

ANÁLISE DE CIRCUITO ELÉTRICO RLC DE SEGUNDA ORDEM

Manoel Lucas Dantas dos Santos¹, Idalmir de Souza Queiroz Júnior²

Resumo: Formas de equações diferenciais lineares de segunda ordem surgem na análise de problemas em diferentes áreas da ciência e engenharia. Em engenharia elétrica não é diferente, nesse sentido o presente estudo tem como finalidade analisar a resposta de circuitos RLC em série, e por meio da associação de amplificadores operacionais obter um modelo equivalente que descreva o mesmo comportamento da equação diferencial de segunda ordem correspondente ao circuito RLC tratado em questão. Uma vez deduzida a equação geral, com base nos parâmetros adotados foi realizada uma análise da resposta gráfica da equação obtida nos cálculos através do uso de softwares de planilha eletrônica e software de simulação de circuitos eletrônicos. Posteriormente, por meio da utilização de um modelo prático foi possível averiguar a veracidade dos cálculos, bem como, verificar a consonância existente entre os valores calculados e experimentais. Uma vez realizado o experimento, foi feita uma análise de possíveis fontes de erros que podem eventualmente ter provocado quaisquer diferenças entre o modelo prático e o teórico.

Palavras-chave: Circuitos RLC. Amplificadores Operacionais. Equações Diferenciais. Simulação. Experimento.

1. INTRODUÇÃO

A importância das equações diferenciais lineares de segunda ordem ou ordem superior é resultado primeiramente da rica estrutura teórica proveniente da diversidade de métodos de resolução, além de serem indispensáveis para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática [1].

Este estudo tem por objetivo descrever o comportamento da equação de segunda ordem do circuito RLC abordado numericamente analisando-o de forma comparativa com o uso de um modelo equivalente de circuito que utiliza associação de amplificadores operacionais.

O objeto de estudo visa à modelagem matemática de uma equação que expresse numericamente por meio de variáveis a resposta de circuitos com base em Equações Diferenciais. A modelagem consiste em encontrar uma taxa de variação com o tempo das grandezas que caracterizam o problema, ou seja, a dinâmica temporal do sistema recorrente. As equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são muito utilizadas na modelagem matemática, solucionando uma gama de problemas físicos reais, atentando para a necessidade de se propor os princípios básicos que regem o sistema para melhor representação do modelo. Uma vez resolvida a EDO ou o sistema delas que define o processo ou sistema, é possível extrair dados do mesmo e tomar como base para previsão do seu comportamento.

No caso de um circuito RLC, se inicialmente fosse levado em consideração um circuito puramente indutivo e puramente capacitivo ligados em série, em que o capacitor está carregado no instante $t < 0$ o circuito apresentaria comportamento bem particular. Como inicialmente o capacitor está com a carga máxima, a corrente será igual à zero, uma vez que o capacitor estará aberto; para um valor de $t > 0$ à medida que o capacitor se descarrega a corrente vai aumentando, até o capacitor se descarregar completamente e a corrente atingir seu valor máximo. Na primeira situação, toda a energia está armazenada no campo elétrico do capacitor. Já quando a carga é nula e a corrente é máxima toda a energia estará armazenada no campo magnético do indutor. Nessa situação o circuito é ideal, ou seja, capacitor e indutor ideal e resistência nula, a carga e a corrente vão oscilar indefinidamente, e, como não há resistência, não há dissipação de energia. Portanto, ele é um sistema conservativo.

Ao se introduzir uma resistência no circuito LC, o que se altera é que parte da energia que estava previamente armazenada é perdida na resistência à medida que o circuito oscila, de tal forma, que as amplitudes vão diminuindo, até que determinado momento chegue à zero. Esse sistema recebe o nome de amortecido e quando existe um amortecimento a frequência com que o sistema vai oscilar até parar, é menor que sua frequência natural de oscilação.

Quando não há no circuito nenhuma fonte de tensão atuando, onde ocorre apenas a ação do indutor, capacitor e indutor este recebe o nome de circuito RLC de resposta natural. Por outro lado, quando há

uma fonte de tensão no circuito, este recebe o nome de resposta forçada. O uso da fonte de tensão é uma alternativa para manter as oscilações em um sistema amortecido, a fonte dessa forma vai executar um trabalho positivo sobre o sistema. O importante é que o sistema vai oscilar na mesma frequência com que o gerador fornece energia, mas, em geral, com pequena amplitude. Se a amplitude de oscilação for pequena, isso significa que pouca energia está sendo transferida do gerador para o circuito RLC [2].

