

ESTUDO DO AMORTECIMENTO EM CIRCUITOS DO TIPO RLC SÉRIE

Ellen Eugênia de Araújo Guerra¹, Matheus da Silva Menezes(Orientador)

Resumo: O circuito RLC (Resistor, Indutor e Capacitor) é o circuito elétrico oscilante por excelência. A sua forma simples permite controlar os parâmetros que caracterizam o seu funcionamento, o que o torna um excelente mecanismo para a simulação de outros sistemas oscilantes. Este tipo de circuito é utilizado em aparelhos de rádio, osciladores, fontes de tensão e em sistemas de comunicação. Este trabalho tem como objetivo principal explicar o funcionamento do circuito RLC (Resistor, Indutor e Capacitor) série, utilizando as equações diferenciais de segunda ordem e as transformadas de Laplace como ferramentas para analisar a carga e a corrente CC (Corrente Contínua) no circuito RLC determinar o tipo de amortecimento. As resoluções dos problemas sugeridos no trabalho foram divididas em duas fases de análise: computacional, com o uso de simulações e análise teórica para determinar o comportamento da carga e da corrente nos elementos do circuito. Os resultados obtidos foram satisfatórios no que diz respeito às equações resolvidas teoricamente e visualizadas em simulação, observando cada tipo de amortecimento.

Palavras-chave: Equações diferenciais.Circuito RLC.Amortecimento .

1. INTRODUÇÃO

Com o passar dos anos, novas descobertas foram surgindo para melhorar e ampliar o conhecimento da humanidade. Uma delas é a descoberta do cálculo integral e diferencial como ferramenta importante para os avanços tecnológicos. Dele, surgiu o estudo das equações diferenciais, responsáveis por fornecerem diversos modelos sistemáticos capazes de solucionar uma gama de problemas encontrados na engenharia [1].

De acordo com [2], equações diferenciais são aquelas que possuem derivadas de funções não conhecidas em relação a uma ou mais variáveis. Dentro delas, existem as equações diferenciais de 2ª ordem que são uma ferramenta importante na modelagem da mecânica dos fluidos, condução de calor e sistemas oscilantes.

Na engenharia elétrica, o uso de equações diferenciais de 2ª ordem tem o papel de modelar alguns circuitos, dentre eles o circuito RLC. Este tipo de circuito é dito de 2ª ordem por ser modelado por este tipo de equação. É um circuito oscilante por possuir dois elementos armazenadores de energia, o capacitor e o indutor e são utilizados em aparelhos de rádio receptores ou transmissores, osciladores, filtros, fontes de tensão e sistemas de comunicação em geral[3].

Frequentemente utilizado em circuitos osciladores, o circuito RLC é um tipo de circuito elétrico composto de um resistor com (R), um indutor (L), um capacitor com (C) e uma fonte de alimentação com tensão. Conhecendo-se a relação entre esses componentes e sendo possível prever como será seu comportamento real, sua utilização não só em osciladores, mas também em outros aparelhos elétricos onde é usado, pode ser feita de forma mais completa e segura, quando se fala em previsão de problemas e melhor utilização.

Outra ferramenta importante na resolução de problemas de circuitos elétricos é a transformada de Laplace, adequada para a resolução de circuitos com comportamentos lineares, assim como o circuito RLC [4]. Ela se faz importante por avaliar circuitos em relação ao tempo, no domínio da frequência oferecendo uma resolução precisa para estas considerações.

Este trabalho tem como objetivo principal explicar o funcionamento do circuito RLC, utilizando as equações diferenciais de segunda ordem e as transformadas de Laplace como ferramentas para analisar o comportamento da carga e da corrente CC (Corrente Contínua) no circuito RLC, determinando assim o tipo de amortecimento.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações diferenciais

Segundo [2], equações diferenciais podem ser definidas como equações que possuem derivadas de uma ou mais variáveis não conhecidas (variáveis dependentes) em relação a uma ou mais variáveis independentes. Para [1] é uma ferramenta para modelar os processos físicos usando as relações existentes através das equações e suas taxas de variações, as derivadas.

As equações diferenciais podem ser classificadas pelo seu tipo, ordem e linearidade [1,2]. No que diz respeito ao tipo são diferenciadas entre ordinárias e parciais. A primeira é quando a variável dependente tem uma única variável independente associada. Já a do segundo tipo, tem mais de uma variável independente associada. Com relação a sua ordem, classifica-se pela maior derivada que a equação diferencial é encontrada. Quanto à linearidade, são consideradas equações diferenciais lineares quando uma função de variável dependente y e suas derivadas $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ são do primeiro grau e seus coeficientes, respectivamente, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são constantes ou dependem apenas de uma variável independente e $a_n \neq 0$. Dada uma Equação Diferencial Ordinária (EDO), a representação da sua linearidade pode ser vista matematicamente como,

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

2.1.1 Equações diferenciais de 2ª Ordem

Dada à Equação (1) na forma geral da n -ésima ordem, assumindo $n=2$, tem-se a equação linear de segunda ordem é,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (2)$$

em que $a_2(x) \neq 0$.

