

ESTUDO DE MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS A SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Alexsandro Pinheiro de Moura, Matheus da Silva Menezes (Orientador)

O presente artigo trata de um estudo teórico-prático de dois métodos numéricos aplicados a sistemas de equações não lineares, no qual inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica, a fim de situar o leitor sobre alguns conceitos do assunto, em seguida foi apresentada a metodologia, na qual trata dos parâmetros e algoritmos dos métodos utilizados. Os métodos de Newton e do ponto fixo foram implementados na linguagem computacional Matlab versão 4.51, a fim de comparar o tempo de processamento e número de iterações. Como critério de parada foi utilizado o máximo resíduo entre soluções e o número máximo de iterações. Os resultados apresentados por meio de tabelas e gráficos foram satisfatórios para o objetivo do artigo.

Palavras chave: *Método de Newton; Método do Ponto fixo; Equações não lineares*

1 Introdução

No processo de resolução de problemas práticos da engenharia, computação e física, é comum a necessidade da resolução de sistemas de equações não lineares, como por exemplo: cálculos eletrônicos, modelagens estatísticas entre outros [2]. Contudo, a determinação das soluções desses sistemas é um grande desafio da ciência. Para esse fim, há vários métodos numéricos que encontram boas soluções. Outro desafio é obter uma solução numérica que se encaixe dentro de limites razoáveis, com o mínimo de erro possível. Dessa forma, estudar métodos numéricos é relevante pois permite a automatização do procedimento de cálculo. A análise desse erro, assim como o detalhamento das técnicas de resolução deste tipo de problema é o campo de estudo do presente trabalho. No mundo dinâmico de hoje a exigência por eficiência, tanto na velocidade de processamento, quanto no menor erro associado, traz a necessidade de métodos mais eficientes para cada tipo de problema.

O estudo ora proposto será de caráter teórico-prático, no qual a primeira fase será composta por um estudo bibliográfico de conteúdos que possibilitem o entendimento da teoria envolvida nos métodos numéricos que nos propomos a estudar. Além disso, os métodos estudados serão implementados na linguagem computacional Matlab® com a finalidade de verificar sua eficiência na resolução da problemática proposta.

Com isso, alguns objetivos foram traçados tais como: o estudo teórico e a implementação numérica de métodos aplicados à resolução de Sistemas de Equações não Lineares; estudar a modelagem e implementação computacional e numérica dos pressupostos teóricos relacionados ao tema, enfatizando os métodos de Newton e ponto fixo.

2 Fundamentação teórica

Nesta seção, iremos apresentar alguns conceitos relacionados ao tema de forma a situar o leitor no contexto do mesmo que foram baseadas nas referências [2] e [6]. Contudo, alguns conceitos prévios de cálculo diferencial e integral e cálculo numérico são necessários. Para esta consulta sugerimos as seguintes referências [3], [7] e [4].

2.1 Equações não lineares

Uma equação é dita não linear, quando qualquer um dos elementos que a compõem não é linear, como por exemplo:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 - 2$$

2.2 Sistema de equação não lineares

Definição 2.1. [2] Um sistema de equações não lineares tem a forma

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

em que cada função é um vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, no qual leva de $\mathbb{R}^n$ para a reta real $\mathbb{R}$.

2.3 Funções de várias variáveis

As funções de várias variáveis são de extrema importância para aplicação do método de Newton e método do ponto fixo.

Definição 2.2. [6] Seja A um conjunto do espaço n -dimensional ($A \subseteq \mathbb{R}^n$), no qual seus elementos possuem uma sequência ordenada $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais. Se cada ponto P do conjunto A for associado a um único ponto $z \in \mathbb{R}$ temos uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, no qual essa função é denotada como função de várias variáveis.

2.4 Continuidade e diferenciabilidade

Para discutir sobre a solução de sistema de equações não lineares, é necessário verificar alguns resultados referentes a continuidade e a diferenciabilidade para funções de duas variáveis. As definições apresentadas nessa seção podem ser consideradas como uma extensão das definições referentes a funções de variáveis variáveis onde apresentamos algumas definições baseadas em [2] e [6], que ajuda a compreender esses resultados.