Já um Amplificador Operacional, ou Amp-op, é um amplificador diferencial de ganho muito alto com impedância de entrada muito alta e baixa impedância de saída. Esse instrumento é comumente utilizado para se obter variações na tensão, para construção de osciladores, filtros e inclusive circuitos de instrumentação. De modo geral, pode-se dizer que suas aplicações estão presentes nos sistemas eletrônicos de controle industrial, nos equipamentos de áudio, etc. Em filtros ativos, são geralmente escolhidos por ter a propriedade de manter a amplitude do sinal. [3]

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 Fundamentação teórica

A compreensão da resposta do circuito RLC em um sentido intuitivo, está amarrada ao entendimento de como a carga se move em torno do circuito ao longo do tempo. Como já mencionado anteriormente, em um circuito ideal, ou seja, capacitor e indutor ideais e resistência nula, a carga e a corrente vão oscilar indefinidamente, e, como não há resistência, não há dissipação de energia. Portanto, ele é um sistema conservativo: a energia que ele continha inicialmente, associada à carga do capacitor, mantém-se sempre no sistema. Entretanto, é importante lembrar que, quando qualquer sistema conservativo, seja ele mecânico, elétrico, acústico, ou qualquer um capaz de oscilar, for excitado esse sistema irá oscilar de forma independente em no mínimo uma frequência particular que se chama frequência natural do sistema. Para aplicações em circuitos osciladores, é geralmente desejável que o fator de carga seja o menor possível ou, de igual forma, aumentar o fator de qualidade (Q) o máximo possível. Na prática, isto requer uma redução na resistência R no circuito para uma quantia tão baixa quanto fisicamente possível. Neste caso, o circuito RL torna-se uma boa aproximação do circuito LC ideal, que não é realizável na prática [2].

Uma forma de se manter as oscilações num sistema amortecido é fornecer energia periodicamente através de uma fonte. Na situação em que não há fonte descrita temos um circuito que possui resposta natural, já durante a aplicação de uma tensão externa alternada teremos nesse sistema uma oscilação forçada. O importante é que o sistema vai oscilar na mesma frequência com que o gerador fornece energia, mas, em geral, com pequena amplitude. Se a amplitude de oscilação for pequena, isso significa que pouca energia está sendo transferida do gerador para o circuito RLC [2].

Um amp-op básico possui duas entradas e uma saída conforme a figura 1. Em que A e B são as entradas e C é a saída do amplificador.

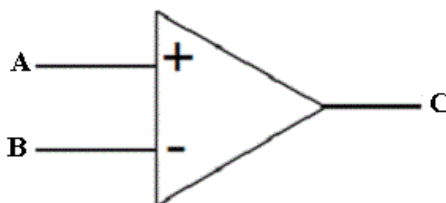


Figura 1 - Amp-op básico (Boylestad, 2004)

Uma das mais importantes características de uma conexão de circuito diferencial, observada em amp-op, é a capacidade de o circuito amplificar consideravelmente sinais opostos nas duas entradas, enquanto amplificam suavemente sinais comuns a ambas as entradas. Um amp-op fornece uma componente de saída que é devida à amplificação da diferença dos sinais aplicados às entradas não inversora e inversora e uma componente devida aos sinais comuns a ambas as entradas. Como a amplificação dos sinais de entrada opostos é muito maior que a dos sinais de entrada comuns, o circuito fornece uma rejeição de modo-comum, descrita por um parâmetro chamado razão de modo-comum [3].

Os amp-ops também são comumente empregados na construção de filtros ativos. Um circuito de filtro pode ser construído utilizando-se componentes passivos como resistores, capacitores e indutores ou componentes ativos como amplificadores operacionais, transistores e etc. Os filtros elétricos são dispositivos que deixam passar as frequências de interesse, atenuando outras. Este dispositivo é de suma importância para diversas áreas, como sistemas de telecomunicações, instrumentação industrial, sistemas de som e eliminação de ruídos [3].

Outra aplicação prática de circuitos de filtro é o condicionamento de formas de onda de tensão não-senoidais em circuitos de energia. Alguns dispositivos eletrônicos são sensíveis à presença de harmônicos na tensão de alimentação e, portanto, exigem um ajuste de energia para o bom funcionamento. Se uma tensão de onda sinusoidal distorcida se comporta como uma série de formas de onda harmônicas adicionadas à frequência fundamental, então deve ser possível construir um circuito de filtro que permita somente a transmissão da frequência da forma de onda fundamental, bloqueando todos os harmônicos de maior frequência.

2.1.1 Modelagem Matemática

A modelagem matemática surge com uma série de aspectos úteis do ponto de vista científico, principalmente como ferramenta primordial na reflexão sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar e de representar aspectos essenciais de um sistema em uma forma utilizável. Sua linguagem concisa, que por vez visa facilitar sua manipulação, agrega também a competência de determinar, confirmar ou rejeitar hipóteses relacionadas a complexos sistemas. Entretanto quanto maior é a proximidade do modelo com a realidade, mais complexo será o modelo. Isto significa um maior número de parâmetros e consequentemente uma maior dificuldade tanto na obtenção de dados a partir do modelo proposto [4].

O processo comum é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros e formaliza-los através de um sistema artificial, o modelo. Dentro do enorme campo da modelagem matemática, as equações diferenciais (ED) são de suma importância na solução de problemas físicos reais, estabelecendo, portanto, uma relação intrínseca como o próprio desenvolvimento da matemática. Uma vez escolhido o fenômeno a ser estudado, a etapa seguinte consiste em elaborar uma representação matemática inicial da situação abordada, seguindo no desenvolvimento de um modelo matemático que represente de algum modo a contemplação de todas as variáveis envolvidas.

