousa Martins – 1º Membro
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA

THATYARA FREIRE DE
SOUZA:04603726457

Digitally signed by THATYARA
FREIRE DE SOUZA:04603726457
Date: 2021.05.25 11:09:30
-03'00'

Profª. Dra. Thatyara Freire de Souza – 2º Membro
Universidade Federal Rural do Semi-Árido - UFRSA

DEDICATÓRIA

Dedico essa conquista aos meus pais José Euclides e Ana Queiroz, por todo amor e ensinamentos através do exemplo em todos os momentos da minha vida. Vocês são a minha inspiração para continuar perseverando em busca dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, ser de infinita bondade que não permitiu que me faltasse saúde e forças para ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo do curso.

A minha família, meus pais José Euclides e Ana Queiroz e irmão Diego Vinícius, por toda ajuda, compreensão e incentivo nessa caminhada. Vocês me mostraram, desde muito novo, que o primeiro passo para a realização de qualquer objetivo é acreditar que ele é possível.

A minha namorada Eveíza Campos e família, por me incentivarem a ser uma pessoa melhor a cada dia, aconselhando e torcendo pelo meu sucesso em cada passo realizado. Obrigado por me manter motivado durante todo o processo.

Aos meus amigos Paulo Rêgo, Adriano Aires, Raul Aquino, Ricassilly Lima, Júnior Almeida, Isaac Ravanelle e Felipe Gabriel, pela ajuda e companheirismo durante o tempo que residi na cidade de Pau dos Ferros-RN.

Aos meus amigos Gildeão Soares, Bianca Cavalcante, Kércia Nogueira, John Lennon, Janneson Lima, Gildemberg Soares e Jassira Rodrigues, por enfrentarmos unidos as dificuldades ao longo do curso. Vocês tornaram os momentos dentro da universidade mais leves e prazerosos, mas mantendo a seriedade necessária para a realização dos trabalhos.

Aos professores Thatyara Freire, Diego Farias e Josenildo Galdino, por me oportunizarem momentos de muito aprendizado frente as monitorias de Pré-Cálculo e Álgebra Linear durante esse percurso.

Ao meu professor orientador Paulo Henrique, pela ajuda e parceria para conclusão deste trabalho. Você se mostrou mais que um professor para mim, mas como um verdadeiro amigo quando mais precisei.

Aproveito para agradecer a todos os demais professores e funcionários em nome da instituição UFERSA, por extraírem meu melhor desempenho nessa importante etapa de formação profissional. Todos foram importantes e deixaram muito aprendizado na minha formação.

Enfim agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram e estiveram ao meu lado. Minha eterna gratidão.

RESUMO

Estamos acostumados a lidar com as sequências numéricas desde muito jovens, uma vez que a ideia de contar e o próprio sistema numérico são sequenciados. Todavia, muitas acepções e desdobramentos nas sequências ainda são pouco explorados na educação nacional, como as Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Nota-se que esse assunto capacita o indivíduo a resolver, de forma simples e direta, várias problemáticas em diversos contextos e, dessa forma, anseia-se que esse conhecimento seja melhor difundido. Nessa perspectiva, o presente trabalho tem como objetivo instigar o ensino das PAs de Ordem Superior durante a educação básica e superior, alicerçado nas diversas aplicações e conexões que essa temática possui. Para essa pesquisa, evidenciou-se um padrão resolutivo através das PAs de Ordem Superior para várias questões contextualizadas retiradas de olimpíadas e mestrado profissional em matemática. Contrariamente, percebeu-se que essas questões não exploravam essa concepção nos gabaritos oficiais, nos quais cada questão fora solucionada por um método distinto das demais – demandando, na maior parte dos casos, um olhar mais aguçado do discente. Ademais, transcorreu-se sobre a correlação existente entre as PAs de Ordem Superior e as Somas de Riemann através do desenvolvimento de somatórios de monômios, aplicáveis nas Somas de Riemann de funções polinomiais. Por conta disso, vislumbrou-se que as PAs de Ordem Superior podem contribuir para uma compreensão mais íntegra por parte dos discentes sobre as Somas de Riemann, entendendo de onde provém os polinômios que devem substituir os somatórios de monômios nesse estudo.

Palavras-Chave: Progressões Aritméticas de Ordem Superior; Somatório; Somas de Riemann; Aplicações e correlações.

ABSTRACT

We are used to dealing with numerical sequences from a very young age, since the idea of counting and the numerical system itself are sequenced. However, many meanings and developments in the sequences are still little explored in national education, such as Arithmetic Progressions of a Higher Order. It is noted that this issue enables the individual to solve, in a simple and direct way, several problems in different contexts and, therefore, it is hoped that this knowledge will be better disseminated. In this perspective, the present work aims to instigate the teaching of Arithmetic Progressions of a Higher Order during basic and higher education, based on the various applications and connections that this theme has. For this research, a resolute pattern was evidenced through the Arithmetic Progressions of Higher Order for several contextualized questions taken from Olympians and professional master's in mathematics. Although it, it was noticed that these questions did not explore this concept in official templates, in which each issue was solved by a different method from the others - demanding, in most cases, a sharper look from the student. In addition, the correlation between Arithmetic Progressions of a Higher Order and Riemann Sums was developed through the development of monomial summations, applicable to Riemann Sums of polynomial functions. Thus, it was envisioned that Arithmetic Progressions of a Higher Order could contribute to a more complete understanding on the part of students about Riemann Sums, understanding where the polynomials that should replace the summation of monomials in this study come from.

Keywords: Arithmetic Progressions of a Higher Order; Summation; Riemann sums; Applications and correlations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representação da soma das áreas dos retângulos sob a curva.	19
Figura 2: Questão 17 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2007.	25
Figura 3: Questão 16 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2009.	27
Figura 4: Gráfico de função quadrática - resolução questão 16 – OBMEP 2009 1ª fase – nível 3.	29
Figura 5: Questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.	29
Figura 6: Imagem para resolução questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.	30
Figura 7: Questão 1: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1	32
Figura 8: Imagem da Resolução da Questão 1: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1	32
Figura 9: Questão 5: Parte A – 37ª OBM – 2ª fase – nível 1	34
Figura 10: Questão 1 - MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - Prova 1 de 2011	36
Figura 11: Item b - Questão 1 - MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - AV1 de 2012	39
Figura 12: Item b - Questão 6 - Exame Nacional de Qualificação – PROFMAT 2017.1	40
Figura 13: Fluxograma conceitual – relação das Somas de Riemann e PAs de ordem superior.	51

Sumário

INTRODUÇÃO	10
1 REVISÃO TEÓRICA	13
1.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PAs)	13
1.2 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PAs) DE ORDEM SUPERIOR	15
1.3 SOMAS DE RIEMANN.....	19
2 METODOLOGIA.....	23
3 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR EM QUESTÕES OLÍMPICAS E DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA	25
3.1 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR EM OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NACIONAIS	25
3.2 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR NO PROFMAT	36
4 O USO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR NO ESTUDO DAS SOMAS DE RIEMANN DE FUNÇÕES POLINOMIAIS.	43
4.1 DESENVOLVIMENTO DOS SOMATÓRIOS DE MONÔMIOS DE GRAUS UM, DOIS E TRÊS	44
4.2 RESOLUÇÃO DE SOMATÓRIOS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS EM PRODUTO	48
4.3 RELAÇÃO ENTRE AS PAs DE ORDEM SUPERIOR E AS SOMAS DE RIEMANN	50
CONCLUSÃO.....	53
REFERÊNCIAS.....	56
ANEXO I - Resolução gabarito oficial - Questão 17 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2007.	59
ANEXO II - Resolução gabarito oficial - Questão 16 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2009.	60
ANEXO III - Resolução gabarito oficial - Questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.	61
ANEXO IV – Resolução gabarito oficial - Questão 01: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1 (2009).	62
ANEXO V - Resolução gabarito oficial – Questão 05: Parte A – 37ª OBM – 2ª fase – nível 1 (2015).....	63
ANEXO VI - Resolução gabarito oficial – Questão 1 – MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - Prova 1 de 2011.	64
ANEXO VII - Resolução gabarito oficial - Questão 1: Item b - MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - AV1 de 2012.....	65
ANEXO VIII - Resolução do gabarito oficial - Questão 6: Item b - Exame Nacional de Qualificação – PROFMAT 2017.1.....	66

INTRODUÇÃO

Em toda história dos estudos frente à Matemática, uma das temáticas mais interessantes e curiosas são as sequências numéricas, as quais surgiram concomitantemente com a contagem. Sabe-se que, desde os primeiros registros escritos dos povos babilônios da antiga Mesopotâmia, que datam mais de 2000 anos antes de Cristo, já existiam as primeiras escritas numéricas e a necessidade de resolver problemas de contagem em situações cotidianas. Logo, percebe-se que a necessidade de contar mantém em seu íntimo o princípio de sequência numérica, ainda mais pelo fato de que o próprio conjunto dos números naturais é um elemento sequenciado. (WILLE, 2016).

É notório que o sequenciamento é um processo natural à organização e à racionalidade humana. Nas mais diversas áreas de estudo, desde o sequenciamento genético ao sequenciamento histórico em ordem cronológica, o ser humano busca ordenar fatos, objetos e metas para adequar a sua visualização e a sua coordenação para alcançar seus objetivos (ALMEIDA, 2012). Como visto, por essa necessidade intrínseca de organização dos objetos e animais que surgiu a contagem e o sistema numérico.

Especificamente, a sequência descrita pelo Conjunto Numérico dos Números Naturais trata-se de uma Progressão Aritmética (PA), que pode ser entendida como uma sucessão proporcional termo a termo. De maneira geral, PA pode ser entendida como a sequência numérica em que as quantidades crescem ou decrescem de forma sucessiva na mesma proporção (MAROSKI, 2017).

Conforme Almeida (2013) destaca em seu trabalho, as progressões aritméticas são conhecimentos muito importantes de serem abordados em sala de aula especialmente por suas diversas aplicações, como nas áreas da Biologia e da Matemática financeira. Assim, recomenda-se o seu ensino na rede regular de ensino, em especial durante o Ensino Médio, gerando meios para que se relacionem seus conceitos, teorizações e aplicabilidade, fomentando artifícios para modelar algumas situações da vida real.

Ampliando-se essa perspectiva, vemos que essa definição aborda somente as Progressões Aritméticas de Primeira Ordem. Define-se, dessa forma, a Ordem de uma PA como um número natural n que representa a quantidade de subtrações sucessivas entre termos subsequentes necessárias para que seja encontrado uma nova sequência na qual todos os termos apresentam o mesmo valor – sendo essa chamada de sequência constante ou de Ordem Zero. (OLIVEIRA, 2019).

Diante disto, estendendo tal concepção de subtrações sucessivas, espera-se que existam um quantitativo infinito de possibilidades de ordem de uma PA, bem como o mesmo montante a serem aplicáveis nas soluções de diversos problemas de contagem aplicáveis em práticas no cotidiano.

Indo de encontro a isso, nota-se que o assunto Progressões Aritméticas de Ordem Superior é pouco ou nada explorado no ensino regular. Conforme Nobre e Rocha (2018) concluem em seu trabalho, é necessário encaixar o assunto das PAs de ordem superior no Ensino Médio, majoritariamente por esse conhecimento poder ser usado como uma fundamentação para discentes na resolução de problemas mais avançados, inclusive de olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais.

Diante do exposto, o trabalho apresentado objetiva uma exploração mais diversificada sobre os conceitos das Progressões Aritméticas de Ordem Superior, obstinando as aplicações dessa temática e em estabelecer relações lógico-matemáticas entre as Progressões Aritméticas de Ordem Superior e as Somas de Riemann. Dentre esses, aspira-se desenvolver e debater sobre o emprego das Progressões Aritméticas de Ordem Superior em questões de provas olímpicas de âmbito nacional e de mestrado que tiveram soluções apresentadas no gabarito oficial por outros meios matemáticos. Ou seja, deseja-se vincular as acepções das PAs de Ordem Superior em outros contextos não abordados, consequentemente defendendo a importância e capacidade dedutiva desse assunto pelo fato de ser um conteúdo matemático com várias aplicações, porém ainda pouco explorado de forma geral.

Não obstante, a conexão entre as PAs de Ordem Superior e as Somas de Riemann emerge no desenvolvimento matemático de somatórios de monômios, assunto este aplicado no estudo das Somas de Riemann de funções polinomiais – uma vez que, pelas propriedades do somatório, os somatórios de polinômios gerados nas Somas de Riemann podem ser subdivididos em somatórios de monômios, que possuem aplicabilidade mais generalista. Reforça-se que as Somas de Riemann são exploradas nas disciplinas de Cálculo por consolidarem uma base e motivação para o Teorema Fundamental do Cálculo e Integração (SIPLE; CARDOSO; FIGUEIREDO, 2015).

Nesse viés, essa visão se faz necessária pelo caráter facilitador do ensino-aprendizagem do conceito de Soma de Riemann, que, por vezes, apresenta-se como um obstáculo aos discentes no desenvolvimento conceitual dentre as técnicas de derivação e integração, contribuindo assim para o encadeamento de conceitos a serem trabalhados em sala de aula. Além disso, é interessante para o meio acadêmico a exposição as PAs de Ordem Superior tendo em vista todas as aplicabilidades acima defendidas. Assim, a questão

norteadora sobre a qual o presente trabalho está fundamentado é quais são os contextos em que as PAs de Ordem Superior podem ser aplicadas e por que é preciso explorar melhor tais conhecimentos nos ensinos regular e superior?

Nessa concepção, o presente trabalho é dividido em quatro capítulos: Inicialmente, debater-se-á sobre aspectos históricos e conceitos fundamentais das Progressões Aritméticas de Ordem Superior e, de forma mais sucinta, um subtópico sobre as Somas de Riemann. Uma vez que esse capítulo fornecerá a estruturação teórica sobre o qual o trabalho está fundamentado, trazendo as concepções da literatura sobre a temática, será nomeado de “Revisão Teórica”. Sequencialmente, descreveremos os métodos analíticos e científicos que o presente trabalho foi formulado, assim descrevendo as metodologias a serem utilizadas em todo processo de pesquisa e desenvolvimento deste trabalho.

Na seção seguinte, defender-se-á as diversas aplicações possíveis das Progressões Aritméticas de Ordem Superior pautado em questões que, em geral, exigem uma maturidade matemática e raciocínio um pouco mais elevados: questões de provas olímpicas e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Em especial, serão apresentadas questões que na resolução oficial dos gabaritos divulgados utilizaram outras técnicas e conhecimentos matemáticos para sua resolução. Dessa forma, será visado mostrar a aplicabilidade desse conhecimento em problemáticas que, a princípio, aparentavam não ter muita relação entre si.

Por fim, a última seção do trabalho aspira apresentar, de uma forma simples, a relação existente entre as Somas de Riemann e as Progressões Aritméticas de Ordem Superior no desenvolvimento dos somatórios de monômios. Dessa forma, pretende-se incentivar os docentes, ao abordarem sobre as Somas de Riemann nos cursos de Ciências Exatas e Engenharias, a apresentarem os desdobramentos do presente trabalho, mesmo que de forma sucinta.