2.1.2 Equações homogêneas e não homogêneas

A equação diferencial é dita homogênea quando $g(x)$ da Equação (2) é igual à zero. Caso contrário, $g(x) \neq 0$ caracteriza uma equação diferencial não homogênea.

2.1.3 Dependência e independência linear

Para que se possa falar nas soluções de equações diferenciais homogêneas de 2ª ordem, é necessário que se conheça o conceito de dependência e independência linear. De acordo com [2], dado um conjunto de funções $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ em um intervalo I , serão ditas funções linearmente dependentes se as constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não forem todas nulas de forma que,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0 \quad (3)$$

caso contrário, são funções linearmente independentes.

Atrelada a esta afirmação, para que se possa dizer que um conjunto de funções sejam linearmente independentes, a ferramenta Wronskiano(W), auxilia nesta determinação.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2' \\ y_1' & y_2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

onde y_1 e y_2 são funções diferenciáveis. Se $W \neq 0$, estas funções são linearmente independentes.

2.1.4 Equações homogêneas de 2ª ordem – solução geral

A equação linear homogênea se caracteriza como sendo,

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (5)$$

A solução geral para equação homogênea de 2ª ordem, de acordo com (1), é dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad (6)$$

onde y_1 e y_2 devem ser linearmente independentes e formarão a conjunto fundamental de soluções (CFS). c_1 e c_2 são coeficientes arbitrários, e representam assim, todas as combinações de soluções possíveis.

2.1.5 Equações diferenciais não homogêneas de 2ª ordem – solução particular

Uma equação não homogênea de 2ª ordem é dada pela Equação (2).

De acordo com [2], dada uma solução particular y_p de qualquer equação diferencial linear não homogênea, neste caso de ordem 2, em um intervalo I e seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial homogênea associada a Equação (2) em I , a solução geral da equação não homogênea será a soma da solução geral da homogênea e a solução particular, vista abaixo como sendo,

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p \quad (7)$$

em que $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ são constantes.

2.1.6 Problema de valor inicial (PVI)

Na resolução de uma equação diferencial, é possível encontrar uma infinidade de soluções através das constantes arbitrárias do conjunto fundamental de soluções em relação à solução $y(x)$ e suas derivadas. Entretanto, para que se possa modelar a equação a uma determinada situação, deve ser considerada uma condição inicial x_0 [2]. Associando a solução $y(x)$ à condição inicial x_0 de um intervalo I , dá-se o nome de problema de valor inicial. Para a resolução de Problemas de Valor Inicial (PVI) de 2ª ordem, as condições são:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad (8)$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \quad (9)$$

onde x_0, y_0 e y_1 são valores já conhecidos.

2.1.7 Resolução de equações diferenciais com coeficientes constantes – solução para equações homogêneas

Uma equação linear homogênea com coeficientes constantes é dada da seguinte forma:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (10)$$

em que a, b e c são constantes.

Visando encontrar a solução geral da equação diferencial homogênea é preciso supor uma de suas soluções $y(x)$. Será escolhido $y(x) = e^{mx}$, e m é uma constante. A escolha dessa suposição se dar pelo fato da função e^x não se anular ao ser derivada e ser sempre sua múltipla constante [2]. Para resolver a equação diferencial, é necessário conhecer as derivadas da solução informada. Assim sendo,

$$y(x) = e^{mx} \quad (11)$$

$$y'(x) = me^{mx} \quad (12)$$

$$y(x) = m^2 e^{mx} \quad (13)$$

Substituindo a Equação (10) respectivamente em suas derivadas, têm-se as seguintes equações:

$$a(m^2 e^{mx}) + b(me^{mx}) + c(e^{mx}) = 0 \quad (14)$$

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0 \quad (15)$$

Como $e^{mx} \neq 0$ e para que se encontre a solução geral, é necessário conhecer o valor de m através da resolução de uma função quadrática que terá a forma de:

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (16)$$

A equação (16) é chamada de equação característica. Se tratando de uma função quadrática, existirão três casos possíveis para as raízes, que são:

1. $\Delta > 0$, as raízes serão reais e distintas;
2. $\Delta = 0$, as raízes serão reais e iguais;
3. $\Delta < 0$, as raízes serão complexas.