A validação do modelo se dá no processo de intermediação entre o problema original e o modelo matemático. Na engenharia são abordados diversos métodos para resolução de vários tipos de equações diferenciais ordinárias, podendo ser melhor compreendidos na sua totalidade quando associados a problemas práticos.

De forma compacta, uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função facultativa e suas derivadas. As ordinárias são mais conhecidas como EDO, as de primeira ordem são aquelas em que a função incógnita depende apenas de uma variável independente. Uma solução para a EDO, em um dado intervalo, é qualquer função $y(x)$ que verifique a equação diferencial $y'=f(x,y)$ nesse intervalo. A solução da equação diferencial pode ser dada na forma de uma função implícita $g(x,y)$, a qual não se pode obter relação entre as variáveis de modo explícito, como verifica a equação [5].

A aplicação das equações diferenciais mesmo nos permitindo encontrar uma família de soluções, são mais preferíveis quando atuam na busca por uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Desta forma aprimoramos a modelagem a uma EDO acompanhada de uma condição inicial, conhecida como problema de valor inicial (PVI). Condição inicial é um ponto x que pertence ao domínio da função $f(x)$ que é solução do PVI, em outras palavras, o PVI consiste em uma equação diferencial, juntamente com condições iniciais relativas à função incógnita e suas derivadas, tudo dado para um mesmo valor da variável independente [5].

2.2 Metodologia

2.2.1 – Uma abordagem a resposta de um circuito RLC em série

Uma vez que a resposta dos circuitos RLC por meio de uma ED resulta em equações ordinárias lineares de ordens maiores ou iguais a dois, tornando-se necessário o entendimento da resolução de uma ED desse tipo. Uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem pode ser expressa por:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = F(t) \quad (1)$$

em que a_2 , a_1 , a_0 e $F(t)$ são funções conhecidas que dependem de uma variável independente.

Determinar a resposta natural de um circuito RLC em série consiste em determinar a corrente gerada nos elementos ligados em série pelo fornecimento da energia inicialmente armazenada no indutor, no capacitor ou em ambos. Em outras palavras, consiste em observar o comportamento do circuito sem a presença de uma fonte de tensão (figura 2). Como antes, a corrente inicial do indutor e a tensão

armazenada no capacitor representam a energia inicialmente armazenada. Após determinar a corrente pode-se obter as tensões de qualquer elemento.

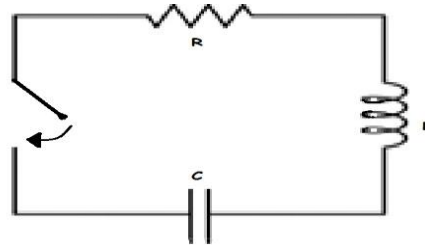


Figura 2 – Circuito RLC Série natural. (Autoria própria)

A resposta forçada ou a um degrau pode ser entendida como a resposta do circuito quando é aplicada uma fonte de tensão cc repentina. Podendo haver energia ou não armazenada (Figura 3).

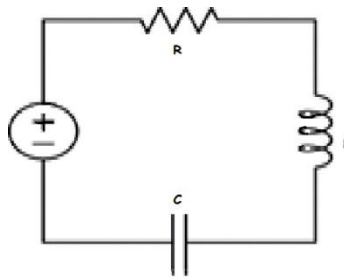


Figura 3 – Circuito RLC Série Forçada (Autoria própria)

A segunda lei de Kirchhoff estabelece que a queda de tensões em uma malha fechada é igual a zero. Considere o circuito mostrado na figura 3. Tem-se que:

$$V_R + V_L + V_C = V_T \quad (2)$$

Sejam $I(t)$ a corrente e $q(t)$ a carga no capacitor em cada instante t . Levando em conta que:

- A queda de potencial entre as duas extremidades da resistência é $RI(t)$;
- A queda de potencial entre as duas extremidades do indutor é $LI'(t)$;

A equação 2 pode ser reescrita como:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + V_c = V_T \quad (3)$$

A equação (3) ainda não é uma EDO, pois possui duas funções, $I(t)$ e $q(t)$. Existem duas formas de obter uma EDO. Uma delas é atribuindo a $I = C \frac{dv_c}{dt}$

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{LC} = V_T/LC \quad (4)$$

Dessa forma encontramos a expressão particular para uma EDO de segunda ordem de um circuito RLC em série. A diferença essencial entre a resposta natural e forçada é de que no primeiro caso obtemos a solução geral, enquanto a resposta forçada consiste numa solução particular.

