



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ORLANDO ALVES GONDIM SOBRINHO

MÉTODO DE EULER APLICADO A DEFLEXÃO DE VIGAS

PAU DOS FERROS – RN

2018

ORLANDO ALVES GONDIM SOBRINHO

MÉTODO DE EULER APLICADO A DEFLEXÃO DE VIGAS

Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Paulino
Lavor (UFERSA – Centro
Multidisciplinar de Pau dos Ferros)

PAU DOS FERROS – RN

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS

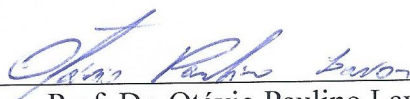
MÉTODO DE EULER APLICADO A DEFLEXÃO DE VIGAS

ORLANDO ALVES GONDIM SOBRINHO

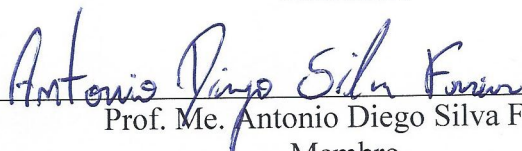
Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semiárido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADA EM: 13 / 04 / 2018

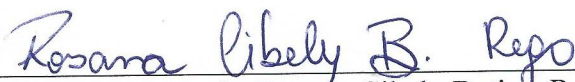
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
Orientador



Prof. Me. Antonio Diego Silva Farias
Membro



Profa. Rosana Cibely Batista Rego
Membro

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Centro multidisciplinar de Pau dos Ferros (BCPDF)
Setor de Informação e Referência (SIR)

SS677 Sobrinho, Orlando Alves Gondim.
m Método de Euler aplicado a deflexão de vigas
 / Orlando Alves Gondim Sobrinho. - 2018.
 32 f. : il.

 Orientadora: Otávio Paulino Lavor.
 Monografia (graduação) - Universidade
 Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência
e Tecnologia, 2018.

 1. Equações diferenciais. 2. Vigas. 3.
Deflexão. 4. Método de Euler. I. Lavor, Otávio
Paulino, orient. II. Título.

Bibliotecário: Eugênio Pacelli Ferreira da Costa

CRB-15/658

*Dedico este trabalho aos meus pais **Marli**
Maria dos Santos Silva e Janio Alves Gondim
da Silva por todo apoio e incentivo,
acreditando sempre no meu melhor.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida e por sempre estar ao meu lado nos momentos difíceis desta existência, me guiando por uma estrada cheia de alegrias, que me veio a proporcionar chegar até aqui. Agradeço ainda a Virgem Maria e a todos os anjos e santos que juntos me protegem de todo o mal, livrando a mim e minha família de todas as doenças e proporcionando inúmeras graças.

Aos meus pais, Marli Maria dos Santos Silva e Janio Alves Gondim da Silva que sempre estiveram ao meu lado nesta árdua caminhada, sempre me apoiando a seguir em frente e nunca desistir nos momentos difíceis deste curso, só tenho a agradecer as estas duas pessoas maravilhosas pela fé depositada em mim e por me proporcionar as ferramentas necessárias para tentar realizar todos os meus sonhos.

Ao meu orientador, o professor Dr. Otávio Paulino Lavor, por ter aceitado fazer parte desta minha caminhada rumo a graduação e a realização profissional, gostaria de agradecer também pelos inúmeros votos de confiança depositados sobre minha pessoa e por sempre me incentivar a buscar o meu melhor e nunca desistir quando assurgir um ou mais obstáculos no caminho, pois a vida não é fácil e eles sempre existiram.

A professora, Rosana Cibely Batista Rego pelo o auxílio e orientação na elaboração do código numérico que veio a me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho no decorrer dos resultados.

A universidade federal rural do semi-árido, por ter aberto as portas para mim e ter me acolhido tão bem. Além disso, gostaria de agradecer por me proporcionar um caminho que me leva ao crescimento tanto como pessoa quanto como profissional.

As minhas irmãs, Milena Gabriela dos Santos Silva e Janaína Micaele dos Santos Silva por todo o apoio empregados por elas na decisão da escolha do meu curso e no decorrer de todos os meus estudos. Agradeço ainda a minha sobrinha Helena Gondim, por sempre me alegrar com o seu sorriso e suas brincadeiras nos momentos que se encontram difíceis no decorrer desta minha caminhada.

A todos os meus professores da UFERSA e a todos os meus outros professores do ensino médio e fundamental que diretamente ou indiretamente me moldaram e me incentivaram neste caminho de conhecimento, eu só tenho a agradecer por vocês terem entrado na minha estrada e apontado a direção certa, para que eu pudesse crescer, me desenvolver e me tornar o ser humano que eu sou hoje.

Aos meu amigos e companheiros de curso, Isis Costa, Simone Gameleira, Waleska Benevenuto, Robson Thiago, Dhiogo Samuel, Álvaro Felipe, Cleto Rodrigues, Gabriel Nogueira, Renê Sá, Carina Maia, Pedro David, Edvar Junior, Gabriel Andrade, Mariana Lopes, Lara Melo, Gustavo Gomes e Vitor Ezequiel, por fazerem parte da minha vida e me auxiliarem na minha formação acadêmica.

A todos meu amigos e familiares que estiveram presentes no decorrer desta minha existência. A todos os mencionados aqui um muitíssimo obrigado!

