



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO DE ENGENHARIAS
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

ANDERSON WALLACE PAIVA DO NASCIMENTO

**ESTUDO DO EFEITO DA VARIAÇÃO NO PASSO SOBRE O ERRO NO MÉTODO
DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM CLÁSSICO**

MOSSORÓ

2018

ANDERSON WALLACE PAIVA DO NASCIMENTO

**ESTUDO DO EFEITO DA VARIAÇÃO NO PASSO SOBRE O ERRO NO MÉTODO
DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM CLÁSSICO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Ivan Mezzomo, Prof. Dr.

Co-orientador: Matheus da Silva Menezes, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

N244e Nascimento, Anderson Wallace Paiva do.
Estudo do efeito da variação no passo sobre o erro no método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico / Anderson Wallace Paiva do Nascimento. - 2018.
51 f. : il.

Orientador: Ivan Mezzomo.
Coorientador: Matheus da Silva Menezes.
Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia Civil, 2018.

1. Problemas de Valor Inicial. 2. Runge-Kutta. 3. Passo. 4. Erro. 5. Vigas isostáticas. I. Mezzomo, Ivan, orient. II. Menezes, Matheus da Silva, co-orient. III. Título.

ANDERSON WALLACE PAIVA DO NASCIMENTO

**ESTUDO DO EFEITO DA VARIAÇÃO NO PASSO SOBRE O ERRO NO MÉTODO
DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM CLÁSSICO**

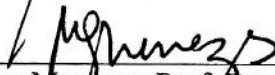
Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel em
Engenharia Civil.

Defendida em: 17 / 04 / 2018.

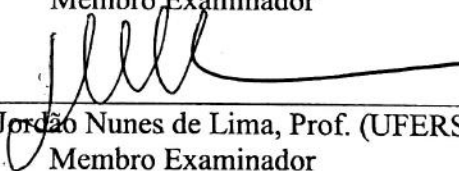
BANCA EXAMINADORA



Ivan Mezzomo, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente



Matheus da Silva Meneses, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador



Francisco Jordão Nunes de Lima, Prof. (UFERSA)
Membro Examinador

OFEREÇO

Aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais pelo incentivo, apoio e confiança demonstrados, o que me motivou ao longo do curso.

Agradeço aos familiares e amigos pelo companheirismo durante a graduação.

Agradeço aos Professores Ivan Mezzomo, Matheus da Silva Menezes pela disponibilidade e atenção prestadas no decorrer da realização do trabalho.

RESUMO

Os métodos numéricos para solução de equações diferenciais têm permeado amplamente as diversas áreas da engenharia, especialmente devido a sua simplicidade de implementação computacional e eficiência nos resultados. Dentre os diversos métodos disponíveis, destaca-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), sendo este um dos mais frequentemente utilizados devido a sua alta eficiência. O método RK4, no entanto, carece de alternativas simples para se estimar o erro cometido na aproximação, o que inclusive seria útil na determinação do passo a ser adotado. Nesse contexto, o presente trabalho estuda como a variação do passo no método RK4 afeta o seu respectivo erro. Tal estudo foi feito com problemas adaptados da literatura clássica de Resistência dos Materiais abordando vigas bi-apoiadas submetidas a distintos carregamentos externos. Verificou-se, em um dos PVI's, que a medida que o passo é reduzido, o erro também é reduzido, seguindo uma relação regida por uma função potência. Para os demais casos, observou-se um erro de magnitude muito baixa, permanecendo aproximadamente constante.

Palavras-chave: Problemas de Valor Inicial. Runge-Kutta. Passo. Erro. Vigas isostáticas.

ABSTRACT

Numerical methods for solving differential equations have widely permeated many fields of engineering, mostly due to their simplicity of computational implementation and efficiency to provide results. Among many methods available, the fourth-order Runge-Kutta method (RK4) stands out, being one of the most frequently used due to its high efficiency. The RK4 method, however, lacks simple ways to estimate the error, which would be useful in determining the step to be adopted. In this context, the present work studies how the step variation in the RK4 method affects its respective error. This study was carried out with problems adapted from the classical literature of Strength of Materials addressing isostatic beams subjected to different external loads. It has been found in one of the IVP's that as the step is reduced, the error is also reduced, following a relationship governed by a power function. For the other cases, an error of very low magnitude was observed, remaining approximately constant.

Keywords: Initial Value Problems. Runge-Kutta. Step. Error. Isostatic beams.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: CONCEITOS BÁSICOS E CLASSIFICAÇÕES.....	13
2.1.1 Classificação quanto ao tipo.....	13
2.1.2 Classificação quanto a ordem.....	14
2.1.3 Classificação quanto a linearidade.....	14
2.1.4 Soluções de uma equação diferencial.....	14
2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	15
2.2.1 Método de Euler.....	15
2.2.2 Método de Euler Aperfeiçoado ou Método de Heun.....	16
2.2.3 Métodos de Taylor de Ordem Superior.....	18
2.2.4 Métodos de Runge-Kutta.....	19
2.2.5 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem.....	20
2.2.6 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem.....	22
2.2 DEFLEXÃO EM VIGAS.....	23
2.2.1 Vigas Prismáticas: Conceitos básicos e diagramas de esforço cortante e fletor.....	23
2.2.2 Linha elástica.....	24
2.2.3 Viga simplesmente apoiada com carga distribuída uniforme.....	27
2.2.4 Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular.....	28
2.2.5 Viga simplesmente apoiada com carga pontual no centro.....	29
3 MATERIAIS E MÉTODOS.....	32
3.1 METODOLOGIA.....	32
3.2 ALGORITMO.....	33
3.3 PROBLEMAS ANALISADOS.....	34
3.3.1 Problema 1: Viga simplesmente apoiada com carga distribuída.....	35
3.3.2 Problema 2: Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular.....	36
3.3.3 Problema 3: Viga simplesmente apoiada com carga pontual no centro.....	37
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	38
4.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO.....	38
4.2 PROBLEMA 1: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO TRIANGULAR.....	39

4.3 PROBLEMA 2: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIFORME.....	42
4.4 PROBLEMA 3: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARGA PONTUAL.....	46
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
REFERÊNCIAS.....	52

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais têm sido amplamente utilizadas a fim de modelar os mais diversos fenômenos físicos, motivo pelo qual são tão presentes na engenharia. Frequentemente, quando aliadas a dados adicionais que delimitam condições iniciais ou de contorno, pode-se assegurar a existência e unicidade de solução para diversos Problemas de Valor Inicial (PVI's). Tal garantia, no entanto, não significa que os métodos analíticos sempre forneçam a solução, menos ainda que tais procedimentos sejam simples e viáveis de se implementar computacionalmente. Os métodos de solução numérica, por sua vez, são sempre formulados na perspectiva de serem métodos construtivos, conforme destaca KRESS (1998), no sentido de sempre buscarem sequências recursivas e/ou iterativas para a determinação de uma solução que atenda os parâmetros pré-estabelecidos, como um erro máximo, por exemplo.

No contexto dos métodos numéricos para solução de Problemas de Valor Inicial, destacam-se os métodos de Runge-Kutta, com ênfase no método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), devido a sua alta eficiência e simplicidade de implementação computacional. Tal método, no entanto, não possui formas simples de estimativa do erro, o que de acordo com RUGGIERO & LOPES (1996), poderia ser útil na determinação do passo mais adequado. Nesse contexto, este trabalho visa estudar como a variação do passo afeta a magnitude do erro. Este estudo se dá com o auxílio de problemas específicos adaptados da literatura. Os problemas analisados estão dentro do escopo da Resistência dos Materiais, em particular, no âmbito da deflexão de vigas isostáticas submetidas a cargas externas, com variados formatos.

O estudo será feito com a aplicação de sucessivas mudanças no tamanho do passo para cada problema e a posterior análise do comportamento do erro após cada alteração. A cada passo será associado um único valor para o erro, o qual será o erro máximo dentre todos os pontos de malha correspondentes. Será ainda feito o acompanhamento do erro em pontos de malha específicos, com o intuito de verificar-se se o comportamento local, isto é, nestes pontos, é condizente com a tendência de comportamento geral.

A divisão do presente trabalho foi feita num total de cinco capítulos, sendo este primeiro capítulo uma breve introdução apresentando o escopo geral da pesquisa. O capítulo 2, por sua vez, consiste no referenciamento teórico, destacando os conceitos fundamentais para a plena compreensão das discussões posteriores. O capítulo 3 apresenta os materiais e métodos utilizados no trabalho, discutindo em detalhes a metodologia adotada. No capítulo 4 encontram-se os resultados dos experimentos computacionais, todos apresentados em forma tabular e

gráfica e minunciosamente discutidos. Finalmente, o capítulo 5 comporta as considerações finais juntamente com relevantes sugestões para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente referencial irá discutir, de maneira sucinta, os principais aspectos teóricos relativos ao estudo das equações diferenciais, no âmbito de sua definição, classificações e métodos numéricos de solução. Ainda será abordada uma aplicação particular das equações diferenciais a engenharia civil, no contexto da resistência dos materiais, a fim de se estudar o problema de deflexões provocadas por carregamentos externos em vigas isostáticas.

2.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: CONCEITOS BÁSICOS E CLASSIFICAÇÕES

Segundo ZILL (2016), toda equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais funções não conhecidas (ou variáveis dependentes), em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial, ou simplificada ED. Tais equações, para seu melhor estudo, são ainda classificadas conforme seu tipo, ordem e linearidade.

Destaca-se ainda, que no presente trabalho todas as equações serão formuladas como problemas de valor inicial, isto é, um problema composto por uma equação diferencial junto com o estabelecimento do valor da função que a define em um ponto do intervalo trabalhado.

2.1.1 Classificação quanto ao tipo

ZILL (2016) destaca que caso uma equação diferencial contenha somente derivadas ordinárias de uma ou mais funções desconhecidas com relação à apenas uma variável, tal equação será convencionalmente referida como Equação Diferencial Ordinária, ou simplesmente EDO. De maneira genérica, as equações diferenciais ordinárias podem ser formuladas como segue:

$$F(x, y, y', \dots, y^n) = 0 \quad (1)$$

Por outro lado, nomeia-se como Equação Diferencial Parcial, ou EDP, aquela que envolve derivadas parciais de uma ou mais funções de várias variáveis reais a valores reais.

2.1.2 Classificação quanto a ordem

Uma outra possível classificação para as equações diferenciais diz respeito a sua ordem, nesse contexto, BOYCE & DIPRIMA (2012) destacam que a ordem de uma ED é a ordem da derivada de maior grau que aparece na equação. Simbolicamente, ZILL (2016) expressa uma equação diferencial ordinária de ordem n na formulação derivada da Equação 1, como segue:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{n-1}) \quad (2)$$

2.1.3 Classificação quanto a linearidade

Um terceiro tipo de classificação para as equações diferenciais é quanto a sua linearidade. BOYCE & DIPRIMA (2012) destacam que uma equação diferencial é dita linear quando a função F , definida pela Equação 1, é uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^n$, ou seja, quando é válida a identidade:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3)$$

Por outro lado, uma equação diferencial é dita não linear simplesmente quando não é linear, isto é, quando aparecem, por exemplo, funções não lineares da variável dependente ou de suas derivadas.

2.1.4 Soluções de uma equação diferencial

ZILL (2016) provê a seguinte definição para solução de uma EDO: *Toda função ϕ definida em um intervalo I que tem pelo menos n derivadas contínuas em I , as quais quando substituídas em uma equação diferencial ordinária de ordem n reduzem a equação a uma identidade, é denominada uma solução da equação diferencial no intervalo.* No contexto da definição anterior, diz-se que se ϕ satisfaz a equação diferencial, então ϕ é uma solução da mesma. Ainda conforme ZILL (2016), uma dada solução sempre possui um intervalo de validade, o qual também pode ser referido como intervalo de definição ou intervalo de existência, ou simplesmente domínio da solução.