Definição 2.3. [6] Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto de acumulação de A . Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) se aproxima de (x_0, y_0) é um número real L se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ sempre que $(x, y) \in A$ e $0 < |(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Definição 2.4. [6] Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$ um ponto de acumulação de A . Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Definição 2.5. [6] Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $z = f(x, y)$

uma função de duas variáveis e $B \subseteq A$ o conjunto formado por todos os pontos (x, y) tais que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe. Definimos a função derivada parcial de 1ª ordem de f em relação a x como a função que a cada $(x, y) \in B$ associa o número $\frac{\partial f}{\partial x}$ dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Analogamente, definimos a função derivada parcial de 1ª ordem de f em relação a y , como

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Definição 2.6. [6] Dizemos que a função $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0) se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - \left[f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)[x - x_0] + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)[y - y_0] \right]}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} = 0$$

onde

$$|(x, y) - (x_0, y_0)|$$

representa a distância de (x, y) a (x_0, y_0) , que é dada por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Dizemos que f é diferenciável em um conjunto $A \subset D(f)$, se f for diferenciável em todos os pontos de A .

Definição 2.7. [2] Seja f uma função de $D \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in D$. Se todas as derivadas parciais de f existirem e se existirem constantes $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que, sempre que $\|x - x_0\| < \delta$ e $x \in D$, tenhamos

$$\left\| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right\| < K, \text{ para cada } j=1,2, \dots, n,$$

então a função f é contínua em x_0 .

2.5 Método do Ponto fixo

O método do ponto fixo é comumente utilizado para encontrar as raízes de uma função de uma variável. É possível definir o método do ponto fixo para equações de uma variável como:

Definição 2.8. [8] Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$, intervalo que contém uma raiz da equação $f(x)=0$. O método do ponto fixo consiste em transformar a equação em uma equação equivalente $x = \varphi(x)$ e a partir de uma aproximação inicial x_0 gerar a sequência $\{x_k\}$ de aproximações para ξ pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, pois a função $\varphi(x)$ é tal que $f(\xi) = 0$, se e somente se, $\varphi(\xi) = \xi$. Transformamos assim o problema de encontrar o zero de $f(x)$ no problema de encontrar um ponto fixo de $\varphi(x)$.

Um procedimento similar é utilizado para funções de várias variáveis.

Definição 2.9. [2] A função G de $D \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ tem um ponto fixo em $p \in D$ se $G(p)=p$.

Teorema 2.10. [2] Seja $D\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^t | a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para cada } i=1,2,\dots,n\}$, para algum conjunto de constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$. Suponha que G seja uma função contínua de $D \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ com propriedade de que $G(x) \in D$ sempre que $x \in D$, então G tem um ponto fixo em D .

Suponha, além disso, que todas as funções componentes de G tenham derivadas parciais contínuas e que exista uma constante $K < 1$ com

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}, \text{ sempre que } x \in D,$$

para cada $j=1,2,\dots,n$ e cada função componente g_i . Então, a sequência do ponto fixo $\{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty$, definida por um $x^{(0)}$ arbitrariamente selecionado em D e gerado por

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}), \text{ para cada } k \geq 1,$$

converge para o único ponto fixo $p \in D$ e

$$\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{K^k}{1-K} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$$

2.6 Método de Newton

O método de Newton surge como uma alternativa mais viável com relação ao método do ponto fixo, pois não há a necessidade de isolar algebricamente as variáveis em cada equação, isso simplifica os cálculos, pois muitas equações não permitem essa manipulação de maneira trivial. O Teorema 2.11 a seguir define as condições de aplicação do método.