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade estudar o comportamento da linha elástica com modelo não-linear, ou seja, sem aproximações. Após uma revisão teórica de vigas, equações diferenciais e métodos numéricos, a linha elástica é discutida para o caso mais geral e ao desconsiderar aproximações no estudo de deflexão da viga, o trabalho conduz a uma equação diferencial de quarta ordem não linear que proporciona resultados de deflexões mais precisos. Após uma redução de ordem, obtém-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem que é resolvido pelo método numérico de Euler, obtendo como solução a curva de deflexão da viga.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Vigas. Deflexão. Método de Euler.

ABSTRACT

The present study aims to study the behavior of the elastic line with a non-linear model, that is, without approximations. After a theoretical revision of beams, differential equations and numerical methods, the elastic line is discussed for the more general case and when we disregard approximations in the beam deflection study, the work leads to a non-linear fourth differential equation that gives results of deflections. After a reduction of order, a system of first-order differential equations is obtained which is solved by the Euler numerical method, obtaining as a solution the deflection curve of the beam.

Keywords: Differential equations. Beams. Deflection. Euler's Method,

.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Apoio do tipo engaste esquemático	23
Figura 2 – Apoio do tipo engaste aplicado.....	23
Figura 3 – Apoio do tipo pino esquemático	23
Figura 4 – Apoio do tipo pino aplicado	23
Figura 5 – Apoio do tipo rolete esquemático	24
Figura 6 – Apoio do tipo rolete aplicado	24
Figura 7 – Viga em estudo	28
Figura 8 – Deflexão em metros por amostra	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições de contorno que podem fazer parte de uma viga.....	26
Tabela 2 – Dados adotados para as constantes	29

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	16
2.1 Definindo as equações diferenciais	16
2.2 Modelagem das equações diferenciais	16
2.3 Exemplos de equações diferenciais	17
2.4 Classificação das equações diferenciais	18
2.4.1 Classificação em relação ao tipo	18
2.4.2 Classificação em relação a ordem	18
2.4.3 Classificação em relação a linearidade	19
3 MÉTODO NUMÉRICO DE EULER.....	19
3.1 Sistema de equações diferenciais	20
3.2 Equações diferenciais de ordem elevada	21
3.3 Erros do cálculo numérico	22
4 DEFLEXÕES EM VIGAS.....	22
4.1 Tipos de apoios em vigas.....	23
4.2 Classificação das vigas	24
4.3 Tipos de cargas.....	24
4.4 Deflexão na viga e suas equações	24
5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	27
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	32
REFERÊNCIAS.....	33
APÊNDICE A – Código em scilab 5.5.2 pelo método numérico de Euler.....	34

1 INTRODUÇÃO

Cocian (2009, p.16) define brevemente a engenharia com uma arte, que faz uso da matemática, da experiência, do julgamento e do senso comum, com o intuito de implantar ideias e práticas que promovam algum benefício tanto para a humanidade quanto para a meio ambiente.

Os modelos matemáticos são frequentemente encontrados dentro dos estudos da engenharia como sendo questões a serem trabalhadas, sendo estabelecidos por meio das equações diferenciais, onde para utilizá-las é necessário conhecer as condições iniciais e/ou de contorno do sistema em debate para que se possa vir a entender como ele vai se comportar. As equações diferenciais podem ser elaboradas por meio das leis e princípios fundamentais da natureza, para que com isso os fenômenos físicos envolvidos venham a ser explicados (FILHO, 2005).

De acordo com Hibbeler (2010, p.181) as vigas são estruturas que resistem as cargas que são aplicadas sobre o seu eixo longitudinal, as mesmas são consideradas de fundamental importância em projetos estruturais e mecânicos da engenharia. Para Zill (2016, p.222), as forças que podem vir a atuar sobre as vigas podem ser decorrentes do seu próprio peso ou em relação a esforços externos, onde estas forças provocam uma deflexão na viga que pode vir a ser regida por uma equação diferencial de quarta ordem que é considerada de grau simples, em que as condições iniciais e/ou de contornos são definidas pelos apoios empregados na viga.

O eixo horizontal das vigas é constituído por vários centroides, quando a estrutura em questão é submetida a uma carga a linha que interliga todos os centroides passa por um processo de distorção, este novo formato do eixo horizontal é denominado de curva elástica ou curva de deflexão que normalmente se aproxima do formato real em que a viga se encontra com a força aplicada sobre ela (ZILL, 2016, p.222).

A linha elástica pode ser representada graficamente com o intuito de entender melhor como irá se comportar as vigas depois de sofrer uma deflexão. A representação do diagrama da linha elástica, mesmo não apresentando grandes dificuldades para serem projetados, depende muito dos apoios ao qual a viga está sujeita (HIBBELER, 2010, p.421).

Em alguns casos as equações diferenciais encontradas podem possuir uma solução não muito clara, sendo considerado então uma aproximação do resultado real. Para que a solução das equações diferenciais (E.D.) se aproxime um pouco mais das resoluções considerada ideal,

são aplicadas sobre elas métodos numéricos, o que faz com que elas fiquem mais extensas e mais próximas do real (ZILL, 2016).