A solução de uma dada equação diferencial, por ser uma função, possui também um gráfico associado. Tal gráfico, quando considerado no respectivo intervalo de definição é comumente chamado de curva integral.

No que tange a solução de uma equação diferencial ordinária, em particular para soluções de problemas de valor inicial, pode-se destacar o Teorema de Existência e Unicidade, o qual é enunciado a seguir:

Teorema 1 (Existência e Unicidade). Considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas no retângulo,

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta \}$$

Contendo (x_0, y_0) , então o PVI acima tem uma única solução num intervalo contendo x_0 .

O Teorema 1 é demasiado útil, visto que assegura a existência de solução única num dado intervalo, desde que certas condições de uniformidade sejam satisfeitas.

2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No presente tópico serão discutidos os métodos usuais para a resolução numérica de problemas de valor inicial, em particular os métodos de Euler, Euler aprimorado, métodos de série de Taylor e finalmente, a classe dos métodos de Runge-Kutta, sendo o estudo desses últimos o objetivo maior deste trabalho.

2.2.1 Método de Euler

Um dos métodos mais elementares para a determinação de soluções numéricas de problemas de valor inicial para os quais tem-se $y' = f(x, y)$ e $y(x_0) = y_0$ é o Método de Euler. A ideia central de tal método consiste que conforme são conhecidos x_0 e $y_0 = y(x_0)$, então é possível calcular $y'_0 = f(x_0, y_0)$ e assim definir a reta de equação,

$$L_0(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) \quad (4)$$

Fixado $h = x_{k+1} - x_k$, temos que:

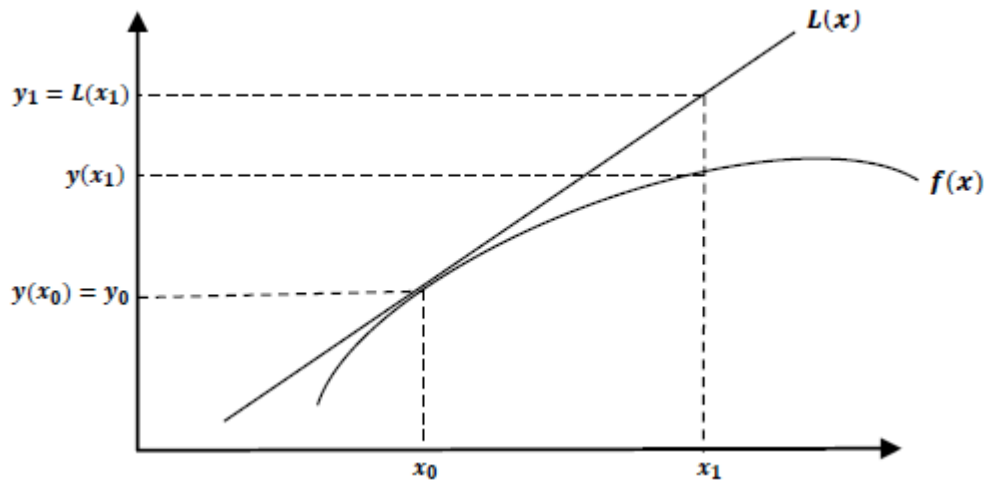
$$y(x_1) \approx y_1 = L_0(x_1) = y(x_1) + hy'(x_1) \quad (5)$$

Logo, considerando um passo constante, podemos definir a sequência recursiva do método de Euler por:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (6)$$

Nesse contexto, observamos que tal método não gera uma aproximação contínua para a solução, em vez disso, são geradas aproximações em vários pontos, os quais são chamados de pontos da malha. Caso uma solução aproximada contínua seja necessária, esta pode ser obtida por meio da interpolação dos pontos da malha. O método de Euler pode ser visualizado graficamente, conforme é apresentado na Figura 1:

Figura 1: Gráfico da reta tangente a $f(x)$ no ponto (x_0, y_0) .



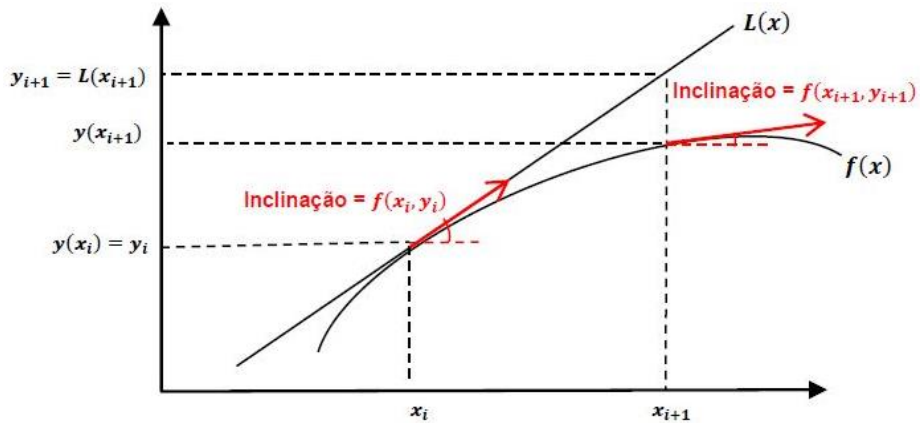
Fonte: MENDONÇA (2016)

2.2.2 Método de Euler Aperfeiçoado ou Método de Heun

Tendo em vista a finalidade de reduzir o erro na estimativa do método de Euler, podemos optar por realizar o cálculo da derivada em ambas as extremidades do subintervalo, isto é, no ponto inicial e no ponto final, para que então seja feita uma média das inclinações nesses dois pontos e consequentemente uma estimativa mais realista da taxa de variação no

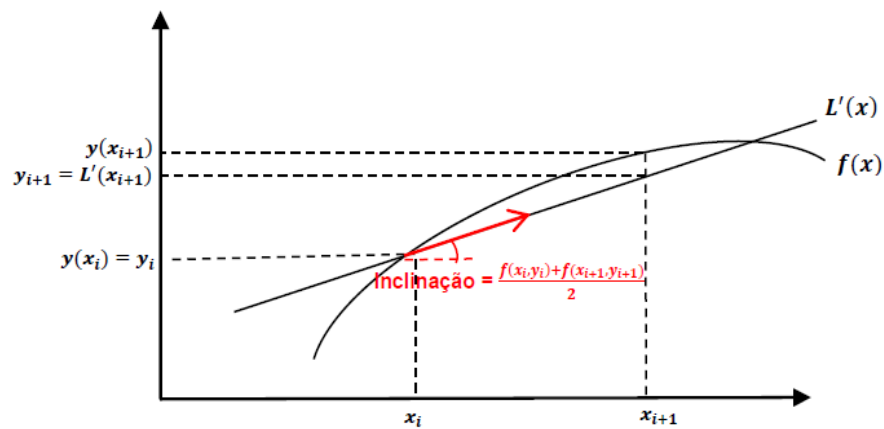
intervalo. Tal procedimento gera uma substancial redução no erro de aproximação. As imagens abaixo ilustram graficamente a ideia anteposta:

Figura 2: Inclinações nos extremos do intervalo de aproximação



Fonte: MENDONÇA (2016)

Figura 3: Média das inclinações nas extremidades do intervalo



Fonte: MENDONÇA (2016)

Segundo tal desenvolvimento, a equação recursiva de Euler ficaria como segue:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*))}{2} \quad (7)$$

onde,

$$y_{n+1}^* = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (8)$$

Este método é comumente conhecido como método de Euler aprimorado ou método de Heun e conforme o próprio nome sugere, proporciona uma melhor aproximação quando comparado com o método de Euler padrão. Isto se dá, devido ao fato de que uma das principais fontes de erro do método de Euler é a inclinação adotada, visto que a inclinação no início do intervalo não é bem representativa de todo o intervalo. Nesse contexto, a ponderação das inclinações feita no método de Heun gera um significativo ganho de precisão.

2.2.3 Métodos de Taylor de Ordem Superior

O método de Euler, conforme descrito acima, foi obtido por meio de aproximações lineares tendo como referência os valores iniciais conhecidos. Desse modo, tendo em mente o objetivo de reduzir o erro local de aproximação, um procedimento natural seria realizar aproximações de ordem superior, isto é, quadrática, cúbica, etc.

Supondo então que dispõe-se das aproximações $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ para $y(x)$ em $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ o desenvolvimento por série de Taylor de $y(x)$ em torno de $x = x_n$ é:

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(x_n)(x - x_n)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(k)}(x_n)(x - x_n)^k}{k!} + \frac{y^{(k+1)}(\varepsilon_x)(x - x_n)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (9)$$

Assim, é imediato que,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} + \dots + \frac{y^{(k)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^k}{k!} + \frac{y^{(k+1)}(\varepsilon_x)(x_n - x_n)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (10)$$

Denotando então por $y_n^{(i)}$ a aproximação para a i -ésima derivada de $y(x)$ em x_n e $h = x_{n+1} - x_n$ tem-se que:

$$y(x_{n+1}) = y_n + y'_n h + \frac{y''_n h^2}{2} + \dots + \frac{y_n^{(k)} h^k}{k!} \quad (11)$$

Com erro de truncamento local dado por:

$$E(x_n) = \frac{y^{(k+1)}(\varepsilon_x)h^{k+1}}{(k+1)!} \quad (12)$$

Assumindo então que a função $y(x)$ seja contínua no intervalo fechado trabalhado, temos pelo Teorema de Weierstrass, que $y(x)$ possui máximo e mínimo neste intervalo. Em particular, sabemos que existe um $M_{k+1} = \max |y^{(k+1)}(x)|$ com $x \in I$, de modo que o erro pode ser reescrito como segue:

$$|E(x_n)| \leq \frac{M_{k+1}h^{k+1}}{(k+1)!} \quad (13)$$

Apesar do interessante erro de truncamento local de alta ordem, os métodos de série de Taylor têm o significativo inconveniente de necessitarem, para uma aproximação de ordem n , do cálculo das derivadas de ordem 1 a n de $y(x)$, o que torna este método computacionalmente inaceitável conforme destacam RUGGIERO & LOPES (1996).

2.2.4 Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta (RK) compreendem uma classe de métodos numéricos para problemas de valor inicial que tem como principal qualidade o aproveitamento do erro de truncamento local de alta ordem dos métodos de série de Taylor e ao mesmo tempo contornam seu maior problema, a saber, o cálculo de derivadas de ordens elevadas. Os métodos RK, no entanto, pagam o preço de necessitarem dos valores de $f(x, y)$ em vários pontos, mas ainda assim são considerados práticos e eficientes computacionalmente.

Essencialmente, todos os métodos RK são generalizações da fórmula básica de Euler, sendo que a inclinação da função f é substituída por uma ponderação das inclinações ao longo do intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ (ZILL, 2016). A forma geral e a ordem dos métodos de RK é caracterizada pela equação de incremento, dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \phi h \quad (14)$$

em que ϕ é função de x, y e h , definida por:

$$\phi(x_i, y_i, h) = \sum_{i=1}^n a_i k_i \quad (15)$$

onde o número n é a ordem do método, os a_i 's são constantes, que de modo geral satisfazem a propriedade: $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Por fim, os termos k_i 's são o resultado da função f num dado ponto (x, y) de cada subintervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

Observamos em particular que, fazendo $n = 1, a_1 = 1$ e $k_1 = f(x_n, y_n)$ temos que a fórmula geral de RK fornece:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (16)$$

que é a fórmula de recorrência do método de Euler, descrita anteriormente. Nesse contexto, dizemos que o método de Euler é um método de Runge-Kutta de primeira ordem.