Teorema 2.11. [2] Seja p uma solução de $G(x)=x$. Suponha que exista um número $\delta > 0$ tal que

- (i) $\partial g_i / \partial x_j$ é contínua em $N_\delta = \{x | \|x - p\| < \delta\}$, para cada $i=1,2,\dots,n$ e $j=1,2,\dots,n$;
- (ii) $\partial^2 g_i(x) / (\partial x_i \partial x_k)$ é contínua e $|\partial^2 g_i(x) / (\partial x_i \partial x_k)| \leq M$, para alguma constante M , sempre que $x \in N_\delta$, para cada $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,n$ e $k=1,2,\dots,n$;
- (iii) $\partial g_i(p) / \partial x_k = 0$, para cada $i=1,2,\dots,n$ e $k=1,2,\dots,n$.

Então, existe um número $\hat{\delta} \leq \delta$ tal que a sequência gerada por $x^{(k)} = G(x^{(k-1)})$ converge quadraticamente para p para qualquer escolha de $x^{(0)}$ satisfazendo $\|x^{(0)} - p\| < \hat{\delta}$. Além disso,

$$\|x^{(k)} - p\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - p\|_\infty^2 \text{ para cada } k \geq 1.$$

Prova: Para esse teorema, suponha que $A(x)$ seja uma matriz $n \times n$ de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ na forma da equação 1 em que os elementos específicos serão escolhidos posteriormente.

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Suponha ainda que $A(x)$ seja não singular perto de uma solução p de $F(x)=0$ e que $b_{ij}(x)$ denote o elemento de $A(x)^{-1}$ na i -ésima linha e j -ésima coluna.

Já que $G(x) = x - A(x)^{-1}F(x)$, temos $g_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(x)f_j(x)$. Assim,

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right), & \text{se } i = k, \\ - \sum_{j=1}^n \left(b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right), & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

O teorema 2.11 implica que precisamos que $\partial g_i(p)/\partial x_k = 0$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, n$. Isso significa que, para $i=k$,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p),$$

isto é,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 1. \quad (2)$$

Quando $k \neq i$,

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p),$$

e então

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 0. \quad (3)$$

2.6.1 Matriz jacobiana

Definição 2.12. [2] A matriz jacobiana $J(x)$ é definida por:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Então, as equações 2 e 3 requerem que

$A(p)^{-1}J(p) = I$, a matriz identidade, de modo que $A(p) = J(p)$.

Uma escolha adequada para $A(x)$ é, consequentemente, $A(x) = J(x)$, já que isto satisfaz à condição (iii) do teorema 2.11. A função G é definida por

$$G(x) = x - J(x)^{-1}F(x),$$

e o procedimento de iterações de ponto de função evolui da seleção de $x^{(0)}$, gerando, para $K \geq 1$,

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1}F(x^{(k-1)}). \quad (5)$$

Isto é denominado método de Newton para sistemas não lineares, no qual, geralmente, se espera a convergência quadrática contanto que um valor de partida suficientemente preciso seja conhecido e $J(p)^{-1}$ exista.

A vulnerabilidade no método de Newton surge a partir da necessidade de se calcular e inverter a matriz $J(x)$ em cada passo. Na prática, o cálculo explícito de $J(x)^{-1}$ é evitado fazendo a operação em um modo de dois passos. Primeiramente, é encontrado um vetor y que satisfaça $J(x^{(k-1)})y = -F(x^{(k-1)})$. Então, a nova aproximação, $x^{(k)}$, é obtido pela adição de y a $x^{(k-1)}$.

3 Metodologia

3.1 Sistemas de equações

Com o intuito de analisar o desempenho dos métodos do ponto fixo e Newton, visando a velocidade de processamento e o menor erro associado, foi selecionado alguns sistemas de equações não lineares de [2].

3.1.1 Sistema de equações 1

$$\begin{cases} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin x_3 + 1,06 = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Sistema de equações 2

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$$

3.1.3 Sistema de equações 3

$$\begin{cases} 3x_1^2 + x_2^2 - 6 = 0 \\ 5x_1^3 + x_2^3 - 11 = 0 \end{cases}$$

3.2 Critério de parada

Como todo método iterativo, existem critérios de parada, para identificar qual a solução satisfatória para o sistema de equações. Para a resolução dos sistemas de equações será utilizado como critério de parada o número máximo de iterações e o máximo resíduo entre soluções, no qual é dado pela equação 6:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_{\infty} < \varepsilon, \quad (6)$$

no qual $x^{(k)}$ é a solução mais atualizado e $x^{(k-1)}$ é a solução anterior, já ε é a tolerância pré-estabelecido.