Partindo deste contexto, este trabalho irá estudar a linha elástica do ponto de vista geral, sem aproximações da curvatura da curva de elasticidade da viga. Neste estudo será empregado o método de Euler, que é um método numérico para solucionar problemas de equações diferenciais não lineares e lineares, já que o caso geral da deflexão de vigas se comporta como uma equação diferencial de quarta ordem não linear.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O avanço observado no campo das equações diferenciais (E.D.) está relacionado diretamente com o progresso apresentado pela própria matemática. Pode-se dizer que as equações diferenciais tiveram o seu início quando Gottfried W. Leibniz e Isaac Newton iniciaram com a aprendizagem de cálculo no final do século XVII. A participação de Newton no campo das equações diferenciais não foi muito longa, mais este pouco tempo veio a produzir um suporte para as aplicações das equações diferenciais, principalmente por Euler durante o século XVIII (MIOTTO et al., 2013).

2.1 Definindo as equações diferenciais

De acordo com o Zill (2016, p.2) pode-se definir que as equações diferenciais nada mais são do que equações onde se encontram derivadas de uma ou mais funções não determinadas em relação a uma ou mais variáveis autônomas. Segundo Oliveira e Iglioni (2013) as equações diferenciais constituem uma porção muito importante no ensino de cálculo, sendo a sua aprendizagem bastante relevante, pois com elas a matemática vem a ganhar uma ferramenta bastante útil na solução de questões relacionadas a variados campos do conhecimento.

Regularmente existe-se a necessidade de se retratar alguns fenômenos da vida real de forma matemática, podendo ser eles do campo da física ou até mesmo da área sociológica. Estas representações recebem a denominação de modelos matemáticos, estes modelos podem ser formados simplesmente por uma ou mais equações diferenciais onde para serem desenvolvidas devem-se levar em consideração algumas determinadas metas de elaboração (ZILL, 2016, p.21).

2.2 Modelagem das equações diferenciais

Quando um modelo matemático chega a ser solucionado existe-se a necessidade de comparar a resposta encontrada com alguns fatos ou até mesmos dados experimentais que já venham a existir sobre o sistema em questão (isso se chama validação do modelo), para que possa-se verificar se o modelo é coerente ou não, caso não seja razoável este modelo pode passar novamente por um processo de modelagem para se torna mais refinado (ZILL, 2016, p.21).

Conforme Boyce e DiPrima (2017, p.13) quando a previsão de um modelo matemático se encontra muito longe do que é considerado nas observações feitas, algumas melhorias devem ser feitas no modelo em questão de forma que exista uma troca entre a precisão e a simplicidade que o sistema possa vir a apresentar, pois estas duas características são consideradas de suma importância para o sistema, mais sabendo que ao mesmo tempo as duas são inversamente proporcionais.

2.3 Exemplos de equações diferenciais

Como já foi mencionado neste capítulo, as equações diferenciais tem por finalidade representar os fenômenos da vida real independentemente do campo de estudo em questão. Para que se possa ter uma melhor compreensão destas equações será mostrado logo a baixo alguns exemplos, que retratam de forma matemática alguns problemas considerados importantes para o mundo, alguns modelos são considerados mais refinados do que outros devido a precisão encontrada em suas soluções.

Dinâmica populacional:

$$\frac{dp}{dt} = kp \quad (2.1)$$

Circuito em série:

$$L \left(\frac{d^2q}{dt^2} \right) + R \left(\frac{dq}{dt} \right) + \frac{1}{C} q = E(t) \quad (2.2)$$

Corpos em queda e resistência do ar:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} + k \frac{ds}{dt} = mg \quad (2.3)$$

Disseminação de uma doença:

$$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x) \quad (2.4)$$

2.4 Classificação das equações diferenciais

Nem sempre é fácil debater sobre as equações diferenciais e o seu melhor método de resolução. Para que se possa discutir melhor sobre estas equações existe a necessidade de classifica-las de acordo com o seu tipo, ordem e linearidade (ZILL, 2016). A distribuição das equações diferenciais em categorias são uma das maneiras de organizar os estudos referentes a este assunto para que possa ser melhor compreendido por aqueles que o estuda (BOYCE; DIPRIMA, 2017).

2.4.1 Classificação em relação ao tipo

Zill (2016) em suas explicações referentes a classificação das equações diferenciais quanto ao seu tipo, conclui que:

Se uma equação diferencial contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais funções não conhecidas com relação a uma única variável independente, ela será chamada de **equação diferencial ordinária (EDO)**. Uma equação envolvendo derivadas parciais de uma ou várias funções de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

As equações (2.5) e (2.6) são exemplo de equações diferenciais ordinária e parcial respectivamente:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y \quad (2.5)$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right) \quad (2.6)$$

2.4.2 Classificação em relação a ordem

De acordo com Boyce e DiPrima (2017) em uma equação a derivada de maior valor é considerada a ordem da equação em questão seja ela ordinária ou parcial. O exemplo que se segue logo a baixo representa um sistema considerado de segunda ordem.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x \quad (2.7)$$

2.4.3 Classificação em relação a linearidade

A terceira classificação das equações diferenciais está relacionada a sua linearidade, o sistema (2.8) é considerado uma representação de equação linear e a equação (2.9) é tida como não-linear:

$$a_n(x) \left(\frac{d^n y}{dx^n} \right) + a_{n-1}(x) \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) + \dots + a_1(x) \left(\frac{dy}{dx} \right) + a_0(x)y = g(x) \quad (2.8)$$

$$y'''' + 2e^t y'' + yy' = 0 \quad (2.9)$$

A expressão (2.8) é considerada linear, pois as suas variáveis dependentes e suas derivadas são obrigatoriamente tidas como sendo de primeiro grau. Além disso, os seus coeficientes acabam por depender simplesmente das variáveis autônomas, caso estas especificações não sejam encontradas no sistema a equação acaba sendo classificada como não-linear.