2.2.5 Método de Runge-Kutta de Segunda Ordem

O problema central do método RK a segunda ordem consiste em determinar os parâmetros a_1, a_2, α e β de modo que a formulação geral, dada por:

$$y_{n+1} = y_n + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \quad (17)$$

onde

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (18)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \quad (19)$$

coincida com o respectivo polinômio de Taylor de ordem dois. Considerando então que a série de Taylor de segunda ordem, para y_{n+1} em termos de y_n e $f(x_n, y_n)$ será dada por:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h + \frac{f'(x_n, y_n)h^2}{2!} \quad (20)$$

sendo $f'(x_n, y_n)$ obtida pela regra da cadeia como:

$$f'(x_n, y_n) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (21)$$

substituindo-se então na equação anterior, tem-se que:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (22)$$

São feitas as devidas manipulações algébricas na expressão acima de modo que seja possível determinar os valores dos parâmetros a_1, a_2, α e β , garantindo ainda assim, a igualdade entre as Equações 17 e 22. Para tanto, o termo k_2 será expandido por meio de uma série de Taylor (para duas variáveis), conforme segue:

$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) = f(x_n, y_n) + \alpha h \frac{\partial f}{\partial x} + \beta h k_1 \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^2) \quad (23)$$

Substituindo este resultado, juntamente com k_1 na Equação 17 obtém-se:

$$y_{n+1} = y_n + a_1 hf(x_n, y_n) + a_2 hf(x_n, y_n) + a_2 \alpha h^2 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \beta f(x_n, y_n) h^2 \frac{\partial f}{\partial y} + O(h^3) \quad (24)$$

Reagrupando os termos, chega-se a:

$$y_{n+1} = y_n + [a_1 f(x_n, y_n) + a_2 f(x_n, y_n)]h + \left[a_2 \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \beta f(x_n, y_n) \frac{\partial f}{\partial y} \right] h^2 + O(h^3) \quad (25)$$

Comparando, então os termos da equação anterior com os seus correspondentes na Equação 22, verifica-se que para que ocorra a igualdade, o seguinte sistema deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 \alpha = \frac{1}{2} \\ a_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (26)$$

Observamos que o sistema anteposto possui três equações e quatro incógnitas, tendo assim um número infinito de soluções. Fazendo, em particular, $a_2 = \frac{1}{2}$, tem-se que $a_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, de modo que a sequência recursiva para o método RK2 será dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (27)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (28)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \quad (29)$$

É de imediata observação, que o resultado anterior coincide com o método de Heun, já descrito, de modo que novamente, pode-se dizer que o método de Euler aprimorado ou método de Heun é um método de Runge-Kutta de ordem dois.

2.2.6 Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

Analogamente aos métodos RK anteriores, o método de Runge-Kutta de quarta ordem, consiste em determinar as constantes adequadas, de modo que a equação geral de recursividade para a ordem quatro, dada por,

$$y_{n+1} = y_n + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4) \quad (30)$$

Onde,

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (31)$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1) \quad (32)$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2) \quad (33)$$

$$k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3) \quad (34)$$

verifique a identidade com o respectivo polinômio de Taylor de quarta ordem. Considerando que para que tal igualdade seja satisfeita é formado um sistema composto por treze equações e onze incógnitas, novamente há uma infinidade de possíveis soluções. O conjunto de valores mais amplamente utilizado, é o que gera a seguinte sequência recursiva:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (35)$$

Sendo,

$$k_1 = f(x_n, y_n) \quad (36)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_1\right) \quad (37)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}h k_2\right) \quad (38)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_4) \quad (39)$$

De acordo com o que já foi destacado, há outras possibilidades de arranjos para os valores dos parâmetros que também configurariam um método de Runge-Kutta de quarta ordem, no entanto, os apresentados anteriormente são tão comumente utilizados, que conforme ZILL (2016) enfatiza, a formulação anterior é frequentemente conhecida, não como um método RK4, mas como o método RK4 ou o método RK4 clássico.

2.2 DEFLEXÃO EM VIGAS

2.2.1 Vigas Prismáticas: Conceitos básicos e funções de esforço cortante e fletor

Conforme destaca HIBBELER (2010), vigas são elementos estruturais que visam suportar cargas externas aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal, sendo, de modo geral, barras retas com seção transversal uniforme. As vigas, são comumente classificadas de acordo com o modo como são apoiadas, onde o tipo mais comum, que também será o utilizado neste trabalho, é a viga simplesmente apoiada. Tal viga possui apoios de primeiro e segundo gênero nas extremidades, os quais impedem sua translação e garantem a devida estabilidade.

As cargas externas que atuam sobre uma viga geram correspondentes esforços internos, denominados força de cisalhamento (também conhecida como força cortante) e momento fletor. O primeiro está associado a tendência de corte da seção transversal, enquanto o segundo é relativo a predisposição da referida seção de rotacionar em torno do seu eixo principal. Ambos os esforços variam de acordo com a posição analisada na viga, podendo ser expressos por meio de funções escalares, as quais serão denotadas por $V(x)$ e $M(x)$, respectivamente, sendo x o eixo longitudinal da viga, isto é $0 \leq x \leq L$, onde L é o comprimento da viga.

No presente contexto, sendo o carregamento externo também expresso em função da posição em relação ao eixo da viga, e denotado por $w(x)$, pode-se mostrar que são válidas as seguintes relações diferenciais:

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \quad (40)$$

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad (41)$$

Dado que o carregamento externo, e conseqüentemente sua função, é sempre conhecido, as equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis acima sempre poderão ser

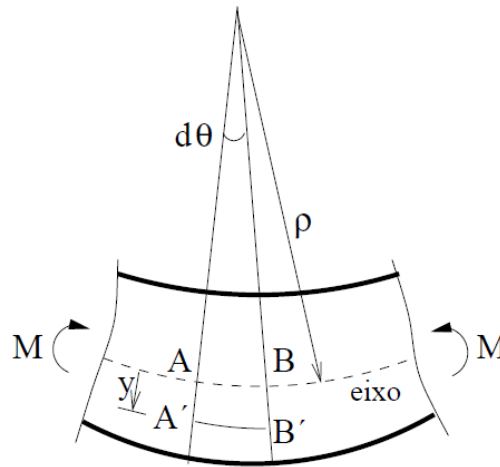
resolvidas. Sua solução será particularizada logo que forem fornecidas as devidas condições de contorno, tais como momento fletor, $M(x)$, nulo nas extremidades.

2.2.2 Linha elástica

HALLACK et al (2012) destaca que a linha elástica pode ser entendida como a curvatura formada pelo eixo de uma viga, inicialmente retilíneo, devido à aplicação de momentos de flexão. Para equacionar a linha elástica, pode-se analisar uma viga de eixo reto, inicialmente indeformada, a qual devido a aplicação de cargas externas, desenvolve um respectivo esforço de flexão e torna-se então curva.

Considere então duas seções transversais distintas e paralelas A e B , separadas por uma medida dx previamente à aplicação das cargas. Seja então ds o novo comprimento do trecho AB após a deformação e $A'B'$ o segmento paralelo ao eixo e de comprimento $ds(1 + \varepsilon_x)$. Sejam também y a distância entre os segmentos AB e $A'B'$, ρ o raio de curvatura do trecho AB após a deflexão e $d\theta$ o ângulo de curvatura entre AB . Os parâmetros descritos são ilustrados na Figura 4:

Figura 4: Trecho de uma barra sujeita a flexão



Fonte: HALLACK et al (2012)

Nesse contexto, a equação geral da flexão assegura que a tensão normal, σ , será função do momento fletor, do momento de inércia da seção e da posição em relação ao eixo neutro, isto é:

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (42)$$

A correspondente deformação pode ser obtida pela lei de Hooke, de modo que se tem:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{My}{EI} \quad (43)$$

onde E e ϵ são respectivamente o módulo de elasticidade do material e a deformação normal no ponto analisado. Além disso, da Figura 4, é imediato que:

$$ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{1}{\rho} \quad (44)$$

Pode-se mostrar também que a curvatura da viga, κ , pode ser expressa como:

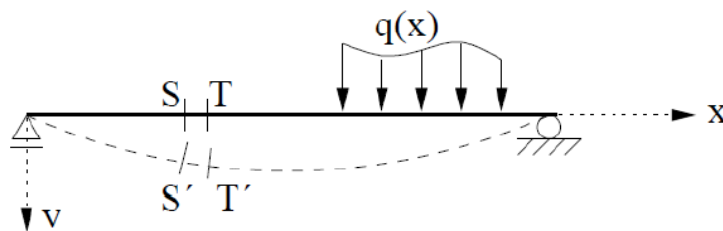
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\epsilon}{y} \quad (45)$$

Para pequenas deformações, tem-se ainda que: $ds \approx dx$, logo:

$$\frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (46)$$

A viga ilustrada na Figura 5, com eixo inicialmente reto (linha cheia), é submetida a um carregamento $w(x)$ e sofre conseqüente deformação (linha tracejada).

Figura 5: Viga sujeita a carregamento genérico

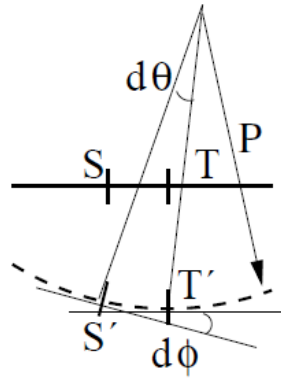


Fonte: HALLACK et al (2012)

Em mais detalhes, a Figura 6 destaca os ângulos equivalentes $d\phi$ e $d\theta$, onde $d\phi$ é o incremento da inclinação correspondente à diferença entre as tangentes em T e S, assim, tem-se que:

$$d\phi = d\theta \Rightarrow \phi = \theta \quad (47)$$

Figura 6: Detalhamento das seções deformadas



Fonte: HALLACK et al (2012)

Admitindo como $\tan \phi$ o coeficiente angular da reta tangente a linha elástica $v(x)$ numa dada posição, e considerando-se ainda uma análise para pequenas deformações, obtém-se:

$$\tan \phi \approx \phi(x) = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{d\phi}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (48)$$

E finalmente, conclui-se que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (49)$$

A Equação 49 é comumente conhecida como equação diferencial da linha elástica. Usualmente o módulo de elasticidade E e o momento de inércia I são constantes em toda a viga, de modo que a constate EI é simplifcadamente chamada de constate de rigidez à flexão da viga. A Equação 49 ainda pode ser reescrita em função das funções de força cortante e carregamento externo, considerando as Equações 40 e 41, tem-se que:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V(x)}{EI} \quad (50)$$

Além disso,

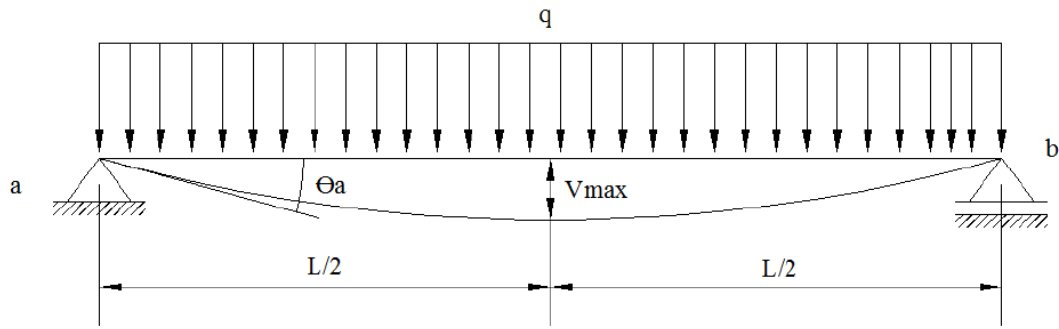
$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{V(x)}{EI} \Rightarrow \frac{d^4v}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} \quad (51)$$

Estas últimas são formulações alternativas para a equação diferencial da linha elástica, sendo, no entanto, usadas com menor frequência.

