



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

LUILMA CELINEIDE DE CARVALHO LIMA

**A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI E ALGUMAS DE SUAS
APLICAÇÕES**

CARAÚBAS

2022

LUILMA CELINEIDE DE CARVALHO LIMA

**A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI E ALGUMAS DE SUAS
APLICAÇÕES**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em CIÊNCIA E TECNOLOGIA.

Orientador: Tony Kleverton Nogueira, Prof. Dr.

CARAÚBAS – RN

2022

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

L732e Lima, Luilma Celineide de Carvalho. A equação
Diferencial de Bernoulli e Algumas de Suas
Aplicações / Luilma Celineide de Carvalho Lima. -
2022.
41 f. : il.

Orientador: Tony Kleverton Nogueira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. . I. Nogueira, Tony Kleverton, orient. II.
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados
fornecidos pelo) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LUILMA CELINEIDE DE CARVALHO LIMA

**A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI E ALGUMAS DE SUAS
APLICAÇÕES**

Trabalho de conclusão de curso apresentada a
Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em CIÊNCIA E TECNOLOGIA.

Defendida em: 28/11/ 2022.

BANCA EXAMINADORA

TONY KLEVERSON
NOGUEIRA

Assinado de forma digital por
TONY KLEVERSON NOGUEIRA
Dados: 2022.12.06 11:38:39
-03'00'

Tony Kleverson Nogueira, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Mariana de Brito
Maia

Assinado de forma digital por
Mariana de Brito Maia
Dados: 2022.12.06 11:39:07 -03'00'

Mariana de Brito Maia, Prof. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

ROSILDA SOUSA
SANTOS: [REDACTED]

Assinado de forma digital por ROSILDA
SANTOS [REDACTED]
Dados: 2022.12.06 13:17:24 -03'00'

Rosilda Sousa dos Santos, Prof. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

O meu primeiro agradecimento é a Deus e a nossa Senhora, que nunca soltaram a minha mão e sempre me mostraram que eu posso tudo o que eu quiser se eu confiar neles. Os meus agradecimentos são também a todos os que me ajudaram de alguma forma e não me deixaram desistir durante todo o tempo que passei no curso de ciência e tecnologia, embora desistir nunca tenha sido o meu forte. Agradecer a minha mãe e a minha vó, por tudo que elas sempre fizeram por mim, somente eu e elas sabemos o quão difícil foi para que eu pudesse sair de casa pela primeira vez, para morar em outra cidade, mas que com muitas lágrimas elas conseguiram compreender que precisavam me deixar viver os meus sonhos. Agradecer aos meus tios e tias, que sempre me deram forças, meu tio Erinaldo em especial que muitas vezes deixou de trabalhar para me ajudar aqui. Aos meus primos que sempre estiveram comigo e acreditaram em mim, Dailton, Miceia, Dioneide e Jaqueline.

Por fim, agradeço ao meu orientador, Tony Nogueira, sem ele esse TCC não estaria sendo possível, a Professora Rosilda que sempre contribuiu muito e me inspirou e que hoje faz parte da banca examinadora. Agradeço a professora Mariana Brito, que também é uma grande referência. E agradeço a todos os amigos que me ajudaram diversas vezes e de diversas formas, Lorena, Lucas Emanuel, Victor Mota, Rosivaldo, Thiago, Mara Meyse, Mara Alice, Antônio Luis, Matheus Brasil, Ana Paula, Vidânia, Paulo Henrique, Nayara, Cleiton, Thaysa, Lucas Edson e Izodária.

“Que todos os nossos esforços estejam sempre focados no desafio à impossibilidade. Todas as grandes conquistas humanas vieram daquilo que parecia impossível.”
(Charles Chaplin)

RESUMO

A matemática é fundamental na vida do homem e está sempre presente no dia a dia, sejam em tarefas simples até as mais complexas, como, por exemplo, em controle de epidemias. Uma ferramenta bastante utilizada em várias áreas através da matemática, são as Equações Diferenciais Ordinárias. Dentre os vários tipos de Equações Diferenciais, apresentaremos um estudo acerca da Equação de Bernoulli e algumas de suas aplicações. Para tal, foi realizado um breve resgate histórico sobre essas equações, destacando quem foi Bernoulli e como ele desenvolveu essa equação. Em seguida, uma revisão sobre as equações diferenciais ordinárias, dando destaque a EDO de Bernoulli e quais as suas aplicações hoje em dia. Para a realização desta pesquisa, utilizamos livros, notas de aulas, sites e monografias sobre o assunto.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Equação de Bernoulli. Aplicações.

ABSTRACT

Mathematics is fundamental in the life of man and is always present in everyday life, whether in simple tasks to the most complex, such as, for example, in epidemic control. A tool widely used in various areas through mathematics are the Ordinary Differential Equations. Among the various types of Differential Equations, we will present a study of the Bernoulli Equation and some of its applications. To this end, a brief historical review of these equations was performed, highlighting who Bernoulli was and how he developed this equation. Then, a review of ordinary differential equations, highlighting Bernoulli's ODE and its applications today. To conduct this research, we used books, class notes, websites, and monographs on the subject.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Bernoulli's Equation. Applications.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, respectivamente.....	12
Figura 2 - Gottfried Wilhelm Leibniz.....	13
Figura 3 -Número de indivíduos no instante t	29
Figura 4 - $N(t)$ permanece estável.	31
Figura 5 - Queda de um corpo num meio com atrito.....	34

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	SOBRE BERNOULLI	11
2.1	Jakob Bernoulli	11
2.2	Leibniz contribuiu com a Equação de Bernoulli	13
3	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	15
3.1	Introdução as Equações Diferenciais.....	15
3.2	Classificações das Equações Diferenciais.....	15
3.2.1	Com relação ao tipo.....	15
3.2.2	Classificação a ordem.....	16
3.3	Soluções para uma Equação Diferencial.....	16
3.3.1	Solução particular.....	17
3.4	Equação Diferencial de primeira ordem	18
3.4.1	Classificação quanto a Linearidade.....	20
3.4.1.1	Equações Lineares.....	20
3.4.1.2	Equações não-Lineares.....	21
3.5	Outros tipos de EDOs	22
4.	A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI	24
4.1	Soluções da equação de Bernoulli	24
5	ALGUMAS DAS PLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI.....	28
5.1	Modelos de crescimento populacional	28
5.2	Modelo matemático para o crescimento de peixes (Proposto por Von Bertalanffy)	32
5.3	Queda de um corpo num Meio com Atrito	34
5.4	Epidemiologia	36
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	38
7	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