Caso I: raízes reais e distintas ($\Delta > 0$)

Aplicando a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes:

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (17)$$

em que as soluções serão reais e distintas ($m_1 \neq m_2$) e a solução geral será:

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (18)$$

Caso II: raízes reais e iguais ($\Delta = 0$)

Neste caso, como as raízes são iguais ($m_1 = m_2$), a solução será,

$$m_{1,2} = \frac{-b}{2a}, \quad (19)$$

o que configura soluções linearmente dependentes e não podem ser consideradas como uma solução geral, já que não formam um CFS. Entretanto, utilizando o método de *redução de ordem*¹, é possível encontrar uma solução geral de modo que sejam linearmente independentes. Fazendo uso do método citado, tem-se:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x) dx}}{y_1^2(x)} dx \therefore P(x) = \frac{b}{a} \quad (20)$$

$$= e^{\frac{-b}{2a}x} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{(e^{\frac{-b}{2a}x})^2} dx \quad (21)$$

$$= e^{\frac{-b}{2a}x} \int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\frac{-b}{a}x}} dx \quad (22)$$

$$y_2(x) = x e^{\frac{-b}{2a}x}. \quad (23)$$

Encontrada uma solução linearmente independente e podendo compor então um CFS, a solução geral é dada por:

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} \quad (24)$$

Caso III: raízes complexas ($\Delta < 0$)

Ao resolver a fórmula de Bhaskara para este caso, os resultados serão raízes conjugadas, complexas como mostrada em eq.(25) e $m_1 < m_2$.

$$m_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (25)$$

Logo a solução geral é dada por ,

$$y(x) = c_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + c_2 e^{(\alpha - \beta i)x} \quad (26)$$

porém, tal abordagem se torna de difícil uso por se tratar de funções complexas e nestes casos, a melhor opção é lidar com funções reais . Com a finalidade de fazer essa conversão, usa-se o auxílio da fórmula de Euler dada por:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (27)$$

Substituindo θ , que é um número real, por βx e $-\beta x$,

$$e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \text{ e } e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \quad (28)$$

¹ A redução de ordem é outro modelo para resolução de equações diferenciais que fogem do escopo deste trabalho, por isso seus conceitos não serão detalhados.

Somando as duas equações (28) e as subtraindo logo em seguida, resultam em,

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x e^{i\beta x} \quad (29)$$

$$e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i\sin\beta x \quad (30)$$

Dadas às equações (29) e (30), duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ serão montadas considerando $c_1=c_2=1$ para $y_1(x)$ e $c_1=1$ e $c_2=-1$ para $y_2(x)$. Logo,

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (31)$$

$$y_2(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x} \quad (32)$$

Porém,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) = 2e^{\alpha x}\cos\beta x \quad (33)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) = 2ie^{\alpha x}\sin\beta x \quad (34)$$

e por $y_1(x)$ e $y_2(x)$ serem combinações lineares do conjunto fundamental de soluções, a solução geral pode ser escrita como,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \quad (35)$$

2.1.8 Método coeficientes a determinar

Com o objetivo de solucionar equações lineares não homogêneas, o método dos coeficientes a determinar tem como finalidade fornecer a solução particular y_p associada a este tipo de equação.

Segundo [2], este método sugere uma y_p seja da forma das funções de entrada $g(x)$ da equação (2). O método está limitado a equações lineares, assim como a Equação (2), e aplica-se sob as seguintes condições:

- Os coeficientes a_2, a_1, a_0 devem ser constantes e
- $g(x)$ seja uma constante k , uma função polinomial, função exponencial, função seno ou cosseno, ou somas e produtos finitos destas funções.

Assim sendo, $g(x)$ será a combinação linear das funções dos tipos,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, P(x) e^{\alpha x}, P(x) e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ e } P(x) e^{\alpha x}\cos\beta x. \quad (36)$$

em que n é um inteiro não negativo e α e β números reais. Todas as funções citadas acima têm como propriedade, a somas e os produtos de suas derivadas serem também, somas e produtos configurando assim, combinação linear delas mesmas. Isso mostra que se $g(x)$ tem a mesma forma de suas derivadas, ela será idêntica a sua solução particular.

2.2 Transformadas de Laplace

Inicialmente, antes de conceituar a transformada de Laplace se faz necessário entender que diferenciação e integração são formas de fazer uma função se transformar em outra [2]. Diante disto, alguns conceitos devem ser definidos com o intuito de esclarecer este método.

2.2.1 Transformada Integral

Segundo [2], dada uma transformada integral sua relação é dada por

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)dt, \quad (37)$$

onde $K(s,t)$ é chamado de núcleo da transformada e com o limite de integração α e β . Considerada uma integral imprópria (37), quando $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, esta função deve ser contínua em um intervalo

particionado de finitos de pontos e deve convergir neste intervalo. Essencialmente, ela transforma uma função f da variável t em outra função F de variável s .

Compreendendo esta informação, é possível definir a transformada de Laplace.