2.2.3 Viga simplesmente apoiada com carga distribuída uniforme

A equação diferencial da linha elástica, obtida anteriormente, será utilizada para fazer a devida análise de uma viga bi apoiada com carga distribuída uniforme, ilustrada a seguir:

Figura 7: Viga simplesmente apoiadas com carga distribuída uniforme



Fonte: HALLACK et al (2012)

Por meio do método das seções, pode-se obter a regra de correspondência da função de momento fletor, a qual será dada por:

$$M(x) = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (52)$$

Aplicando-se na Equação 49, tem-se:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \quad (53)$$

Sabendo que,

$$EI\theta = EI \frac{dv}{dx} \quad (54)$$

Então,

$$EI \int d\theta = \int \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx \Rightarrow EI\theta = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \quad (55)$$

Substituindo-se na Equação 54, chega-se a:

$$EI \int dv = \int \left(\frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \right) dx \Rightarrow EIV = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2 \quad (56)$$

As constantes de integração podem ser obtidas por meio da imposição das condições de contorno. Considerando que para $x = \frac{L}{2}$ tem-se que $\theta = 0$, desse modo, obtém-se que:

$$C_1 = -\frac{ql^3}{24} \quad (57)$$

Logo, a Equação 55, fica:

$$EI\theta = \frac{qLx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} - \frac{qL^3}{24} \quad (58)$$

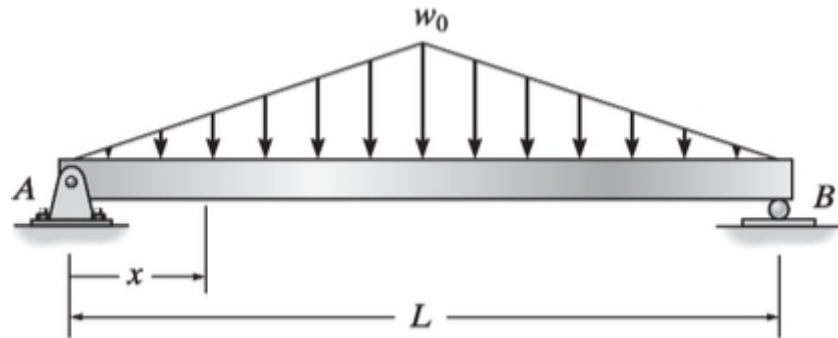
Analogamente, considerando que em $x = 0$ tem-se $v = 0$, logo:

$$C_2 = 0 \Rightarrow EIv = \frac{qLx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{24} \quad (59)$$

2.2.4 Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular

Novamente será usada equação diferencial da linha elástica, Equação 49, para obter a função da deflexão numa viga para uma dada posição x em seu eixo. No caso em questão, será abordada uma viga bi apoiada, com seção transversal uniforme submetida a um carregamento variável de geometria triangular, conforme ilustrado na Figura 8:

Figura 8: Viga com carregamento triangular



Fonte: HIBBELER (2010)

O método das seções fornece a função de momento fletor, que será expressa por:

$$M(x) = \frac{w_0 Lx}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L} \quad (60)$$

Aplicando a Equação 49, temos:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{w_0 Lx}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L} \quad (61)$$

Sabendo que,

$$EI\theta = EI \frac{dv}{dx} \quad (62)$$

Então,

$$EI \int d\theta = \int \frac{w_0 Lx}{4} - \frac{w_0 x^3}{3L} dx \Rightarrow EI\theta = \frac{w_0 Lx^2}{8} - \frac{w_0 x^4}{12L} + C_1 \quad (63)$$

Substituindo na Equação 54, chegamos a:

$$EI \int dv = \int \left(\frac{w_0 Lx^2}{8} - \frac{w_0 x^4}{12L} + C_1 \right) dx \Rightarrow EIV = \frac{w_0 Lx^3}{24} - \frac{w_0 x^5}{60L} + C_1 x + C_2 \quad (64)$$

As constantes de integração podem ser obtidas por meio da imposição das condições de contorno. Considerando que para $x = \frac{L}{2}$ tem-se que $\theta = 0$, obtém-se que:

$$C_1 = -\frac{w_0 L^3}{192} \quad (65)$$

Logo, a Equação 63, fica:

$$EI\theta = \frac{w_0 Lx^2}{8} - \frac{w_0 x^4}{12L} - \frac{w_0 L^3}{192} \quad (66)$$

Analogamente, considerando que em $x = 0$ tem-se $v = 0$, finalmente:

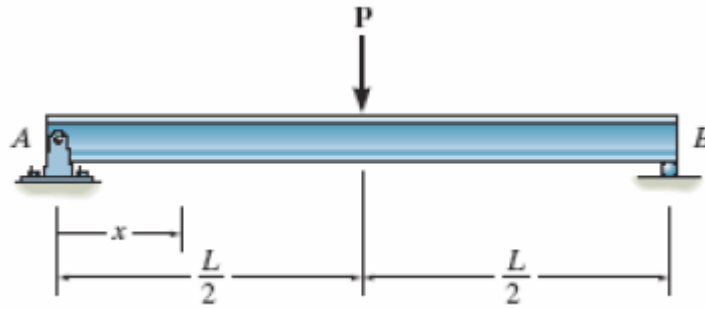
$$C_2 = 0 \Rightarrow EIV = \frac{w_0 Lx^3}{24} - \frac{w_0 x^5}{60L} - \frac{w_0 L^3 x}{192} \quad (67)$$

Sendo esta última, a função que fornece o deslocamento vertical, ou deflexão, da viga em cada ponto do seu eixo longitudinal. É digno de nota, que a Equação 67 tem intervalo de validade $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$. Para o trecho restante da viga, pode-se calcular a deflexão por simetria.

2.2.5 Viga simplesmente apoiada com carga pontual no centro

Será usada, mais uma vez, a equação diferencial da linha elástica para se obter a função de deflexão. Agora para uma viga simplesmente apoiada nas extremidades por apoios de segundo e primeiro gênero, respectivamente, e suportando uma carga concentrada no centro do seu eixo longitudinal. A Figura 9 ilustra o anteposto:

Figura 9: Viga bi apoiada com carga pontual



Fonte: HIBBELER (2010)

O método das seções fornece a função de momento fletor, que será expressa por:

$$M(x) = \frac{Px}{2} \quad (68)$$

Aplicando a Equação 49, tem-se:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Px}{2} \quad (69)$$

Sabendo que,

$$EI\theta = EI \frac{dv}{dx} \quad (70)$$

Então,

$$EI \int d\theta = \int \frac{Px}{2} dx \Rightarrow EI\theta = \frac{Px^2}{4} + C_1 \quad (71)$$

Substituindo na Equação 70, chegamos a:

$$EI \int dv = \int \left(\frac{Px^2}{4} + C_1 \right) dx \Rightarrow EIV = \frac{Px^3}{12} + C_1x + C_2 \quad (72)$$

As constantes de integração podem ser obtidas por meio da aplicação das condições de contorno. Considerando que para $x = \frac{L}{2}$ tem-se que $\theta = 0$, obtém-se que:

$$C_1 = -\frac{PL^2}{16} \quad (73)$$

Logo, a Equação 71, fica:

$$EI\theta = \frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \quad (74)$$

Analogamente, considerando que em $x = 0$ tem-se $v = 0$, assim:

$$C_2 = 0 \Rightarrow EIv = \frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16} \quad (75)$$

Onde a esta última é a função que fornece o deslocamento vertical, ou deflexão, da viga em cada ponto do seu eixo longitudinal. Novamente, destaca-se que a Equação 75 tem intervalo de validade $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$. Para o trecho restante da viga, podemos calcular a deflexão por simetria.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 METODOLOGIA

O presente trabalho visa tanto analisar como a alteração no passo do método de Runge-Kutta de quarta ordem influencia no respectivo erro de aproximação, quanto delinear a relação Passo *versus* Erro de forma objetiva.

A metodologia consiste em utilizar problemas de valor inicial clássicos encontrados no estudo da Resistência dos Materiais, em particular o de vigas biapoiadas sujeitas a cargas externas. Tais problemas possuem solução analítica conhecida, de modo que será sempre possível analisar o erro em cada ponto de malha após efetuar-se uma aproximação usando o método RK4. Este procedimento será realizado repetidas vezes para uma mesma viga, alterando, no entanto, o tamanho do passo adotado. Para cada passo estabelecido, será verificado o ponto de malha no qual o erro foi máximo, tal desvio será adotado como o erro correspondente ao passo em questão. Finalmente, será feito o estudo da variação do erro de acordo com as mudanças sofridas no passo.

Um aspecto digno de nota na modelagem do presente trabalho, consiste no fato de que os problemas abordados, a princípio, envolveriam equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, visto que consistem na resolução da Equação 49. A fim de modelar de acordo com um PVI no qual os métodos de solução numérica apresentados são aplicáveis, realizou-se a integração da Equação 49 de modo que seu grau fosse reduzido.

Para a devida aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem num problema de valor inicial, é necessário dispor do valor inicial de y , o qual é uma informação inerente ao PVI, também é requerido o intervalo de análise, isto é, a faixa de valores de x , bem como o tamanho do passo adotado h .

O processo recursivo foi implementado computacionalmente e as análises foram feitas em dois computadores pessoais que contam com as seguintes configurações técnicas:

Quadro 1 – Parâmetros técnicos do computador 1

Características Técnicas – Computador 1	
Fabricante	Samsung Electronics
Processador	Intel® Core(TM) i3-3110M CPU @ 2.40GHz
Memória instalada (RAM)	4,00 GB (utilizável: 3,88 GB)
Tipo de sistema	Windows 10; Sistema operacional de 64 bits, processador com base em x64

Fonte: Manual do fabricante (2014)

Quadro 2 – Parâmetros técnicos do computador 2

Características Técnicas – Computador 2	
Fabricante	Itautec S.A.
Processador	Intel® Core(TM) i3-2120 CPU @ 3.30GHz
Memória instalada (RAM)	4,00 GB (utilizável: 3,89 GB)
Sistema	Windows 7; Sistema operacional de 64 bits

Fonte: Manual do fabricante (2012)

Todos os experimentos computacionais foram realizados com auxílio do software de computação numérica Scilab, o qual conta com uma linguagem de programação de alto nível, que leva o mesmo nome, sendo particularmente útil para análise de problemas de caráter numérico. O software Scilab é gratuito e vem sendo continuamente desenvolvido pela Scilab Enterprises e disponibilizado no site do respectivo fornecedor (www.scilab.org). A versão utilizada foi a 6.0.0, compatível com Windows 7/10 64 bits.

3.2 ALGORITMO

A seguir, será apresentado o algoritmo utilizado para a concepção dos experimentos computacionais. Tal rotina iterativa é referente ao método numérico utilizado para a solução, isto é, Runge-Kutta de quarta ordem clássico. O algoritmo é apresentado em português estruturado, como segue:

Quadro 3: Método de Runge-Kutta em português estruturado

Algoritmo: Método de Runge-Kutta

Declare

<i>x_inicial</i>	(variável com o início do intervalo em x)
<i>x_final</i>	(variável com o fim do intervalo em x)
<i>y_inicial</i>	(variável com o valor inicial de y)
<i>h</i>	(variável com o tamanho de passo)
<i>k1</i>	(variável auxiliar)
<i>k2</i>	(variável auxiliar)
<i>k3</i>	(variável auxiliar)
<i>k4</i>	(variável auxiliar)
<i>x</i>	(vetor com os valores de x)
<i>y_rk</i>	(vetor com os valores da solução numérica)
<i>dx dy</i>	(função na variável x e y, da equação diferencial)

Numérico**Leia** *x_inicial*, *x_final*, *y_inicial*, *h*, *dx dy**x* ← *vetor*[*x_inicial*:*h*:*x_final*]*y_rk* ← *x**y_rk*(1) ← *y_inicial***Para** *i* **de** 1 **até** (*x_final* – *x_inicial*)/*h* **faça***k1* ← *dydx*(*x*(*i*), *y_rk*(*i*))*k2* ← *dydx*((*x*(*i*) + 0.5 * *h*), (*y_rk*(*i*) + 0.5 * *k1* * *h*))*k3* ← *dydx*((*x*(*i*) + 0.5 * *h*), (*y_rk*(*i*) + 0.5 * *k2* * *h*))*k4* ← *dydx*((*x*(*i*) + *h*), (*y_rk*(*i*) + *k3* * *h*))*y_rk*(*i* + 1) ← *y_rk*(*i*) + (*h*/6) * (*k1* + 2 * *k2* + 2 * *k3* + *k4*)**Fim para****Escreva** *y_rk*

Fonte: MENDONÇA (2016)

3.3 PROBLEMAS ANALISADOS

Para a validação do algoritmo e obtenção dos resultados referentes ao estudo do passo, foram selecionados problemas clássicos encontrados na literatura convencional da Resistência dos Materiais e feitas as devidas adaptações.