A matemática é uma das áreas fundamentais na vida do homem e se encontra presente em nosso cotidiano desde muito cedo, embora por vezes seja comum deixar que tal fato passe despercebido. A matemática está presente em tarefas que exigem, por exemplo, registro de quantidade de pessoas ou de alimentos, bem como o simples ato de realizar uma compra. Um assunto muito importante e bastante conhecido por alunos do curso de matemática e de engenharia, dentro dessa área tão imensa e necessária, são as equações diferenciais.

As equações diferenciais podem ser definidas como aquelas que contém a derivada de uma ou mais funções, apresentando derivadas de variáveis dependentes e independentes, ou seja, quando uma variável tem seu valor dependendo de outras variáveis, ela é chamada de variável dependente, já quando uma variável pode mudar de forma livre em uma equação ela se torna variável independente (ZILL, 2001). Estas equações possibilitam uma série de estudos acerca de fenômenos presente no dia a dia das pessoas.

Neste trabalho, o foco será voltado para a Equação diferencial ordinária de Bernoulli, desenvolvida pelo matemático Jacques Bernoulli (1654-1705) e resolvida através das equações lineares. A equação de Bernoulli é uma equação de primeira ordem, não linear, mas que através do método da mudança de variável se transforma em uma equação linear da forma:

$$y' = f(x)y + g(x)y^n, n \neq 0,1$$

A EDO de Bernoulli pode ser utilizada em diversas áreas atualmente, se fazendo importante e necessária desde a engenharia até a área da saúde, por exemplo. Neste trabalho são citadas algumas de suas aplicações que podem ser usadas para controles epidemiológico, quando há a necessidade de controle de endemias, populacional, crescimento de peixes para controle do peso e até na queda de um corpo num meio com atrito.

Sabendo que a equação de Bernoulli é de grande importância para várias áreas de conhecimento, mas que nem sempre se encontra disponível para um estudo aprofundado, este trabalho foi pensado com o intuito de esclarecer o porquê de ter sido criada e onde pode ser aplicada hoje em dia.

2 SOBRE BERNOULLI

Este capítulo traz uma breve história sobre quem foi Jakob Bernoulli e sua contribuição para as equações diferenciais ordinárias, bem como, a contribuição de Leibniz para a equação diferencial de Bernoulli. As biografias consultadas para formação deste capítulo foram (EVES, 2011), (OCONNOR; ROBERTSON, 1998), (MACHADO, 2014), (PARKER, 2013), (ECALCULO-USP) e (ZILL, 2001).

2.1 Jakob Bernoulli

Os Bernoulli foram uma família suíça de acadêmicos que tiveram grandes contribuições com a matemática, história, física e astronomia do século XVI ao XX. Jakob ou Jacques Bernoulli, como também era chamado, foi o primeiro dos dois filhos a ter relevância em cálculo e probabilidade (ZILL, 2001). Jakob foi um matemático nascido na Basileia no dia 27 de dezembro de 1654 e veio a óbito no dia 16 de agosto de 1705 em sua cidade natal. Jacques foi obrigado a estudar teologia e filosofia por seus pais, o que tornou Jacques um mestre em filosofia no ano de 1671 e licenciado em teologia no ano de 1676. Durante o tempo em que estava cursando a graduação, ele estudava matemática, e astronomia (com foco em cometas) tornando-se, assim, o primeiro integrante da família a ter interesse pela matemática (MACHADO, 2014).

Depois de graduado em teologia, Bernoulli trabalhou como professor pessoal em Genebra. Mais tarde, em 1681, ele viajou à Europa onde conheceu e estudou com nomes que vieram a ser grandes matemáticos e físicos, dentre eles Gottfried Leibniz, Robert Hooke, Isaac Barrow etc. (MACHADO, 2014). Em 1683, ao retornar a Suíça, ele trabalhou como professor de mecânica ensinando sobre a mecânica dos sólidos e líquidos. Foi convidado a ocupar um cargo na igreja, mas rejeitou, pois seu interesse era atuar na matemática. No ano de 1684 Jakob se casou com Judith Stupanus com quem teve dois filhos, um menino e uma menina, que não tiveram interesse pela matemática (OCONNOR; ROBERTSON, 1998).

Em 1687 retornou a Basileia e tornou-se professor de matemática, ocupação que perdurou até o seu último dia de vida, quando então quem assumiu o cargo foi seu irmão Johann. Os dois irmãos Bernoulli tiveram muitos atritos entre eles, por questões científicas, mas sempre

mantiveram um intercâmbio de ideias com Leibniz, contribuindo muito com a matemática (EVES, 2011).

Jakob e Johann estudaram para desenvolver os métodos de resolução de equações diferenciais e para aumentar o campo de suas aplicações e solucionar inúmeros problemas formulados através de equações diferenciais desse tipo, $y' = \left[\frac{a^3}{(b^2 y - a^3)} \right]^{\frac{1}{2}}$, por exemplo (ECALCULO-USP).

Figura 1: Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli, respectivamente



Fonte: Eves, 2011.

Em 1689 Jakob Bernoulli publicou sobre as séries infinitas, na qual diz que, se um experimento é repetido muitas vezes a frequência relativa com que um evento ocorre é a mesma que a probabilidade do evento. Publicou no mesmo ano a lei dos grandes números na teoria da probabilidade que é a interpretação matemática do resultado das séries infinitas. Até 1704 ele continuou a fazer publicações acerca do assunto, mas, em 1696 Bernoulli resolveu a equação diferencial não linear de primeira ordem, conhecida hoje como a “Equação de Bernoulli” (OCONNOR; ROBERTSON, 1998):

$$y' = p(x)y + q(x)y^n$$

Para tal resolução, Jakob contou com a ajuda de seu irmão Johann Bernoulli e do matemático Gottfried Leibniz, que três meses depois de sua publicação conseguiu a solução através de uma mudança de variável.