2.2.2 Resolução de RLC em série por um ED linear de 2º ordem.

Uma forma de resolução para a equação 4 é utilizando o método de coeficientes a determinar, ou seja, admitir que a solução seja da forma exponencial $v_c = Ae^{st}$. Assim temos que:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = \frac{V}{LC} \quad (5)$$

Conforme foi visto a solução completa da equação diferencial não-homogênea é dada por:

$$y(t) = y_H + y_p \quad (6)$$

Onde y_p é qualquer solução da equação não-homogênea e é chamada solução particular, para um circuito RLC em série y_p é equivalente a função $F(t)$ da equação 1, ou seja, consiste na tensão aplicada ao circuito. Enquanto a equação homogênea deve possuir duas soluções diferentes e linearmente independentes $y_1(t)$ e $y_2(t)$. A solução mais geral da equação homogênea é:

$$y_H = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \quad (7)$$

Onde k_1 e k_2 são determinadas constantes tais que satisfazem as condições iniciais do circuito. Só podem ser determinadas após se encontrar a solução completa da equação diferencial.

O que se observa com base na equação 5 é que a resposta de um circuito RLC depende das duas raízes intrínsecas a sua equação. Uma vez que a resposta dos circuitos RLC por meio de uma ED resulta em equações ordinárias lineares de ordens maiores ou iguais a dois, tornando-se necessário o entendimento da resolução de uma ED desse tipo. Dessa maneira, através da equação pode-se observar a possibilidade de três resoluções

A resposta superamortecida ocorre quando as raízes da equação característica são reais e distintas. A solução para tensão tem a forma:

$$v_c = vf + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (8)$$

Em que s_1 e s_2 são as raízes da equação característica. As constantes que A_1 e A_2 que acompanham a equação são constantes determinadas pelas condições iniciais do circuito. A resposta subamortecida ocorre quando as raízes da equação característica são complexas, nesse caso o valor da tensão pode ser expresso por:

$$v_c = vf + B_1 e^{\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{\alpha t} \sin \omega_d t \quad (9)$$

Já a resposta criticamente amortecida ocorre quando a resposta do circuito está prestes a oscilar. Ademais, as duas raízes da equação característica são reais e iguais. Uma vez que a equação possui raízes a mesma pode ser escrita como:

$$v_c = vf + D_1 * t e^{\alpha t} + D_2 e^{\alpha t} \quad (10)$$

Tendo isso em mente, foi escolhido os parâmetros do circuito RLC, e foi obtido uma solução analítica para este problema e em seguida foi realizado a simulação e experimento para então encontrar um circuito com Amplificadores operacionais equivalente. Para o circuito RLC em série abaixo foi utilizado um circuito de resposta a um degrau, com os seguintes parâmetros:

$V = 10$ Volts

$L = 9,24$ mH

$C = 4,7$ mF

$R = 2,2$ k Ω

A solução da equação característica do circuito RLC é dada por:

$$S_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{rad/s}) \quad (11)$$

Onde $\alpha = \frac{R}{2L}$ é a frequência de Neper para o circuito RLC em série, e $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ é a frequência angular de ressonância. Dessa forma as raízes da equação podem ser encontradas.

$$S_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \gg -\frac{2,2\text{k}\Omega}{2 \times 9,24\text{mH}} \pm \sqrt{\left(\frac{2,2\text{k}\Omega}{2 \times 9,24\text{mH}}\right)^2 - \frac{1}{9,24\text{mH} \times 4,7\text{mF}}} \quad (12)$$

Resolvendo essa equação encontramos duas raízes reais e distintas, logo, o circuito tem comportamento superamortecido. Dessa forma a equação 5 descreve mais adequadamente o

comportamento da tensão. As raízes para a equação são $S_1 = -0,0967$ e $S_2 = -238.095,1$ e para encontrarmos os coeficientes A_1 e A_2 , utiliza-se as condições iniciais do circuito, como a tensão inicial armazenada no capacitor é zero, então:

$$v_c(0) = 0 = A_1 + A_2 \quad (13)$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt} = S_1 A_1 + S_2 A_2 \quad (14)$$

Resolvendo as duas equações com duas incógnitas temos que $A_1 = -10$, $A_2 = 4,88 \times 10^{-9}$. Aplicando os valores na equação 8, temos:

$$v(t) = 10 - 10e^{-0,0967t} + 4 \times 10^{-9} e^{-238.095,1t} \quad (15)$$

2.2.3 – Uma abordagem ao circuito com amplificador operacional

Uma das utilidades dos amplificadores operacionais (amp op) é de resolver equações matemáticas rápidas, incluindo problemas de cálculo, nessa situação utilizamos o amp op para solucionar a equação diferencial do problema anteriormente. Nesse caso, consideramos o amplificador com característica ideal, com ganho diferencial infinito. E para simplificar os cálculos, consideramos que a tensão inicial do capacitor é nula. Para dimensionamento do circuito amp op, utilizaremos a equação diferencial de segunda ordem a seguir:

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 2,38 \times 10^5 \frac{dv_c(t)}{dt} + 2,3 \times 10^4 v_c(t) = 2,3 \times 10^5 \quad (16)$$

A equação 14 foi obtida substituindo os parâmetros estabelecidos do circuito RLC na equação 5 e em seguida utilizou-se uma associação de Ampop para obter a mesma equação diferencial. O circuito foi criado com valores comerciais de resistores e capacitores.