2.2.2 Transformada de Laplace

De acordo com [1], supondo que $f(t)$ é uma função definida para $t \geq 0$, a transformada de Laplace é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (38)$$

sempre que esta integral imprópria convergir resultado será em função de s . O valor de s assumirá, para as circunstâncias deste trabalho, apenas números reais.

Para que possa existir a transformada de Laplace, algumas condições devem ser atendidas:

- f deve ser contínua ou contínua por partes em $[0, \infty]$ e
- f deve ser de ordem exponencial para $t > T$.

Para denotar a função que está sendo transformada, usam-se letras minúsculas. Já a função aplicada à transformada de Laplace é denotada por letra maiúscula, como demonstrada abaixo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad (39)$$

As transformadas de Laplace são uma ótima ferramenta para resolução de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, sendo assim uma técnica escolhida por facilitar este processo.

2.2.3 Transformada da derivada

Dado que as transformadas de Laplace auxiliam no processo de resolução de equações diferenciais lineares e que é uma ótima ferramenta para resolução de problemas de valor inicial [2], o teorema afirma que

Teorema 2.1: Se $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ forem contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0), \quad (40)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Com isto, é possível resolver problemas de valor inicial de equações diferenciais de 2ª ordem não homogêneas, que é um dos objetivos propostos neste trabalho.

2.3 Circuitos RLC

O circuito RLC (Resistor-R, Indutor-Indutor, Capacitor-C) é conhecido na engenharia elétrica como um circuito do tipo oscilante, pois conseguem manter a mesma periodicidade da onda durante o seu funcionamento [3].

O resistor é responsável pela dissipação de energia dentro do circuito e por dificultar a passagem da corrente. Tem como unidade de medida o ohm (Ω). Já o capacitor, possui a propriedade de armazenar carga em seu interior, transferindo elétrons de uma placa para outra da sua estrutura com unidade de medida Farad (F). Quanto ao indutor, este tem como função dificultar as variações de corrente no circuito possuindo a unidade de medida o henry (H) [4].

Duas opções de arranjo para circuitos RLC podem ser realizadas: em paralelo e em série. Outra análise a ser considerada é em relação a dois tipos de resposta: natural e degrau. A primeira se define como o comportamento intrínseco do componente, como ele reage sem nenhuma interferência externa de fonte de energia. Já resposta ao degrau, analisa o comportamento do dispositivo ao receber esta interferência externa [4].

Em particular, o circuito RLC em série com uma resposta a um degrau, ou seja, com uma fonte externa forçando o seu funcionamento, está interessado na corrente i resultante da aplicação de uma fonte de corrente contínua (CC) e suas oscilações. Sua configuração de montagem é demonstrada na Figura 1 abaixo:

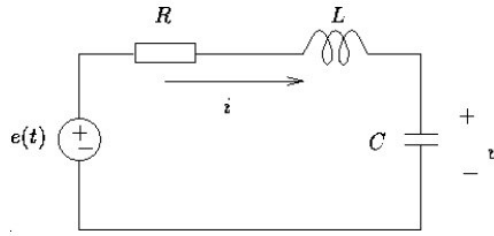


Figura 1: Circuito RLC série. (<http://www.dt.fee.unicamp.br/~www/ea612/node86.html>)

Os circuitos do tipo RLC podem ser resolvidos com as técnicas usadas para solucionar equações diferenciais lineares de 2ª ordem [3]

2.3.1 Análise diferencial do Circuito RLC em série para resposta a um degrau

Utilizando a lei das malhas de Kirchhoff para as tensões nos componentes do circuito RLC, tem-se:

$$V_R + V_L + V_C = E(t) , \quad (41)$$

sendo V_R tensão no resistor, V_L tensão no indutor, V_C tensão no capacitor e $E(t)$ é a fonte de tensão. V_R é dado por $R \cdot i$, o indutor por $L i'$ e a tensão do capacitor V_C é a tensão da fonte. Substituindo na Equação (41), tem-se

$$Ri + Li' + V_C = E(t) \quad (42)$$

Segundo [1] é possível considerar,

$$i = \frac{dQ}{dt} . \quad (43)$$

Sendo assim, usando a forma $Q'(t)$ e $Q''(t)$ para indicar primeira e segunda derivadas, respectivamente, a Equação (42) se torna:

$$RQ(t) + LQ''(t) + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (44)$$

Reorganizando a equação, obtém-se,

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (45)$$

Dividido por L , a sua nova forma será,

$$Q''(t) + \frac{R}{L}Q'(t) + \frac{1}{LC}Q = \frac{E}{L}(t) . \quad (46)$$

Observa-se aqui, uma equação linear diferencial de 2ª ordem não homogênea e para resolvê-la genericamente, duas técnicas são empregadas:

1. coeficientes constantes, para a parte homogênea e
2. coeficientes à determinar, para a não homogênea.