1 REVISÃO TEÓRICA

Na presente seção, discorre-se sobre as abordagens pertinentes encontradas na literatura a fim de se compreender os conceitos e desenvolvimentos acerca das Progressões Aritméticas de Ordem Superior e a definição das Somas de Riemann para que se explore o tema e se alcance os objetivos do trabalho.

1.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PAs)

Conforme previamente discutido, existem diversas sequências numéricas que possuem uma padronização no seu crescimento ou decrescimento termo a termo, ou seja, possuem um incremento proporcional entre os termos da sequência descrita. Assim, uma Progressão Aritmética de Primeira Ordem, ou simplesmente Progressão Aritmética, é definida como a sequência em que cada termo sucessor é obtido como soma do termo anterior com uma constante r , que é chamada de razão da PA (GOMES, 2019). Tal razão pode ser um número positivo ou negativo.

Assim, o k -ésimo termo de qualquer PA de primeira ordem pode ser encontrado por:

$$x_k = x_1 + (k - 1) \cdot r \quad (1)$$

Ou seja, para qualquer PA dada, deve ser conhecido a razão de proporcionalidade e um termo inicial, sobre os quais serão desenvolvidos os demais termos da Progressão.

Uma consequência importante dessa acepção é a definição da propriedade do termo central de uma Progressão Aritmética: qualquer termo de uma PA pode ser encontrado a partir da média aritmética de dois termos igualmente espaçados desta PA de Primeira Ordem (MIGUEL; XAVIER; FRANZOLIN, 2014). Ou seja, tomando a progressão genérica $(a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_k, \dots, a_m, \dots)$, em que $k - p = m - k \quad \forall k, m, p \in \mathbb{N}$ (a quantidade de termos entre a_p e a_k é igual a quantidade de termos entre a_k e a_m), tem-se que $a_k = \frac{a_p + a_m}{2}$.

Progredindo nesses conhecimentos, segundo Miguel, Xavier e Franzolin (2014) e Iezzi e Hazzan (1993), Carl Friedrich Gauss [1777-1855] observou uma particularidade interessante na soma dos termos de uma sequência que a lei de formação respeite a Equação 1, ou seja, que seja Progressão Aritmética. Por volta de 1790, um professor solicitou que a turma calculasse a adição dos 100 primeiros números naturais, o qual Gauss conseguiu responder rapidamente ao notar que a adição do primeiro com o último termo (1+100) resultava o mesmo valor da soma do segundo com o penúltimo (2+99), o terceiro com o

antepenúltimo (3+98) e assim progressivamente. Dessa maneira, ele notou que a soma dos 100 primeiros números naturais correspondia a multiplicação do valor de 101 por 50 (quantidade de agrupamentos dois a dois formados nessa reorganização dos 100 números naturais a serem somados), resultando na resposta de 5050.

Numa ideologia semelhante a utilizada por Gauss nesse caso particular, pode-se expandir tal conceito para as somas dos termos de Progressões Aritméticas com razões e termos iniciais e finais diversos, resultando que a Soma dos k primeiros termos de uma PA de Primeira Ordem pode ser encontrada pela expressão a seguir:

$$S_k = (x_1 + x_k) \cdot \frac{k}{2} \quad (2)$$

Que corresponde, basicamente, a adicionar o primeiro ao último elemento da sequência descrita e multiplicar pela metade do número de termos no intervalo analisado, valor esse que equivale a quantidade de agrupamentos de igual valor formados na resolução da visão de Gauss. Pela Equação 1, reitera-se que esses agrupamentos entre o primeiro e último termo, segundo com penúltimo, terceiro com antepenúltimo, e assim sucessivamente, possuem o mesmo valor por:

$$\begin{aligned} x_1 + x_k &= x_1 + [x_1 + (k-1)r] = 2x_1 + (k-1)r \\ x_2 + x_{k-1} &= x_1 + r + [x_1 + (k-2)r] = 2x_1 + (k-1)r \\ x_3 + x_{k-2} &= x_1 + 2r + [x_1 + (k-3)r] = 2x_1 + (k-1)r \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_m + x_{m+1} = x_1 + (m-1)r + [x_1 + (k-m)r] = 2x_1 + (k-1)r$$

Em que x_m e x_{m+1} são os termos centrais da sequência que vai de x_1 à x_k , com k sendo um número par. Ou seja,

$$\begin{aligned} S_k &= x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{k-1} + x_k \\ S_k &= (x_1 + x_k) \cdot \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Entretanto, queremos verificar que a mesma expressão pode também ser aplicada para k sendo um número ímpar, no qual realizar-se-á os mesmos agrupamentos do caso anterior, porém somente até x_{m-1} e x_{m+1} , formando $\frac{k-1}{2}$ agrupamentos – mantém-se isolado o termo central x_m . Ou seja,

$$S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m + x_{m+1} + \cdots + x_{k-1} + x_k$$

$$S_k = (x_1 + x_k) \cdot \frac{k-1}{2} + x_m$$

$$S_k = (2x_1 + (k-1)r) \cdot \frac{k-1}{2} + (x_1 + (m-1)r)$$

Porém, como $m = \frac{k+1}{2}$:

$$S_k = (2x_1 + (k-1)r) \cdot \frac{k-1}{2} + \left(x_1 + \frac{k-1}{2}r\right)$$

$$S_k = (2x_1 + (k-1)r) \cdot \frac{k-1}{2} + \frac{1}{2}(2x_1 + (k-1)r)$$

$$S_k = (2x_1 + (k-1)r) \cdot \left(\frac{k-1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_k = (x_1 + x_k) \cdot \frac{k}{2}$$

E assim, percebemos que a Equação 2 pode ser aplicado para a Soma dos k primeiros termos de uma PA de Primeira Ordem para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, independe da quantidade de termos tomados da PA para a sua consequente adição.

1.2 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PAs) DE ORDEM SUPERIOR

Partindo dessa concepção, pode-se expandir a definição de Progressões Aritméticas e desenvolver-se as Progressões Aritméticas de Ordem n . Essas são entendidas como a sequência numérica que, em primeiro momento, não se apresenta como uma sequência linear. Entretanto, caso formulemos novas sequências numéricas a partir de subtrações dos termos subsequentes dessa sequência inicial dada, em um dado momento, chegaremos em uma Progressão Aritmética de Primeira Ordem. Para tal, devemos realizar $n - 1$ subtrações sucessivas. Ou seja, uma progressão aritmética de ordem $k \geq 2$ é a sequência em que as diferenças entre termos sucessivos gera uma progressão aritmética de ordem $k - 1$ (LIMA, 2015).

Ou ainda, conforme visto anteriormente na introdução por Oliveira (2019), a Ordem de uma PA é como um número natural n que representa a quantidade de subtrações sucessivas entre termos subsequentes necessárias para que seja encontrado uma nova sequência na qual todos os termos apresentam o mesmo valor – sendo essa chamada de sequência constante, PA estacionária ou ainda PA de Ordem Zero.

Nesta tangente, Nobre e Rocha (2018) desenvolvem a forma de encontrar o k -ésimo termo de uma Progressão Aritmética de Ordem n :

$$a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{k-1}{2} \Delta^2 a_1 + \dots + \binom{k-1}{n-1} \Delta^{n-1} a_1 + \binom{k-1}{n} r, \quad (3)$$

em que $\Delta^p a_1$ é o primeiro termo da PA de ordem $k - p$ e $\binom{x}{y}$ é a combinação que pode ser solucionada por $\frac{x!}{y!(x-y)!}$ (VASCONCELOS; ROCHA, 2019).

Chagas e Rocha (2012) simplificam tal visualização por:

$$a_k = \sum_{i=0}^n \binom{k-1}{i} a_1^{[i+1]}, \quad (4)$$

no qual explana-se que $a_1^{[n]} = a_2^{[n-1]} - a_1^{[n-1]}$, em que $[n]$ é a ordem da PA associada que essa subtração está associada.

Por exemplo, tomemos a PA (5, 7, 10, 17, 33, 65, 122, ...) que, de antemão, não concebemos em qual Ordem ela está classificada, uma vez que não possui nem elementos constantes (PA de Ordem Zero) nem uma sequência proporcional entre os elementos (Progressão Aritmética em sentido amplo ou PA de Primeira Ordem).

A partir desse, podemos gerar uma outra PA associada a partir da subtração dos elementos subsequentes, encontrando a PA (2, 3, 7, 16, 32, 57, ...). Repetindo o procedimento, encontra-se a PA (1, 4, 9, 16, 25, ...) e, por fim, a PA de Primeira Ordem (3, 5, 7, 9, ...), todas essas associadas a PA inicial por subtração sucessiva de seus termos. Note que, caso realizemos novamente uma subtração, chegamos a PA de Ordem Zero (2, 2, 2, ...) e, como elucidado por Oliveira (2019), já que tivemos de realizar quatro operações sucessivas de subtração para encontrá-la, a PA inicial (5, 7, 10, 17, 33, 65, 122, ...) é dita de Quarta Ordem.

Assim, caso se deseje encontrar qualquer termo desta PA de Quarta Ordem a partir dos primeiros termos dessa sequência, de maneira sucinta, para o exemplo dado, é dada pela expressão:

$$a_n = \binom{n-1}{0} \cdot 5 + \binom{n-1}{1} \cdot 2 + \binom{n-1}{2} \cdot 1 + \binom{n-1}{3} \cdot 3 + \binom{n-1}{4} \cdot 2,$$

Em que esses coeficientes (5, 2, 1, 3, 2) são os termos iniciais das PAs de Ordem Quatro, Três, Dois, Um e Zero, respectivamente. Logo,

$$a_n = \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} \cdot 5 + \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} \cdot 2 + \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} \cdot 1 + \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} \cdot 3 + \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} \cdot 2$$

$$a_n = \frac{n^4 - 4n^3 + 5n^2 + 22n + 36}{12}$$

Nessa tangente, é oportuno apresentar as conceituações generalistas de onde provém este termo n -ésimo da PA de uma ordem p . Dessa forma, Escada (2012) traz o seguinte teorema em seu trabalho:

Teorema 1: O somatório

$$\sum_{k=1}^n k^p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

é um polinômio de grau $p + 1$ em n , ou seja,

$$\sum_{k=1}^n k^p = c_{p+1}n^{p+1} + c_p n^p + c_{p-1}n^{p-1} + \dots + c_2 n^2 + c_1 n + c_0, \quad c_j \in \mathbb{R}, 0 \leq j \leq p + 1$$

Demonstração baseada por Escada (2012, p. 7):

Uma vez conhecido que o caso $p = 1$ resulta em um polinômio de grau 2 em n :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}, \quad ^1$$

Procedendo por indução, devemos provar que o somatório de k^{p+1} resulta em um polinômio em n de grau $p + 2$, tomando como verdadeira a afirmação de que o somatório de k^p resulta em um polinômio em n de grau $p + 1$.

Portanto, para o somatório $\sum_{k=1}^n (k + 1)^{p+2}$, ao aplicando-se o binômio de Newton $(k + 1)^{p+2} = k^{p+2} + (p + 2)k^{p+1} + F(k)$, com $F(k)$ sendo um polinômio de grau p em k , temos:

$$\sum_{k=1}^n (k + 1)^{p+2} = \sum_{k=1}^n k^{p+2} + (p + 2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + \sum_{k=1}^n F(k)$$

em que $\sum_{k=1}^n F(k)$ resulta em um polinômio de grau $p + 1$ em n pela hipótese levantada na indução. Chamemos esse novo polinômio de $G(n)$. Resolvendo os somatórios:

$$2^{p+2} + 3^{p+2} + \dots + n^{p+2} + (n + 1)^{p+2} = 1^{p+2} + 2^{p+2} + 3^{p+2} + \dots + n^{p+2} + (p + 2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + G(n)$$

$$(n + 1)^{p+2} = 1^{p+2} + (p + 2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + G(n)$$

$$\sum_{k=1}^n k^{p+1} = \frac{(n + 1)^{p+2} - 1^{p+2} - G(n)}{(p + 2)}$$

que é um polinômio de grau $p + 2$ em n como levantado pela hipótese.

Finalizando a compreensão acerca dessa temática, segundo Lima *et al.* (2006), temos:

¹ Caso a ser desenvolvido inclusive no presente trabalho no tópico “4.1 DESENVOLVIMENTO DOS SOMATÓRIOS DE MONÔMIOS DE GRAUS UM, DOIS E TRÊS” – Equação 6.

Teorema 2: a_n é um termo de uma progressão aritmética de ordem $p \geq 2$ se, e somente se, a_n é um polinômio em n de grau p .

Demonstração baseada em Lima *et al.* (2006, p. 13):

Deve-se, inicialmente, provar que o termo a_k de uma progressão aritmética de ordem $p = 2$ é um polinômio de grau 2 (e sua recíproca) para, posteriormente, pelo princípio de indução, vermos que para um $x = p + 1$ também é válido o enunciado pelo teorema. Define-se previamente a operação Δa_k como a subtração de dois termos sucessivos da PA ou polinômio de Ordem p .

Dessa forma, se $a_k = xk^2 + yk + z$, com $x \neq 0$, tem-se que:

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k = x[(k+1)^2 - k^2] + y[(k+1) - k] + z - z$$

$$\Delta a_k = (2x)k + x + y$$

Que é um polinômio de primeiro grau. Logo, Δa_k é uma PA de Primeira Ordem e, como foi obtida a partir da subtração de termos sucessivos de a_k , a_k é uma PA de segunda ordem.

Nesse sentido, se a_k é uma PA de segunda ordem, então existe uma outra sequência $b_k = \Delta a_k$ que é uma PA de Primeira Ordem. Note que

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{k-2} + b_{k-1} + b_k = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{k+1} - a_k)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{k-2} + b_{k-1} + b_k = a_{k+1} - a_1$$

Que é um polinômio de segundo grau, conforme visto na Equação 2 (somatório dos termos de uma PA de Primeira Ordem). Logo, a_k também é um polinômio de segundo grau.

Perpassado a prova para o caso $p = 2$, Lima *et al.* (2006) expandem essa demonstração para os graus superiores por:

Suponhamos que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{2, 3, \dots, s\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = s + 1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem s e, pela hipótese da indução, b_n é um polinômio de grau s em n . Então, $\sum_{k=1}^n b_k = a_{n+1} - a_1$ é [...] um polinômio de grau $s + 1$ em n .

Se a_n é um polinômio de grau $s + 1$ em n , Δa_n é um polinômio de grau s em n , conforme você facilmente verificará. Pela hipótese da indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem s , ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $s + 1$. (LIMA *et al.*, 2006, p. 13).