3.3 Algoritmos

Algoritmo 1: Método do ponto fixo

Entrada: x_0 , TOL, n, F //aproximação inicial, tolerância, número máximo de iterações, sistema de equações não lineares

Saída: x , k, tempo //solução aproximada, número de iterações, tempo de processamento

```
1 Início
2 tic() //Inicia contagem do tempo
3  $x_0 = (x_1, \dots, x_n)^t$ ; //Aproximação inicial
4 n= número inteiro; //Número máximo de iterações
5 TOL= número real; //Valor da tolerância
6 enquanto  $k \leq n$  faça
7    $x = g(x_0)$  (Calcular  $x_i$ .
8   se  $|x - x_0| < TOL$  então
9     SAÍDA(x); //O procedimento concluído com sucesso
10    PARE;
11  fim
12   $k=k+1$ .
13   $x_0 = x$ 
14 fim
15 SAÍDA('O método falhou após  $k$  iterações'); //O procedimento não foi bem-sucedido
16 toc() //Finaliza contagem do tempo
17 fim algoritmo
```

Algoritmo 2: Método de Newton

Entrada: x_0 , TOL, n, F //aproximação inicial, tolerância, número máximo de iterações, sistema de equações não lineares

Saída: x , k, tempo //solução aproximada, número de iterações, tempo de processamento

```
1 Início
2 tic() //Inicia contagem do tempo
3  $x_0 = (x_1, \dots, x_n)^t$ ; //Aproximação inicial
4 n= número inteiro; //Número máximo de iterações
5 TOL= número real; //Valor da tolerância
6 enquanto  $k \leq n$  faça
7   Calcule  $F(x_0)$  e  $J(x_0)$ , em que  $J(x_0)_{ij} = (\partial f_i(x_0)/\partial x_j)$  para  $1 \leq i, j \leq n$ .
8   Resolva o sistema linear,  $n \times n$ ,  $J(x_0)y = -F(x_0)$ 
9    $x_0 = x_0 + y$ 
10  se  $y < TOL$  então
11    SAÍDA(x); //O procedimento concluído com sucesso
12    PARE;
13  fim
14  k=k+1.
15 fim
16 SAÍDA('O método falhou após k iterações'); //O procedimento não foi bem-sucedido
17 toc() //Finaliza contagem do tempo
18 fim algoritmo
```

3.4 Ambiente de programação

Com o objetivo de comparar o desempenho dos métodos de Newton e ponto fixo, os mesmos foram implementados no software Matlab versão 4.51. O computador utilizado possui um processador Intel core I5-7500U, com 8GB de RAM e sistema Windows 10.

3.5 Parâmetros utilizados

Afim de comparar a velocidade de processamento, precisão e o número de iterações entre os métodos do ponto fixo e Newton, implementamos os algoritmos 1 e 2 no software citado em 3.4. Para os sistemas de equações 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 foi utilizados os parâmetros de entrada mostrado na Tabela 1.

Tabela 1: Parametros de entrada.(Autoria própria)

Sistema de equação	Número máximo de iterações	resíduo máximo	Aproximação inicial($\mathbf{x}^{(0)}$)
1	100	10^{-8}	$(0, 1; 0, 1; -0, 1)^t$
2	100	10^{-8}	$(1; 1; 1)^t$
3	100	10^{-8}	$(2, 5; 0, 5)^t$

Para resolve os problemas com o método do ponto fixo, foi necessário escolher um $\varphi(x)$ para atulizar o valor de x no método, como mostrado na definição 2.8. Os valores de $\varphi(x)$ que serão utilizados nos problemas 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 são mostrados a seguir:

3.5.1 Equações manipuladas algebricamente do problema 3.1.1

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \frac{1}{3} \cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6}, \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin(x_3) + 1,06} + \frac{1}{10}, \\ \varphi_3(x) = -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{10\pi - 3}{60}. \end{cases}$$