Mais tarde, Bernoulli desenvolveu interesse também pelo estudo de curvas e foi o matemático que mais avançou no estudo da espiral logarítmica. Teve grande reconhecimento

pelo trabalho “A arte de conjecturar” publicado em 1713, oito anos depois de seu falecimento. Apesar de deixar o trabalho incompleto, teve grande reconhecimento de sua importância na teoria das probabilidades.

Além da família Bernoulli, como já citado, Leibniz teve sua contribuição com os irmãos Bernoulli no estudo das equações diferenciais, dando base a solução mais tarde detalhada por Johann.

2.2 Leibniz contribuiu com a Equação de Bernoulli

Gottfried Wilhelm Leibniz, considerado um gênio universal do século XVII (EVES, 2011), foi um alemão nascido no dia 01 de julho de 1646 e que teve a sua vida marcada por conquistas, aos 15 anos ingressou na Universidade e quando fizera 17 anos adquiriu o seu diploma de bacharel. Leibniz, como ficou conhecido, era um teólogo, formado em direito, filosofia e matemática (ECALCULO-USP).

Leibniz descobriu o teorema fundamental do cálculo, desenvolveu parte de sua notação para o assunto e estabeleceu várias fórmulas elementares de diferenciação, dentre tantas outras descobertas e resoluções, ele formulou as principais propriedades da adição, multiplicação e negação lógicas (EVES, 2011).

Figura 2: Gottfried Wilhelm Leibniz.



Fonte: Eves, 2011.

Três meses após a publicação de Jacob Bernoulli acerca da equação de Bernoulli em 1695, Leibniz publicou uma solução pelo método da mudança de variáveis y^{1-n} . Porém, é

importante esclarecer que ele não apresentou uma substituição reduzindo a uma equação diferencial linear, também não deu passo a passo para que se chegasse ao resultado da equação (PARKER, 2013). Em 1696 Jakob Bernoulli anunciou por meio de um artigo publicado que Leibniz resolveu o seu problema, enquanto Johann mais tarde esclareceu uma segunda solução, em 1697 publicou que estava à procura da resolução da equação de Jacob mostrando duas soluções. A primeira solução proposta por Johann era baseada na resolução de Leibniz, onde através da mudança $y = v^{\frac{1}{1-n}}$ a equação é transformada em uma equação diferencial linear. A segunda solução propõe que a solução seja definida como $y = mz$. Onde y foi substituído na equação $ady = ypdx + by^n qdx$ significando que y resolve a EDO original.

Johann chegou ainda a afirmar que $\frac{adz}{z} = pdx$ onde z corresponde a

$$\frac{ady}{dx} = yp$$

Sendo esta parte da solução $\frac{ady}{dx} = yp + by^n q$.

A solução escrita por Johann $y = mz$ com um grau de liberdade foi dividida em duas partes onde, mz resolve a equação original e z a homogênea (PARKER, 2013).

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo, apresentaremos a parte teórica do trabalho. Veremos as definições e os conceitos básicos de uma EDO, dando destaque a Equação de Bernoulli e seu método de solução. As referências utilizadas aqui foram (GUIDORIZZI, 2013) e (ZILL, 2001).

3.1 Introdução as Equações Diferenciais

De acordo com Zill (2001) uma equação diferencial tem as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes.

Por exemplo, uma equação $\frac{dy}{dx} = y$ que é definida como uma equação diferencial. Na maior parte dos casos, o objetivo principal é encontrar quem é a função $y = f(x)$ capaz de satisfazer a equação. Essa função será a solução da equação.

3.2 Classificações das Equações Diferenciais.

3.2.1 Com relação ao tipo

Uma equação diferencial pode ser compreendida de dois tipos, sendo o primeiro tipo a função em que existe apenas uma variável independente, chamada de Equação Diferencial Ordinária, ou EDO, e o segundo tipo possui mais de uma variável independente, sendo chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Nesse trabalho, o nosso foco será as equações do tipo EDO, conforme os exemplos a seguir:

$$1. \frac{dy}{dt} - 5y = 1.$$

$$2. \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x.$$

3.2.2 Classificação a ordem

De acordo com o Zill (2001) a ordem da equação é por definição a ordem da derivada com maior ordem em uma equação diferencial.

- i. Note que, $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$ é uma EDO de ordem 2 pois sua maior derivada é de 2ª ordem;
- ii. A EDO mais geral de ordem n pode ser escrita como $F(x, y, y'(t), \dots, y^n) = 0$.

3.3 Soluções para uma Equação Diferencial.

Qualquer função f definida em um intervalo I , que, ao ser substituída em uma equação diferencial, altera a equação reduzindo a uma identidade, é uma solução para a equação no intervalo I . Se a solução para a equação for nula, então ela é uma solução trivial.

Assim, as soluções para uma EDO podem ser encontradas de duas formas, uma forma explícita, quando a equação for apresentada da forma $y = f(x)$, ou implícita, quando não é possível explicitar e a equação aparece da forma $G(x, y) = 0$, definindo, uma ou mais soluções para as equações diferenciais explícitas definidas em I .

A seguir são mostrados dois exemplos de equações implícitas e explícitas, respectivamente.

Exemplo 1: Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Segue, por derivação implícita que

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y * \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ou } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ neste exemplo define duas funções diferenciais explícitas, sendo elas, $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$. Além disso, note que qualquer relação da forma $x^2 + y^2 - c = 0$ satisfaz $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ para qualquer constante c . Com isso, fica subentendido que a relação deve sempre fazer sentido no sistema dos números reais, dessa forma, não se pode dizer que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ determina a solução da EDO.