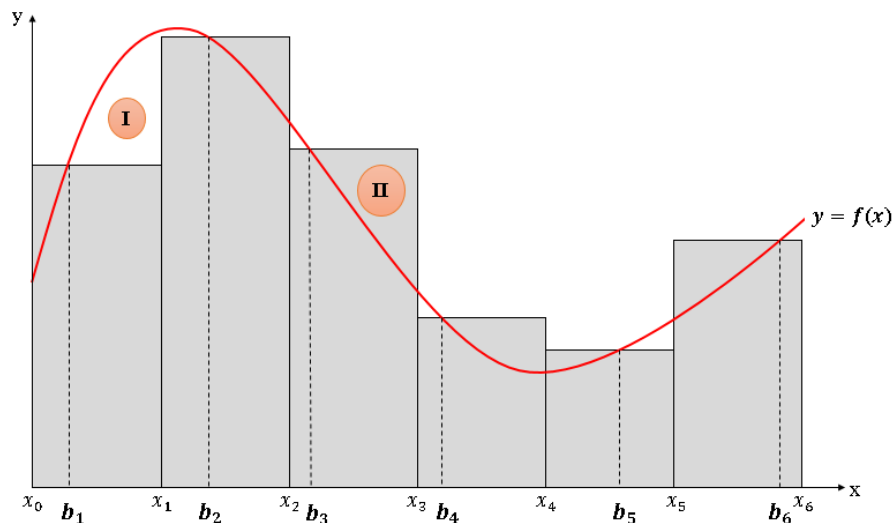
Assim, pode-se caracterizar uma PA de Ordem k a partir das expansões acerca de seus termos. Dessa maneira, consegue-se caracterizar a Ordem de uma PA a partir do grau do

polinômio que oportuniza a determinação de seus termos (ESCADA, 2012). Por conseguinte, o somatório acima é o somatório dos termos de uma PA de ordem $p + 1$.

1.3 SOMAS DE RIEMANN

As Somas de Riemann é um dos procedimentos utilizados para o cálculo de áreas sob curvas de uma função. Para a compreensão da conceituação acerca das Somas de Riemann, tomemos inicialmente uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, não-negativa, ou seja, $f(x) \geq 0$ em todo intervalo $x \in [a, b]$, no qual se realizam partições neste intervalo no eixo das abcissas de forma que existam n subintervalos com o mesmo comprimento, ou seja, iguais a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (VILLELA; SANTOS; JAFELICE, 2007). Com um determinado número de subintervalos, apresenta-se a Figura 1 o qual procederá os conceitos e formalizações sob o cálculo a seguir:

Figura 1: Representação da soma das áreas dos retângulos sob a curva.



Fonte: Autor (2021).

Como a imagem sugere, a partir das subdivisões traçadas, podemos calcular a área total a partir das áreas dos retângulos traçados, sendo a altura o valor resultante da função após aplicado um ponto arbitrário b_k , que está contido no intervalo de $[x_{k-1}, x_k]$, ou seja, a altura será igual a $f(b_k)$. Assim, a área de cada retângulo individualmente pode ser encontrada por $a_k = f(b_k)\Delta x$.

Segundo Thomas, Weir e Hass (2012), para a tomada do ponto sob o qual será calculada a altura, didaticamente pode-se escolher-se à esquerda ($b_k = x_{k-1}$), à direita ($b_k = x_k$) ou pela regra ponto médio ($b_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$). Entretanto, ressalta-se que pela

definição, pode ser tomado qualquer ponto de cada subintervalo, já que se trata de um ponto arbitrário. Essas considerações são utilizadas para mostrar que, tomando-se uma quantidade finita de repartições, iremos estar calculando uma aproximação para o valor verdadeiro da área, sob o qual iremos estar subestimando-a ou superestimando-a pelo método adotado – como a imagem acima demonstra pelos espaços em branco.

Diante dessas considerações, definimos que a área total é o somatório dos valores encontrados, expresso matematicamente por:

$$A = \sum_{k=1}^n f(b_k)\Delta x$$

Contudo, note que essa aproximação da área sob a curva em relação ao somatório gera erros na sua estimativa: com auxílio da representação da Figura 1, notamos que essa técnica gera algumas regiões como a nomeada na imagem por I, a qual está sob a curva porém, na formação das regiões retangulares, esses elementos não incrementam tal região na área de nenhum deles; da mesma forma, existem regiões como a II, que terão suas áreas no cálculo dos retângulos porém estão acima da curva e, conseqüentemente, não deviam ser calculadas.

A fim de eliminar os erros de aproximação, intuitivamente vê-se que, aumentando-se o número de repartições trabalhadas – e subseqüentemente, diminuindo-se os comprimentos das partições –, o valor encontrado para a área aproxima-se ao seu valor real. Nesse sentido, é pertinente manifestar o Método da Exaustão, formalizado por Eudoxo de Cnido (408 a.C – 335 a.C.), que, segundo Ribeiro (2010), pode-se versar sobre:

Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza da mesma espécie. (RIBEIRO, 2010, p. 58).

Foi a partir dessa técnica, aplicada justamente aos problemas de áreas de figuras planas que instigou desde os gregos para esse desenvolvimento acima descrito e culminou na formulação das Somas de Riemann, por Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão que a publicou em 1859 (SIPLE; CARDOSO; FIGUEIREDO, 2015).

Assim, as Somas de Riemann, preferencialmente, devem ser trabalhados a partir da definição de limites por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(b_k)\Delta x$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(b_k) dx. \quad (5)$$

Em que dx é uma quantidade infinitesimal de comprimento da base do retângulo.

Destarte, a mesma concretização se estende as funções negativas, fazendo-se somente as considerações de que a área calculada no trecho abaixo do eixo x será apresentada com o sinal negativo o acompanhando. Diante disto, ao se realizar o cálculo de uma função qualquer, o cálculo das Somas de Riemann apresentará como resultado o saldo entre as áreas, ou seja, as áreas sob a função acima do eixo Ox menos a área da função abaixo do eixo Ox (GUIDORIZZI, 2001).

Como viabiliza-se notar, o estudo das Somas de Riemann está atrelado a resolução de somatórios. Diante disto, é convincente o estudo das propriedades deste para a resolução dos problemas que envolvem esse estudo, em especial pela forma estendida da Soma de Riemann no qual o limite superior do somatório tende ao infinito. Diante disto, apresenta-se as seguintes propriedades apoiado em Galvão (2020):

I) Somatório do produto de uma constante c por uma variável

$$\sum_{k=1}^n ck = c \cdot \sum_{k=1}^n k$$

II) Somatório de uma constante c :

$$\sum_{k=1}^n c = c \cdot n,$$

III) Somatório de uma adição ou subtração de variáveis

$$\sum_{k=1}^n [f(k) \pm g(k)] = \sum_{k=1}^n f(k) \pm \sum_{k=1}^n g(k)$$

Em grande parte das didáticas de ensino, as Somas de Riemann são a porta de entrada para o estudo do Cálculo Integral. Simplificadamente, a ideia de integração é o cálculo do saldo de áreas abaixo de curvas, nas quais se subdivide áreas maiores em pedaços pequenos, que posteriormente serão somadas para compreender a quantidade total. Majoritariamente, esses pedaços menores são entendidos como retângulos pela definição das Somas de Riemann, uma vez que independentemente de quão irregular seja a área total a ser calculada entende-se que, a níveis infinitesimais, as subáreas são retangulares (MANÇO, 2016). Além disso, é cabível salientar que as subdivisões feitas em torno do eixo das abscissas, quando trabalhado a fim de conceituar-se as integrais pelas acepções absorvidas

pelas Somas de Riemann, não necessitam subintervalos com o mesmo comprimento iguais a Δx . Esse procedimento é apenas adotado nas Somas de Riemann a fim de padronizar a formulação dos somatórios para sua resolução, porém o comportamento a nível infinitesimal dessas subdivisões (quando levadas ao infinito) independe de seus comprimentos serem congruentes.

2 METODOLOGIA

O estudo realizado está pautado numa revisão bibliográfica, sob o qual buscou conectar diferentes teoremas e propriedades das Progressões Aritméticas de Ordem Superior para delimitar mecanismos práticos e aplicabilidades dessa temática em diversas áreas e situações problema. Dessa forma, procura-se instigar meios que contribuem para o ensino-aprendizagem de outros conteúdos matemáticos, como as Somas de Riemann citadas anteriormente.

De acordo com os estudos de Lima e Miotto (2007), a pesquisa bibliográfica é definida como um conjunto sistemático de técnicas para a busca de soluções fundamentadas teoricamente frente ao objeto de estudo analisado, sendo dessa forma indispensável para que se siga caminhos coerentes na produção de novos conhecimentos científicos.

Para tal, o trabalho foi seccionado em dois capítulos: inicialmente, foram consultadas aplicações das PAs de Ordem Superior em questões olímpicas e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como as provas da disciplina MA12 – Matemática Discreta e do Exame de Qualificação. Contudo, procurou-se por questões que não apresentavam tal desenvolvimento nos gabaritos oficiais. Assim, foi debatido e comparado as duas abordagens de desenvolvimento dessas questões – por PAs de Ordem Superior e os mecanismos expostos nos gabaritos oficiais.

Posteriormente, ao discorrer sobre o uso das Progressões Aritméticas de Ordem Superior no estudo das Somas De Riemann de funções polinomiais, foram verificados os principais livros utilizados no componente curricular Cálculo II, em especial os apresentados na ementa do Curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia ofertado pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA – e alguns exemplares presentes na biblioteca dessa instituição no campus de Pau dos Ferros-RN que abordam o estudo das Somas de Riemann. A intenção dessa observação foi analisar suas abordagens e sua elucidação frente às Somas de Riemann. Para isso, foi apanhado seções com palavras-chave relacionadas as Somas ou Integrais de Riemann.

Além destes materiais, averiguou-se artigos, monografias, teses e dissertações, disponibilizadas de maneira digital, sobre as Progressões Aritméticas de Ordem Superior e suas aplicações e as Somas de Riemann. Para tanto, embasou-se as pesquisas em buscas no Google Acadêmico, no Portal de Periódicos CAPES e no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.

Por conseguinte, a partir desses materiais e as elucubrações destes, estabeleceu-se relações lógicas entre as temáticas a fim do desenvolvimento do presente trabalho e o alcance dos objetivos propostos.

3 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR EM QUESTÕES OLÍMPICAS E DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

Na presente seção, serão discutidas aplicações das PAs de Ordem Superior em diferentes contextos. Para tal, escolheram-se questões de provas olímpicas e do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional por fornecerem questões contextualizadas relativamente complexas pela resolução apresentada no gabarito oficial. Portanto, almeja-se fundamentar a justificativa defendida da necessidade de uma abordagem mais incisiva sobre esses conhecimentos no ensino regular, perpassando por soluções mais simples e mecanizadas para tais questões.

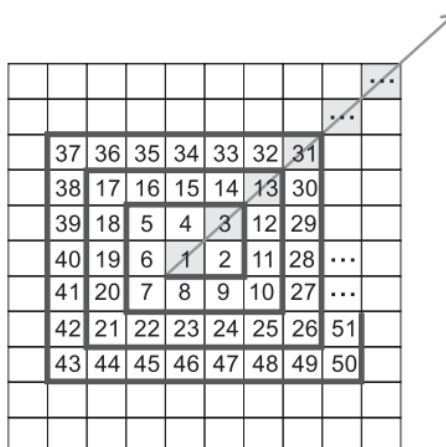
3.1 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR EM OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA NACIONAIS

Dessa forma, podemos inicialmente analisar questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Na prova do nível 3 - 1ª fase do ano de 2007, encontramos a questão de número 17 que podemos discutir a sua resolução por PAs de Ordem Superior de forma interessante. A referida questão apresenta-se na Figura 2 e trazemos a solução oficial disponibilizado no site da OBMEP² no ANEXO I:

Figura 2: Questão 17 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2007.

17. Paula escreveu os números 1, 2, 3, ... em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Os números que aparecem ao longo da flecha formam a sequência 1, 3, 13, 31, Qual é o 30º termo dessa sequência?

- A) 3301
- B) 3303
- C) 3307
- D) 3309
- E) 3313



	37	36	35	34	33	32	31		
	38	17	16	15	14	13	30		
	39	18	5	4	3	12	29		
	40	19	6	1	2	11	28	...	
	41	20	7	8	9	10	27	...	
	42	21	22	23	24	25	26	51	
	43	44	45	46	47	48	49	50	

Fonte: OBMEP (2007).

² Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em: 19/04/2021.

Contudo, conforme defendido pelo presente trabalho, essa é uma questão que facilmente poderia ser respondida e trabalhada na vertente das Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Tomemos a sequência dada pela flecha indicada na questão $\{1,3,13,31, \dots\}$ como uma PA de Ordem n . Podemos, dessa forma, realizar a subtração de termos sucessivos nessa PA e encontrar uma nova PA, associada a anterior, porém de Ordem $n - 1$. Assim, temos a PA $\{2,10,18, \dots\}$ a qual notamos ser uma PA de Primeira Ordem, logo a Ordem n da PA inicial é Dois. A questão nos pede o a_{30} , logo, pela Equação 3 (ou Equação 4, que é sua simplificação), podemos encontrar a expressão do termo genérico dessa PA de Ordem Dois por:

$$a_k = \binom{k-1}{0} a_1 + \binom{k-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{k-1}{2} r$$

$$a_k = \frac{(k-1)!}{0!(k-1)!} \cdot 1 + \frac{(k-1)!}{1!(k-2)!} \cdot 2 + \frac{(k-1)!}{2!(k-3)!} \cdot 8$$

$$a_k = 4k^2 - 10k + 7$$

Ou, de forma mais simples (já que não seria necessário recordar a fórmula da Equação 3 ou Equação 4), o discente poderia desenvolver a mesma expressão utilizando o Teorema 2: conhecendo que a PA $\{1,3,13,31, \dots\}$ é de Segunda Ordem, relacionamos os seus termos a um polinômio quadrático:

$$a_k = f(k) = ak^2 + bk + c$$

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 3; \quad f(3) = 13; \quad f(4) = 31.$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

Subtraindo a 2ª linha da 3ª linha, bem como a 1ª linha da 2ª linha:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 5a + b = 10 \end{cases}$$

Subtraindo os resultados apresentados na 2ª linha da 3ª linha:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 2a = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 7 \\ b = -10 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$a_k = 4k^2 - 10k + 7$$

E encontramos a mesma expressão anterior. Dessa forma, a fim de pautar as discussões na ótica do discente que resolveria tais questões, vemos que o segundo desenvolvimento é mais simples, haja vista que não necessita a memorização da expressão das Equações 3 ou 4. Dessa forma, nas próximas questões, ao necessitarmos encontrar o termo geral de uma PA de Ordem Superior, desenvolveremos o raciocínio apoiado no Teorema 2.