3.3.1 Problema 1: Viga simplesmente apoiada com carregamento triangular

O problema em questão foi adaptado de HIBBELER (2010). No caso analisado, a viga está apoiada em suas extremidades sobre apoios de segundo e primeiro gênero, respectivamente, mas submetida a um carregamento variável de geometria triangular, com intensidade de pico w_0 , conforme é ilustrado na Figura 8. O Quadro 4 apresenta a modelagem equacional deste problema, bem como os parâmetros estruturais adotados.

Quadro 4: Formulação do Problema 1

Equacionamento	
Equação	$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^4}{12L} + \frac{w_0 L x^2}{8} - \frac{5w_0 L^3}{192} \right)$
Solução analítica	$v(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^5}{60L} + \frac{w_0 L x^3}{24} - \frac{5w_0 L^3 x}{192} \right)$
Intervalo	$I = [0, 1.5]$
Ponto inicial	$v(0) = 0$
Passo	$h = 0.01; 0.02; 0.03; 0.04; 0.05; 0.06; 0.07; 0.08; 0.09; 0.1$
Parâmetros estruturais	
Módulo de elasticidade	$E = 210 \text{ GPa}$
Momento de inércia	$I = 113 \times 10^6 \text{ mm}^4$
Carregamento externo	$w_0 = 10 \text{ kN/m}$
Comprimento da viga	$L = 3 \text{ m}$

Fonte: Autoria própria

O Quadro 5 apresenta valores da solução analítica em alguns pontos, os quais novamente serão utilizados para comparação com as respectivas aproximações numéricas.

Quadro 5: Solução do Problema 1

Posição (x)	0.0	0.5	1.0	1.5
Deflexão (m)	0.0	-0,00014164	-0,000245967	-0,00028445

Fonte: Autoria própria

3.3.2 Problema 2: Viga simplesmente apoiada com carga distribuída

O problema agora estudado foi adaptado de HALLACK et al (2012) e consiste em determinar o deslocamento vertical, ou deflexão, de cada ponto da viga, fazendo uso da equação diferencial da linha elástica. A viga em questão está apoiada em suas extremidades sobre apoios simples de segundo e primeiro gênero, respectivamente e submetida a um carregamento externo uniforme e constante de intensidade w_0 . A Figura 7 ilustra uma viga sob tais condições e o Quadro 6 fornece a respectiva formulação do problema.

Quadro 6: Formulação do Problema 2

Equacionamento	
Equação	$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^3}{6} + \frac{w_0 L x^2}{4} - \frac{w_0 L^3}{24} \right)$
Solução analítica	$v(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^4}{24} + \frac{w_0 L x^3}{12} - \frac{w_0 L^3 x}{24} \right)$
Intervalo	$I = [0,3]$
Ponto inicial	$v(0) = 0$
Passo	$h = 0.01; 0.02; 0.03; 0.04; 0.05; 0.06; 0.07; 0.08; 0.09; 0.1$
Parâmetros estruturais	
Módulo de elasticidade	$E = 210 \text{ GPa}$
Momento de inércia	$I = 113 \times 10^6 \text{ mm}^4$
Carregamento externo	$w_0 = 10 \text{ kN/m}$
Comprimento da viga	$L = 3 \text{ m}$

Fonte: Autoria própria

O quadro a seguir apresenta os valores da solução exata em alguns pontos, os quais serão utilizados para a comparação com as respectivas aproximações numéricas.

Quadro 7: Solução do Problema 2

Posição (x)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Deflexão (m)	0.0	-0.22497	-0.38629	-0.44445	-0.38629	-0.22497	0.0

Fonte: Autoria própria

3.3.3 Problema 3: Viga simplesmente apoiada com carga pontual no centro

O problema em questão foi extraído de HIBBELER (2010). Novamente a viga está apoiada em suas extremidades sobre apoios simples. O carregamento, no entanto, deixa de ser distribuído e passa a ser pontual, atuando no centro da viga com intensidade P , conforme é ilustrado na Figura 9. O Quadro 8 apresenta a modelagem equacional deste problema, bem como os parâmetros estruturais adotados.

Quadro 8: Formulação do Problema 3

Equacionamento	
Equação	$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left(\frac{Px^2}{4} - \frac{PL^2}{16} \right)$
Solução analítica	$v(x) = \frac{1}{EI} \left(\frac{Px^3}{12} - \frac{PL^2x}{16} \right)$
Intervalo	$I = [0, 1.5]$
Ponto inicial	$v(0) = 0$
Passo	$h = 0.01; 0.02; 0.03; 0.04; 0.05; 0.06; 0.07; 0.08; 0.09; 0.1$
Parâmetros estruturais	
Módulo de elasticidade	$E = 210 \text{ GPa}$
Momento de inércia	$I = 113 \times 10^6 \text{ mm}^4$
Carregamento externo	$P = 10 \text{ KN}$
Comprimento da viga	$L = 3 \text{ m}$

Fonte: Autoria própria

O Quadro 9 apresenta valores da solução analítica em alguns pontos, os quais novamente serão utilizados para comparação com as respectivas aproximações numéricas.

Quadro 9: Solução exata do Problema 3

Posição (x)	0.0	0.5	1.0	1.5
Deflexão (m)	0.0	-0,000114131	-0,000201924	-0,000237042

Fonte: Autoria própria

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No presente tópico, serão apresentados os resultados obtidos após a realização das simulações numéricas bem como são elaboradas discussões sobre os mesmos. Precede-se, no entanto, com a respectiva validação do algoritmo utilizado, a qual se deu por meio da comparação com valores apresentados num problema específico encontrado na literatura consolidada.

4.1 VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

Para fins de validação do algoritmo utilizado, foi selecionado o seguinte problema de valor inicial encontrado em BURDEN & FAIRES (2010):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x+1} + (x+1)^3 \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad (76)$$

Aplicando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com passo $h = 0.2$, BURDEN & FAIRES (2010) e o algoritmo usado no presente trabalho apresentam os seguintes resultados:

Quadro 10: Comparação entre resultados referenciados e resultados obtidos para o PVI 76

Solução - BURDEN & FAIRES (2010)		Solução Própria	
x	y	x	y
0,2	0,8292933	0,2	0,8292933333
0,4	1,2140762	0,4	1,2140762107
0,6	1,648922	0,6	1,6489220170
0,8	2,1272027	0,8	2,1272026849
1	2,6408227	1	2,6408226927
1,2	3,1798942	1,2	3,1798941702
1,4	3,7323401	1,4	3,7323400729
1,6	4,2834095	1,6	4,2834094983
1,8	4,8150857	1,8	4,8150856946
2	5,305363	2	5,3053630007

Fonte: Autoria própria

A comparação entre os valores apresentados por BURDEN & FAIRES (2010) e os obtidos por meio do algoritmo utilizado confirmam a exatidão e fidedignidade da rotina iterativa avaliada. Tais resultados fornecem ainda confiabilidade aos resultados a serem discutidos nos próximos itens.

4.2 PROBLEMA 1: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO TRIANGULAR

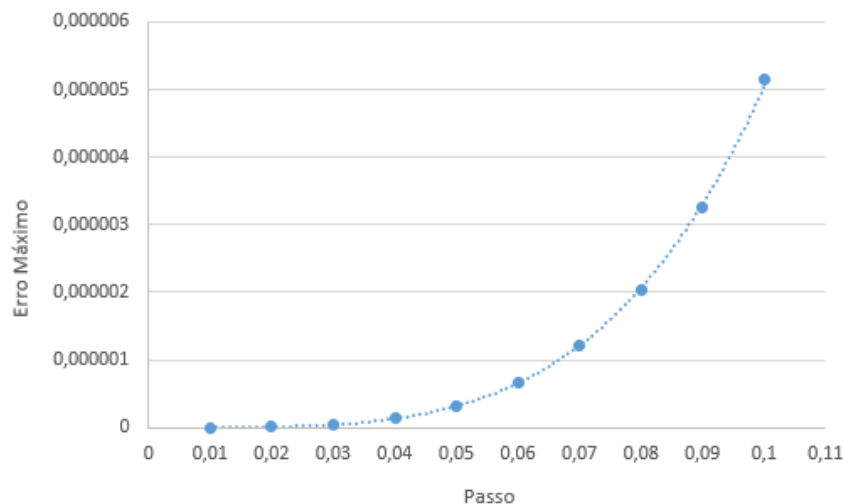
Para o problema em questão, foi feita a análise no intervalo $I = [0,1.5]$, pois conforme destacado na seção 3.3.1, a simetria de geometria bem como de carregamento assegura que os resultados no intervalo complementar $I = [1.5,3]$ serão idênticos. A variação do passo ocorreu de acordo com o delimitado no Quadro 4, isto é, de 0.01 a 0.1 com incrementos de 0.01. À cada passo analisado, foi associado um erro, o qual foi definido como sendo o erro máximo dentre todos os pontos de malha daquele passo. Finalmente, elaborou-se um quadro, apresentando a relação entre o passo e o erro máximo para o problema em questão, tais resultados também foram representados graficamente, seguem o quadro e o gráfico:

Quadro 11: Relação entre passo e erro máximo para o Problema 1

Passo (h)	Erro Máximo	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	5,14403E-06	-	-
0,09	3,24649E-06	1,89754E-06	0,01898%
0,08	2,02677E-06	1,21972E-06	0,01220%
0,07	1,21099E-06	8,15782E-07	0,00816%
0,06	6,66667E-07	5,44319E-07	0,00544%
0,05	3,21502E-07	3,45165E-07	0,00345%
0,04	1,2996E-07	1,91542E-07	0,00192%
0,03	4,1667E-08	8,8293E-08	0,00088%
0,02	8,23E-09	3,3437E-08	0,00033%
0,01	5,14E-10	7,716E-09	0,00008%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 1: Relação entre o Passo e o Erro Máximo para o Problema 1