1. Coeficientes constantes

Encontrando a equação característica da equação (45), tem-se:

$$m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC} = 0 \quad (47)$$

e aplicando (17) para encontrar as raízes, tem-se

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (48)$$

Considerando $\frac{R}{2L} = \alpha$ e $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$, a solução da equação característica será,

$$m_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (49)$$

onde, de acordo com [4], α é o coeficiente de amortecimento e ω_0 a frequência angular de ressonância. Com estes dois parâmetros, três casos de amortecimento são obtidos e refletem no comportamento do circuito. Assim, se,

- $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$: caracteriza um circuito superamortecido onde as raízes da equação característica serão reais e distintas de acordo com a equação (19).

$$Q(t) = C_1 e^{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + C_{12} e^{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \quad (50)$$

ocorrendo para casos de valores de resistência muito grande com decaimento da carga sem oscilações.

- $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$: circuito criticamente amortecido onde suas raízes são iguais. De acordo com a equação (24), a solução geral é dada por:

$$Q(t) = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t}, \quad (51)$$

com característica de decaimento da carga sem oscilações mas de forma mais abrupta.

- $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$: circuito subamortecido e de acordo com a equação (35) com raízes complexas. A equação da carga é dada por,

$$Q(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t + c_2 e^{\alpha t} \sin \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t \quad (52)$$

e as oscilações da carga são graduais até que entrem em equilíbrio.

Para obter a equação da corrente i , basta apenas derivar (45) em relação a t e depois usar a Equação (43) na Equação (45). Logo a equação da corrente será:

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i = E'(t) \quad (53)$$

2. Coeficientes a determinar

Para resolver a parte não homogênea da equação, é necessário escolher uma função que seja da forma da função de entrada $g(x)$. Neste caso, infere-se que a solução particular $Q_p = A$, onde A é uma constante. Derivando Q_p e substituindo na Equação (45), a forma da solução particular será,

$$L \cdot 0 + R \cdot 0 + \frac{1}{C}A = E'(t) \quad (54)$$

logo,

$$A = E(t)C \quad (55)$$

e a solução particular,

$$Q_p = E(t)C. \quad (56)$$

2.3.2 Transformada de Laplace para resolução do circuito RLC

Para resolução de equações diferenciais 2ª ordem, a transformada de Laplace é uma ferramenta poderosa, pois seu mecanismo atrelado ao uso de condições iniciais, o PVI, fornece de forma mais precisa, os valores das constantes da solução geral deste tipo de circuito, por considerar as funções contínuas por partes. Assim sendo, aplicando a transformada de Laplace ao circuito do tipo RLC e considerando condições iniciais de $Q(t_0) = 0$ e $Q''(t_0) = 0$, indicando o exato momento que o circuito é fechado, a resolução deste método se dá, aplicando na equação (46), por,

$$Q''(t) + \frac{R}{L} Q'(t) + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{E}{L}(t) \quad (57)$$

$$L\{Q''(t)\} + L\left\{\frac{R}{L} Q'(t)\right\} + L\left\{\frac{1}{LC} Q(t)\right\} = L\left\{\frac{E}{L}\right\} \quad (58)$$

$$s^2 Q_s - sq(0) - q'(0) + \frac{R}{L} Q_s s - q(0) + \frac{1}{LC} Q_s = \frac{E}{s} \quad (59)$$

$$Q_s \left(s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right) = \frac{E}{s} \quad (60)$$

$$Q_s = \frac{E/L}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \quad (61)$$

onde aplicando o método de frações parciais e transformada inversa para a equação da carga Q_s , é possível encontrar a equação de carga em $Q(t)$ bem como a precisão das constantes C_1 e C_2 para equações diferenciais de 2ª ordem.

3. METODOLOGIA

Com o intuito de observar o comportamento do circuito RLC em série e analisar e de cada um dos tipos de seu amortecimento, foram realizadas duas formas de análises: computacional, com o uso do simulador *Falstad* e análise teóricas, através da aplicação dos métodos coeficientes constantes, coeficientes a determinar e transformada de Laplace. Estas ferramentas foram aplicadas a quatro experimentos, sendo três deles, usando por coeficientes constantes para determinar a solução geral da equação e um, acrescentando transformada de Laplace.

3.1 Problemas

Os quatro problemas propostos a seguir serão analisados teoricamente e simulados no *Falstad*, sendo apenas o último aplicado a transformada de Laplace.

Problema 1: Simular no *Falstad* o circuito RLC série com uma fonte de 5V, o resistor de 10kΩ, um indutor de 0,2H, um capacitor de $0,8 \times 10^{-6}$ F, observar a curva da tensão no capacitor, inferir sobre seu tipo de amortecimento e a forma da solução da equação homogênea para este amortecimento.