3 MÉTODO NUMÉRICO DE EULER

Os métodos numéricos nada mais são do que um conjunto de técnicas que vem a ser empregadas sobre um modelo matemático com o intuito de modificá-lo ao ponto de se transformar em um problema numérico ou simplesmente pode-se dizer que este conjunto de técnicas tem a função de solucionar o problema considerado numérico (SPERANDIO et al., 2003, p.3).

A definição do método numérico que venha a proporcionar a melhor competência na resolução do problema em debate é de suma importância. Para que esta escolha seja efetuada de forma adequada três pontos tem que ser levados em consideração, são eles a precisão que se almeja obter nos resultados encontrados, a competência do método em guiar a solução até os resultados esperados e uma força computacional despendida (SPERANDIO et al., 2003, p.3).

Segundo os pensamentos de Franco (2006) existem várias ordem para a série de Taylor, onde estas ordem são representadas pela letra q. Para se obter o método mais simples de passo

múltiplo deve se considerar $q = 1$, fazendo esta consideração para a série de Taylor teremos então o método explícito de 1-passo conhecido também por método de Euler.

De acordo com Borche (2008, p.169) o método de Euler tem como base substituir a derivada presente na equação diferencial por uma aproximação de primeira ordem que vem a envolver y_i, y_{i+1} e o incremento h da variável independente x . Para se desenvolver este método um dos primeiros passos é:

$$y'(x_0) = (y_1 - y_0)/h \approx f[x, y(x_0)] = f(x_0, y_0) \quad (3.1)$$

O passo seguinte que pode ser realizado é a explicitação de y_1 :

$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) \quad (3.2)$$

Segundo Chapra e Canale (2008) a equação (3.2) pode ser escrita de uma maneira mais geral que se assemelha a seguinte equação:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \quad (3.3)$$

O método de Euler é considerado muito simples e fácil de se utilizar, mas com a ressalva de não ser muito exato. Para este método é necessário adotar um tamanho de passo h muito pequeno para se conseguir um resultado satisfatório, pois ele não é muito prático para problemas que venham a envolver muitos cálculos, já que ele acumula os erros de arredondamento (CEMGEL; PALM III, 2014).

3.1 Sistema de equações diferenciais

Nos estudos de Franco (2006) nota-se que quase todas as equações diferenciais com relevância prática são de ordem superior a 1 ou então são sistemas de equações elevadas. Ao se observar um sistemas de n equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

que pode ser escrita também da seguinte maneira:

$$y' = f(x, y)$$

onde y , y' e f são vetores com componentes y_i, y'_i e f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) respectivamente. Faz-se necessário a adoção de uma condição inicial de contorno sobre y .

Para que se possa compreender melhor este estudo, Franco (2006) em seu livro admite um $n = 2$, onde o sistema será representado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$x \in [x_0, b].$$

Ao se escolher resolver o sistema (3.5) pelo método de Euler, teremos:

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(x_n, y_n, z_n) \\ g(x_n, y_n, z_n) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

3.2 Equações diferenciais de ordem elevada

Todas as equações diferenciais de ordem elevada podem ser resolvidas quando forem reduzidas a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, esta redução ocorre quando se muda adequadamente a variável em questão (FRANCO, 2006).

Para o caso da equação diferencial de segunda ordem mostrada logo a seguir:

$$\begin{cases} y'' = g(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Pode-se fazer a seguinte consideração:

$$y' = z$$

obtendo:

$$z' = g(x, y, z).$$

Podendo então com isso reescrever a equação diferencial de segunda ordem (3.7) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \\ y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Com isso este sistema pode vir a receber uma solução. Já que ele é composto por equações de primeira ordem, um método considerado simples de resolução deste sistema é o de Euler.

3.3 Erros do cálculo numérico

Para que seja possível solucionar um modelo matemático através do cálculo numérico, é necessário levar em consideração os possíveis erros que venham a surgir no decorrer do procedimento, pois caso estes erros não sejam levados em consideração o resultado adquirido pode se encontrar muito distante do que era almejado ou até mesmo existe a possibilidade de o resultado não ter qualquer relação com o modelo em questão (SPERANDIO et al., 2003, p.5).

Os erros encontrados na solução de modelo matemático através do cálculo numérico podem ter sido provocados por diversos motivos mais os principais são: erros nos dados de entrada, no estabelecimento do modelo matemático, de arredondamento durante a computação, de truncamento e os que ocorrem devido ao próprio ser humano ou a própria máquina (SPERANDIO et al., 2003, p.5).

4 DEFLEXÕES EM VIGAS

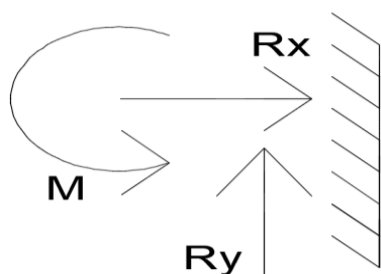
Elementos classificados como delgados que chegam a sustentar esforços perpendiculares sobre o seu eixo horizontal acabam por classificados como vigas. Normalmente, pode se dizer que as vigas nada mais são que corpos longos em formato de barra, que chegam a possuir em sua composição uma seção transversal com área permanente e nenhum desvio em toda a sua constituição, sendo então classificadas de acordo com a maneira a qual são apoiadas (HIBBELER, 2010, p.181).