Fonte: Autoria própria

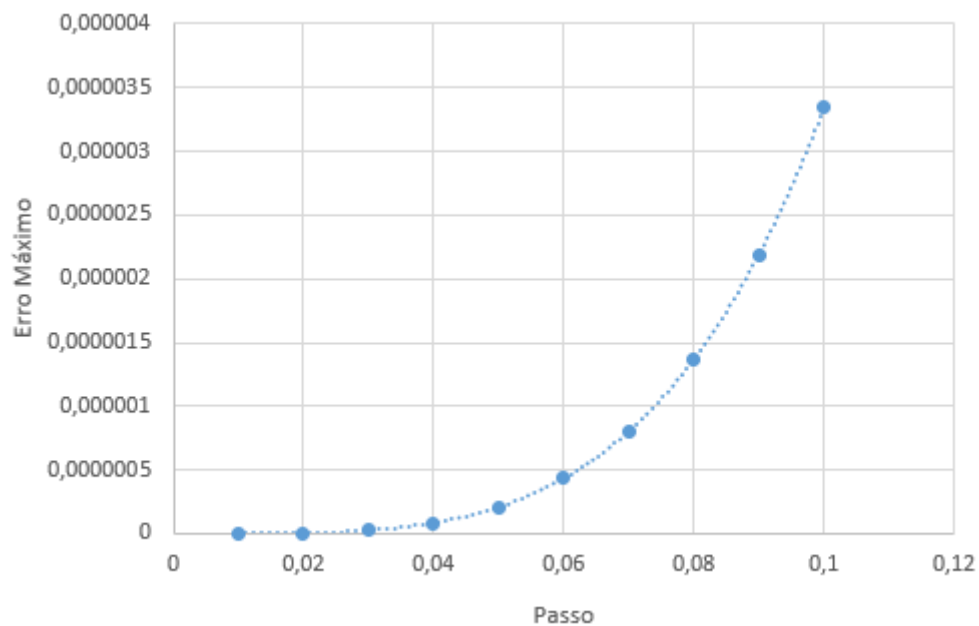
Foi realizado ainda o monitoramento do erro em pontos de malha específicos. No problema em questão, esta análise foi feita nos pontos $x = 0.3$ e $x = 1.0$. Nos casos em que o passo estabelecido não incluía o respectivo ponto de malha, foi usado o mais próximo, para fins de estimativa. A seguir são apresentados os quadros com os respectivos resultados, bem como as suas correspondentes representações gráficas:

Quadro 12: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 1 – Ponto de malha: $x = 0.3$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	3,3455E-06	-	-
0,09	2,18827E-06	1,15723E-06	0,01157%
0,08	1,37337E-06	8,14903E-07	0,00815%
0,07	8,01586E-07	5,71779E-07	0,00572%
0,06	4,33576E-07	3,6801E-07	0,00368%
0,05	2,09093E-07	2,24483E-07	0,00224%
0,04	8,5467E-08	1,23626E-07	0,00124%
0,03	2,7099E-08	5,8368E-08	0,00058%
0,02	5,353E-09	2,1746E-08	0,00022%
0,01	3,35E-10	5,018E-09	0,00005%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 2: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 1 – Ponto de malha: $x = 0.3$

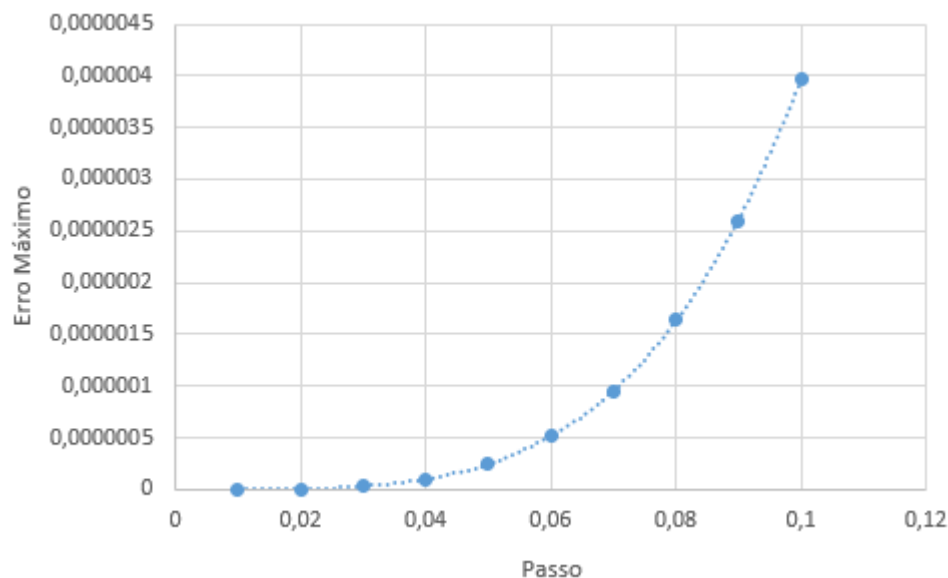


Fonte: Autoria própria

Quadro 13: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 1 – Ponto de malha: $x = 1.0$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	3,96589E-06	-	-
0,09	2,59195E-06	1,37395E-06	0,0137395%
0,08	1,65061E-06	9,41342E-07	0,0094134%
0,07	9,44896E-07	7,0571E-07	0,0070571%
0,06	5,18056E-07	4,2684E-07	0,0042684%
0,05	2,47868E-07	2,70188E-07	0,0027019%
0,04	1,01527E-07	1,46341E-07	0,0014634%
0,03	3,1999E-08	6,9528E-08	0,0006953%
0,02	6,345E-09	2,5654E-08	0,0002565%
0,01	3,97E-10	5,948E-09	0,0000595%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 3: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 1 – Ponto de malha: $x = 1.0$ 

Fonte: Autoria própria

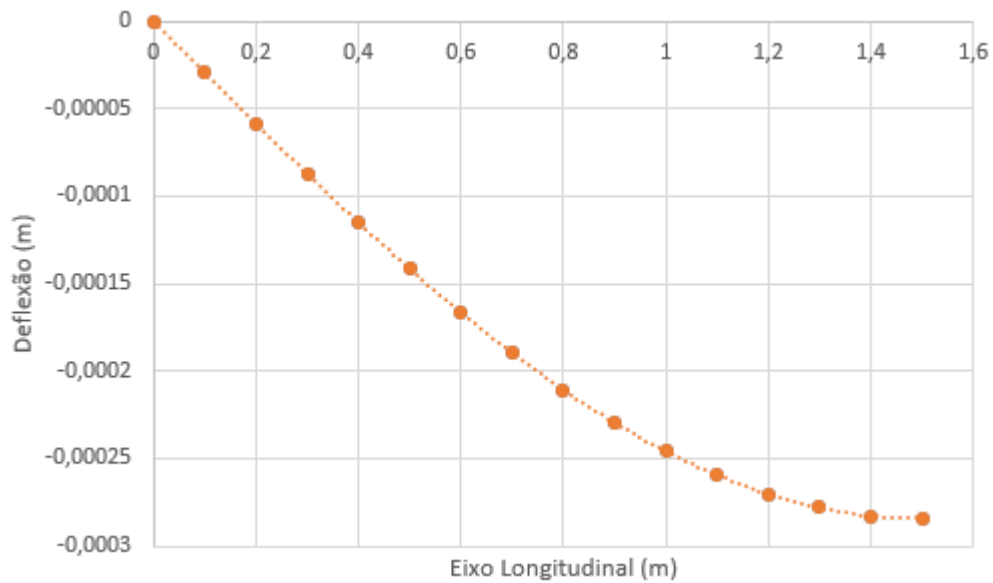
A análise cuidadosa dos quadros e gráficos anteriores leva à concepção de que para o PVI em questão, há uma relação explícita entre o tamanho do passo e o erro máximo, tal relação pode ser descrita por uma função potência. Observa-se ainda que tal comportamento não ocorre apenas com o erro máximo, mas também nos dois pontos de malha distintos analisados, sendo natural assumir que tal tendência também se verifica nos demais pontos.

A coluna variação no erro é delimitada pela diferença entre os respectivos erros para os passos de ordem i e de ordem $i + 1$, indicando o quanto o erro variou, em termos absolutos, com a correspondente mudança no passo. A coluna variação no erro % é definida pela razão

entre a variação absoluta do erro e a variação no tamanho do passo, consistindo em um indicador, de caráter rudimentar, da eficiência na respectiva mudança no passo.

A fim de destacar a confiabilidade das soluções obtidas, apresentamos a seguir os gráficos que relacionam as curvas da solução numérica e analítica para o passo $h = 0.1$, respectivamente.

Gráfico 4: Curva das soluções numérica e analítica sobrepostas – Problema 1 – Passo $h = 0.1$



Fonte: Autoria própria

Os gráficos das soluções analítica e numérica, ao serem sobrepostos têm um traçado idêntico, o que é um resultado coerente com os erros baixos obtidos. Além disso, a curvatura geral de ambos os gráficos é exatamente a esperada, isto é, a forma defletida da primeira metade da viga após a imposição do carregamento externo.

4.3 PROBLEMA 2: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARREGAMENTO UNIFORME

Para este segundo problema, foi realizado o estudo em todo o intervalo $I = [0,3]$, o que corresponde a todo o eixo longitudinal da viga. A variação do passo ocorreu de acordo com o delimitado no Quadro 4, ou seja, de 0.01 a 0.1 com incrementos de 0.01. Para cada passo, há um erro correspondente, o qual foi definido como sendo o erro máximo dentre todos os pontos de malha daquele passo. Por fim, elaboramos uma tabela, apresentando a relação entre o passo e

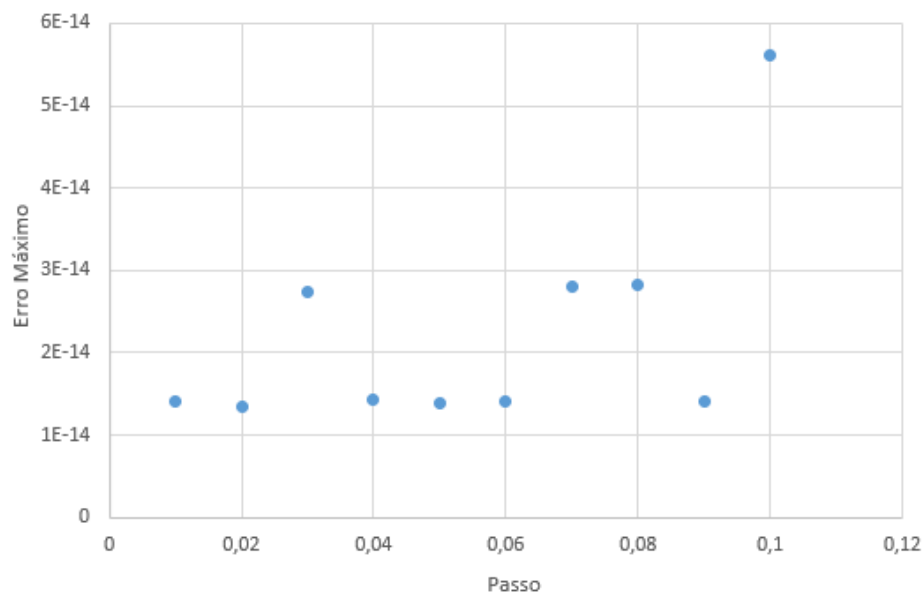
o erro máximo para o problema em questão, tais resultados são apresentados também em forma de gráfico a seguir:

Quadro 14: Relação entre passo e erro máximo para o Problema 2

Passo (h)	Erro Máximo	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	5,61341E-14	-	-
0,09	1,40335E-14	4,21006E-14	0,000000000421%
0,08	2,82354E-14	1,42019E-14	0,000000000142%
0,07	2,8067E-14	1,6838E-16	0,000000000002%
0,06	1,40335E-14	1,40335E-14	0,000000000140%
0,05	1,38726E-14	1,6091E-16	0,000000000002%
0,04	1,42045E-14	3,3187E-16	0,000000000003%
0,03	2,74425E-14	1,3238E-14	0,000000000132%
0,02	1,34455E-14	1,39971E-14	0,000000000140%
0,01	1,40335E-14	5,8807E-16	0,000000000006%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 5: Relação entre Passo e Erro máximo para o Problema 2