Problema 2: Simular no *Falstad* o circuito RLC série com uma fonte de 5V, um resistor de 10Ω, um indutor de 20 mH e um capacitor de 80 nF afim de observar a curva da tensão no capacitor, inferir sobre o seu tipo de amortecimento e a forma da solução da equação homogênea para este amortecimento.

Problema 3: Simular no *Falstad* o circuito RLC série com uma fonte de 5V, um resistor de 10Ω, um indutor de 0,2 H e um capacitor de 800 nF afim de observar a curva da tensão no capacitor, inferir sobre o seu tipo de amortecimento e a forma da solução da equação da homogênea para este amortecimento.

Problema 4: Simular no *Falstad* o circuito RLC série com fonte 5V, resistor de 470 Ω, um indutor de 5,133mH e um capacitor de 1μF afim de observar o comportamento do amortecimento bem como encontrar a solução geral e particular da equação não homogênea através de condições iniciais $Q(t) = 0$ e $Q'(t)=0$. Aplicar a transformada de Laplace para obter de outra maneira a equação da carga $Q(t)$.

3.2 Ferramentas de resolução dos problemas

Os recursos usados para a resolução destes problemas foram:

- Resolução analítica baseada nos assuntos abordados neste artigo;
- Simulador *Falstad* para circuitos;

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresenta-se a seguir, as discussões e resultados obtidos dos problemas propostos neste trabalho através de simulações e análise teórica.

4.1 Problema 1

Para verificar teoricamente que este circuito é superamortecido, utilizou-se a equação (46) da carga e encontrando em (49) $\alpha^2 = 6,25 \times 10^8$ e $\omega_0^2 = 6,25 \times 10^6$. Como $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, a equação da carga $Q(t)$ para a solução da equação homogênea é dada pela Equação (51):

$$Q(t) = C_1 e^{-31,25t} + C_2 e^{-1,24 \times 10^8 t} \quad (62)$$

Através do simulador de circuitos *Falstad* e com os valores dados neste problema, foi possível visualizar o comportamento do amortecimento da tensão no capacitor, componente escolhido para observar este comportamento. Na Figura 2, encontram-se as características de um circuito superamortecido.

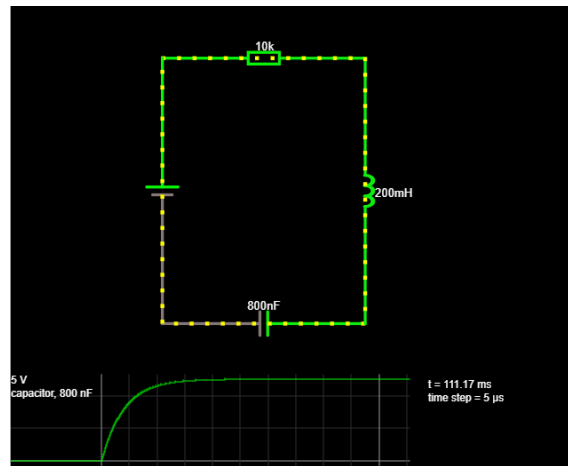


Figura 2: Superamortecimento no capacitor. (Autoria própria)

4.2 Problema 2

Como mostrado na figura 3 abaixo, existe no circuito um comportamento criticamente amortecido na curva do gráfico para a tensão no capacitor. Teoricamente para validar este resultado, utilizando a (49) e verificando que $\alpha^2 = 6,25 \times 10^4$ e $\omega_0^2 = 6,25 \times 10^4$, apresentando $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$, a equação homogênea da carga dada por (51), é:

$$Q(t) = C_1 e^{-6,25 \times 10^4 t} + C_2 t e^{-6,25 \times 10^4 t} \quad (63)$$

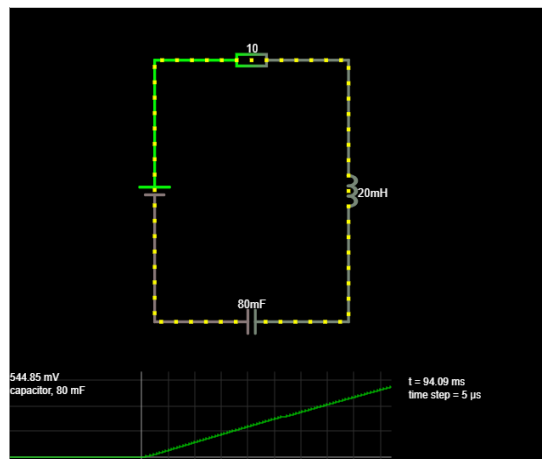


Figura 3: Amortecimento crítico no capacitor. (Autoria própria)

4.3 Problema 3

Para comprovar teoricamente, utilizando Equação (49) e encontrando $\alpha^2 = 625$ e $\omega_0^2 = 6,25 \times 10^6$ mostrando que $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$, a equação homogênea da carga é dada pela Equação (52). Sendo assim,

$$Q(t) = C_1 e^{625t} \cos \sqrt{625 - 6,25 \times 10^6} t + C_2 e^{625t} \sen \sqrt{625 - 6,25 \times 10^6} t \quad (64)$$

Observando a simulação do circuito com os valores apresentados no problema, é possível visualizar na Figura 4, a representação da tensão no capacitor de um circuito subamortecido.