4.1 Tipos de apoios em vigas

De acordo com Gere e Goodno (2014) as vigas podem ser apoiadas sobre três tipos diferentes de apoios, o primeiro que se pode descrever é o apoio do tipo engastado que permite a viga não sofrer nenhum tipo de rotação ou deslocamento (horizontal ou vertical) no ponto em que se encontra o engaste. O apoio dito do tipo pino possui apenas uma característica diferente do apoio anteriormente citado, que é permitir uma possível rotação no local que se encontrar. Já a estrutura do tipo rolete só consegue impedir o deslocamento horizontal do ponto em que se é colocada.

Como foi referenciado no parágrafo acima, os apoios apresentam algumas reações, estas reações são provocadas quando se exerce uma outra força sobre a superfície de uma viga, para que se possa entender melhor como estas reações de apoios são importantes será apresentado logo em seguida imagens esquemáticas do tipo de apoio engastado (figura 1), pino (figura 3) e rolete (figura 5) com suas devidas reações de apoio e imagens dos apoios como podem ser encontrados na vida real. As figuras esquemáticas foram desenvolvidas com auxílio do software AutoCAD 2015:

Figura 1 – Apoio do tipo engaste esquemático



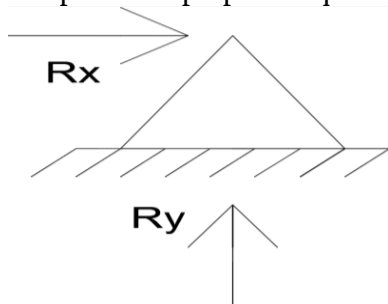
Fonte: Autor (2018)

Figura 2 – Apoio do tipo engaste aplicado



Fonte: Mapadaobra (2018)

Figura 3 – Apoio do tipo pino esquemático



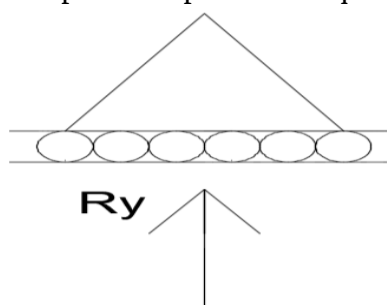
Fonte: Autor (2018)

Figura 4 – Apoio do tipo pino aplicado



Fonte: SlidePlayer (2018)

Figura 5 – Apoio do tipo rolete esquemático



Fonte: Autor (2018)

Figura 6 – Apoio do tipo rolete aplicado



Fonte: Fazerporsalvarterra (2018)

4.2 Classificação das vigas

Segundo Gere e Goodno (2014, p.262) quando uma das extremidades está apoiada por simplesmente um pino ou articulação e sua outra ponta por um rolete, a estrutura deve ser chamada de viga simples, quando a estrutura possuir uma de suas extremidades livres e a outra engastada sua classificação é como viga em balanço e há também as vigas simples em balanço que tem em sua constituição as mesmas características das catalogações anteriores, mais com algumas exceções.

4.3 Tipos de cargas

Vários tipos de esforços podem vir a operar sobre uma viga, entre estes se encontram as cargas concentradas que nada mais são do que a concentração de um carregamento sobre uma pequena área, a também os carregamentos distribuídos que são medidos por suas intensidades. Este mesmo tipo de carregamento ainda pode ser dividido em carregamento distribuído uniformemente ou variavelmente ao longo de um eixo (GERE; GOODNO, 2014, p.264).

4.4 Deflexão na viga e suas equações

Os carregamentos que operam sobre a estrutura de uma viga provocam então uma deformidade em seu eixo e este mesmo eixo que se encontrava a princípio reto, sofrerá uma curva que é denominada de curva de deflexão da viga. A viga possui um eixo formado por vários pontos em seu decorrer e o deslocamento de um destes pontos em relação a sua posição inicial é a deflexão da viga que pode ser medida se for seguida a direção vertical do deslocamento (GERE; GOODNO, 2014).

Segundo Zill (2016) a curva de deflexão também pode ser chamada de curva elástica, esta curva é bastante parecida com o formato real da barra quando estar sofrendo o esforço em sua superfície. No estudo da teoria da elasticidade, é mostrado que o momento fletor $M(x)$ em um ponto qualquer ao longo de toda a viga está diretamente relacionada com a carga aplicada sobre ela pela unidade de comprimento $W(x)$, a equação que representa esta relação é a seguinte:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = W(x). \quad (4.1)$$

O momento fletor de acordo com Zill (2016) é diretamente proporcional a curvatura κ correspondente a curva de elasticidade da viga

$$M(x) = EI\kappa, \quad (4.2)$$

onde E e I não passam de constantes, sendo E o módulo de elasticidade de Young do material correspondente da viga e I o momento de inercia de qualquer seção da viga. A multiplicação do E por I é caracterizada como a rigidez da deflexão da viga

O Zill (2016) afirma que a curvatura κ é dada por dada por uma equação da seguinte forma:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.3)$$

Para que ele possa resolver este problema ocorre de considerar o y' aproximadamente zero, considerando que a deflexão da viga será pequena. Com isto a equação se resume a $\kappa = y''$, onde ao substituírmos o κ na equação (4.2) teremos $M = EIy''$. Ao se realizar a segunda derivada de $M = EIy''$, temos:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^2}{dx^2} y'' = EI \frac{d^4y}{dx^4}. \quad (4.4)$$

Ao se igualar a equação (4.1) com a equação (4.4) encontrar-se uma equação diferencial de quarta ordem que vem a satisfazer a deflexão $y(x)$ existente nas vidas, sendo ela dada por

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = w(x). \quad (4.5)$$

Para se resolver esta equação diferencial de quarta ordem é necessário se conhecer as condições de contorno existentes na viga. As condições de contorno são dadas pelos apoios existentes no decorrer de todo o corpo da estrutura.