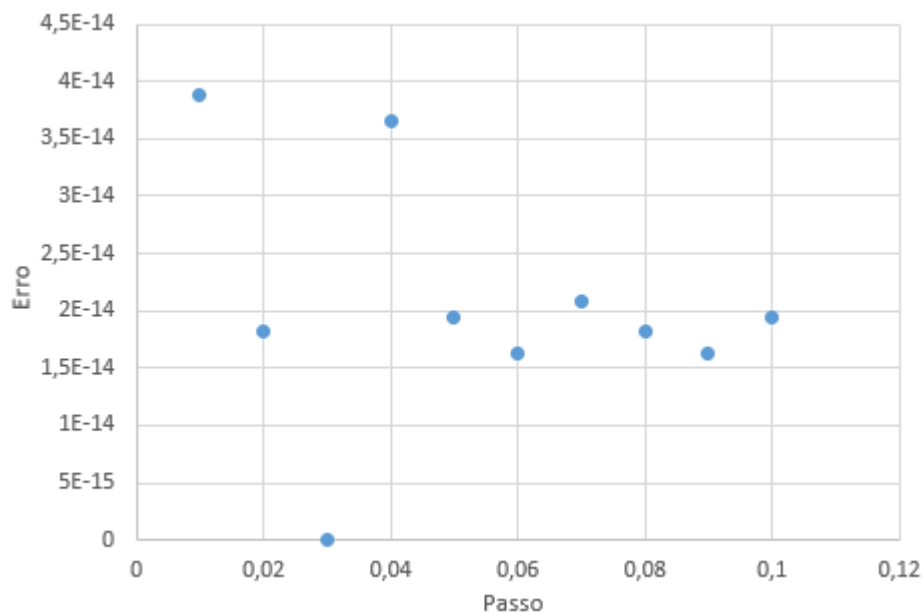
Fonte: Autoria Própria

Foi feito também o monitoramento do erro em pontos de malha específicos. Para este problema, tal análise foi feita nos pontos $x = 0.3$ e $x = 1.0$. Nos casos em que o passo estabelecido não incluía o respectivo ponto de malha, foi usado o mais próximo, para fins de estimativa. A seguir são apresentados os quadros com os respectivos resultados, bem como as suas correspondentes representações gráficas:

Quadro 15: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 2 – Ponto de malha: $x = 0.3$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	1,9427E-14	-	-
0,09	1,63235E-14	3,10352E-15	0,0000000000310%
0,08	1,82601E-14	1,93665E-15	0,0000000000194%
0,07	2,0764E-14	2,5039E-15	0,0000000000250%
0,06	1,63235E-14	4,44055E-15	0,0000000000444%
0,05	1,9427E-14	3,10352E-15	0,0000000000310%
0,04	3,65202E-14	1,70932E-14	0,0000000001709%
0,03	0	3,65202E-14	0,0000000003652%
0,02	1,82601E-14	1,82601E-14	0,0000000001826%
0,01	3,8854E-14	2,05938E-14	0,0000000002059%

Fonte: Autoria própria

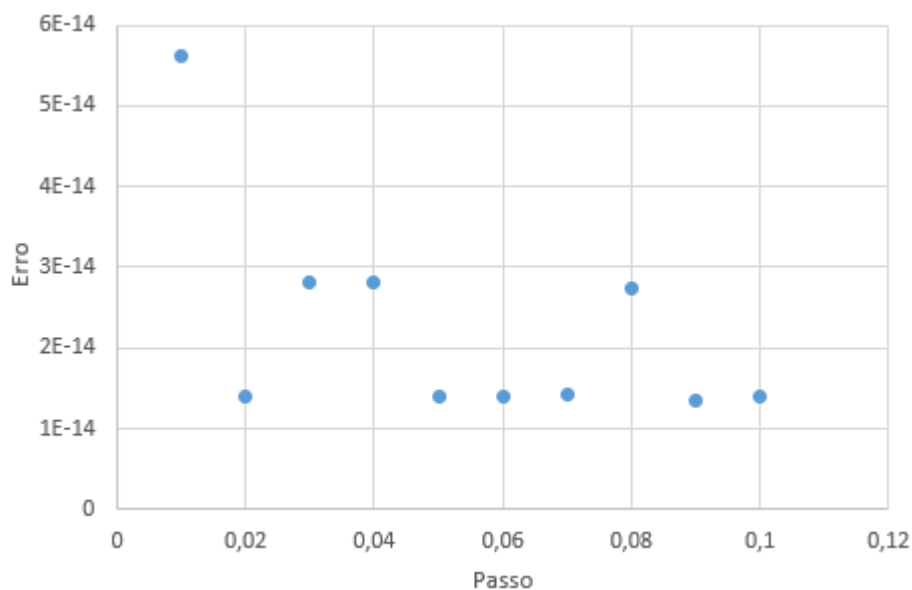
Gráfico 6: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 2 – Ponto de malha: $x = 0.3$ 

Fonte: Autoria própria

Quadro 16: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 2 – Ponto de malha: $x = 1.0$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	1,40335E-14	-	-
0,09	1,34455E-14	5,8807E-16	0,0000000000059%
0,08	2,74425E-14	1,39971E-14	0,0000000001400%
0,07	1,42045E-14	1,3238E-14	0,0000000001324%
0,06	1,38726E-14	3,3187E-16	0,0000000000033%
0,05	1,40335E-14	1,6091E-16	0,0000000000016%
0,04	2,8067E-14	1,40335E-14	0,0000000001403%
0,03	2,82354E-14	1,6838E-16	0,0000000000017%
0,02	1,40335E-14	1,42019E-14	0,0000000001420%
0,01	5,61341E-14	4,21006E-14	0,0000000004210%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 7: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 2 – Ponto de malha: $x = 1.0$ 

Fonte: Autoria própria

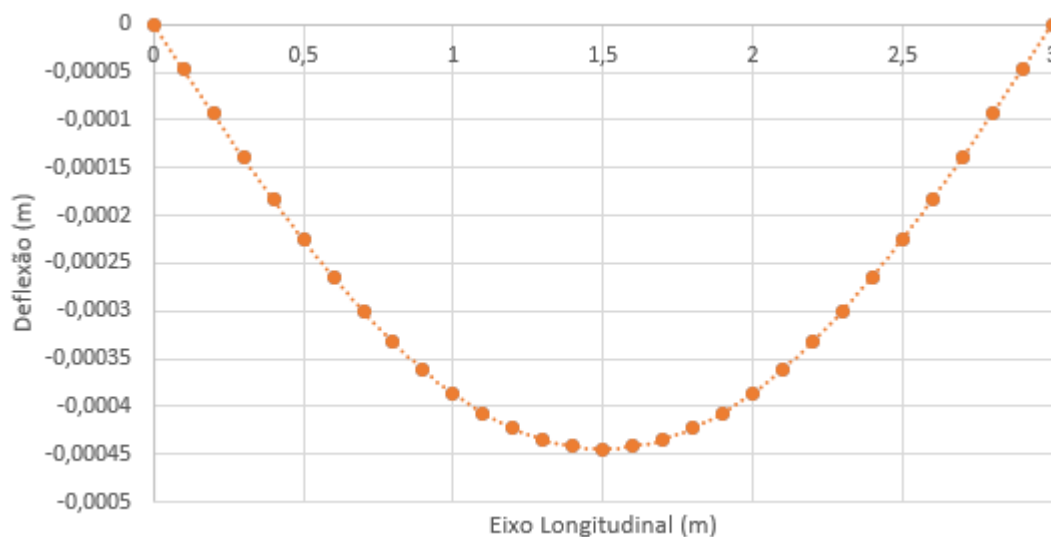
Para o problema em questão observamos, do Quadro 14 e do Gráfico 6, que os erros máximos obtidos são de baixa magnitude, todos da ordem de 10^{-14} sendo que a maioria dos valores oscila na faixa 1E-14 a 3E-14 sem apresentar uma relação explícita com a mudança no passo. O monitoramento dos pontos de malha, por sua vez, evidencia um comportamento mais disperso, em especial para valores do passo muito baixos. Considerando, no entanto, os passos de 0.06 a 0.1, verificamos mais uma vez, a oscilação do valor do erro dentro de uma faixa de valores bem específica.

A coluna variação no erro é definida pela diferença entre os respectivos erros para os passos de ordem i e de ordem $i + 1$, indicando o quanto o erro variou, em termos absolutos

com a correspondente mudança no passo. A coluna variação no erro %, novamente é a razão entre a variação absoluta do erro e a variação tamanho do passo, consistindo em um indicador, de caráter rudimentar, da eficiência na respectiva mudança no passo. Observa-se, no problema em questão, que sucessivas reduções no tamanho do passo não proporcionam mudanças substanciais na magnitude do erro, o que fica evidenciado por variações percentuais maiores para valores de passo mais altos.

A fim de destacar a confiabilidade das soluções obtidas, apresenta-se a seguir os gráficos que relacionam as curvas da solução numérica e analítica para o passo $h = 0.1$, respectivamente.

Gráfico 8: Curva das soluções numérica e analítica sobrepostas – Problema 2 – Passo $h = 0.1$



Fonte: Autoria própria

Novamente, os gráficos idênticos, tanto da solução numérica quanto da analítica, são de fato coerentes com os erros baixos obtidos. Além disso, a curvatura geral de ambos os gráficos é exatamente a esperada, isto é, a forma defletida da viga após ser submetida ao carregamento uniforme externo.

4.4 PROBLEMA 3: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA COM CARGA PONTUAL

Para este último problema, a análise também foi realizada no intervalo $I = [0,1.5]$, pois conforme destacado na seção 3.3.2, a simetria de geometria bem como de carregamento assegura que os resultados no intervalo complementar $I = [1.5,3]$ serão os mesmos. A variação do passo ocorreu de acordo com o delimitado no Quadro 8, ou seja, de 0.01 a 0.1 com incrementos de 0.01. Seguindo a mesma metodologia adotada para os problemas anteriores, à cada passo analisado, foi associado um erro, o qual foi definido como sendo o erro máximo

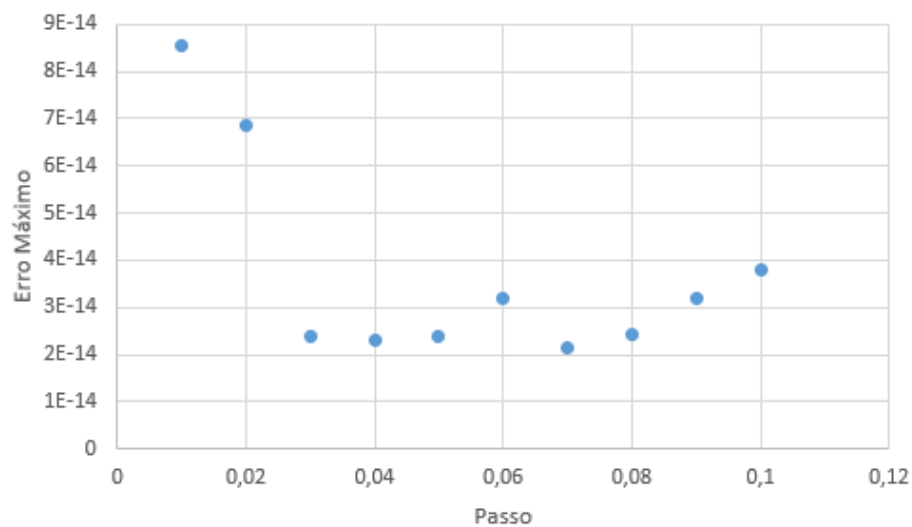
dentre todos os pontos de malha daquele passo. Finalmente, elaboramos um quadro, apresentado a relação entre o passo e o erro máximo, tais resultados também foram representados graficamente, seguem o quadro e o gráfico:

Quadro 17: Relação entre passo e erro máximo para o Problema 3

Passo (h)	Erro Máximo	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	3,79969E-14	-	-
0,09	3,19163E-14	6,08058E-15	0,0000000000608%
0,08	2,42261E-14	7,69021E-15	0,0000000000769%
0,07	2,1414E-14	2,81208E-15	0,0000000000281%
0,06	3,19163E-14	1,05023E-14	0,0000000001050%
0,05	2,3749E-14	8,16728E-15	0,0000000000817%
0,04	2,29075E-14	8,4153E-16	0,0000000000084%
0,03	2,3835E-14	9,2754E-16	0,0000000000093%
0,02	6,86265E-14	4,47915E-14	0,0000000004479%
0,01	8,54624E-14	1,68359E-14	0,0000000001684%