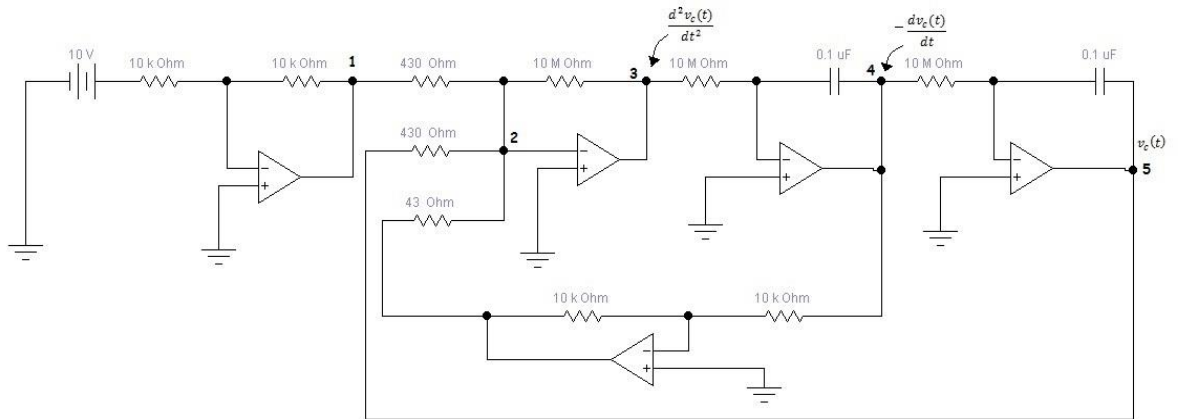


Figura 4 – Circuito Amp-op. (Autoria própria)

Pode-se aferir a partir da eq. 8 que a derivada de segunda ordem é uma combinação de derivadas inferiores e a tensão de entrada menor. Portanto, para encontrar os demais termos da equação de segunda ordem adicionamos esses termos através de uma associação de amplificadores operacionais. Para isso usa-se no primeiro momento uma fonte de tensão de 10 Volts servindo de entrada para um inversor, dessa forma obtêm-se:

$$V_o = -\frac{R_F}{R_1} V_1 = -10 \text{ Volts} \quad (17)$$

Um circuito integrador da figura 4 que realiza um processo de integração do sinal de entrada e como resultado da integral de uma derivada de segunda ordem tem uma derivada de primeira ordem. Dessa forma a tensão de saída do primeiro circuito integrador é dada por:

$$V_0 = \frac{-1}{RC} \int v(t) dt = \frac{-1}{10 \times 10^6 \cdot 0,1 \times 10^{-6}} \int \frac{dv_c(t)}{dt} = - \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (18)$$

A saída do primeiro integrador é o negativo da primeira derivada dv/dt por isso utiliza-se um inversor para mudar o sinal de saída da primeira derivada.

$$V_o = - \frac{R_F}{R_1} V_1 = - \frac{10K\Omega}{10K\Omega} \cdot \left(- \frac{dv_c(t)}{dt} \right) = \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (19)$$

A saída do primeiro integrador é a entrada do segundo integrador e a partir desse segundo integrador é possível obter o valor desejado de $v(t)$.

$$V_o = \frac{-1}{RC} \int v(t) dt = \frac{-1}{10 \times 10^6 \cdot 0,1 \times 10^{-6}} \int \frac{dv_c(t)}{dt} = V_c \quad (20)$$

Em seguida usa-se as saídas dos integradores como alimentação de um circuito somador de tensão. Dessa forma, a segunda derivada consiste na soma dos três termos mostrados na figura 4.

$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} = - \left(\frac{R_F}{R_1} v_c'' + \frac{R_F}{R_2} v_c' + \frac{R_F}{R_3} V_c \right) = -2,4 \cdot 10^5 \frac{dv_c(t)}{dt} - 2,3 \cdot 10^4 v_c(t) + 2,3 \cdot 10^5 \quad (21)$$

O filtro ativo representado na figura 4 é um filtro de passa faixa (assim como o filtro passivo RLC) de segunda ordem que usa uma resposta negativa. Onde nós assumimos que o Amp op é ideal. Este circuito traz um importante princípio sobre a análise de circuitos amp op que não deve passar despercebido. Em geral, quanto mais amp op e menos elementos passivos neste tipo de circuito, mais fácil é a análise do circuito. Vale ressaltar que os resistores selecionados para o circuito acima são resistores comerciais e consiste em uma aproximação do valor real calculado.

2.3 Simulações

A simulação nos permite criar um modelo lógico-matemático no qual é possível realizar experimentos que permitem fazer inferências sobre tal sistema. A simulação nos permite testar diferentes técnicas sem a necessidade de interromper o sistema real.