Dessa forma, finalizamos essa questão substituindo $k = 30$:

$$a_{30} = 4 \cdot (30)^2 - 10 \cdot 30 + 7$$

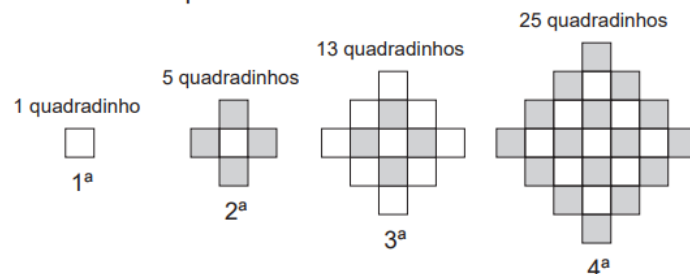
$$a_{30} = 3307 - \text{item C}$$

O que confere a mesma resposta final da apresentada na resolução oficial. Ressalta-se que a resolução oficial condiciona, no final de sua explanação, o termo genérico encontrado na resolução pela PA de Segunda Ordem, porém encontrado por um caminho bem mais complexo de resolução. Percebe-se que o discente, ao resolver a prova, pelo gabarito oficial deveria ter uma interpretação e visão do problema bem mais rebuscados, enquanto pela técnica sugerida de PA de Ordem Superior seria um procedimento mais simples e generalista.

Dando continuidade, podemos observar outra situação semelhante na questão 17 da prova do nível 3 - 1ª fase da prova da OBMEP do ano de 2009, apresentada na Figura 3, bem como a soluções oficial disponibilizado no site da OBMEP é apresentada no ANEXO II:

Figura 3: Questão 16 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2009.

16. Felipe construiu uma sequência de figuras com quadradinhos; abaixo mostramos as quatro primeiras figuras que ele construiu. Qual é a primeira figura que tem mais de 2009 quadradinhos?



- A) A 30ª
- B) A 31ª
- C) A 32ª
- D) A 33ª
- E) A 34ª

Fonte: OBMEP (2009).

De maneira direta, podemos comparar as resoluções dispostas nos gabaritos oficiais dessas duas questões (ANEXOS I e II) e ver que são relativamente distantes uma da outra, uma vez que as técnicas adotadas se baseiam majoritariamente numa interpretação mais incisiva da questão. Todavia, como se almeja reforçar a aplicabilidade das PAs de Ordem Superior em diversas contextualizações, desenvolveremos tal questão sobre esse conhecimento teórico, o que aproximará a interpretação das duas questões – que por ora, foram vistas como diferentes.

Tratemos a quantidade de quadrinhos $\{1,5,13,25, \dots\}$ como uma PA de Ordem n em relação a numeração da figura montada por esses. Realizando uma subtração entre seus termos, chegamos a $\{4,8,12, \dots\}$, a qual novamente notamos ser uma PA de Primeira Ordem. Logo, a sequência inicial é uma PA de Segunda Ordem. Pode-se mais uma vez encontrar o termo genérico dessa PA a partir do Teorema 2, conforme discutiu-se anteriormente:

$$\begin{aligned}
 a_k &= f(k) = ak^2 + bk + c \\
 f(1) &= 1; \quad f(2) = 5; \quad f(3) = 13; \quad f(4) = 25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 5 \\ 9a + 3b + c = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 4 \\ 5a + b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 4 \\ 2a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a_k = 2k^2 - 2k + 1$$

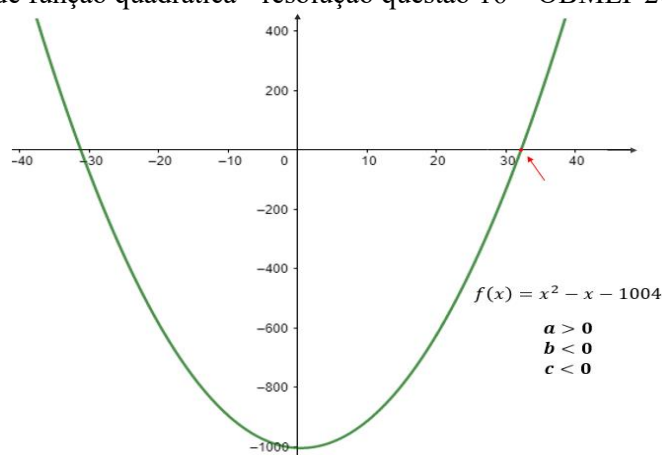
A questão busca qual o primeiro termo k em que $a_k > 2009$, ou seja:

$$2k^2 - 2k + 1 > 2009$$

$$k^2 - k - 1004 > 0$$

Ressalta-se que, a partir desse momento, o discente pode desenvolver sua resolução da forma que se sentir mais confortável, uma vez que se trata apenas da resolução de uma inequação de segundo grau. Podemos esboçar o gráfico a função $f(x) = x^2 - x - 1004$ na Figura 4, a fim de determinar os trechos de x em que $f(x)$ é positivo:

Figura 4: Gráfico de função quadrática - resolução questão 16 – OBMEP 2009 1ª fase – nível 3.



Fonte: Autor (2021).

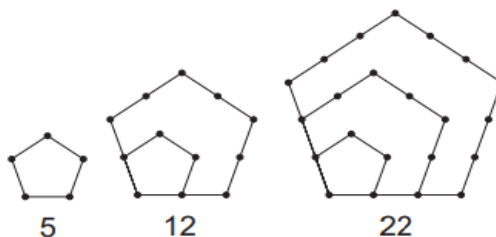
Salienta-se que seria possível o discente esboçar tal representação no momento da prova pelas relações entre os coeficientes dessa função de segundo grau. Vislumbra-se que, como $k \in \mathbb{N}$, busca-se o primeiro valor inteiro que sucede a raiz positiva dessa função. Calculando essa raiz, chega-se a $x_1 = \frac{1+\sqrt{4017}}{2} \cong 32,19$, o que nos resulta em $k = 33$, alternativa D, resultado conveniente ao apresentado na resolução do gabarito oficial.

Finalizando as análises quanto as provas da OBMEP, olhemos a questão 14 da OBMEP 2015, novamente no nível 3 – fase 1 que segue na Figura 5. Além disso, repetindo nosso método de análise, a resolução oficial dessa questão disponibilizada pela OBMEP encontra-se no ANEXO III:

Figura 5: Questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.

14. Abaixo temos três figuras pentagonais: a primeira com 5 pontos, a segunda com 12 pontos e a terceira com 22 pontos. Continuando esse processo de construção, a vigésima figura pentagonal terá 651 pontos. Quantos pontos terá a vigésima primeira figura?

- A) 656
- B) 695
- C) 715
- D) 756
- E) 769



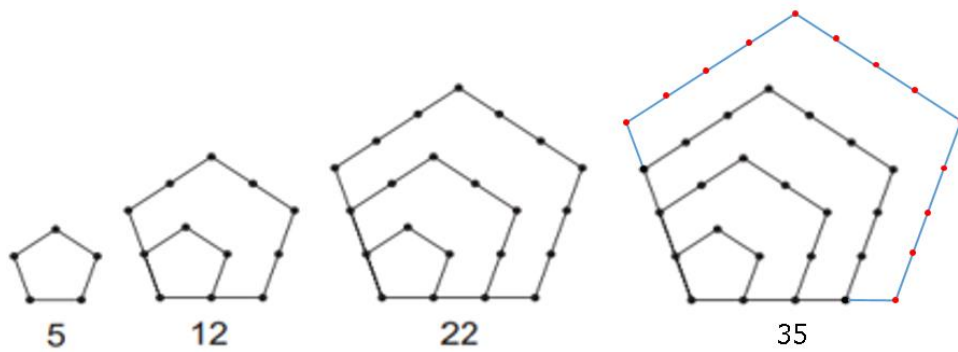
Fonte: OBMEP (2015)

Vemos que essa questão, pela solução proposta, possuía cálculos e procedimentos mais simples do que as questões anteriores. Todavia, ainda era necessário uma visão e interpretação da problemática apresentada refinados e, por conta disso, apresentaremos

soluções mais mecânicas a partir das Progressões Aritméticas de Ordem Superior. Interessantemente, essa questão pode ser respondida de duas maneiras usando esses conhecimentos teóricos.

Inicialmente, precisaríamos tratar a sequência da quantidade de pontos como uma PA de ordem p . Porém precisamos no mínimo de outro dado para fazer essa resolução, logo deveríamos representar a quarta figura dessa sequência, a qual complementamos na Figura 6:

Figura 6: Imagem para resolução questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.



Fonte: OBMEP (2015) – editado pelo autor

Vendo que a quarta figura comporta 35 pontos, a PA a ser analisada é $\{5, 12, 22, 35, \dots\}$. Realizando a subtração de termos subsequentes, chegamos a PA $\{7, 10, 13, \dots\}$ que é uma PA de Primeira Ordem. Logo, mais uma vez, a PA inicial é de Segunda Ordem. Assim, a expressão do termo genérico dessa PA, pelo Teorema 2 é:

$$a_k = f(k) = ak^2 + bk + c$$

$$f(1) = 5; \quad f(2) = 12; \quad f(3) = 22; \quad f(4) = 35.$$

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 4a + 2b + c = 12 \\ 9a + 3b + c = 22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = 5/2 \\ a = 3/2 \end{cases}$$

$$a_k = \frac{3}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 1$$

Como a questão nos solicita a quantidade de pontos da vigésima primeira figura, chegamos a:

$$a_{21} = 715 \text{ pontos} \quad - \text{ item C.}$$

A outra resolução partiria de, a partir do momento que conhecemos a PA de Primeira Ordem $\{7, 10, 13, \dots\}$, buscamos encontrar o termo geral dela, uma vez que a questão nos

fornece quantos pontos tem a vigésima figura, o qual precisaríamos apenas encontrar quantos pontos foram incrementados para a vigésima primeira figura. Logo, o termo genérico dessa PA, poderia ser encontrado pelo Teorema 2:

$$\begin{aligned}x_k &= f(k) = ak + b \\f(1) &= 7; \quad f(2) = 10; \quad f(3) = 13. \\&\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 10 \end{cases} \\&\begin{cases} b = 4 \\ a = 3 \end{cases} \\x_k &= 3k + 4\end{aligned}$$

Ou ainda, como se trata especificamente de uma PA de Primeira Ordem, pela Equação 1, que seria ainda mais simples para o aluno de se calcular seu termo geral:

$$\begin{aligned}x_k &= 7 + (k - 1) \cdot 3 \\x_k &= 3k + 4\end{aligned}$$

Note que o primeiro termo da sequência é o incremento do primeiro termo para o segundo da PA de Segunda Ordem inicial. Sucessivamente, o incremento do vigésimo termo para o vigésimo primeiro termo da PA inicial é o vigésimo termo dessa PA de primeira ordem, ou seja, devemos encontrar x_{20} :

$$x_{20} = 64$$

Portanto, o vigésimo primeiro termo da PA inicial é:

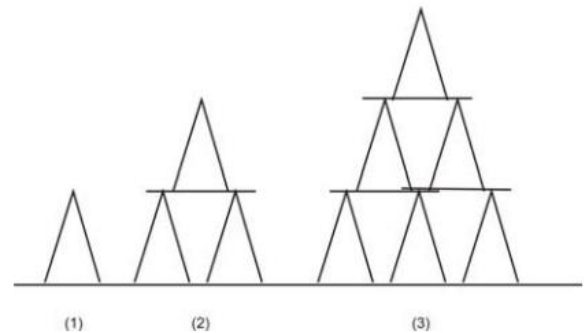
$$\begin{aligned}a_{21} &= a_{20} + x_{20} \\a_{21} &= 651 + 64 \\a_{21} &= 715 \text{ pontos} - \text{item C}\end{aligned}$$

Ao encontro desses exemplos, apresenta-se algumas questões de mesma característica visualizadas na Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), encontradas novamente em seu site oficial³ com os respectivos solucionários. Inicialmente, discorreremos acerca da questão 01: Parte A da prova da 2ª fase – nível 1 da XXXI edição da OBM (2009). O enunciado dessa questão é apresentado na Figura 7, bem como sua resolução no ANEXO IV:

³ Disponível : <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/> Acesso em: 30/04/2021.

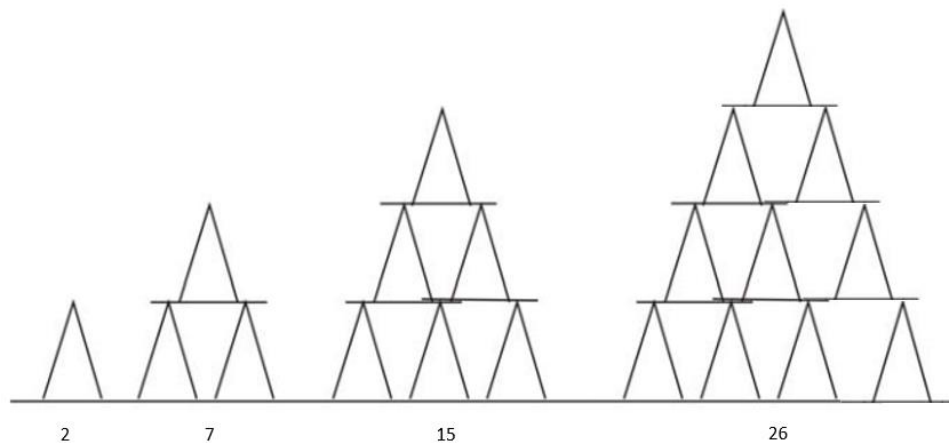
Figura 7: Questão 1: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1

01. A figura ao lado mostra castelos de cartas de 1, 2 e 3 andares. Para montar esses castelos, foram usadas 2, 7 e 15 cartas, respectivamente. Quantas cartas serão necessárias para montar um castelo de 5 andares?



Fonte: OBM (2009)

Comparativamente com as demais, vemos se tratar de uma questão relativamente mais simples, uma vez que ela pergunta em relação a uma projeção de 5 andares, apresentando até o 3º andar. Assim, mesmo que o discente fosse analisar andar a andar para essa projeção, seria uma questão facilmente realizável. Isso é explicado pelo nível de aplicação dessa prova (6º e 7º ano). Contudo, como desejamos verificar a presença de uma PA de Ordem Superior nesse padrão, é importante conhecermos quantas cartas serão usadas também no castelo formado por 4 andares. Essa representação está exposta na Figura 8:

Figura 8: Imagem da Resolução da Questão 1: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1

Fonte: OBM (2009) – editado pelo autor

Assim, a sequência da quantidade de cartas em relação aos andares formados que estamos analisando é dada por $\{2, 7, 15, 26, \dots\}$. Como supomos que seja uma PA de Ordem Superior, realizamos a subtração entre termos sucessivos e encontramos a PA $\{5, 8, 11, \dots\}$, a qual notamos ser uma PA de Primeira Ordem: termo inicial 5 e razão igual a 3. Assim, a PA inicial é de Segunda Ordem e, conforme visto no Teorema 2, pode ser dada por:

$$a_n = f(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

Em que

$$f(1) = 2; \quad f(2) = 7; \quad f(3) = 15; \quad f(4) = 26$$

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 2 \\ 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 7 \\ 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 2 \\ 3c_2 + c_1 = 5 \\ 5c_2 + c_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 2 \\ 3c_2 + c_1 = 5 \\ 2c_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{3}{2} \\ c_1 = \frac{1}{2} \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

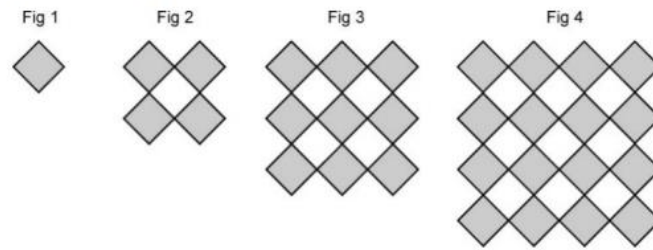
$$a_n = \frac{3n^2 + n}{2}$$

Dessa forma, nota-se mais uma questão em olimpíadas de aplicabilidade direta da lei de formação de uma PA de Ordem Superior. Como a questão solicita no caso $n = 5$ andares, então $a_5 = \frac{3(5)^2 + 5}{2} = 40$ cartas. Conforme citado, era uma questão, pelo andar solicitado, relativamente simples, uma vez que necessitaria, fazendo da forma mais manual, apenas projetar mais um andar frente ao obtido na Figura 8. Contudo, atentamos novamente para a riqueza das PAs de Ordem Superior pelo fato de a expressão encontrada resolver a quantidade de cartas para qualquer andar de uma forma direta – ou até mesmo sua recíproca: consegue-se localizar o andar formado a partir de uma quantidade de cartas disponíveis pela mesma expressão.