O Zill (2016) vem a definir as condições de contorno presentes em uma viga da mesma maneira que é mostrada na tabela logo a baixo, estas considerações são o ponto de partida para que se possa decorrer na descoberta das deflexões presentes na viga que está por vir a ser trabalhada.

Tabela 1 – Condições de contorno que podem fazer parte de uma viga

Extremidade da viga	Condições de contorno	
Engastada	$y = 0$	$y' = 0$
Livre	$y'' = 0$	$y''' = 0$
Simplesmente apoiada ou articulada	$y = 0$	$y'' = 0$

Fonte: Zill (2016)

Como pode ser notado, o formato da equação (4.5) só foi possível porque o Zill (2016) adotou que a deflexão sofrida pela viga seria relativamente pequena, sedo então o y' existente no κ da curvatura da curva elástica igual a zero. Caso ocorra que a deflexão sofrida pela viga não seja como prevista por Zill (2016), ou seja, esta deflexão não seja pequena, o y' não mais poderia ser considerado zero, caso o κ adotado não receba nenhuma consideração e permaneça da mesma forma que a equação (4.3), ao se realizar as derivações iremos obter uma nova equação diferencial.

Tanto a equação desenvolvida por Zill (2016) quanto a que encontraremos ao considerar o κ igual a equação (4.3), podem vir a ser solucionadas pelo método numérico de Euler, para que se possa adquirir um resultado mais preciso sobre o grau de deflexão que a viga está a sofrer dependendo do ponto da viga em que se deseja calcular a deflexão.

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Como já foi referenciado anteriormente, nos estudos da teoria da elasticidade existe uma relação direta entre o momento fletor $M(x)$, que ocorre ao longo de qualquer ponto da viga, com a carga que é aplicada sobre esta mesma por sua unidade de comprimento $W(x)$, podendo-se então dizer que a equação que representa esta relação é dada da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = W(X) \quad (5.1)$$

O momento fletor em questão como já foi mencionada anteriormente é diretamente proporcional a curvatura κ , que corresponde a curva de elasticidade da viga

$$M(x) = EI\kappa. \quad (5.2)$$

Onde esta curvatura κ da curva de elasticidade da viga vem a ser representada da seguinte maneira:

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.3)$$

Nos cálculos realizados por Zill (2016) ele considera que a viga só sofreria uma pequena deflexão e devido a esta consideração o y' é considerado aproximadamente zero, reduzindo a equação (5.3) para simplesmente

$$\kappa = y'' \quad (5.4)$$

Para o decorrer deste trabalho consideraremos que a curvatura κ da curva elástica é dada da mesma maneira que é mostrada na equação (5.3), ou seja, a deflexão da viga para este caso não será considerada pequena. Neste caso com esta consideração teremos que

$$M(x) = EI \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.5)$$

Substituindo o momento fletor dado pela equação (5.5) dentro da equação (5.1) teremos que

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI y'' [1 + (y')^2]^{-\frac{3}{2}} \right\} = W(X). \quad (5.6)$$

Onde será necessário que esta equação (5.6) seja derivada duas vezes, para que possamos desenvolvê-la e chegar a equação desejada.

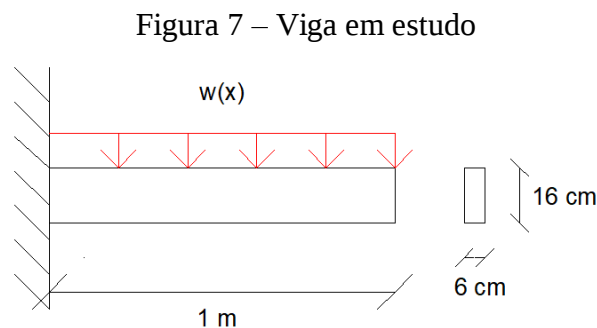
A primeira derivada da equação (5.6) irá ficar da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dx} \left\{ EI y''' [1 + (y')^2]^{-\frac{3}{2}} - 3EI y' (y'')^2 [1 + (y')^2]^{-\frac{5}{2}} \right\} = W(X) \quad (5.7)$$

A segunda e última derivada da equação (5.6) será representada da seguinte maneira:

$$EI y^{(4)} [1 + (y')^2]^{-\frac{3}{2}} - 9EI y' y'' y''' [1 + (y')^2]^{-\frac{5}{2}} - 3EI (y'')^3 [1 + (y')^2]^{-\frac{5}{2}} + 15EI (y')^2 (y'')^3 [1 + (y')^2]^{-\frac{7}{2}} = W(X) \quad (5.8)$$

Para que se possa observar o funcionamento desta equação diferencial de quarta ordem, desenvolvemos um caso onde uma viga se encontra engastada em uma de suas extremidades e livre na outra, esta mesma viga estará recebendo uma carga constante ao longo de todo o seu comprimento. A imagem logo abaixo está representando a viga em estudo e foi desenvolvida com o auxílio do software AutoCAD 2015.