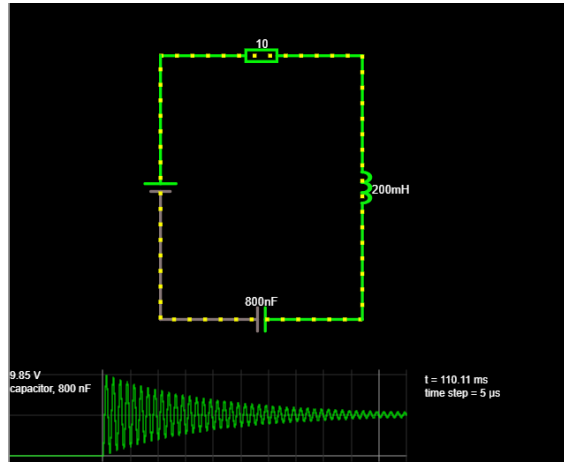


Figura 4: Subamortecimento no capacitor

4.4 Problema 4

Dada a Equação (47) para solucionar a equação característica da equação homogênea, utilizou-se a Equação (17) e encontrou os valores de $m_1 = -89384,84$ e $m_2 = -2179,54$. Usou-se a Equação (49) para provar que se trata de um circuito superamortecido, pois $\alpha^2 = 2,09 \times 10^9$ e $\omega_0^2 = 1,94 \times 10^8$ em que $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$. Logo a solução geral da equação homogênea da carga é

$$Q(t) = C_1 e^{-89384t} + C_2 e^{-2179,54t} \quad (65)$$

Dada as condições iniciais $Q(0) = 0$ e $Q'(0) = 0$ afim de encontrar as constantes C_1 e C_2 , deriva-se a Equação (65) e o sistema linear para encontra as constantes é:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -89384,84C_1 - 2179,54C_2 = 0 \end{cases} \quad (66)$$

onde, claramente observa-se que $C_1 = C_2 = 0$, indicando que possa não haver passagem de carga no circuito, não possuir uma fonte externa para o seu funcionamento ou está desligado, sendo esta uma resposta natural.

Para encontrar a solução particular Q_p da solução da equação não homogênea, inferiu-se que $Q_p = A$, já que a função $E(t)$ que representa a fonte de tensão dada por uma constante, 5 V. Sendo assim, de acordo com o procedimento aplicado em (55), e sendo igual ao observado em (56),

$$Q_p = E(t)C \quad (67)$$

$$Q_p = 5 \times 10^{-6} C \quad (68)$$

Sabendo-se que a solução geral é dada pela soma da solução da homogênea e da não homogênea, a solução da equação da carga é:

$$Q(t) = C_1 e^{-89384t} + C_2 e^{-2179,54t} + 5 \times 10^{-6} \quad (69)$$

sendo a equação (69) uma resposta a inserção de uma fonte no circuito, chamada de resposta a um degrau.

Para encontrar a mesma equação da carga e conseguir encontrar os valores das constantes C_1 e C_2 , foi utilizada a transformada de Laplace. Por serem mais potentes e analisarem as funções contínuas por partes, os valores, mesmo que bem pequenos, das constantes da equação são encontrados. Assim, aplicando a técnica como vista na (58), a equação da carga $Q(0)$ é,

$$Q(s) = \frac{5 \times 10^{-6}}{s} + \frac{1 \times 10^{-7}}{(s+89384,84)} + \frac{-5,1 \times 10^{-6}}{(s+2179,54)} \quad (70)$$

E aplicando a transformada inversa para obter a equação da carga em relação a t , a solução da equação da carga $Q(0)$ é

$$Q(t) = 5 \times 10^{-6} + (1 \times 10^{-7})e^{-89384,84t} + (-5,1 \times 10^{-6})e^{-2179,54t}, \quad (71)$$

em que C_1 e C_2 mesmo sendo bem pequenos, foram encontrados.

A equação da corrente é dada então, pela derivada da Equação (71). Sendo assim,

$$I(t) = -8,9338 \times 10^{-3} C_1 e^{-89384,84t} + 1,111 \times 10^{-2} C_2 e^{-2179,54t} \quad (72)$$

De acordo com o simulador e observando neste caso o comportamento da tensão (verde) e corrente (amarelo) no capacitor e indutor, o circuito é do tipo superamortecido.