Finalizando tal seção, discutiremos acerca da Questão 5: parte A da 37ª OBM (2015), nível 1 – 2ª fase, apresentada na Figura 9, bem como sua resolução do gabarito oficial no ANEXO V:

Figura 9: Questão 5: Parte A – 37ª OBM – 2ª fase – nível 1

05. Elisa constrói uma sequência formada por quadradinhos brancos e cinzentos, sempre usando a mesma regra, conforme mostrado abaixo:



Somente na figura 30, quantos quadradinhos cinzentos existem a mais do que quadradinhos brancos?

Fonte: OBM (2015)

Para essa questão, resolvendo por PAs de Ordem Superior, podemos supor a ocorrência de duas PAs: uma que relaciona a quantidade de quadradinhos brancos com a figura formada e outra que estabelece a relação análoga com os quadradinhos cinzentos. Para os quadradinhos cinzentos, temos a sequência $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$. Realizando as subtrações entre seus termos, temos a PA de Primeira Ordem $\{3, 5, 7, \dots\}$, o que caracteriza a PA inicial como de Segunda Ordem. Novamente pelo Teorema 2, conseguimos correlacioná-lo com um polinômio de segundo grau.

Todavia, de forma mais direta, notamos que a sequência é o quadrado do número da figura correspondente, ou seja, $c_n = n^2$. Porém, poderíamos ter realizado as mesmas operações expressas anteriormente que chegaríamos na mesma expressão

Realizando o mesmo tratamento com os quadradinhos brancos, temos a sequência $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ e sua PA correlacionada $\{1, 3, 5, \dots\}$ através da subtração dos termos consecutivos. Como esta é uma PA de Primeira Ordem, a sequência inicial é uma PA de Segunda Ordem, e assim:

$$b_n = f(n) = pn^2 + qn + r$$

$$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ 4p + 2q + r = 1 \\ 9p + 3q + r = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ 3p + q = 1 \\ 2p = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$b_n = n^2 - 2n + 1$$

O mesmo resultado poderia também ser obtido de maneira interessante ao ser analisado que a PA $\{0,1,4,9, \dots\}$ correspondia justamente a expressão $b_n = (n - 1)^2$, ou seja, cada termo dessa sequência era dado pelo quadrado de sua posição subtraído uma unidade. Da mesma forma, vimos que os padrões de crescimento dos quadrinhos brancos e cinzentos eram ambos dados por PAs de Segunda Ordem e, pelo Teorema 2, conseguimos correlacionar polinômios de grau 2 para essas quantidades a uma dada figura.

Por fim, como a questão trata da diferença existente entre os quadrinhos cinzentos e brancos em uma dada figura, podemos estabelecer uma relação geral:

$$c_n - b_n = n^2 - (n^2 - 2n + 1)$$

$$c_n - b_n = 2n - 1$$

Ou seja, para qualquer figura n formada, a diferença entre os quadrinhos cinzentos é dada por $2n - 1$. Assim, na 30ª figura formada, há 59 quadrinhos cinzentos a mais que quadrinhos brancos.

Uma solução alternativa a ser destacada seria estabelecer diretamente, como uma sequência, a diferença entre quadrinhos cinzentos e brancos, relacionando-a posteriormente com uma PA. Assim, em relação a figura formada, essa diferença entre quadrinhos cinzentos e brancos é dada por $\{1,3,5,7, \dots\}$ a qual notamos já ser de Primeira Ordem. Assim, poderia encontrar o polinômio pelo Teorema 2 mas, nesse caso particular, operamos com a Equação 1 (Termo Geral de uma PA de Primeira Ordem):

$$x_k = x_1 + (k - 1) \cdot r$$

$$x_k = 1 + (k - 1) \cdot 2$$

$$x_k = 2k - 1$$

Que é a mesma expressão encontrada acima – a qual novamente obteríamos 59 quadrinhos cinzentos a mais que brancos na 30ª figura.

A partir da análise dessas questões, conseguimos perceber que as PAs de Ordem Superior conseguiram aproximar a interpretação e visualização desses diversos problemas que, a primeiro momento e pela resolução oficial apresentada, eram problemas específicos que exigiam uma maior modelagem matemática dos discentes. Assim, para os discentes que não têm contato com esse conhecimento, que é pouco explorado no ensino regular, esse tipo de questão pode parecer específico e interpretativo, embora, pelas PAs de Ordem Superior, são resoluções mais mecânicas e gerais, sendo adotada para todos os casos uma mesma lógica de resolução.

Em especial, conseguimos perceber que há uma tendência, na aplicação das PAs de Ordem Superior, das questões explorarem as progressões de segunda ordem, uma vez que são sequências que, de antemão, não possuem padrão de crescimento/decrescimento, porém facilmente (com apenas uma subtração) encontra-se uma progressão com essa característica. Além disso, o termo geral formado pela PA de segunda ordem é um polinômio de segundo grau (Teorema 2), expressão que o discente naturalmente consegue operar com os conhecimentos algébricos adquiridos até o Ensino Médio, fase correspondente as questões visualizadas.

3.2 APLICAÇÕES DAS PAs DE ORDEM SUPERIOR NO PROFMAT

Continuando as discussões sobre a aplicabilidade das PAs de Ordem Superior, analisamos a 1ª Avaliação da disciplina MA12 (Matemática Discreta) do ano de 2011, disponível no banco de Provas Nacionais no site da PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional⁴. Inclusive, essa mesma questão também está presente no Exame de Qualificação do PROFMAT de 2012 com pequenas alterações (Questão de número 4 nesse exame). Dessa forma, apresenta-se, na Figura 10, a Questão 1 da 1ª avaliação da disciplina MA12 do ano de 2011 e, no ANEXO VI, expõe-se a resolução sugerida pelos elaboradores para essa questão:

Figura 10: Questão 1 - MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - Prova 1 de 2011.

Questão 1.

Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 + 3 \\ a_3 &= 4 + 5 + 6 \\ a_4 &= 7 + 8 + 9 + 10 \\ &\dots \end{aligned}$$

(0.5) (a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

(0.5) (b) Calcule a_{10} .

(1.0) (c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n .

Fonte: PROFMAT (2011)

⁴ Disponível em: <https://www.profmatt-sbm.org.br/provas-nacionais/> Acesso em: 16/04/2021.

Para o primeiro item, buscaremos um padrão para os termos iniciais das somas em relação a linha a qual ocupa. Assim, formamos a sequência $\{1, 2, 4, 7, 11, \dots\}$ e assumamos que se trata de uma PA de Ordem n . Realizando a subtração de termos sucessivos chegamos a $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, o qual percebemos que é uma PA de Primeira Ordem – justamente a sequência dos números naturais, que destacamos anteriormente. Assim, a PA inicial é de Segundo Grau e, pelo Teorema 2, relacionaremos a expressão de seu termo geral com uma função quadrática em que:

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 2; \quad f(3) = 4; \quad f(4) = 7$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ b = -1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}$$

$$b_x = f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 1$$

Logo, para a décima linha, seu primeiro termo será:

$$b_{10} = 46.$$

Vendo que a quantidade de termos a serem somados na linha corresponde exatamente ao valor x associado a linha, na 10ª linha teremos 10 valores e, conseqüentemente, o último termo terá $10 - 1$ unidades a mais do que b_{10} , assim sendo igual a $c_{10} = 46 + 10 - 1 = 55$. Assim, a resolução da letra (a) é que o menor termo da 10ª linha é 46, enquanto o maior termo é 55.

Baseado no que fora discutido na “Revisão Teórica”, vemos que facilmente o item (b) pode ser solucionado pela Equação 2, já que corresponde a soma dos termos de uma PA de primeira ordem (razão 1) entre os números 46 e 55. Assim, o valor de a_{10} é:

$$a_{10} = \frac{(46 + 55) \cdot 10}{2} = 505.$$

Por fim, para a resolução do último item, podemos reformular a sequência analisada agora para os próprios valores de a_k , formulando a sequência $\{1, 5, 15, 34, 65, \dots\}$. Admitindo que ela pode ser uma PA de Ordem r , fazendo a subtração dos termos sucessivos obtemos a PA associada $\{4, 10, 19, 31, \dots\}$ e, sucessivamente, a PA $\{6, 9, 12, \dots\}$ a qual notamos ser de Primeira Ordem. Logo a PA inicial dos valores de a_k é uma PA de Ordem Três. Buscando o termo geral dessa PA, pelo Teorema 2, associaremos a uma função polinomial de 3º grau:

$$a_k = g(k) = mk^3 + nk^2 + qk + t$$

$$g(1) = 1; \quad g(2) = 5; \quad g(3) = 15; \quad g(4) = 34; \quad g(5) = 65.$$

$$\begin{cases} m + n + q + t = 1 \\ 8m + 4n + 2q + t = 5 \\ 27m + 9n + 3q + t = 15 \\ 64m + 16n + 4q + t = 34 \end{cases}$$

Subtraindo sucessivamente a 3ª expressão da última, a 2ª da linha da 3ª linha e a 1ª linha da 2ª expressão, chegamos a:

$$\begin{cases} m + n + q + t = 1 \\ 7m + 3n + q = 4 \\ 19m + 5n + q = 10 \\ 37m + 7n + q = 19 \end{cases}$$

Repetindo o processo, visando eliminar outra variável das expressões, podemos subtrair a 3ª linha da última expressão e a 2ª linha da 3ª linha e chegar a:

$$\begin{cases} m + n + q + t = 1 \\ 7m + 3n + q = 4 \\ 12m + 2n = 6 \\ 18m + 2n = 9 \end{cases}$$

Por fim, subtrai-se dos domínios da última expressão a 3ª linha, chegando a:

$$\begin{cases} m + n + q + t = 1 \\ 7m + 3n + q = 4 \\ 12m + 2n = 6 \\ 6m = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ q = 1/2 \\ n = 0 \\ m = 1/2 \end{cases}$$

Assim, a expressão solicitada no item (c) dessa questão é:

$$a_k = \frac{k^3 + k}{2}$$

Sequencialmente, debateremos o item b da Questão 2 da 1ª avaliação da disciplina MA12 (Matemática Discreta) de 2012, que possui uma resolução interessante pela aplicabilidade das PAs de Ordem Superior. Segue, na Figura 11, tal questão e no ANEXO VII sua resolução pelo gabarito oficial.

Figura 12: Item b - Questão 6 - Exame Nacional de Qualificação – PROFMAT 2017.1.**Questão 06** [1,25 ::: (a)=0,50; (b)=0,75]

(b) Considere a sequência de números inteiros

$$\begin{cases} a_1 = C_2^2, \\ a_n = C_2^2 + \cdots + C_{n+1}^2, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Mostre que $a_n = C_{n+2}^3$.**Fonte:** PROFMAT (2017) – editado pelo autor.

Vê-se, de início, que essa questão é bem diferente das outras analisadas, abordando uma sequência que envolve combinações em sua lei de formação. Nesse viés, precisar-se-ia do conhecimento adicional acerca da notação de combinação utilizada na questão, que é dada conforme Vasconcelos e Rocha (2019) por:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \forall n, p \in \mathbb{N}$$

Logo, o resultado final que queremos mostrar é que a_n é igual a C_{n+2}^3 , ou seja:

$$C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{3!(n-1)!}, \text{ já que } n \in \mathbb{N}$$

$$C_{n+2}^3 = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$C_{n+2}^3 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \quad (*)$$

Assim, devemos mostrar que a_n gera a expressão exposta acima. Podemos calcular, inicialmente aos valores iniciais da sequência descrita:

$$a_1 = C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$$

$$a_2 = C_2^2 + C_3^2 = 1 + \frac{3!}{2!(3-2)!} = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 = 4 + \frac{4!}{2!(4-2)!} = 4 + 6 = 10$$

$$a_4 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = 10 + \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10 + 10 = 20$$

$$a_5 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 = 20 + \frac{6!}{2!(6-2)!} = 20 + 15 = 35$$

Ou seja, a sequência em análise na questão é a sequência $\{1,4,10,20,35,\dots\}$. Supondo que se trata de uma PA de Ordem Superior, chega-se à sequência associada pela subtração entre termos sucessivos $\{3,6,10,15,\dots\}$ e, sucessivamente, a PA $\{3,4,5,\dots\}$, a qual percebemos ser uma PA de Primeira Ordem. Como fora obtida através de duas subtrações sucessivas, a PA inicial $\{1,4,10,20,35,\dots\}$ é de Terceira Ordem, a qual relacionamos a um polinômio cúbico pelo Teorema 2:

$$a_n = f(n) = qn^3 + rn^2 + sn + t$$

$$f(1) = 1; \quad f(2) = 4; \quad f(3) = 10; \quad f(4) = 20.$$

$$\begin{cases} q + r + s + t = 1 \\ 8q + 4r + 2s + t = 4 \\ 27q + 9r + 3s + t = 10 \\ 64q + 16r + 4s + t = 20 \end{cases}$$

Subtraindo sucessivamente as linhas superiores das linhas imediatamente abaixo delas, chega-se a:

$$\begin{cases} q + r + s + t = 1 \\ 7q + 3r + s = 3 \\ 19q + 5r + s = 6 \\ 37q + 7r + s = 10 \end{cases}$$

Repetindo o procedimento entre nas linhas 3 e 4:

$$\begin{cases} q + r + s + t = 1 \\ 7q + 3r + s = 3 \\ 12q + 2r = 3 \\ 18q + 2r = 4 \end{cases}$$

E, por fim, repetindo tal método na última linha:

$$\begin{cases} q + r + s + t = 1 \\ 7q + 3r + s = 3 \\ 12q + 2r = 3 \\ 6q = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ s = 1/3 \\ r = 1/2 \\ q = 1/6 \end{cases}$$

Assim,

$$a_n = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$$

$$a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} \quad (**)$$

Comparando as equações (*) e (**), vê-se facilmente que $a_n = C_{n+2}^3$, conforme queríamos mostrar.