Exemplo 2 (ZILL, 2001): Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação não-linear

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

No intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução:

Escrevendo a EDO como $\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$ e verifique se a função é uma solução, após a substituição, se a diferença for zero para todo x no intervalo.

$$\frac{dy}{dx} = 4 * \frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \text{ e } y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

Ou seja,

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x \left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

Para qualquer número real.

Observação: Geralmente, uma equação diferencial possui infinitas soluções. Mas, também pode ter uma solução do tipo particular, quando os valores são definidos para cada constante dentro de uma derivada, como mostra o próximo tópico a seguir.

3.3.1 Solução particular

Solução particular é a solução para uma equação diferencial que independe de parâmetros arbitrários. Ou seja, para obter uma solução particular deve-se escolher valores particulares para as constantes dentro da derivada.

Exemplo 1 (CAVALCANTE, 2014): Encontre a solução particular da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = x + 1$. Sabendo que essa curva passa no ponto $P_0(0,1)$ ou equivalentemente satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Solução:

Perceba que, a equação dada no enunciado pode ser solucionada fazendo $dy = (x + 1)dx$, o que nos leva a dizer que $y = \int (x + 1)dx$, o que é solucionada por,

$$y = \int x dx + \int 1 dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + x + C$$

sendo a solução geral.

A condição inicial é que a curva passa no ponto $P_0(0,1)$, o que quer dizer que $y = 1$ quando $x = 0$ e ao ser substituído em

$$y = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Tem-se,

$$1 = \frac{0^2}{2} + 0 + C$$

$$1 = \frac{0}{2} + 0 + C$$

$$1 = 0 + 0 + C$$

$$C = 1$$

Assim, a solução é

$$y = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Nem sempre é possível encontrar uma solução para a equação diferencial especificando-se os parâmetros para a família de soluções, a isto damos o nome de solução singular.

3.4 Equação Diferencial de primeira ordem

Aqui apresentaremos alguns dos conceitos de EDOs que podem ser encontrados em (GUIDORIZZI, 2013) e (ZILL, 2001).

Uma equação diferencial de primeira ordem é uma equação do tipo

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

sujeita à condição de início $y(x) = y$, definida em intervalo aberto I é uma solução deste caso se, para todo x em I ocorrer,

$$y'(x) = F(x, y(x)).$$

Exemplo 1 (GUIDORIZZI, 2013): Determine uma função $y = y(x)$, com $y(1) = 2$, que satisfaça a propriedade: o coeficiente angular de uma reta tangente no ponto x da abscissa é o mesmo que o produto das coordenadas do ponto tangencial.

Solução:

No ponto de abscissa x o coeficiente angular é $y'(x)$ e o ponto tangencial $(x, y(x))$. Portanto,

$$y'(x) = xy(x).$$

Então, a função a ser encontrada é uma solução para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Considerando $y(1) = 1$, pode-se supor $y(x) > 0$ para qualquer x no intervalo de domínio I da função. Assim, para todo x em I ,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x.$$

Sabendo que $(\ln y(x))' = \frac{y'(x)}{y(x)}$ e que $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$ então, $(\ln y(x))' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'$ para qualquer x em I .

Existindo uma constante k tal que

$$\ln y(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

para todo x em I .

Partindo da condição $y(1) = 1$

$$\ln y(1) = \frac{1^2}{2} + k$$

Dessa forma, $k = -\frac{1}{2}$.

Portanto, $y = e^{\frac{x^2-1}{2}}$, x qualquer, soluciona o problema.

3.4.1 Classificação quanto a Linearidade

3.4.1.1 Equações Lineares

Uma equação diferencial linear pode ser escrita como,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Observe que a variável dependente y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência, logo, são de primeiro grau. Enquanto todos os coeficientes dependem de x como variável independente.

Passo a Passo: Equação Linear de Primeira Ordem

Dada uma equação diferencial linear da forma

$$y' + P(x)y = f(x),$$

o método para encontrar uma solução consiste nos seguintes passos:

- i. Calcular o fator integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$
- ii. Multiplicar a equação pelo fator integrante e transformar o lado esquerdo da equação na derivada de um produto, a saber, $\frac{d}{dx}(y \cdot \mu(x))$.
- iii. integrar para achar a solução geral.

Cumprindo os passos acima, chegaremos na seguinte solução geral desse tipo de EDO

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int \mu(x)f(x)dx + C \right),$$

onde C é a constante de integração.

Exemplo 1: Resolva

$$\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Solução: A equação é linear de primeira ordem, assim o $P(x) = -3$ e seu fator integrante é

$$\mu(x) = e^{\int (-3)dx} = e^{-3x}$$

Calculando a integral do fator integrante vezes a função $f(x)$ na equação tem-se,

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int (\mu(x) * f(x)) dx$$

$$y = \frac{1}{e^{-3x}} \int (e^{-3x} * 0) dx$$

$$y = \frac{1}{e^{-3x}} \int 0 dx$$

$$y = \frac{1}{e^{-3x}} C$$

$$y = e^{3x} C$$

3.4.1.2 Equações não-Lineares

Uma EDO que não é linear é dita não-linear, logo não pode ser escrita da forma vista acima (GUIDORIZZI, 2013), como a equação do exemplo a seguir.

Exemplo 1: Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação não-linear

$$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

Solução: Para comprovar se a dada função é a solução para a EDO acima vamos escrever a equação diferencial como $\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0$ e verificar se a diferença é zero para todo x no intervalo. Observe,

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{x^4}{16} \right) = 4 \left(\frac{x^{4-1}}{16} \right) = 4 \left(\frac{x^3}{16} \right) = 4 * \frac{1}{16} x^3 = \frac{1}{4} x^3$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{(x^4)^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^2}{4}$$

Com isso, percebemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - x \left(\frac{x^4}{16} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$$

Para todo número real.

3.5 Outros tipos de EDOs

Existem também outros tipos de EDOs que não terão estudo aprofundado neste trabalho, mas, que serão citadas a seguir através de um breve resumo. Alguns tipos de EDOs podem pertencer a mais de um grupo de equações que já citamos ou citaremos nesse trabalho.