2.3.1 - Plotagem gráfica no EXCEL

Com base nos parâmetros adotados do caso abordado anteriormente foi realizado a plotagem da equação obtida analiticamente no Excel. Para este caso as condições iniciais do circuito são iguais a zero, a princípio é preciso utilizar o comando “se” no excel para definir o tipo de amortecimento do circuito. Uma vez definido o amortecimento é possível obter as raízes do circuito e com base nas condições iniciais do circuito é possível definir as constantes. Dessa forma, de posse da equação geral do circuito atribuiu-se um intervalo de tempo para equação e foi possível observar a seguinte curva mostrada no gráfico da figura 5.

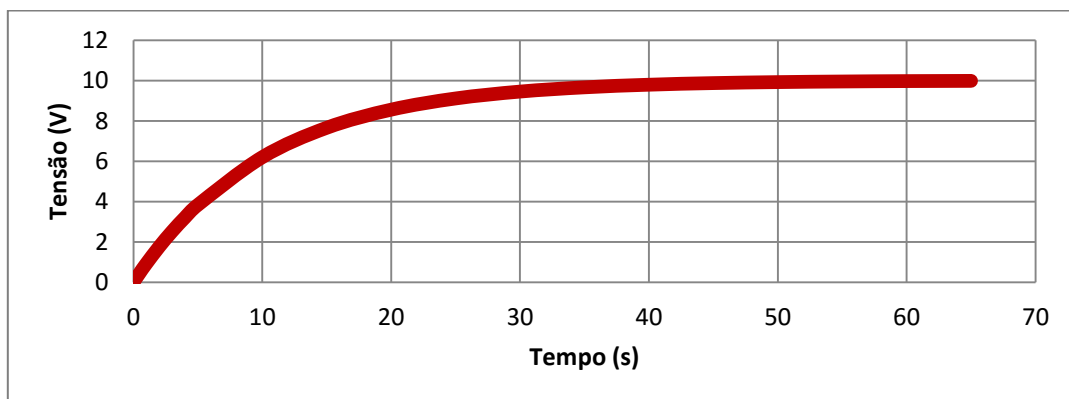


Figura 5 – Gráfico Tensão Superamortecida. (Autoria própria)

2.3.2 Simulação no EWB

Existe uma grande quantidade de softwares de simulação e análise, no entanto é importante levar em conta o nível de exatidão das simulações. Tendo isso em mente, utilizamos o software EWB (Eletronics WorkBench) que é amplamente utilizado na criação de diagramas, simulação de circuitos elétricos, layout e desenho automático de trilhas em placas de circuito impresso. Este software possui uma vasta biblioteca que permite o usuário realizar uma série de análises de projetos. Funções essas que atendem nossas necessidades para o projeto em questão. Com valores previamente estabelecido para o Capacitor, Indutor e Resistor o circuito foi montado na janela do software com os dispositivos em série figura 6.

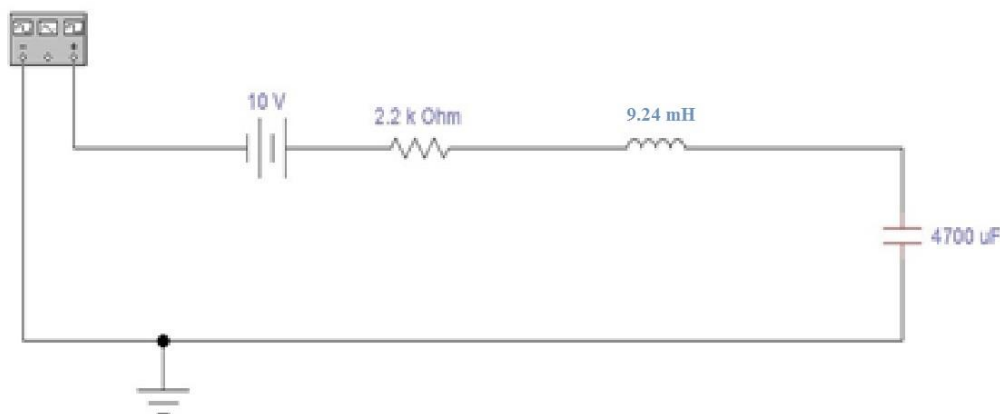


Figura 6 - Circuito RLC no EWB. (Autoria própria)