Finalizando esse tópico, conseguimos verificar abordagens bem diversificadas de aplicações das PAs de Ordem Superior, correlacionando com outras áreas da própria matemática, como a análise combinatória.

Além disso, chamamos a atenção na padronização utilizada para a resolução dos sistemas lineares formados a partir da função polinomial geradas pelo Teorema 2. Discutir-se-á mais detalhadamente acerca disso no próximo tópico, todavia, ressalta-se de antemão que os coeficientes de uma mesma variável nos sistemas lineares em questão são do tipo n^p , ou seja, podem ser zerados realizando as subtrações sucessivas entre linhas, pois se tratam de uma PA de Ordem p (as subtrações sucessivas diminuem a ordem dessa PA até se tornarem uma PA constante e assim, na operação subsequente entre esses elementos, a subtração resulta em zero e se elimina uma variável da equação).

4 O USO DAS PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR NO ESTUDO DAS SOMAS DE RIEMANN DE FUNÇÕES POLINOMIAIS.

Conforme iniciado as discussões anteriormente, o estudo das Somas de Riemann é compreendido como uma etapa preparatória para compreensão das funções primitivas e o Cálculo Integral. A exploração desse conteúdo recai na resolução de somatórios que se apresentam, em primeiro momento, um estudo denso e complexo, haja vista que, caso se vise uma formulação mais completa das Somas de Riemann (levando as subdivisões nas abscissas ao infinito), os somatórios apresentam o limite superior tendendo ao infinito.

Pela verificação dos principais livros utilizados no componente curricular Cálculo II sobre Somas de Riemann, conforme expresso na Metodologia, percebeu-se que em grande parte dos livros de Ensino Superior, como “Um Curso de Cálculo – Volume I” de Hamilton Guidorizzi (2001) e “Cálculo – Volume 1, 12 ed.” de George Thomas, Maurice Weir e Joel Hass (2012), as resoluções de problemas pelas Somas de Riemann são apresentadas para monômios de primeiro, segundo e terceiro grau a partir de expressões pré-definidas para esses somatórios. Subsequentemente, por essa metodologia de ensino-aprendizagem, os discentes têm que memorizar essas expressões para utilização em avaliações acadêmicas e exercícios a serem resolvidos.

Segundo Boeing *et al.* (2013), é evidente as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das Somas de Riemann, em especial a necessidade de conexões com conhecimentos prévios adquiridos pelo discente, para que as técnicas de integração adquiridas posteriormente as Somas de Riemann tenham elos com seus conhecimentos. Desta forma, todas as metodologias ou procedimentos congruentes a este estudo se portam de maneira valiosa e foi visualizado uma necessidade nisso, uma vez que as expressões de resolução dos somatórios são apenas apresentadas sem explicações ou mesmo demonstrações.

Leal Junior e Pinheiro (2016), ao analisarem as principais obras utilizadas em ementas no estudo do Cálculo I e funções de uma variável da Universidade de São Paulo-USP, da Universidade Estadual de Campinas-Unicamp, da Universidade Estadual Paulista-Unesp, do Instituto Federal de São Paulo-IFSP, da Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC e da Universidade Federal de São Carlos-UFSCar, concluem que “[...] poucos trazem uma abordagem da Soma de Riemann que seja agenciadora e significativa, ou que permita ao leitor e ao estudante uma formação sólida desse conceito”. Dessa forma, sente-se ainda que esse objeto de estudo necessita de ferramentas facilitadoras no processo de ensino-aprendizagem para serem empregues na didática em sala de aula.

Neste cenário, vê-se naturalmente que grande parte dessas problemáticas podem partir da dificuldade em decorar e relacionar corretamente os termos resultantes dos somatórios apresentados em sala de aula e nos livros e o porquê destas igualdades. Contudo, é facilmente captável a correlação das PAs de Ordem Superior nas resoluções desses somatórios e, dessa forma, é altamente encorajado aos docentes a apresentação dada nas próximas seções a fim de estabelecer conexões pertinentes aos discentes para uma compreensão mais completa das Somas de Riemann.

4.1 DESENVOLVIMENTO DOS SOMATÓRIOS DE MONÔMIOS DE GRAUS UM, DOIS E TRÊS

Concordante ao exposto acima, pelo fato de os livros acadêmicos (GUIDORIZZI (2001), THOMAS, WEIR & HASS (2012)) não apresentarem as fórmulas de termos gerais para somatórios de monômios de grau maior que 3 (ou mesmo o desenrolar dos termos encontrados para as funções polinomiais de graus 1, 2 ou 3), o presente subcapítulo se mostra expressivo por buscar apresentar os mecanismos que permitam tal generalização.

Assim, tratemos os exemplos dos somatórios de monômios de primeiro, segundo e terceiro grau, que são os resultados apresentados nos livros didáticos Guidorizzi (2001) e Thomas, Weir e Hass (2012) e que os alunos cotidianamente necessitam memorizá-los nas questões acerca das Somas de Riemann de funções polinomiais:

Dessa forma, iniciando pelo desenvolvimento do somatório do monômio de primeiro grau, temos que:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

Tratando esses termos como a sequência, vê-se que o resultado desse somatório é a PA de segunda ordem $(1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, \dots) = (1, 3, 6, 10, 15, \dots)$, uma vez que a primeira subtração já resulta na PA de primeira ordem $(2, 3, 4, 5, \dots)$. Por conseguinte, será procurado por uma função de segundo grau, conforme o Teorema 1, que possua os pontos $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 6)$ e $(4, 10)$, uma vez que o somatório acima pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= f(n) = c_2 n^2 + c_1 n + c_0 \\ f(1) &= c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ f(2) &= c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_0 = 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$f(3) = c_2 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_0 = 3 + 3 = 6$$

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 3 \\ 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 6 \end{cases}$$

Esse passo é o mais significativo de todo o procedimento de resolução expresso nessa seção. Note que, entre as equações, os coeficientes de um mesmo termo estão novamente em Progressão Aritmética. Note que os coeficientes de c_0 são (1,1,1), de c_1 são (1,2,3) e de c_2 são (1,4,9), respectivamente PAs de Ordem Zero, Um e Dois. Portanto, vemos que esse sistema de equações pode também ser resolvido por subtrações da equação inferior da equação superior, uma vez que serão eliminados os termos que compõem a PA de Ordem Zero (termos constantes). Assim:

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 4c_2 + 2c_1 + c_0 - (c_2 + c_1 + c_0) = 3 - 1 \\ 9c_2 + 3c_1 + c_0 - (4c_2 + 2c_1 + c_0) = 6 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 3c_2 + 1c_1 = 2 \\ 5c_2 + 1c_1 = 3 \end{cases}$$

Observe que agora os coeficientes de c_1 e c_2 (exceto na primeira equação do sistema) são agora PAs de Ordem Zero e Um e o mesmo procedimento pode ser retomado. Dessa forma, percebe-se que, apesar de estar atrelado a resolução de sistemas lineares, esses sistemas que são gerados a partir dos somatórios de k^p são bem simples: sempre se subtrai a equação inferior da exatamente superior que se eliminará o termo mais à direita, pois compunha uma PA de Ordem Zero.

Além disso, é importante destacar que sempre ao operar-se uma subtração, a linha mais superior não será modificada, de modo ao, no final, obter-se uma resolução de sistemas lineares pelo Método de Eliminação de Gauss.

Esse método consiste basicamente em transformar o sistema inicial num sistema triangular equivalente (normalmente triangular superior) pela eliminação progressiva de variáveis de uma equação para a seguinte utilizando as operações elementares dos sistemas e matrizes. Dessa forma, resultar-se-á, na última equação do sistema, em uma equação de apenas uma variável e, a partir desse resultado, aplicam-se substituições sucessivas nas demais equações e soluciona-se o sistema (RUGGIERO & LOPES, 2009).

Contudo, conforme visto acima, pela presença de PAs de Ordem decrescendo (até Ordem Zero) entre os coeficientes do sistema gerado, a solução pelo Método de Gauss se torna ainda mais simples, haja vista que, dentre as operações elementares de resolução de

sistemas possíveis, resumir-se-á a subtração das equações inferiores pelas superiores do sistema.

Consequentemente, conclui-se o sistema acima por:

$$\begin{cases} c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 3c_2 + 1c_1 = 2 \\ 2c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 1/2 \\ c_1 = 1/2 \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}. \quad (6)$$

Que é o primeiro resultado apresentado nos livros didáticos supracitados.

Sequencialmente, desenvolve-se o somatório do monômio de segundo grau por:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2$$

Repetindo-se todo o procedimento apresentado no exemplo anterior, temos que os resultados do somatório formam uma PA de terceira ordem (1,5,14,30,...), uma vez que gera, por subtrações sucessivas, a PA de segunda ordem (4,9,16,...) e a PA de primeira ordem (5,7, ...). Isto posto, buscar-se-á uma função de terceiro grau que possui os pontos (1,1), (2,5), (3,14) e (4,30). Assim, o somatório acima pode ser calculado por:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = f(n) = c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

em que,

$$\begin{aligned} f(1) &= c_3 \cdot 1^3 + c_2 \cdot 1^2 + c_1 \cdot 1 + c_0 = 1 \\ f(2) &= c_3 \cdot 2^3 + c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_0 = 1 + 4 = 5 \\ f(3) &= c_3 \cdot 3^3 + c_2 \cdot 3^2 + c_1 \cdot 3 + c_0 = 5 + 9 = 14 \\ f(4) &= c_3 \cdot 4^3 + c_2 \cdot 4^2 + c_1 \cdot 4 + c_0 = 14 + 16 = 30 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 5 \\ 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 14 \\ 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 = 30 \end{cases}$$

Apenas repetindo o método de subtrações da linha inferior pela superior sucessivamente expresso no exemplo anterior, chega-se a:

$$\begin{cases} c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 7c_3 + 3c_2 + 1c_1 = 4 \\ 12c_3 + 2c_2 = 5 \\ 6c_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 = 1/3 \\ c_2 = 1/2 \\ c_1 = 1/6 \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad (7)$$

Sendo o segundo resultado apresentado nos livros exemplificados.

Nessa tangente, finaliza-se com o desenvolvimento do somatório do monômio de terceiro grau por:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \dots + n^3$$

Por fim, pela resolução do somatório temos uma PA de quarta ordem (1,9,36,100,225,...), já que se gera as PAs de terceira ordem (8,27,64,125,...), segunda ordem (19,37,61...) e primeira ordem (18,24,...) com três operações. Consequentemente, procurar-se-á uma função de quarto grau que possui os pontos (1,1), (2,9), (3,36), (4,100) e (5,225). Assim, o somatório acima pode ser calculado por:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = f(n) = c_4 n^4 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

$$f(1) = c_4 1^4 + c_3 1^3 + c_2 1^2 + c_1 1 + c_0 = 1$$

$$f(2) = c_4 2^4 + c_3 2^3 + c_2 2^2 + c_1 2 + c_0 = 1 + 8 = 9$$

$$f(3) = c_4 3^4 + c_3 3^3 + c_2 3^2 + c_1 3 + c_0 = 9 + 27 = 36$$

$$f(4) = c_4 4^4 + c_3 4^3 + c_2 4^2 + c_1 4 + c_0 = 36 + 64 = 100$$

$$f(5) = c_4 5^4 + c_3 5^3 + c_2 5^2 + c_1 5 + c_0 = 225$$

$$\begin{cases} c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 1 \\ 16c_4 + 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 9 \\ 81c_4 + 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 36 \\ 256c_4 + 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 = 100 \\ 625c_4 + 125c_3 + 25c_2 + 5c_1 + c_0 = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_4 = 1/4 \\ c_3 = 1/2 \\ c_2 = 1/4 \\ c_1 = 0 \\ c_0 = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \quad (8)$$

Ou ainda, para esse caso em específico, vê-se que:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2$$

Finalizando demonstrações simples das três expressões que os estudantes tendem a decorar para a resolução de problemas com as Somas de Riemann a partir da utilização das PAs de Ordem Superior.

4.2 RESOLUÇÃO DE SOMATÓRIOS COM FUNÇÕES POLINOMIAIS EM PRODUTO

Lima *et al.* (2006, p. 12) inicia, no exemplo 20, uma discussão interessante sobre a aplicabilidade das Progressões Aritméticas de Ordem Superior na resolução de somatórios de produtos de funções polinomiais – estando esses atrelados a Somas de Riemann ou não. De forma geral, dada uma função $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, todas polinomiais, depreende-se que o grau da função $f(x)$ é dado pela soma dos graus das funções $g(x)$ e $h(x)$. Portanto, pode-se resolver o somatório de $f(x)$, com x variando de 1 à n , sem mesmo expandir a função $f(x)$ pelas operações distributivas sucessivas.

Nessa tangente, tomemos como exemplar o somatório

$$S = \sum_{x=1}^n (6x + 3)(2x^3 + 3)$$

Vemos que o grau do primeiro termo do produto é 1 e do terceiro termo é 3, logo trata-se de um somatório de uma função de grau 4. Pelo Teorema 1, então

$$S = \sum_{k=1}^n (6x + 3)(2x^3 + 3) = c_5 n^5 + c_4 n^4 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$$

Por fim, podemos encontrar quais são os coeficientes a partir de uma PA de ordem 5 descrita pelo somatório S (Teorema 2):

$$\begin{aligned}
 S(1) &= c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 9 \cdot 5 = 45 \\
 S(2) &= 32c_5 + 16c_4 + 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 15 \cdot 19 + 45 = 330 \\
 S(3) &= 243c_5 + 81c_4 + 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 21 \cdot 57 + 330 = 1527 \\
 S(4) &= 1024c_5 + 256c_4 + 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 = 3537 + 1527 = 5064 \\
 S(5) &= 3125c_5 + 625c_4 + 125c_3 + 25c_2 + 5c_1 + c_0 = 13413 \\
 S(6) &= 7776c_5 + 1296c_4 + 216c_3 + 36c_2 + 6c_1 + c_0 = 30378
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_5 + c_4 + c_3 + c_2 + c_1 + c_0 = 45 \\ 32c_5 + 16c_4 + 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0 = 330 \\ 243c_5 + 81c_4 + 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 1527 \\ 1024c_5 + 256c_4 + 64c_3 + 16c_2 + 4c_1 + c_0 = 5064 \\ 3125c_5 + 625c_4 + 125c_3 + 25c_2 + 5c_1 + c_0 = 13413 \\ 7776c_5 + 1296c_4 + 216c_3 + 36c_2 + 6c_1 + c_0 = 30378 \end{array} \right.$$

Note que mesmo nesse caso os coeficientes dessas equações estão novamente em PA, iniciando de uma PA de Ordem Zero acompanhando c_0 a uma PA de Ordem Cinco acompanhando c_5 . Como visto anteriormente, embora a técnica descrita de se relacionar as PAs de Ordem Superior com a resolução de somatórios de monômios possa gerar sistemas relativamente grandes (como nesse caso, um sistema 6x6), apenas realizando subtrações sucessivas de uma equação pela imediatamente acima dela é possível resolvê-lo sem maiores problemas. Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 0 \\ c_1 = \frac{88}{5} \\ c_2 = \frac{21}{2} \\ c_3 = 7 \\ c_4 = \frac{15}{2} \\ c_5 = \frac{12}{5} \end{array} \right.$$

$$S = \sum_{k=1}^n (6x + 3)(2x^3 + 3) = \frac{12}{5}n^5 + \frac{15}{2}n^4 + 7n^3 + \frac{21}{2}n^2 + \frac{88}{5}n$$

Portanto, vê-se uma outra vertente passível de se realizar a resolução de somatórios a partir de sua correlação com as PAs de Ordem Superior. Contudo, alerta-se o cuidado que deve ser tomado pelos docentes ao explorarem essa prática, uma vez que, com o aumento do grau da função e consequentemente da PA, os cálculos passam a tomar proporções maiores

pelas potenciações sucessivas a serem operadas, embora o procedimento de resolução dos sistemas seja mantido apenas em subtrações entre linhas de equações sucessivas. Logo, caso venham a ser explorados sem o intermédio de calculadoras, pode se tornar uma atividade sem nexos ao discente, que se afadigará apenas por realizar operações matemáticas e dispersará o foco deste assunto.