Equação de variáveis separáveis: podem ser definidas como equações da forma,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada separável ou tem variáveis separáveis e pode também ser escrita como, $h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$ e pode ser reduzida a equação anterior quando $h(y) = 1$.

Equações homogêneas: Uma equação diferencial da forma,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau. Portanto, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é homogênea se,

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \text{ e } N(tx, ty) = t^n N(x, y).$$

Equações exatas: Uma expressão diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

é uma equação **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x, y)$. Uma equação diferencial da forma,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é chamada de uma **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

4. A EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Os conceitos e resoluções utilizados acerca da equação de Bernoulli para este capítulo são referentes a (GUIDORIZZI, 2013).

A equação diferencial de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x)y^n, n \neq 0 \text{ constante},$$

Para $y \neq 0$, tal equação é equivalente a $y^{-n} \frac{dy}{dx} = P(x)y^{1-n} + f(x)$. Com a mudança de variável $u = y^{1-n}$, $y = y(x)$, a equação de Bernoulli se transforma na equação linear

$$\frac{du}{dx} = (1-n)P(x)u + (1-n)f(x).$$

4.1 Soluções da equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x)y^n, n \neq 0.$$

Com $P(x)$ e $f(x)$ definidas e contínuas num mesmo intervalo aberto I.

Solução constante: Se $n > 0$ a equação admitirá a solução constante $y(x) = 0, x$ em I.

Soluções não constantes:

Passo 1: Multiplicar os dois membros por y^{-n} .

Passo 2: Fazer a mudança de variável $u = y^{1-n}, y = y(x)$.

Exemplo 1 (GUIDORIZZI, 2013): Resolva a equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = y + e^{-3x}y^4$$

Com $n = 4$, a função constante $y(x) = 0$ é uma solução. Então, vamos multiplicar os dois membros por y^{-4} para encontrar as soluções não constantes, depois, fazemos a mudança de variável $u = y^{-3}$.

Multiplicando por y^{-4} obtemos

$$y^{-4} \frac{dy}{dx} = (y + e^{-3x} y^4) y^{-4}$$

$$y^{-4} \frac{dy}{dx} = y^{-3} + e^{-3x}$$

Em seguida, fazendo a mudança de variável $u = y^{-3}$ sem esquecer que $\frac{du}{dx} = (1 - n)(y^{-n}) \frac{dy}{dx}$, obtemos $\frac{du}{dx} = -3y^{-4} \frac{dy}{dx}$, e assim a equação linear

$$\frac{du}{dx} - 3u = -3e^{-3x}.$$

Pela fórmula que nos dá as soluções da equação linear, temos

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x) f(x) dx \right]$$

$$u = \frac{1}{e^{3x}} \left[\int (e^{3x})(-3e^{-3x}) dx \right]$$

$$u = e^{-3x} \left[\int -3e^{-3x} e^{3x} dx \right]$$

$$u = e^{-3x} \left[-3 \int e^{-3x} e^{3x} dx \right]$$

$$u = e^{-3x} [-3x + C]$$

De $u = y^{-3}$, segue que a família das soluções da equação dada é

$$y = 0 \text{ e } y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{C - 3x}}$$

Exemplo 2 (ZILL, 2001): Resolva

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solução: Inicialmente, dividiremos toda a equação diferencial por y^2 , a fim de modelar a mesma para a forma que apresentamos acima,

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \frac{y}{y^2} = x \frac{y^2}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy} = x$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = x$$

em seguida, podemos identificar que o termo que compõe o fator de integração $P(x)$ é

$$P(x) = \frac{1}{x}.$$

Comparando com a equação dada na questão encontramos também $f(x)$, que para nosso caso é $f(x) = x$ e $n = 2$, por último devemos fazer a mudança de variável

$$w = y^{1-2},$$

$$w = y^{-1}$$

sua derivada é,

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}.$$

substituindo

$$-\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w = x$$

$$\frac{dw}{dx} - \left(\frac{1}{x}w\right) = -x$$

como o fator integrante para essa equação linear é $1/x$, visto que

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{dx}{x}}$$

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|}$$

$$\mu(x) = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}}$$

$$\mu(x) = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}.$$

Obteremos, assim, a equação

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} w \right] = -1.$$

Integrando,

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} w \right] = -1$$

$$\frac{1}{x} w = -x + C$$

isolando w ,

$$w = -x^2 + Cx$$

mas, $w = \frac{1}{y}$ então,

$$\frac{1}{y} = -x^2 + Cx$$

$$y = \frac{1}{-x^2 + Cx}.$$

5 ALGUMAS DAS PLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A seguir, são apresentadas algumas das aplicações da equação de Bernoulli consultadas em (BRIETZKE, 2014), (GUIDORIZZI, 2013), (ARFKEN, 1922) e (BOYCE, 2009).

5.1 Modelos de crescimento populacional

A equação diferencial de Bernoulli pode ser aplicada à modelos simples de crescimento populacional, como os modelos de crescimento exponencial e crescimento logístico, mais detalhado a seguir.

Crescimento Exponencial. Este é um modelo simples, onde presume-se que a taxa de crescimento de uma população de indivíduos em determinado instante é proporcional ao número de indivíduos no mesmo instante. Por meio de símbolos tem-se que, se $N = N(t)$ é o número de indivíduos no tempo t , então

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N,$$

sendo $\lambda > 0$ a constante de proporcionalidade, que depende do tipo de indivíduos a serem analisados. Consideremos que N varia assumindo valores naturais, assim é importante dizer que $N = N(t)$ varia conforme o tempo. Ao derivarmos $N'(t) = \frac{dN}{dt}$ teremos o valor que representará a taxa de crescimento desta população. Assim, a equação $\frac{dN}{dt} = \lambda N$ pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis.

$$\frac{dN}{N} = \lambda dt \quad \text{ou} \quad N \neq 0$$

Por integração tem-se que,

$$\int \frac{dN}{N} = \lambda \int dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \lambda \int 1 dt$$