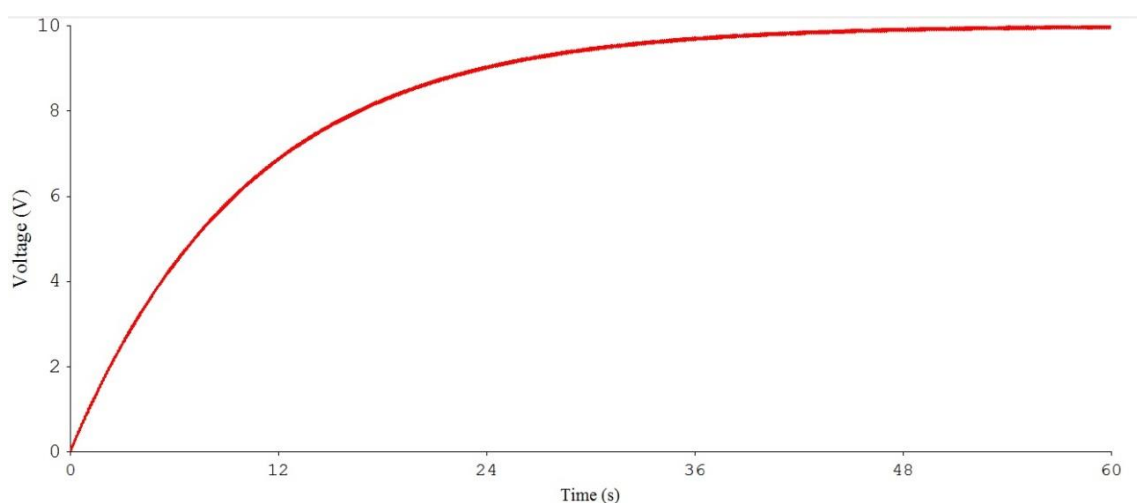


Figura 7 – Gráfico Tensão Superamortecido. (Autoria própria)

Para obter a curva desejada foi utilizado um gerador de sinais com onda senoidal, um dos seus terminais foi conectado a fonte de tensão contínua enquanto o outro terminal foi aterrado. Dessa maneira foi possível observar através do software a curva gerada para o circuito RLC conforme figura 7.

Com base na literatura vemos que o circuito RLC simulado se classifica como um filtro passa-faixa, esse tipo de filtro permite a passagem de um intervalo específico de frequência. Ou seja, somente há a passagem de frequência entre a frequência de corte inferior e a frequência de corte superior. Enquanto as demais frequências fora desse intervalo são atenuadas [3].

Como já mencionado o filtro possui duas frequências de corte que pode ser calculado utilizando a equação 22.

$$\omega_{c1,c2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad (22)$$

Onde os valores encontrados foram $\omega_1 = 0,0967 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 238.095,1 \text{ rad/s}$, ou ainda, $f_1 = 0,0154 \text{ Hz}$ e $f_2 = 37,9 \text{ kHz}$ que são respectivamente a frequência de corte inferior e frequência de corte superior. A frequência central é outro parâmetro de bastante importância quando se trata de filtros, consiste no centro geométrico da faixa de passagem que pode ser calculado com a equação 23.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \quad (23)$$

Esta frequência consiste no valor de $\omega = 152 \text{ rad/s}$, também recebe o nome de frequência de ressonância consiste numa frequência para a qual a função de transferência de um circuito é um número real puro. Já a largura da faixa é definida como a diferença entre a frequência de corte superior e inferior conforme equação 24.

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (24)$$

A largura da faixa obtida é de $238.095,2 \text{ rad/s}$ ou $f_2 = 37,9 \text{ kHz}$, este é um parâmetro importante que caracteriza um filtro passa-faixa.

2.4 Experimento

O objetivo do experimento realizado no laboratório consiste em verificar se os resultados obtidos do modelo RLC condizem com o modelo real. Assim, no laboratório foi utilizado um gerador de sinal e um osciloscópio para verificar a tensão de saída no capacitor. O indutor foi previamente construído antes do experimento no formato toroidal conforme figura 8, através do multímetro medidor de indutância verificou-se que o indutor resultou numa indutância de $L = 9.24 \text{ miliHenry}$ (Figura 9).



Figura 8 – Indutor Toroidal. (Autoria própria)



Figura 9 – Indutância. (Autoria própria)

Para esse fim o capacitor de $4,7 \text{ miliFarad}$, um resistor de $2,2\text{K}\Omega$, e um potenciômetro de $5 \text{ K}\Omega$ para alcançar os $2,2 \text{ K}\Omega$ uma vez que o resistor apresenta valor diferente do nominal. Além disso, foi utilizado um gerador de sinal com forma de onda senoidal. Enquanto o primeiro canal do osciloscópio foi conectado na entrada e saída do circuito, o segundo canal foi conectado na saída do capacitor. Dessa forma obtém-se duas ondas senoidais. Uma vez conectado os elementos em série, através do gerador de sinal o circuito RLC é alimentado.

Como visto anteriormente, a frequência de ressonância do circuito corresponde a 152 Hz , ao aplicar a frequência de 150.6 Hz no circuito observa-se que as duas ondas ficam com a mesma fase conforme é possível observar na figura 10. A Frequência de 150.6 Hz destacada acima foi a frequência alcançada no osciloscópio.