4.3 RELAÇÃO ENTRE AS PAs DE ORDEM SUPERIOR E AS SOMAS DE RIEMANN

Podemos evidenciar a ocorrência de PAs de Ordem Superior facilmente ao adentrarmos no estudo das Somas de Riemann de funções polinomiais. Visando-se essa verificação, podemos solucionar um exemplo hipotético. Tomemos a função $f(x) = x^2 + 2x + 8$ e, vamos calcular a área sob a curva no intervalo de $x = 0$ até $x = 5$. Logo, temos que $dx = \frac{5-0}{n}$. Tomemos sempre como o ponto à direita de cada intervalo, ou seja, $b_k = a + k * \frac{5-0}{n}$, então $b_k = \frac{5k}{n}$. Logo:

$$f(b_k) = \left(\frac{5k}{n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{5k}{n} + 8$$

$$f(b_k) = \frac{25k^2}{n^2} + \frac{10k}{n} + 8$$

Pelas Somas de Riemann, chegamos que a área a ser calculada é:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(b_k) dx$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{25k^2}{n^2} + \frac{10k}{n} + 8 \right) \left(\frac{5}{n} \right)$$

Note que $\frac{5}{n}$ é constante dentro do somatório, e assim:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} \right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{25k^2}{n^2} + \frac{10k}{n} + 8 \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} \right) \left[\frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{10}{n} \sum_{k=1}^n k + 8 \sum_{k=1}^n 1 \right]$$

Veja que, dessa forma, chegamos a somatórios que, como visualizados anteriormente, são PAs de Ordem $p + 1$. Logo, este é o passo metodológico em que há a convergência entre os assuntos. Pelo termo resultante do somatório de k^2 e k encontrado no em livros como Guidorizzi (2001) e Thomas, Weir e Hass (2012) e que foram desenvolvidos

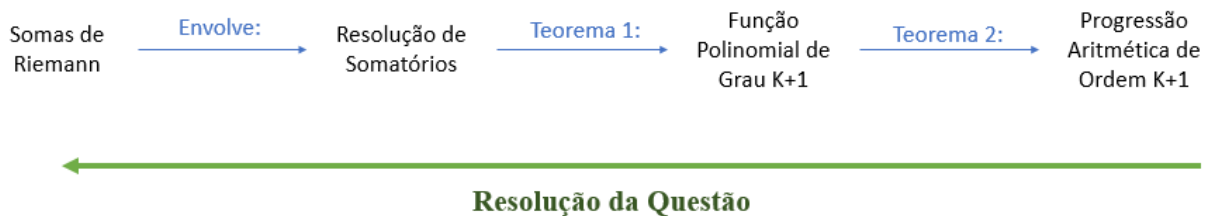
no presente trabalho a partir das Progressões Aritméticas de Ordem Superior (Equações 6 e 7), temos que:

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} \right) \left[\frac{25}{n^2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} + \frac{10}{n} \cdot \frac{n^2 + n}{2} + 8n \right] \\
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n} \right) \left[\frac{50n}{6} + \frac{75}{6} + \frac{25}{6n} + 5n + 5 + 8n \right] \\
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{250}{6} + \frac{375}{n} + \frac{75}{6n^2} + 25 + \frac{25}{n} + 40 \right] \\
 A &= \frac{250}{6} + 25 + 40 = \frac{320}{3}.
 \end{aligned}$$

Diante desse exemplar, vislumbra-se que para a resolução das Somas de Riemann por funções polinomiais de ordem p chega-se a somatórios de termos de k^p , termo desenvolvido nas PAs de Ordem Superior, como descrito anteriormente. Possibilita-se, dessa forma, resolver Somas de Riemann com funções polinomiais de outros índices acima de 3. Porém ressalta-se a necessidade de ponderação e flexibilidade do docente nesse aspecto, uma vez que a determinação da função polinomial pelo processo visto é simples, porém extremamente mecânico com as operações exponenciais e as subtrações sucessivas que, naturalmente, exigem tempo para sua resolução.

Resumidamente, podemos reunir as concepções dessa seção no fluxograma exposto na Figura 13:

Figura 13: Fluxograma conceitual – relação das Somas de Riemann e PAs de ordem superior.



Fonte: Autor (2021).

Assim, esse é o fluxo lógico que abordamos para a concessão de uma relação de ensino-aprendizagem destas duas áreas de conhecimento matemático. Nos cálculos das Somas de Riemann, apresentam-se naturalmente somatórios a serem resolvidos. Como tratamos especificamente das Somas de Riemann de funções polinomiais de grau K , podemos, a partir do Teorema 1, reincidir as resoluções dos somatórios de monômios em funções polinomiais de grau $K + 1$. Por sua vez, aplicando-se o Teorema 2, percebe-se que esse polinômio ainda

pode ser abordado na tangente das PA de Ordem Superior, caminho pelo qual, de acordo com o que foi visto no decorrer dessa seção, podemos elucidar qual a função polinomial correspondente a resolução do somatório em questão.

Portanto, a solução da questão sobre Somas de Riemann se dará justamente no sentido inverso das relações vistas no fluxograma da Figura 13: a partir dos conceitos das Progressões Aritméticas de Ordem Superior, encontra-se os coeficientes da função polinomial e, posteriormente, insere-se tal expressão como resultado do somatório do monômio de grau k dentro das questões de Somas de Riemann, possibilitando assim sua resolução de uma forma mais fluída e completa. Assim, congrega-se a relação entre as Somas de Riemann e as Progressões Aritméticas de Ordem Superior.

CONCLUSÃO

À luz das considerações expostas, vislumbrou-se a importância das Progressões Aritméticas de Ordem Superior em diferentes contextos e aplicações. Dentre esses, destacamos como exemplares as questões contextualizadas da OBMEP, OBM e Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, tidas como questões de alto nível, as quais conseguimos perceber que, pelo gabarito oficial (Anexos I à VIII), necessitavam de conhecimentos e interpretações diversos em cada resolução/questão. Todavia, apresentou-se um método que possibilita que elas sejam solucionadas com a mesma base conceitual – as Progressões Aritméticas de Ordem Superior.

À vista disso, a partir das PAs de Ordem Superior, visualizou-se que é possível o desenvolvimento, de maneira simples, dos somatórios de monômios a serem aplicados nas Somas de Riemann. Assim, vê-se que a explanação de onde provém os resultados desses somatórios é uma ferramenta a ser mais abordada pelo docente em sala de aula, visando correlacionar as Somas de Riemann com os conhecimentos prévios dos discentes.

Ademais, tal ferramenta por si só auxilia a compreensão dos somatórios de monômios por parte do discente, expandindo seu aprendizado para além do método incompleto em que se decora seus resultados (tais qual é exposto nos livros didáticos) para a resolução de exercícios ou provas sobre as Somas de Riemann. Entende-se que, pela proposta dos livros, é natural evitar tais demonstrações, uma vez que o objetivo desses capítulos é a explanação sobre as Somas de Riemann de maneira mais simples para o estudo individual do aluno. Porém, pelo presente trabalho, viu-se uma forma de apresentar tais acepções para complementar a compreensão dos discentes, que podem vir a ser apresentadas em edições futuras desses livros no final desses capítulos, em anexos do próprio livro ou através da metodologia do docente em sala de aula.

Outrossim, o debate contido neste trabalho é enriquecedor por promover conexões entre duas áreas da matemática que se desenvolveram sobre finalidades e raciocínios diferentes: as Progressões Aritméticas de Ordem Superior e as Somas de Riemann. Conforme Singh (2004), cada área de estudo da matemática é uma ilha, naturalmente distante e isolada das demais áreas por suas interpretações e notações totalmente únicas; todavia, é fundamental a construção de pontes que interliguem tais áreas, conexões que permite o enriquecimento e alavancagem no conhecimento em ambas as áreas. O autor destaca o comportamento semelhante dessa visão na Física, na qual, a partir da percepção da ligação existente entre a

eletricidade e o magnetismo, expandiu-se a compreensão sobre ambos e revolucionou-se as aplicações desses conhecimentos em novos dispositivos.

Contrariamente, notou-se que essa área matemática das PAs de Ordem Superior é pouco explorada no contexto escolar, sendo apresentada aos discentes, na grande maioria das vezes, apenas em graduações ou cursos específicos, como cursos de preparação para olimpíadas. No ensino regular, normalmente as sequências numéricas são estudadas somente até as PAs de Primeira Ordem – além das Progressões Geométricas, tópico sobre os quais o presente trabalho não se objetivava em analisar. Inclusive, é uma perspectiva para trabalhos futuros uma análise semelhante a tratada no presente trabalho, porém voltada para as Progressões Geométricas de Ordem Superior.

Além disso, em diversos cursos das Ciências Exatas, os quais exploram os conceitos de Somas de Riemann, as PAs de Ordem Superior não são expostas, o que restringe seus instrumentos para resolução de diversas problemáticas, uma vez que se viu vários casos que podem ser desenvolvidas com maior facilidade aplicando as PAs de Ordem Superior.

Assim, fomenta-se a exibição desses conhecimentos, mesmo que de forma sucinta, desde a base no ensino regular do discente, de maneira que, ao avançar na vida educacional, ele possa concatenar esses conhecimentos com outras áreas da matemática e cálculo que ele venha a estudar e compor uma base matemática fortemente integrada, que o desenvolverá instrutiva e profissionalmente.

Concluindo este trabalho, vê-se como possibilidade para trabalhos futuros a análise amostral do ensino de Somas de Riemann para discentes que tiveram contato com as PAs de Ordem Superior previamente, na qual se exporia os desenvolvimentos dos somatórios conforme expresso no tópico “4.1 DESENVOLVIMENTO DOS SOMATÓRIOS DE MONÔMIOS DE GRAUS UM, DOIS E TRÊS” deste trabalho. Por meio dessa análise a nível amostral em salas de aula do Ensino Superior, seria verificado se, na ótica do discente, efetivamente foi produzido o elemento de ligação entre esses assuntos, bem como se esse procedimento facilitou de alguma forma seu aprendizado.

Tal perspectiva é justificada na vertente de que, conforme supracitado, tais assuntos tendem a se completarem, e almeja-se, dessa forma, que corroborarem para uma compreensão mais completa dos alunos sobre as Somas de Riemann. Quiçá, poderão ser levantadas outros questionamentos, como por exemplo, se os altos níveis de reprovação na disciplina de Cálculo tendem a retardar, mesmo que minimamente, com a aplicação de metodologias como a analisada nesse certame.

Ainda pautado nos procedimentos e discussões do tópico 4.1 deste trabalho, outra perspectiva a ser explorada futuramente é o desenvolvimento da função polinomial gerada através do somatório de um monômio de grau $p, \forall p \in \mathbb{N}$. Ou seja, tal discussão se voltaria para o Teorema 1 referenciado neste trabalho, buscando desenvolver indutivamente uma fórmula geral para calcular cada um dos coeficientes reais da função polinomial de grau $p + 1$ concebida pelo somatório de um monômio genérico de grau p .

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Eliane Aparecida Martins de. Progressões Aritméticas e Geométricas: praxeologias em livros didáticos. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 11, 2013, Curitiba. **Anais [...]**, Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, p. 1-15, 2013.

_____. **Progressões Aritméticas e Geométricas: praxeologias em livros didáticos de matemática**. 2012. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Educação, Instituto de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2012.

BOEING, Francielle Kuerten *et al.* O método de Arquimedes para calcular o volume da esfera e as somas de Riemann. *In: Congresso de Matemática Aplicada e Computacional CMAC Sudeste*, 2013, Joinville. **Anais [...]**, Joinville: UDESC, p.461-463, 2013.

CHAGAS, Jhon Kenedy Moura; ROCHA, Josimar da Silva. Sequências Aritméticas de Ordem Superior e aplicações. *In: SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA*, 6, 2012, Goiânia. **Anais [...]**, Goiânia: IFG, p. 1-4, 2012.

ESCADA, Flávio Alberto Louro. **Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior. Planificação de subunidade relativa ao Tema III – Sucessões Reais**. 2012. 81 f. Dissertação (Mestrado) – Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2012.

GALVÃO, Ágda Talita. **SOMAS, SOMATÓRIOS E TERMOS NÃO INTEIROS**. 2020. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020.

GOMES, Juliano Sanquite. **Progressões Aritméticas e Geométricas de ordem superior e suas relações**. 2019. 40 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2019.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo: volume 1**. v. 1, 5 ed., Rio de Janeiro: LTC, p. 406-454, 2001.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas**. v. 4, 2 ed., São Paulo: Atual Editora, 228p., 1993.

LEAL JUNIOR, Luiz Carlos; PINHEIRO, José Milton Lopes. Modos de compreender a Soma de Riemann e suas aplicações ao estar em um ambiente informatizado de aprendizagem. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, São Paulo, p. 23-43, 2016.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. v. 2, 6 ed., Rio de Janeiro: SBM, Coleção do Professor de Matemática, p. 1-21, 2006.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de; MIOTO, Regina Célia Tamaso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálaxis**, v. 10, Florianópolis, p.37-45, 2007.

LIMA, Wilhian Alexander Ferreira. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Uma Proposta de Abordagem no Ensino Médio**. 2015. 72 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de

Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2015.

MANÇO, Rafael de Freitas. **Integrais e Aplicações**. 2016. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

MAROSKI, Marcelo Wachter. Termo geral de uma progressão aritmética de k -ésima ordem. **Revista Eletrônica da Matemática**, Ijuí, v. 3, p.116-123, 2017.

MIGUEL, Lucas; XAVIER, Lais; FRANZOLIN, Daniel. **Progressões**. Campinas: LIBUNICAMP, 27p., 2014.

NOBRE, José Filho Ferreira; ROCHA, Rogério Azevedo. Progressões aritméticas de ordem superior. **Revista Professor de Matemática On Line**, [s.l.], v. 6, p.35-49, 2018.