3.5.2 Equações manipuladas algebricamente do problema 3.1.2

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x_2^2 + 5, \\ \varphi_2(x) = -x_1^2 + 37, \\ \varphi_3(x) = 3 - x_1 - x_2. \end{cases}$$

3.5.3 Equações manipuladas algebricamente do problema 3.1.3

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{-x_2^2 + 6}{3}} \\ \varphi_2(x) = \sqrt{-5x_1^3 + 11} \end{cases}$$

4 Resultados e Discussões

Os resultados apresentados a seguir, são aplicações simples aos métodos com o intuito de entender através de tabelas e gráficos como os métodos funcionam.

4.1 Resultados para o sistema 3.1.1

Os resultados obtidos no método de Newton está representado na Tabela 2, no qual obteve tempo de processamento de 0,38862160s.

Tabela 2: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.1 no método de Newton.(Autoria própria)

k	x_1	x_2	x_3	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	0,10000000	0,10000000	-0,10000000	
1	0,49986967	0,01946685	-0,52152047	0,42152047
2	0,50001424	0,00158859	-0,52355696	0,00203649
3	0,50000011	0,00001244	-0,52359845	0,00004149
4	0,50000000	0,00000000	-0,52359878	0,00000033
5	0,50000000	0,00000000	-0,52359878	0,00000000

O tempo de processamento no método do ponto fixo foi de 0,78929230s, os demais resultados são mostrados na tabela 3.

Tabela 3: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.1 no método do ponto fixo.(Autoria própria)

k	x_1	x_2	x_3	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	0,10000000	0,10000000	-0,10000000	
1	0,49998333	0,00944115	-0,52310127	0,42310127
2	0,49999593	0,00002557	-0,52336331	0,00026204
3	0,50000000	0,00001234	-0,52359814	0,00023483
4	0,50000000	0,00000003	-0,52359847	0,00000033
5	0,50000000	0,00000002	-0,52359877	0,00000031
6	0,50000000	0,00000000	-0,52359878	0,00000000

De acordo com as Tabelas 2 e 3, foi possível notar que os dois métodos se aproximaram no número de iterações, com o método de Newton levando uma pequena vantagem. Para tempo de processamento o método de Newton também levou vantagem, no qual o método do ponto fixo levou mais que o dobro do tempo para encontrar as mesmas raízes do outro método.

4.2 Resultados para o sistema 3.1.2

Os resultados obtidos com o método de Newton são mostrados na Tabela 4, no qual o tempo de processamento foi de 0,39910450s.

Tabela 4: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.2 no método de Newton.(Autoria própria)

k	x_1	x_2	x_3	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	
1	16.00000000	6.00000000	-19.00000000	18.00000000
2	9.05194805	3.33766234	-9.38961039	-9.61038961
3	6.46542616	1.88835999	-5.35378616	-2.92418423
4	6.00058061	1.20911375	-4.20969436	-0.46484556
5	5.99854345	1.01748058	-4.01602403	-0.00203715
6	5.99998815	1.00014434	-4.00013248	0.00144469
7	6.00000000	1.00000001	-4.00000001	0.00001185
8	6.00000000	1.00000000	-4.00000000	0.00000000

Para o método do ponto fixo os resultados estão representados na Tabela 5, no qual possuiu como tempo de processamento 0,41569630s.

Tabela 5: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.2 no método do ponto fixo.(Autoria própria)