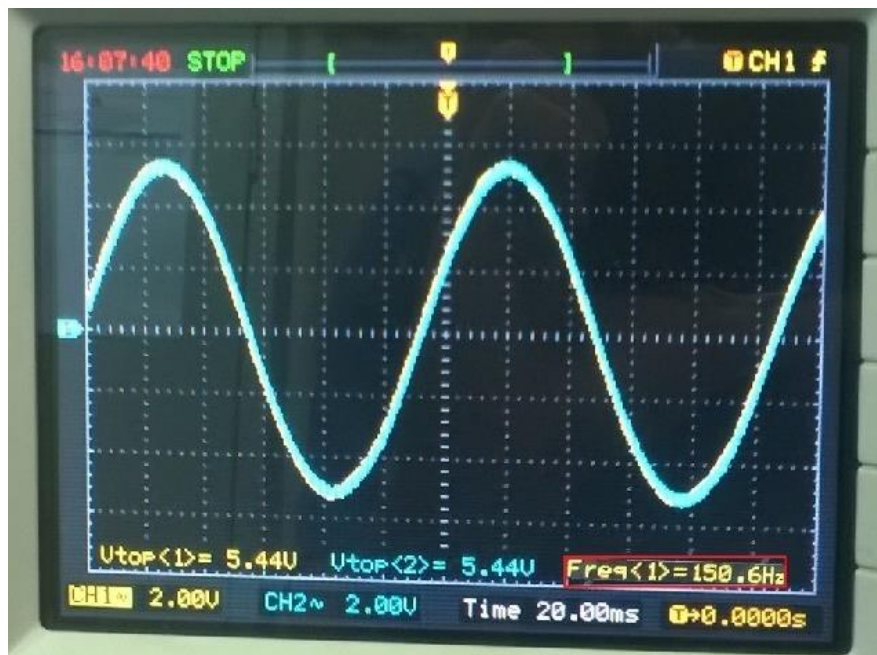


Figura 10 – Frequência de ressonância do circuito RLC. (Autoria própria)

2.5 Resultado e Discursões

De maneira geral os resultados obtidos analiticamente utilizando o excel e o gráfico obtido pelo EWB possuem uma grande semelhança de maneira que é possível confirmar a validade dos calculos obtidos manualmente. Não foi possível realizar a simulação do circuito ampo op pois os valores ultrapassam o limite nominal do modelo de amp op adotado no circuito. Dentre as aplicações dos filtros é notório mencionar os equipamentos de rádio que atualmente captam ondas de rádio emitidas por estações AM e FM que operam na faixa de KHz e de MHz respectivamente. Caso desejasse utilizar o filtro com a finalidade de filtrar ondas de rádio, uma sugestão é substituir o resistor de $2,2k\Omega$ por um resistor de $2.2M\Omega$, dessa maneira o filtro seria capaz de filtrar ondas de rádio.

Com relação ao filtro passivo, o filtro ativo com amplificadores adiciona energia ao sistema, de forma a produzir um efeito de filtragem e num ganho de potência. Além de possuírem baixa impedância de saída, a possibilidade de associação sem perdas de potência e serem facilmente sintonizados e ajustados numa ampla faixa de frequências sem alteração das curvas de resposta. [6]

3 CONCLUSÃO

Observou-se que uma equação diferencial pode servir como um modelo matematico para descrever os fenomenos fisicos presente em diversos circuitos eletricos. Através do presente estudo foi possível notar que é possível encontrar um modelo de filtro ativo equivalente para um filtro passivo. Através de uma simples associação de amplificadores operacionais foi possível obter a mesma equação de segunda ordem do filtro passivo. Porém, vale resaltar que em relação ao modelo passivo, o filtro ativo equivalente exige um valor elevado para os parâmetros encontrados, o que se tornou um empecilho no momento de realizar a simulação.

O tipo de filtro obtido nos modelos é um passa faixa, este tipo de filtro permite a passagem de frequências entre dois valores de frequência, possui uma frequência de corte superior e uma frequência de corte inferior. Uma eventual fonte de erro é o fato de que os resistores ideais para o circuito amp op foram substituídos por resistores comerciais, apesar de que mesmo os resistores comerciais possuem valores diferentes de sua resistência nominal. Uma alternativa para essa problemática seria utilizar resistores variáveis para alcançar o valor exato da resistividade.

Durante o estudo foi possível notar a importância da utilização de equações diferenciais que fornece métodos simples de resolução de equações de segunda ordem. Quanto a aplicabilidade tecnologia, no dia-dia estamos imersos a uma série de equipamentos que utilizam o princípio do amortecimento, como o rádio. Além dos métodos matemáticos é importante destacar a importância dos softwares de simulação, que nos permite realizar protótipos de determinados circuitos e identificar eventuais erros durante o cálculo manual. Os resultados obtidos nas duas situações que foram submetidas nosso circuito foram considerados satisfatórios.

4 REFERÊNCIAS

- [1] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9a Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [2] NILSON, RIEDEL. **Circuitos Elétricos**. 8ª Edição. Editora Pearson / Prentice Hall. 2009.
- [3] BOYLESTAD, NASHELSKY. **Dispositivos Eletrônicos e Teoria de Circuitos**. 8ª Edição. Editora Pearson / Prentice Hall. 2004.
- [4] THOMAS, Lucas Rangel; **O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros**. Faculdade UnB planaltina
- [5] ZILL, Dennis g. **equações diferenciais com aplicações em modelagem**. Tradução da 9ª edição norte-americana. Editora Cengage Learning, 2011.