Fonte: Autor (2018)

Alguns dados no decorrer do estudo da viga tiveram que ser adotados para que se possa desenvolver o problema, os dados que foram considerados se encontram na tabela 2.

Tabela 2 – Dados adotados para as constantes

Constantes trabalhadas	Dados que foram adotados
Comprimento da viga (L)	1 m
Módulo de elasticidade de Young (E)	$10 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$
Momento de inercia (I)	$2,048 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
Força constante (w(x))	EI

Fonte: Autor (2018)

Como já foi mencionado anteriormente as condições de contorno das vigas são essências para descobrir as deflexões, para este caso como possuímos uma viga com extremidades livre e engastada teremos que as condições de contorno serão $y = 0$, $y' = 0$, $y'' = 0$ e $y''' = 0$, com este dados podemos continuar o problema em debate.

A equação (5.8) pode ser representada também da seguinte maneira:

$$y^{(4)} = (W(x) + 9EIy'y''y'''[1 + (y')^2]^{-\frac{5}{2}} + 3EI(y'')^3[1 + (y')^2]^{-\frac{5}{2}} - 15EI(y')^2(y'')^3[1 + (y')^2]^{-\frac{7}{2}})/EI[1 + (y')^2]^{-\frac{3}{2}} \quad (5.9)$$

Como a equação diferencial (5.9) é classificada como de ordem elevada para que possamos resolvê-la será necessário reduzi-la para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Para que isso ocorra faremos as seguintes considerações:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w \\ w' = J \end{cases} \quad (5.10)$$

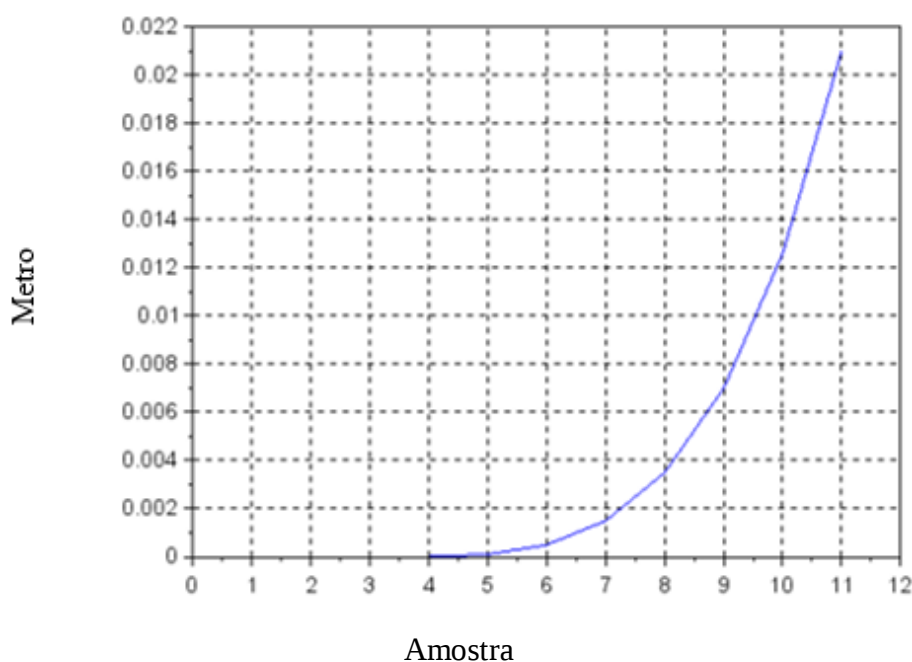
Desta maneira obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de ordem um:

$$\left\{ \begin{array}{l} J' = \{W(x) + 9EIzwJ[1 + (z)^2]^{-\frac{5}{2}} + 3EI(w)^3[1 + (z)^2]^{-\frac{5}{2}} - 15EI(z)^2(w)^3[1 + (z)^2]^{-\frac{7}{2}}\}/EI[1 + (z)^2]^{-\frac{3}{2}} \\ y' = z \\ z' = w \\ w' = J \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(1) = 0 \\ y'''(1) = 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

O sistema mostrado na equação (5.11) foi solucionado com o auxílio do software scilab-5.5.2. Para solução do sistema foi desenvolvido um código baseado no método de Euler para soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias. O código se encontra no apêndice A deste trabalho.

O resultado encontrado com o auxílio do software podem ser observados na imagem logo a baixo.

Figura 8 – Deflexão em metros por amostra



Fonte: Autor (2018)

Como se pode perceber a deflexão ao longo da viga em balanço está aumentando no decorrer do comprimento da viga, tendo então a maior deflexão na ponta livre da estrutura, para este caso podemos dizer que a deflexão máxima presente na viga será de aproximadamente 0,021 metros.

O método de Euler que foi empregado no código que solucionou este problema não possui um auto grau de precisão como já foi mencionado anteriormente, pois necessita de um passo h pequeno (para este caso $h = 0.1$). O número de interações que se realizou foi de 10, mesmo assim os resultados encontrados com este métodos são satisfatórios, pois a precisão da equação de deflexão melhorou já que não necessitou fazer nenhuma consideração em sua constituição, dando então resultados mais precisos se comparado com a aproximação linear.