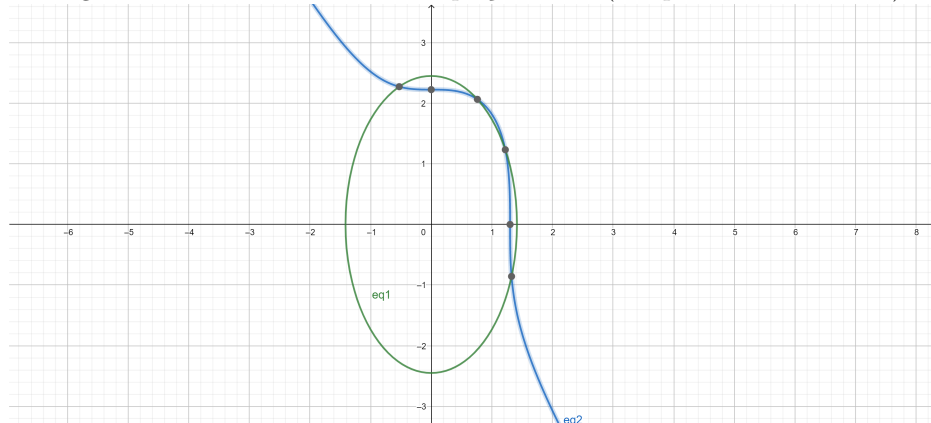
k	x_1	x_2	x_3	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	0.00001000	0.00000000	0.00000000	0.00001000
1	5.00000000	37.00000000	2.99999000	36.99999000
2	1373.99999999	12.00000000	-39.00000000	1336.99999999
3	149.00000000	-1887838.99997966	-1382.99999999	1886464.99997967
4	∞	$-\infty$	∞	∞

Para o sistema de equações 3.1.2, o método de Newton se comportou como esperado e convergiu para uma solução em alguns segundos e com poucas iterações, contudo o método do ponto fixo divergiu da solução esperada, tendendo os resultados das raízes e resíduo ao infinito, isso representa que extrapolou a capacidade de representação numérica do equipamento. Isso pode ter ocorrido pelo fato da aproximação inicial, na qual esta representada na Tabela 1, ter favorecido o método de Newton, mas não o do ponto fixo.

4.3 Resultados para o sistema 3.1.3

Como o último problema trata de apenas duas equações, então há uma maior facilidade para se trabalhar com gráficos, e segundo [1], podemos considerar a abordagem visual de um conceito matemático como um novo modo, ou estilo, de produção do conhecimento. Nessa perspectiva e visando uma melhor visualização do problema por parte do leitor, esse sistema de equação foi implementado no GeoGebra(disponível em:<https://www.geogebra.org/graphing>, data de acesso:28/01/2020), no qual está representado na Figura 1.

Figura 1: Gráfico do sistema de equações 3.1.3.(Adaptado do GeoGebra)



Para o método de Newton o tempo de processamento foi de 1,14953550s, os demais resultados estão representados na Tabela 6

Tabela 6: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.2 no método de Newton.(Autoria própria)

k	x_1	x_2	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	2.50000000	0.50000000	
1	1.80303030	-2.04545455	-0.45454545
2	1.38694534	-1.20570079	-0.65850921
3	1.32313157	-0.91809659	-0.06381377
4	1.32477832	-0.85927598	0.00164675
5	1.32490963	-0.85665066	0.00013131
6	1.32490986	-0.85664553	0.00000023
7	1.32490986	-0.85664553	0.00000000

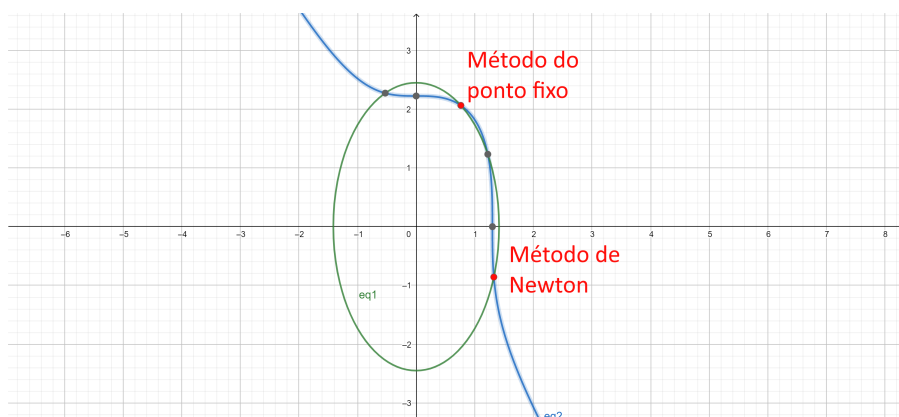
Para o método do ponto fixo os valores estão representados na Tabela 7 e obteve-se um tempo de processamento de 4,56350790s.