OBM. Sítio oficial - Olimpíada Brasileira de Matemática. **Provas e Gabaritos**. Disponível em: <https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/> Acesso em: 30/04/2021.

OBMEP. Sítio oficial - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. **Provas e Soluções**. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/provas.htm> Acesso em: 19/04/2021.

OLIVEIRA, Edson de Jesus. **Progressões Aritméticas de Ordem Superior: Resultados e Aplicações**. 2019. 61 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, Itabaiana, 2019.

PROFMAT. Sítio oficial - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. **Provas Nacionais**. Disponível em: <https://www.profmatsbm.org.br/provas-nacionais/> Acesso em: 16/04/2021.

RIBEIRO, Marcos Vinícius. **O ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da história da matemática e da resolução de problemas**. 2010. 324 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestre em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **CAPÍTULO 3: Resolução de Sistemas Lineares**. In: RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. *Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais*. 2 ed., São Paulo: Pearson Makron Books, p. 105-179, 2009.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. 10 ed., Rio de Janeiro: Record, p. 328 p., 2004.

SIPLE, Ivanete Zuchi; CARDOSO, Dienifer Tainara; FIGUEIREDO, Elisandra Bar de. As Somas de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo: a abordagem nos livros didáticos. In: Seminário de Iniciação Científica – UDESC, 25, 2015, Santa Catarina. **Anais [...]**, Santa Catarina: UDESC, p. 1-12, 2015.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo 1**. Tradução de Kleber Pedroso e Regina Simille de Macedo; Revisão Técnica Claudio Hirofume Asano. 12 ed., São Paulo: Pearson Education do Brasil, p. 285-301, 2012.

VASCONCELOS, Cleiton Batista; ROCHA, Manoel Americo. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 3 ed, Fortaleza: EdUECE, p. 53-71, 2019.

VILLELA, Mariana Fernandes dos Santos; SANTOS, Patrícia Borges dos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. Fluxo Sangüíneo: Uma Aplicação da Integral de Riemann. **Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática**, Uberlândia, p.347-364, 2007.

WILLE, Jackson Luis. **POSSIBILIDADES DE USO DA MATEMÁTICA DA MESOPOTÂMIA NO ENSINO BÁSICO**. 2016. 53 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, 2016.

ANEXO I - Resolução gabarito oficial - Questão 17 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2007.

17. (alternativa C) A flecha que aponta para baixo na tabela passa pelos quadrados dos números ímpares: $1^2 = 1$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$ e assim por diante.

									...
								...	
	37	36	35	34	33	32	31		
	38	17	16	15	14	13	30		
	39	18	5	4	3	12	29		
	40	19	6	1	2	11	28	...	
	41	20	7	8	9	10	27	...	
	42	21	22	23	24	25	26	51	
	43	44	45	46	47	48	49	50	

Vamos chamar de a_n o n -ésimo termo de nossa sequência; por exemplo, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 13$ e $a_4 = 31$. Observando a tabela, vemos que

$$\begin{aligned}
 1^2 &\xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 1^2 + 1 = 2 \xrightarrow{\text{1 casa para cima}} 1^2 + 1 + 1 = 3 = a_2 \\
 3^2 &\xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 3^2 + 1 = 10 \xrightarrow{\text{3 casas para cima}} 3^2 + 1 + 3 = 13 = a_3 \\
 5^2 &\xrightarrow{\text{1 casa para a direita}} 5^2 + 1 = 26 \xrightarrow{\text{5 casas para cima}} 5^2 + 1 + 5 = 31 = a_4
 \end{aligned}$$

e assim por diante. Vemos então que a lei de formação da sequência, a partir de a_2 , é

$$\begin{aligned}
 a_2 &= [1^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 1^\circ \text{ ímpar} \\
 a_3 &= [2^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 2^\circ \text{ ímpar} \\
 a_4 &= [3^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 3^\circ \text{ ímpar}
 \end{aligned}$$

e, em geral,

$$a_n = [(n-1)^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + (n-1)^\circ \text{ ímpar}$$

Logo $a_{30} = [29^\circ \text{ ímpar}]^2 + 1 + 29^\circ \text{ ímpar}$, e como o 29° número ímpar é 57 segue que $a_{30} = 57^2 + 1 + 57 = 3307$.

Mais geralmente, o $(n-1)^\circ$ número ímpar é $2(n-1)-1 = 2n-3$ e segue que $a_n = (2n-3)^2 + 1 + (2n-3) = 4n^2 - 10n + 7$.

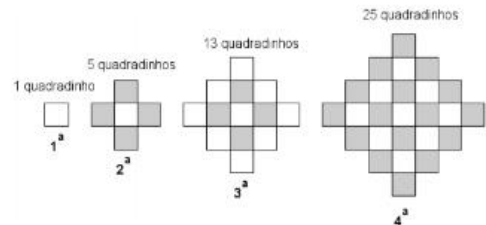
ANEXO II - Resolução gabarito oficial - Questão 16 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2009.

QUESTÃO 16

ALTERNATIVA D

Vamos contar quantos quadradinhos brancos e sombreados aparecem em cada figura.

figura	brancos	sombreados	total
1ª	$1 = 1^2$	$0 = 0^2$	$1^2 + 0^2$
2ª	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$2^2 + 1^2$
3ª	$9 = 3^2$	$4 = 2^2$	$3^2 + 2^2$
4ª	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$4^2 + 3^2$



Em geral, vemos que a n -ésima figura terá $n^2 + (n-1)^2$

quadradinhos. Nosso problema se resume então a achar o menor inteiro positivo n tal que $n^2 + (n-1)^2 \geq 2009$. Podemos fazer isto analisando o sinal do polinômio $n^2 + (n-1)^2 - 2009 = 2n^2 - 2n - 2008$, mas é mais rápido proceder por aproximações, como segue.

Como $n^2 > (n-1)^2$ para $n \geq 1$, devemos ter $2n^2 > 2009$, ou seja, $n^2 > 1005$; segue que $n > 31$. Como $32^2 + 31^2 = 1985$, o valor $n = 32$ está descartado; por outro lado, para $n = 33$ temos $33^2 + 32^2 = 2113$.

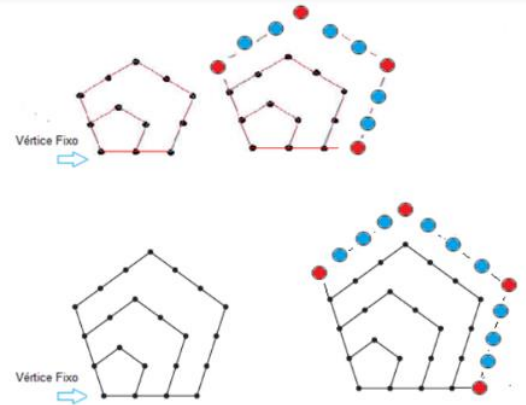
ANEXO III - Resolução gabarito oficial - Questão 14 – OBMEP 1ª fase – nível 3 do ano de 2015.

QUESTÃO 14

ALTERNATIVA C

Os números de pontos de cada figura formam uma sequência chamada de *números pentagonais*. Observe que, a partir da figura n , $n \geq 1$, a figura $n+1$ é obtida acrescentando-se à figura anterior 4 novos pontos (vermelhos) que serão os vértices e n novos pontos (azuis) em cada um dos três lados opostos ao vértice fixo, totalizando $4+3n$ novos pontos.

Assim, se a vigésima figura possui 651 pontos a vigésima primeira terá $651 + 3 \times 20 + 4 = 715$ pontos.

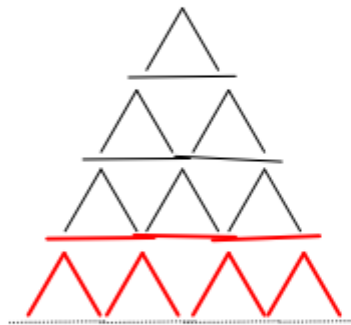


ANEXO IV – Resolução gabarito oficial - Questão 01: Parte A – XXXI OBM – 2ª fase – nível 1 (2009).

1. [Resposta: 40] Para fazer um novo andar num castelo já construído, precisamos de três cartas para cada andar anterior mais duas para o topo. Assim, a partir do castelo de 3 andares, para fazer o de 4 andares, precisamos de mais $3 \times 3 + 2 = 11$ cartas, num total de $15 + 11 = 26$ cartas. Portanto, para fazer o castelo de 5 andares, precisamos de $26 + 4 \times 3 + 2 = 40$ cartas.

Solução alternativa:

Para acrescentarmos um quarto andar a um castelo de 3 andares, precisamos de 3 cartas para separar a base dos demais andares e 4 pares de cartas para a base, totalizando $3 + 2 \cdot 4 = 11$ cartas a mais. Veja a figura a seguir:



Analogamente, para acrescentarmos um quinto andar a um castelo de 4 andares, precisamos de 4 cartas para separar a base dos demais andares e 5 pares de cartas para a base, totalizando $4 + 2 \cdot 5 = 14$ cartas a mais. Assim, para montar um castelo de 5 andares, precisamos de $15 + 11 + 14 = 40$ cartas.

Observação: De fato, o acréscimo de um n -ésimo andar necessita de $n - 1$ cartas para apoiar a base anterior, e n pares de cartas para a nova base. Portanto, são acrescentadas $n - 1 + 2 \cdot n = 3n - 1$ cartas por andar.

ANEXO V - Resolução gabarito oficial – Questão 05: Parte A – 37ª OBM – 2ª fase – nível 1 (2015).

05. [Resposta: 0059]

Solução: O número de quadrados cinza da figura n será representado por C_n e o número de quadrados brancos da figura n será representado por B_n . Observando os quadrados cinza temos:

$$C_1 = 1 = 1^2$$

$$C_2 = 4 = 2^2$$

$$C_3 = 9 = 3^2$$

$$C_4 = 16 = 4^2$$

...

O número de quadrados cinza da figura 30 é $C_{30} = 30^2$.

Repare que o número de quadrados brancos de uma figura é igual ao número de quadrados cinza da figura anterior. Assim, $B_{30} = 29^2$. Portanto, $C_{30} - B_{30} = 30^2 - 29^2 = 59$.

ANEXO VI - Resolução gabarito oficial – Questão 1 – MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - Prova 1 de 2011.

UMA RESPOSTA

(a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos $a_1, \dots, a_{n-1}$, isto é, $1 + 2 + \dots + n - 1$ mais um, isto é, é igual a $\frac{1}{2}(n-1)n + 1$. O último inteiro é esse número mais $n - 1$. Portanto, para $n = 10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

(b) a_{10} é a soma de uma progressão aritmética de 10 termos, sendo o primeiro igual a 46 e o último igual a 55. Então

$$a_{10} = \frac{(46 + 55) \cdot 10}{2} = 101 \cdot 5 = 505.$$

(c) No caso de a_n , trata-se da soma de uma progressão aritmética de n termos, sendo o primeiro igual a $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ e o último igual a $\frac{1}{2}n(n-1) + 1 + (n-1)$, ou seja, $\frac{1}{2}n(n-1) + n$, como visto em (a). Então

$$a_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n-1) + 1\right] + \left[\frac{1}{2}n(n-1) + n\right]}{2} \cdot n = \frac{(n-1)n^2 + (n+1)n}{2} = \frac{n^3 + n}{2}.$$

ANEXO VII - Resolução gabarito oficial - Questão 1: Item b - MA12 (Matemática Discreta) – PROFMAT - AV1 de 2012.

(b) Por inspeção a afirmação é verdadeira para $n = 0$, pois $n^2 + n = 0$ e realmente são 0 passos para chegar no ponto de partida $(n, n) = (0, 0)$. Agora suponhamos que a afirmação é válida para (n, n) , isto é, que realmente são $n^2 + n$ passos até se chegar em (n, n) (hipótese de indução). Queremos mostrar que a afirmação é válida quando aplicada para $n + 1$, isto é, que são $(n + 1)^2 + (n + 1)$ passos até se chegar em $(n + 1, n + 1)$.

De (n, n) até $(n + 1, n + 1)$ são necessários: n passos (para encontrar um dos eixos; mais especificamente, para encontrar a abscissa, se n é par, e para encontrar a ordenada, se n é ímpar) mais 1 passo (para avançar nesse eixo) mais $n + 1$ passos (para voltar à diagonal, que é o conjunto dos pontos da forma (x, x)). Assim, são necessários $n + 1 + (n + 1) = 2n + 2$ passos para ir-se de (n, n) a $(n + 1, n + 1)$. Pela hipótese de indução, já foram $n^2 + n$ passos para se chegar em (n, n) . Portanto são $(n^2 + n) + (2n + 2)$ passos até $(n + 1, n + 1)$. Mas

$$(n^2 + n) + (2n + 2) = (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) = (n + 1)^2 + (n + 1),$$

Solução alternativa 1. Para se chegar ao ponto (n, n) , é preciso percorrer todos os pontos de coordenadas inteiras do quadrado $[0, n] \times [0, n]$, exceto os situados em um dos lados. Existem $(n + 1)^2$ pontos de coordenadas inteiras no quadrado, dos quais n não são visitados. Logo, o comprimento da poligonal é $(n + 1)^2 - 1 - n = n^2 + n$.

Solução alternativa 2. A linha poligonal da origem até o ponto (n, n) é formada por n segmentos de comprimento 1, por segmentos de comprimento $2k$, para k variando de 1 a $n - 1$ e um segmento de comprimento n . Logo, seu comprimento é

$$n + 2(1 + 2 + \dots + n - 1) + n = n + 2 \cdot \frac{(n - 1)n}{2} + n = n^2 + n.$$

ANEXO VIII - Resolução do gabarito oficial - Questão 6: Item b - Exame Nacional de Qualificação – PROFMAT 2017.1.

(b) Para $n = 2$ temos $a_2 = C_2^2 + C_3^2 = 1 + 3 = C_4^3$, portanto a afirmação é verdadeira.

Suponhamos $a_n = C_{n+2}^3$, para n fixo, $n \geq 2$. Vamos provar que o resultado vale para $n + 1$, isto é, $a_{n+1} = C_{n+3}^3$.

Temos que $a_{n+1} = a_n + C_{n+2}^2 = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2$ (hipótese de indução).

Agora, usando a relação de Stifel, obtemos

$$a_{n+1} = C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2 = C_{n+3}^3$$

Portanto, pelo princípio de indução, o resultado é válido para todo $n \geq 2$.

Solução alternativa para o item (b):

(b) Pela relação de Stifel temos

$$C_4^3 = C_3^3 + C_3^2$$

$$C_5^3 = C_4^3 + C_4^2$$

$$C_6^3 = C_5^3 + C_5^2$$

$$\vdots$$

$$C_{n+1}^3 = C_n^3 + C_n^2$$

$$C_{n+2}^3 = C_{n+1}^3 + C_{n+1}^2.$$

Somando-se as igualdades acima, membro a membro, obtemos que

$$C_{n+2}^3 = C_3^3 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$

Como $C_3^3 = C_2^2 = 1$ segue que

$$C_{n+2}^3 = C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 + C_{n+1}^2.$$