Ao se resolver o exemplo apresentado neste capítulo considerando a aproximação proposta por Zill (2016), ou seja, considerando que a curvatura da curva de elasticidade da viga seja de $\kappa = y''$, encontraremos a equação (5.12).

$$y(x) = \frac{wx^4}{24EI} - \frac{wLx^3}{6EI} + \frac{wL^2x^2}{4EI} \quad (5.12)$$

A equação (5.12) é desenvolvida levando-se em conta as condições de contorno existentes no exemplo da figura 7, para este caso então teremos as condições de contorno para um apoio engastado e um apoio livre. Sendo assim, ao se substituir os dados apresentados pela tabela 2 na equação (5.12), considerando que o x seja igual a L (neste ponto de x a deflexão é máxima), encontraremos um deflexão de aproximadamente 0,125 metros.

Comparando o resulta encontrado pelo método de Zill (2016) com a solução encontrada pelo método de Euler pode se observar uma relativa diferença entre as respostas, onde o resultado apresentado por Zill (2016) encontrasse 6 vezes superior ao que se obteve pelo método de Euler. Ponde com isso, perceber as diferença de valores ao se considerar ou não aproximação para a curvatura da curva de elasticidade da viga, sendo a equação que não considera aproximações para a curvatura a mais precisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo desenvolvido neste trabalho proporcionou a obtenção de uma linha elástica mais precisas ao longo de uma viga, já que nestes estudos não ocorreu nenhum tipo de aproximação para a curvatura da curva elástica da viga ou de qualquer outro componente que pode-se vir a influenciar na obtenção da equação diferencial de quarta ordem.

O método estudado neste trabalho parra solucionar a equação diferencial de quarta ordem foi o de Euler, mais outros métodos mais precisos podem ser empregados para solucionar os problemas que envolvam a utilização desta equação diferencial, um dos métodos que poderia ser utilizado é o de Runge-Kutta de quarta onde que é bem mais preciso que o de Euler e com isso uma comparação entre os dois métodos pode ser realizado.

Poderia ter sido desenvolvido neste trabalho o emprego de uma carga que variasse sua força ao longo da viga, fazendo com que a força adicionada no software scilab 5.5.2 se tornasse um vetor, outros pontos que também poderiam ser modificados neste trabalho para que se obtivessem novos resultados, que podem vir a ser mencionados são os apoios empregados na viga que vão dar as condições de contorno e o comprimento do corpo da viga.

A obtenção da equação diferencial de quarta ordem sem nenhuma aproximação da curvatura da curva elástica é de grande importância para os estudos das estruturas, para que se possa entender melhor como elas se comporta e com isso poderem ser realizados trabalhos mais adequados e que possam vir a causar menos riscos, quando forem trabalhados no ramo da construção civil ou de qualquer outro campo que venha a se utilizar destes estudos.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

BORCHE, A. **Métodos numéricos**. 1ª ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2008.

CENGEL, Y. A.; PALM III, W. J. **Equações diferenciais**. Porto Alegre: AMGH, 2014.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Método numéricos para engenharia**. 5ª ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

COCIAN, L. F. E. **Descobrimos a engenharia: A Profissão**. 1ª ed. Canoas: Graf. ULBRA, 2009. 344 p. Disponível em: < https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=wmy674GblEUC&oi=fnd&pg=PA16&dq=J.+A.+L.+Waddel,+Frank+W.+Skinner,+Wessman+livro&ots=yKRq_E6sIZ&sig=yMsHqMZKD0ggigNN7VVfohwMu5I#v=onepage&q&f=false >. Acesso em: 5 de nov. 2017.

FILHO, F. C. S. **Modelagem de problemas de engenharia: Solução de equações diferenciais parciais pelo método dos elementos finitos**. Tecnologia, Fortaleza, v. 26, n. 2, 2005. Disponível em: <<http://periodicos.unifor.br/tec/article/view/95/4424>>. Acesso em: 5 de nov. 2017.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GERE, J.M.; GOODNO, B. J. **Mecânica dos materiais**. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MIOTTO, C. M.; CARGNELLUTTI, J.; MACHADO, V. M. **Aplicações das equações diferenciais na modelagem matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica**. 2013. Disponível em: < http://www2.td.utfpr.edu.br/semat/I_semat/Artigos/CO08500585978.pdf >. Acesso em: 1 de Abril. 2018.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. **ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: Um levantamento preliminar da produção científica**. 2013. Disponível em:< <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/viewFile/2231/1803>>. Acesso em: 1 de Abril.2018.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2003.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagens**. 3ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

APÊNDICE A – Código em scilab 5.5.2 pelo método numérico de Euler

```

clear, clc
function g=f(E, I, w, Z, J, W) // J'
    g = (w + 9*E*I*Z*W*J*(1 + Z^2)^(-5/2) + 3*E*I*(W^3)*(1 + Z^2)^(-5/2) - 15*E*I*(Z^2)*(W^3)*(1 + (Z^2))^(-
7/2))/(E*I*(1 + Z^2)^(-3/2));
endfunction

Z(1) = 0;
W(1)=0;
y(1)=0;
J(1)= 0;

h = 0.1; //Passo
N = (1-0)/h;
E = 10*10^6;
I = 2,045*10^(-5);
w = E*I;
for i=1:N

    y(i+1) = y(i) + h*(Z(i));
    Z(i+1) = Z(i) + h*(W(i));
    W(i+1) = W(i) + h*(J(i))
    J(i+1) = J(i) + h*f(E, I, w, Z(i), J(i), W(i));
end

plot(y, 'rb'); xlabel('Amostra'); ylabel('Metros')

```