Fonte: Autoria própria

Gráfico 9: Relação entre o Passo e o Erro Máximo para o Problema 3



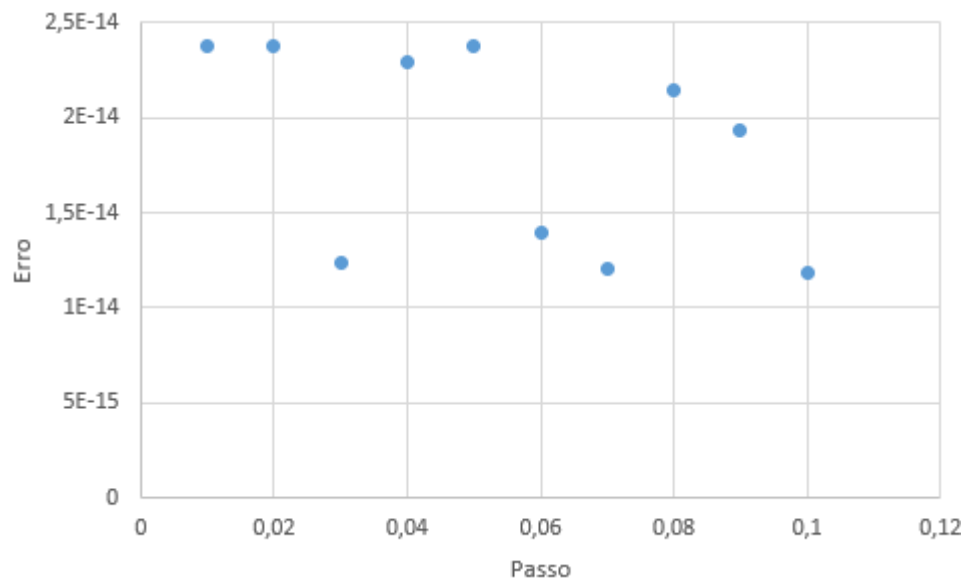
Fonte: Autoria própria

Novamente, realizou-se o monitoramento do erro nos pontos de malha $x = 0.5$ e $x = 1.0$. Nos casos em que o passo estabelecido não incluía o respectivo ponto de malha, foi usado o mais próximo, para fins de estimativa. A seguir são apresentados os quadros com os respectivos resultados, bem como as suas correspondentes representações gráficas:

Quadro 18: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 3 – Ponto de malha: $x = 0.5$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	1,18745E-14	-	-
0,09	1,92843E-14	7,40974E-15	0,0000000000741%
0,08	2,1414E-14	2,12976E-15	0,0000000000213%
0,07	1,20984E-14	9,31559E-15	0,0000000000932%
0,06	1,39781E-14	1,87962E-15	0,0000000000188%
0,05	2,3749E-14	9,77098E-15	0,0000000000977%
0,04	2,29075E-14	8,4153E-16	0,0000000000084%
0,03	1,23321E-14	1,05754E-14	0,0000000001058%
0,02	2,3749E-14	1,14169E-14	0,0000000001142%
0,01	2,3749E-14	0	0,0000000000000%

Fonte: Autoria própria

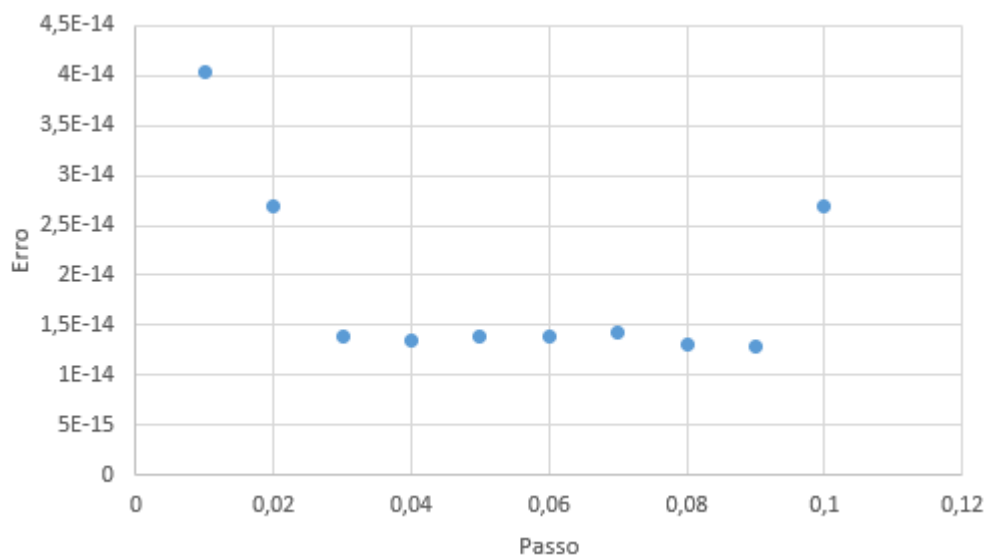
Gráfico 10: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 3 – Ponto de malha: $x = 0.5$ 

Fonte: Autoria própria

Quadro 19: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 3 – Ponto de malha: $x = 1.0$

Passo (h)	Erro	Variação no erro	Variação no erro (%)
0,1	2,68467E-14	-	-
0,09	1,27995E-14	1,40473E-14	0,00000000014047%
0,08	1,30929E-14	2,9344E-16	0,0000000000293%
0,07	1,43228E-14	1,22987E-15	0,00000000001230%
0,06	1,37946E-14	5,2817E-16	0,00000000000528%
0,05	1,38943E-14	9,967E-17	0,00000000000100%
0,04	1,34234E-14	4,7089E-16	0,00000000000471%
0,03	1,37946E-14	3,7122E-16	0,00000000000371%
0,02	2,68467E-14	1,30521E-14	0,00000000013052%
0,01	4,02701E-14	1,34234E-14	0,00000000013423%

Fonte: Autoria própria

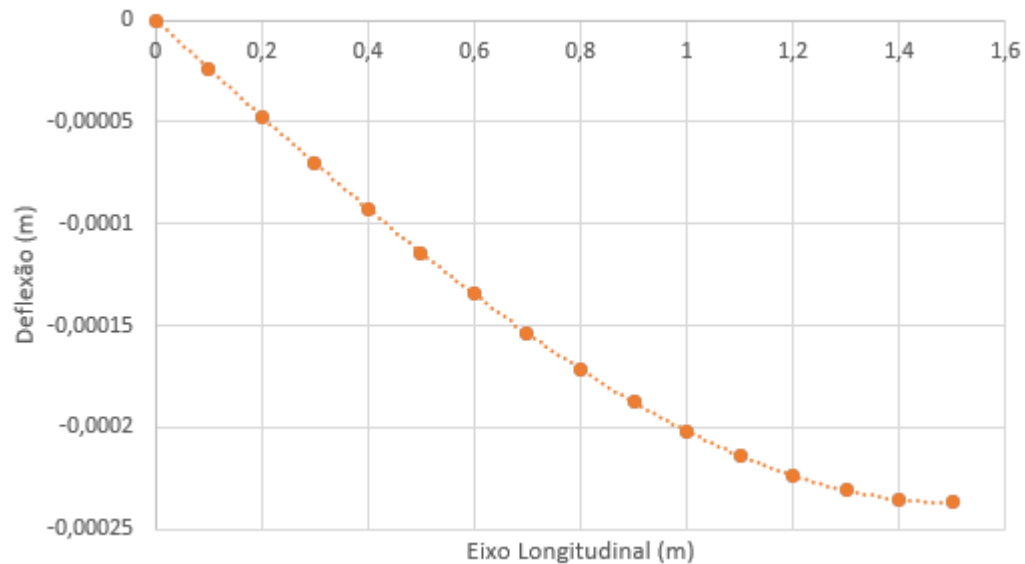
Gráfico 11: Relação Passo *versus* Erro para o Problema 3 – Ponto de malha: $x = 1.0$ 

Fonte: Autoria própria

Para o Problema 3, verifica-se da análise do Quadro 17 e do Gráfico 11, que os erros máximos obtidos são novamente de baixa magnitude, todos na ordem de 10^{-14} sendo que a maioria dos valores gravita na faixa de $2E-14$ a $4E-14$ sem apresentar uma relação explícita com a mudança no passo. O monitoramento dos pontos de malha destaca um comportamento semelhante. No ponto $x = 0.5$ todos os valores, oscilaram em torno de $1E-14$ a $2.5E-14$. No ponto $x = 1.0$, especialmente entre os valores de passo de $h = 0.3$ e $h = 0.9$, o erro se manteve praticamente constante e limitado à $1.5E-14$, nas extremidades do intervalo de passos, assim como no Problema 1, verifica-se um comportamento mais disperso.

A fim de destacar a confiabilidade das soluções obtidas, apresenta-se a seguir os gráficos que relacionam as curvas da solução numérica e analítica para o passo $h = 0.1$, respectivamente.

Gráfico 12: Curva das soluções numérica e analítica sobrepostas – Problema 3 – Passo



$$h = 0.1$$

Fonte: Autoria própria

A semelhança entre os gráficos, mais uma vez, se deve ao fato das soluções, tanto analítica quanto numérica estarem muito próximas, visto que os erros obtidos foram significativamente baixos. Verifica-se ainda a similaridade dos gráficos anteriores com a curvatura da viga defletida quando sujeita a uma carga pontual no seu centro.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho buscamos estudar como a variação do passo afeta o erro de aproximação do método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico. Para tal análise, foram realizados três estudos de caso, avaliando a deflexão em vigas submetidas a carregamentos externos variados.

Observamos para um dos problemas um comportamento de caráter bastante uniforme, evidenciando que à medida que o passo foi reduzido, o erro também foi reduzido, seguindo uma relação regida por uma função do tipo potência. Para os demais problemas, no entanto, tal comportamento não foi verificado. De fato, foi possível perceber, nestes outros casos, que demasiadas reduções no passo não levaram a reduções no erro máximo, tendo de fato o efeito contrário. Notamos também que nesses problemas a redução das dimensões do passo frequentemente tinha impacto irrelevante no erro, de modo que este último permanecia aproximadamente constante, fato especialmente delineado no Gráfico 11.

Sugerimos ainda, no âmbito de trabalhos futuros, a expansão do número de problemas analisados bem como do número de passos adotados. Caminhado no sentido de uma generalização ainda maior, pode-se ampliar a gama de problemas analisados, saindo do escopo da resistência dos materiais e fazendo sondagem por meio de problemas de valor inicial diversos. No que tange a metodologia, pode-se incorporar à análise a variável tempo de processamento, obtendo superfícies que relacionam Passo, Erro, e Tempo. Finalmente, podemos realizar os estudos supracitados simultaneamente com a comparação dos resultados com o critério de Collatz, sendo este um dos poucos guias teóricos para a escolha do passo nos métodos RK4.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. **Equação Diferenciais Elementares e Problema de Valores de Contorno**. 8.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BURDEN, R. L., FAIRES, D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
- CHAPRA, S. C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- HALLACK, J.C., LEMONGE, A.C.C., BARBOSA, F.S., HALLACK, H. P. **Apostila de Resistência dos Materiais I**. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora.
- HIBBELER, R. C. – **Resistência dos Materiais**. 7. ed. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 2009.
- KRESS, R. **Numerical Analysis**. 1. ed. Springer Science, New York, 1998.
- MENDONÇA, P. T. V. **Comparativo entre os métodos numéricos de Euler, Heun e Runge-Kutta na resolução de problemas de valor inicial de primeira ordem**. Angicos: 2016. 55f. Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Departamento de Ciências Exatas, Tecnológicas e Humanas.
- RUGGIERO, M.A.R., LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2 Ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996.
- ZILL, D. G., CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais** 10. ed. São Paulo: Pearson, 2016.