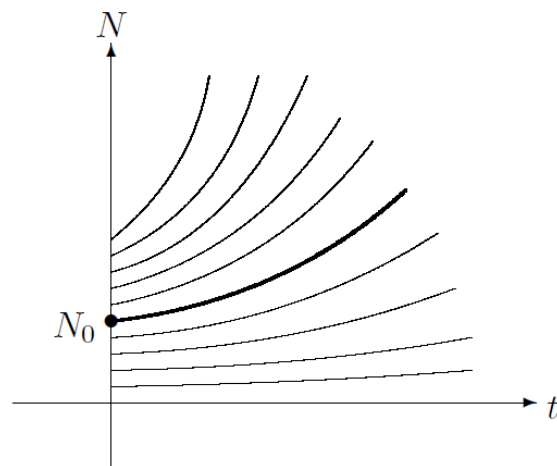
$$\ln|N| + C = \lambda t + C$$

$$\ln N = \lambda t + C$$

Assim, a exponencial pode ser aplicada de modo que $N = e^C e^{\lambda t}$. Porém, e^C é uma constante indeterminada, ou seja, pode ser representada por qualquer letra como o próprio C já utilizado. Se é conhecido a população no tempo inicial, ou seja, quando este é zero, com condição $N(0) = N_0$, tem-se $C = N_0$, assim,

$$N = N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

Figura 3: número de indivíduos no instante t .



Fonte: Brietzke (2014).

Portanto, este modelo mostra que, para este exemplo, a população cresce exponencialmente, apresentando a evolução desta até certo ponto.

Crescimento logístico. Tomando como base o exemplo anterior, sabemos que ao haver um aumento no número de indivíduos de determinada população também há um número crescente na competição entre eles, seja por alimentos ou sobrevivência em geral. Com isto, é gerado uma diminuição da taxa de crescimento. Assim, pode-se apresentar a taxa de crescimento como,

$$\frac{dN}{dt} = \varphi(N)N$$

Considerando que haverá uma variação de $\varphi(N)$ com N , onde haverá diminuição conforme N aumenta. A função que contém esta propriedade é $\varphi(N) = a - bN$, sendo $a > 0$ e $b > 0$ constantes, onde a EDO será a equação logística,

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$$

Supondo que $0 < b \ll a$, ou seja, b é maior que zero e muito menor que a , e a população N ainda ser pequena, teremos que, a taxa de crescimento é de aproximadamente $N' \cong aN$. Quando N for um valor alto o número que representa a taxa de crescimento será menor.

A EDO $\frac{dN}{dt} = (a - bN)N$, apesar de separável, é uma equação de Bernoulli, o que a torna possível de ser resolvida conforme é mostrado a seguir:

$$N' = aN - bN^2$$

Com $n = 2$

$$z = N^{1-2} = N^{-1}, \quad N = z^{-1}, \quad N' = -z^{-2}z'$$

Substituindo, segue que

$$-z^{-2}z' = az^{-1} - bz^{-2}$$

Multiplicando por z^2 ,

$$z' + az = b$$

Tendo como fator integrante $\mu = e^{\int a \cdot dt} = e^{at}$

$$e^{at}z' + ae^{at}z = be^{at}, \quad (e^{at}z)' = be^{at}, \quad e^{at}z = b \int e^{at} dt = \frac{b}{a}e^{at} + C$$

Logo,

$$z = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$$

$$N = \frac{1}{\frac{b}{a} + Ce^{-at}}$$

Analisando, temos $N = 0$ como sendo uma solução da equação acima, onde não está vinculada na resolução para valor algum de C , esta solução foi perdida quando a mudança de variável aconteceu $z = N^{-1}$, excluindo a possibilidade inicial $N = 0$.

Se a condição inicial for $N(0) = N_0$ é possível a determinação de C como $\frac{1}{N_0} = \frac{b}{a} + C$ e encontramos

$$N = N(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{N_0} - \frac{b}{a}\right) e^{-at}}.$$

Note que, o modelo prevê que para t grande, independente da população inicial $N(0)$, $N(t)$ se aproximará sempre do mesmo valor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{a}{b}$$

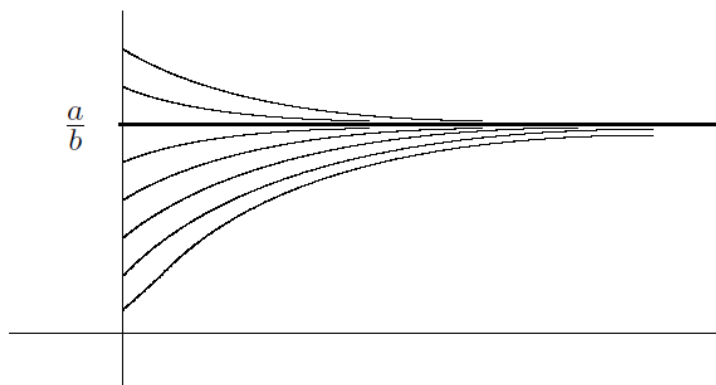
Para valores pequenos de t ,

$$N(t) = \frac{e^{at}}{\frac{1}{N_0} + \frac{b}{a}(e^{at} - 1)},$$

Como $1 - e^{at} \approx 0$, temos $N(t) \approx N_0 e^{at}$, para t pequeno.

A solução $N(t) = \frac{a}{b}$ corresponde a um ponto de equilíbrio com estabilidade. Tendo a condição inicial como $N_0 = \frac{a}{b}$, $N(t)$ se manterá constante com esse valor em qualquer instante futuro. Se a condição inicial for pouco diferente deste valor, $N(t)$ tende a voltar para o seu valor inicial de equilíbrio. Enquanto, para a solução constante $N(t) = 0$ é um ponto instável, mas, de equilíbrio. Se a condição inicial for pouco alterada então, $N(t)$ tende a se afastar cada vez mais de 0 quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 4: $N(t)$ permanece estável.



Fonte: Brietzke (2014).