Para validar o este comportamento visualizado na figura 5(a) e figura 5(b), foram aplicadas a técnica de coeficientes constantes para solucionar a equação homogênea e coeficientes a determinar para a não homogênea. Para conseguir determinar as constantes da solução de $Q(0)$, foi usada transformada de Laplace.

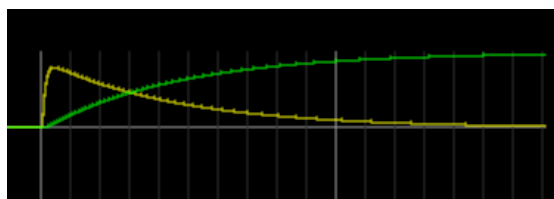


Figura 5(a)- Superamortecimento no capacitor

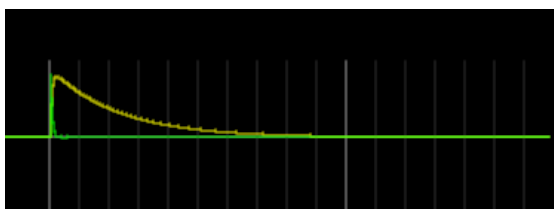


Figura 5(b)- Superamortecimento no indutor

5.CONCLUSÃO

A análise aqui descrita utilizando equações diferenciais de segunda ordem, mostra-se de grande importância, pois é capaz de modelar o comportamento deste tipo de circuito. A partir das simulações realizadas, pôde-se comprovar o que as equações mostram em resultados, que são três os tipos de amortecimento que ocorrem em um circuito RLC com uma fonte de tensão contínua: o superamortecido, o criticamente amortecido e o subamortecido. Percebe-se também que os mesmos recebem estas nomenclaturas pelo fato de seus processos se desenvolverem de forma mais brusca ou menos brusca em relação à oscilação da carga nos componentes.

Foi possível verificar também uma resolução para problemas envolvendo circuito RLC com a equação a carga $Q(t)$, que usualmente são trabalhados em relação à equação da corrente para circuitos em série. Isto mostra a versatilidade do uso das equações diferenciais, pois, derivando a equação da carga é possível encontrar a equação da corrente. Outro ponto, é que o seu amortecimento pode ser verificado diante desta relação de carga nos componentes.

Os resultados foram satisfatórios, uma vez que se pode perceber a grande semelhança de resultados entre o sistema analisado teoricamente e por simulação, mostrando uma excelente aplicação das equações diferenciais voltada para a Engenharia Elétrica, integrando assim o assunto visto no curso de Ciência e Tecnologia à engenharia.

6.REFERÊNCIAS

- [1]1, W. E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [3] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N.O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5. ed. Porto Alegre: Amgh, 2013. 874 p.
- [4] NILSON, Nilsson, James W, Susan A. Riedel – **Circuitos Elétricos** – Prentice Hall/Pearson, 8ª. Ed, 2008.
- [5] REDONDO, Djalma M.; LÍBERO, V.L. Conceitos Básicos sobre Capacitores e Indutores. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Carlos, v. 18, n. 2, p.137-141, 1995.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA
Centro de Ciências Exatas e Naturais – CCEN

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Às 14:00 horas do dia vinte e dois de março de dois mil e dezenove, na sala 07 da Central de Aulas V do CCEN – Centro de Ciências Exatas e Naturais da UFERSA – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, reuniu-se a Banca Examinadora de defesa de trabalho de conclusão de curso de autoria da aluna **ELLEN EUGENIA DE ARAUJO GUERRA**, aluno do curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia desta universidade, N° de matrícula **2015020942**, com o título **“ESTUDO DO AMORTECIMENTO EM CIRCUITOS DO TIPO RLC”**. A Banca Examinadora ficou assim constituída por três membros: Prof. Matheus da Silva Menezes, presidente da banca e orientador do Trabalho de Conclusão de Curso; Prof. Ivan Mezzomo e Profa. Samanta Mesquita de Holanda, como membros. Concluída a defesa, procedeu-se o julgamento pelos membros da banca examinadora, tendo o aluno obtido as seguintes notas: **9,70 ; 9,70 ; 9,70**. Apuradas as notas verificou-se que o aluno foi aprovado com média geral **9,70**. E para constar, eu, Matheus da Silva Menezes, lavrei a presente ata que, após lida e aprovada pelos membros da banca examinadora, será assinada por todos.

Mossoró, 22 de março de 2019.

Assinatura dos membros da Banca Examinadora.



Prof. MATHEUS DA SILVA MENEZES – UFERSA
Presidente e orientador



Prof. IVAN MEZZOMO – UFERSA
Primeiro Membro



Profa. SAMANTA MESQUITA DE HOLANDA - UFERSA
Segundo Membro