Tabela 7: Resultado iterativo do sistema de equação 3.1.3 no método do ponto fixo.(Autoria própria)

k	x_1	x_2	$ x^k - x^{(k-1)} $
0	2.50000000	0.50000000	2.50000000
1	1.38443731	2.03203618	1.56407237
2	2.39634793	0.65688193	-1.46942672
3	1.52134066	3.57857828	1.78092347
4	1.71073027	1.41498994	-1.92428182
⋮	⋮	⋮	⋮
73	0.76178201	2.06375013	0.00000002
74	0.76178199	2.06375008	-0.00000005
75	0.76178204	2.06375009	0.00000001
76	0.76178203	2.06375006	-0.00000003
77	0.76178205	2.06375007	0.00000001

Houve uma divergência de resultados. Mais uma vez o método do Newton levou vantagem nos dois critérios citados anteriormente, no qual ele precisou de pouco tempo e poucas iterações se comparado com o outro método. Já o método do ponto fixo, demorou mais do que quatro vezes do tempo de processamento se comparado com Newton e houve também um grande número de iterações, isso fez com que fosse preciso ocultar alguns resultados na Tabela 7. Um ponto importante a se destacar é que os dois métodos convergiram para soluções, contudo foram resultados diferentes. Se analisarmos o gráfico mostrado na Figura 2 é possível notar que há quatro pontos de interseção, nos quais dois deles foram encontrados com os métodos. É interessante notar que tanto o método de Newton quanto o do ponto fixo partiram do mesmo ponto inicial, como mostra a Tabela 1, mas mesmo assim convergiram para resultados diferentes.

Figura 2: Gráfico do sistema de equações 3.1.3 com a representação das raízes encontradas(Adaptado do GeoGebra).



5 Considerações finais

O presente artigo teve por objetivo aplicar métodos numéricos para resolução de problemas de sistemas de equações não lineares e então compará-los, afim de analisar o desempenho dos mesmos na velocidade de processamento e número de iterações. De posse dos dados obtidos experimentalmente foi possível notar que o método de Newton levou uma grande vantagem, nos dois critérios analisados, sobre o método do ponto fixo, no qual chegou a não convergir em um dos casos. Além disso, em um dos problemas, foi possível notar que os métodos partiram do mesmo ponto e convergiram para soluções diferentes, isso mostra que não há garantia de qual solução irá encontrar. Vale ressaltar que há uma grande dificuldade de encontrar sistemas de equações não lineares maiores do 3×3 . Esse tipo de estudo é de grande importância para determinar a melhor opção dentre os métodos nos quais possuem maior eficácia, servindo para embasar a escolha, quando houver a necessidade de resolver sistemas de equações não lineares. Para futuros estudos propomos uma comparação dos métodos apresentados nesse artigo com outros métodos também existentes, como o método da máxima descida e Quasi-Newton, afim de verificar dentre eles qual é o mais eficaz. Além disso, sugerimos a utilização de outras linguagens de programação, como Julia-program ou Scilab, para analisar a sua influência sobre os resultados dos métodos.

Referências

- [1] S. M. Barbosa. Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra de cadeia. 2009.
- [2] R. L. Burden and J. D. Faires. *Análise numérica*. Cengage Learning, 2013.
- [3] F. F. Campos Filho. *Algoritmos numéricos*. LTC, 2007.
- [4] A. A. Dornelles Filho. *Fundamentos de cálculo numérico*. Bookman Editora, 2016.
- [5] D. M. Flemming and M. B. Gonçalves. *Cálculo A*. Pearson Educación, 2007.
- [6] M. B. Gonçalves and D. M. Flemming. *Cálculo B*. Pearson Educación, 2007.
- [7] P. A. Morettin, S. Hazzan, and W. d. O. Bussab. Cálculo funções de uma e várias variáveis. 2010.
- [8] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes. *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*. Makron Books do Brasil, 1996.