Observação: Este modelo foi proposto em 1838 pelo matemático belga Verhulst para a população humana. Mas, em 1930 foi comprovado que descreve bem a população de drosófilas (uma espécie de moscas).

5.2 Modelo matemático para o crescimento de peixes (Proposto por Von Bertalanffy)

Como vimos, a equação diferencial de Bernoulli é não linear, mas pode ser transformada em uma equação linear de primeira ordem através do método da mudança de variável, justamente o que ocorre com o modelo de Von Bertalanffy (Modelo Matemático para crescimento de peixes).

Sabemos que a pesca tem grande importância para a sobrevivência, seja como alimento ou como atividade econômica, gerando trabalho e consequentemente renda. Mas, sabemos que algumas espécies podem vir a entrar em extinção por isso, se faz necessário um controle de pesca. Visando este problema, Von Bertalanffy desenvolveu um modelo matemático que cuida do controle de crescimento de peixes. Assim, esta equação pode ser utilizada para controlar o peso e alimentação de peixes visando o aumento populacional destes seres.

Exemplo: Suponha que, o peso de cada espécie é dado pela equação a seguir (Von Bertalanffy),

$$\frac{dp}{dt} = \beta p^{2/3} - \gamma p$$

e estabelece que, o aumento do peso em um peixe é proporcional a área de sua superfície.

- β é a constante de anabolismo e representa a taxa de crescimento de massa por unidade de superfície.
- γ é a constante de catabolismo e representa a taxa de diminuição da massa por unidade de superfície.

Essa EDO é de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$. Onde, tem-se

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p = \beta p^{\frac{2}{3}}.$$

Como solução fazemos a mudança de variáveis $u = p^{1-\frac{2}{3}} = p^{\frac{1}{3}}$,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{3} p^{-\frac{2}{3}} \frac{dp}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{3} (\beta - \gamma p^{\frac{1}{3}})$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{\gamma}{3}u = \frac{\beta}{3}$$

De modo que, o fator integrante é $e^{\frac{\gamma}{3}t}$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{\frac{\gamma}{3}t} u \right] = \frac{\beta}{3} e^{\frac{\gamma}{3}t}$$

$$e^{\frac{\gamma}{3}t} u = \frac{\beta}{3} \int e^{\frac{\gamma}{3}t}$$

Portanto, a solução geral será

$$u = \frac{\beta}{\gamma} + C e^{-\frac{\gamma}{3}t}$$

Assim,

$$p(t) = \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^3 \left(1 + \frac{C\gamma}{\beta} e^{-\frac{\gamma}{3}t} \right)^3$$

Quando t for zero, p será insignificante. Considerando $P(0) \cong 0$,

$$\left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^3 \left(1 + \frac{C\gamma}{\beta} \right)^3 = 0$$

$$\left(1 + \frac{C\gamma}{\beta} \right)^3 = 0$$

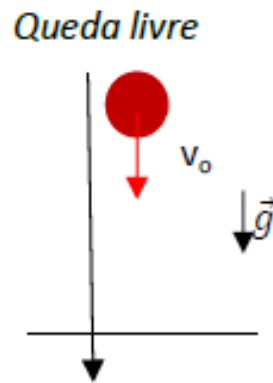
$$C = -\frac{\beta}{\gamma}$$

Então,

$$p(t) = \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{3}t} \right)^3$$

5.3 Queda de um corpo num Meio com Atrito

Figura 5: Queda de um corpo num meio com atrito.



Fonte: Info escola, 2013.

Supondo que um corpo esteja caindo no ar e que a força de atrito deste seja proporcional ao quadrado da velocidade com que o corpo se move no mesmo. Então, a força resultante será

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - \gamma v^2,$$

onde g é a aceleração da gravidade, m é a massa do corpo, v e x são respectivamente velocidade e posição do corpo com relação ao tempo t . Note que, $mv \frac{dv}{dx} = m \frac{dx}{dt} * \frac{dv}{dx} = m \frac{dv}{dt}$. A sua velocidade obedece a seguinte equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m} v = g v^{-1},$$

que é uma equação de Bernoulli e, também, de variáveis separáveis. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo: Supondo que $v(0) = v_0$, vamos mostrar que

$$v(x) = \sqrt{\frac{mg}{\gamma} + \left(v_0^2 - \frac{mg}{\gamma}\right) e^{-\frac{2\gamma}{m}x}}.$$

No geral, se a força de atrito da forma $-\gamma|v|^n$, o procedimento acima nos leva a uma equação de variáveis separáveis.

Se multiplicarmos por v ambos os lados da equação $\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v = gv^{-1}$, obtemos

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v^2 = g.$$

Se fizermos $w = v^2$, então

$$\frac{dw}{dx} = 2v * \frac{dv}{dx},$$

Com essa substituição a equação $\frac{dv}{dx} + \frac{\gamma}{m}v = gv^{-1}$ se transforma em

$$\frac{dw}{dx} + 2\frac{\gamma}{m}w = 2g,$$

Onde o fator integrante será $e^{\frac{2\gamma}{m}x}$. Portanto, ao multiplicar a equação $\frac{dw}{dx} + 2\frac{\gamma}{m}w = 2g$ por esse fator, tem-se

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\frac{2\gamma}{m}x} w \right] = 2ge^{\frac{2\gamma}{m}x}$$

Ou seja,

$$e^{\frac{2\gamma}{m}x} w = \int 2ge^{\frac{2\gamma}{m}x} dx.$$

Dessa forma, a solução geral da equação $\frac{dw}{dx} + 2\frac{\gamma}{m}w = 2g$ é

$$w(x) = \frac{mg}{\gamma} + ce^{-\frac{2\gamma}{m}x},$$

Voltando à variável inicial, temos

$$v^2 = \frac{mg}{\gamma} + ce^{-\frac{2\gamma}{m}x}.$$

Como $v(0) = v_0$, devemos tomar $c = v_0^2 - \frac{mg}{\gamma}$, logo

$$v^2 = \frac{mg}{\gamma} + \left(v_0^2 - \frac{mg}{\gamma} \right) e^{-\frac{2\gamma}{m}x}.$$

Portanto, a solução do valor inicial será dada pela equação

$$v(x) = \sqrt{\frac{mg}{\gamma} + \left(v_0^2 - \frac{mg}{\gamma}\right) e^{-\frac{2\gamma}{m}x}}.$$

5.4 Epidemiologia

Em 1766 Daniel Bernoulli, filho de Johann, descobriu que a equação de Bernoulli poderia ser utilizada para avaliar a eficácia de vacinação contra varíola, o que poderia gerar um controle epidemiológico. Daniel dividiu a população em dois grupos, os que não haviam sido infectados ainda e os que já haviam sido infectados e por isso se encontravam imunes, o exemplo a seguir foi retirado do livro Equações diferenciais de Boyce e esclarece como funciona a equação de Bernoulli neste caso.

Exemplo 1: Suponha que uma dada população pode ser dividida em duas partes: os que têm determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. Seja x a proporção de indivíduos suscetíveis, e seja y a proporção de indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença se espalha através do contato entre os elementos doentes da população e os sãos, e que a taxa de disseminação $\frac{dy}{dt}$ é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que os elementos de ambos os grupos se movem livremente, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y . Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0$$

Em que α é um fator de proporcionalidade positiva e y_0 é a proporção inicial de indivíduos infectados.

Resolva o problema de valor inicial e mostre que $y(t) \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow \infty$, o que significa que, finalmente, a população inteira ficará doente.

Solução: Observa-se que a equação mostrada na questão é uma equação de Bernoulli, com $n = 2$ veja,

$$\frac{dy}{dt} - \alpha y = -\alpha y^2.$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dt} - \alpha y^{1-2} = -\alpha$$

$$y^{-2} \frac{dy}{dt} - \alpha y^{-1} = -\alpha$$

Substituindo $w = y^{-1}$,

$$y^{-2} \frac{dy}{dt} = \frac{dw}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} + \alpha w = \alpha.$$

O fator integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \alpha dt} = e^{\alpha t}$$

Usando esse fator para multiplicar a equação,

$$\frac{d}{dt}[e^{\alpha t} w] = e^{\alpha t} \alpha$$

$$e^{\alpha t} w = \alpha \int e^{-\alpha t} + C$$

$$w = 1 + C e^{-\alpha t}.$$

Voltando a variável de início,

$$y(t) = \frac{1}{1 + C e^{-\alpha t}}$$

Sendo, $y(0) = y_0$, tomando $C = \left(\frac{1-y_0}{y_0}\right)$, tem que a solução do valor inicial será,

$$y(t) = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}}$$

Quando t tende a infinito, o limite é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}} = 1$$

Desta forma, $y_0 \rightarrow 1$ significando que a doença irá se espalhar em toda a população.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), foi realizado um estudo sobre a equação de Bernoulli, onde foi feito um resgate histórico da vida de Jakob e Bernoulli e a contribuição de seu irmão Johann e do matemático Leibniz para com a equação diferencial de Bernoulli. Foi estudado as aplicações da equação de Bernoulli, chegando à conclusão de que esta pode ser utilizada em algumas aplicações como controle de crescimento populacional, como modelo matemático para o crescimento de peixes (Proposto por Von Bertalanffy) e até na queda de um corpo num meio com atrito. Este trabalho apresentou dificuldades na pesquisa relacionada ao objetivo que levou Bernoulli a desenvolver tal equação, informações do tipo não foram encontradas nos livros básicos disponíveis no curso de Ciência e Tecnologia, o que gera ainda mais necessidade de um trabalho para complemento fora dos livros.

Portanto, com este trabalho pode ser verificado a importância da equação diferencial de Bernoulli, mostrando que ela pode estar presente no cotidiano. Assim, podemos ressaltar que este estudo pode ser utilizado como material complementar para quem tem interesse a mais pela equação de Bernoulli e suas aplicações.

7 REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

BRIETZKE. **SEÇÃO 6: EQUAÇÃO DE BERNOULLI**. [s.l: s.n.]. 2014. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/textos/aula6.pdf>>. Acesso em: 19 out. 2022.

CAVALCANTE, Luciano Moura. **Equações diferenciais ordinárias/Luciano Moura Cavalcante**. Fortaleza: EdUECE, 2014.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática/Howard Eves**; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**. 5. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. V. 4. Cap. 10.

O'CONNOR, Jj; ROBERTSON, Ef. **JACOB BERNOULLI - BIOGRAPHY**. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/>. 1998. Acesso em: 19 out. 2022.

LESSA, J. R. **Equações Diferenciais - Matemática**. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/matematica/equacoes-diferenciais/>>. Acesso em: 23 nov. 2022.

MACHADO, G.; ALBRECHT, L. **RESGATE HISTÓRICO ACERCA DA CONTRIBUIÇÃO DA FAMÍLIA BERNOULLI PARA A MATEMÁTICA**. [s.l: s.n.]. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/CC_Albrecht_03000787062.pdf>. Acesso em: 10 out. 2022.

MAGALHÃES, Paulo Marcelo Dias. **BÁSICOS, C. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS**. [s.l: s.n.]. Disponível em:

<http://professor.ufop.br/sites/default/files/freud/files/edocap_1_0.pdf>. 2013. Acesso em: 20 out. 2022.

PARKER, A. E. Who Solved the Bernoulli Differential Equation and How Did They Do It?, THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL, VOL. 44, N o . 2, MARCH 2013.

SILVA, A. C. B. DA. **Lançamento Vertical e Queda Livre – Física**. 2013. Disponível em: <<https://www.infoescola.com/fisica/lancamento-vertical-e-queda-livre/>>. Acesso em: 23 nov. 2022.

ECALCULO, USP. **BIOGRAFIA DE LEIBNIZ**. Disponível em: <<http://ecalculo.if.usp.br/historia/leibniz.htm>>. Acesso em: 6 nov. 2022.

ZILL, Dennis G.; Cullen, Michael R. Equações Diferenciais. 3. Ed. São Paulo: Pearson, 2001.