

COMPARATIVO ENTRE O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL E OS MÉTODOS DE SUB E SOBRE RELAXAÇÃO SUCESSIVA

Wesliane Maia do Amaral, Ivan Mezzomo (Orientador)

Resumo: O estudo de métodos numéricos é de grande relevância para a resolução de sistemas de equações lineares, visto que estes estão presentes de maneira significativa nas mais variadas áreas de estudo. Por essa razão, o presente trabalho é composto por um estudo do método de Gauss-Seidel e dos métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva, realizando uma análise de seus desempenhos em relação ao número de iterações e ao tempo gasto para convergir ou não. Os testes serão executados com o auxílio computacional do software Scilab através de um algoritmo que executasse os três métodos iterativos, visando avaliar comparativamente o desempenho entre os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva, e o método de Gauss-Seidel. Para a realização dos testes foram escolhidos dez problemas com características distintas retiradas do repositório Matrix Market e escolhidos valores para ω arbitrariamente, de tal maneira que fique possível coletar os dados necessários e fazer as análises desejadas.

Palavras-chave: *Sistemas de Equações Lineares; Métodos Numéricos; Método Gauss-Seidel; Métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva.*

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas de equações lineares podem ser aplicados nas mais distintas áreas de estudos, como por exemplo, engenharia, economia, ciências da computação, administração, entre outras. Na literatura existem vários métodos numéricos que contribuem para solução desses sistemas. Estudar sobre as características de cada método nos permite identificar entre eles, qual apresenta o melhor desempenho de acordo com as particularidades de cada matriz. Um dos principais motivos para que seja necessário aprofundar os estudos sobre métodos numéricos é a resolução de problemas que sejam analiticamente considerados difíceis de serem solucionados.

De acordo com [7], no século XIX, Phillip Ludwig von Seidel foi ajudante e aluno de Carl Gustav Jacob Jacobi que trabalhava com problemas direcionados a resolução de sistemas de equações lineares que já haviam sido iniciados por Carl Friedrich Gauss, enquanto estudava o método dos Mínimos Quadrados. Depois da morte de seu professor Jacobi, Seidel continuou com estudos sobre métodos numéricos, mais especificadamente sobre o método de que Jacobi já tinha desenvolvido junto com Gauss. Observou que a maioria dos sistemas que estudava tinha uma característica em comum, os elementos da diagonal principal eram sempre maiores que os demais, fazendo com que os métodos numéricos tivessem sucesso em sua aplicação. Com o aprofundamento dos estudos e análises, Seidel percebeu que se fizesse os cálculos com valores atualizados para cada função de iteração do método de Gauss-Jacobi, conseguiria acelerar esse método e assim simplificaria os cálculos obtendo a solução dos sistemas de equações lineares mais rapidamente. Os métodos iterativos que conhecemos hoje por Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel já haviam sido trabalhados e aplicados por Gauss. Porém, os resultados não eram muito divulgados.

Contudo, ao longo do tempo, estudiosos perceberam que apesar de o método de Gauss-Seidel ser superior ao método de Gauss-Jacobi em diferentes quesitos, ainda assim possuía algumas limitações. Diante dessas restrições, houve a necessidade de desenvolver um novo método que se comportasse melhor em relação ao tempo que exigia para encontrar a solução. Desse modo, foram elaborados os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva, que tem como principal característica acrescentar na função de iteração do método de Gauss-Seidel, um fator de correção ω , que é responsável por agilizar ainda mais o processo, aperfeiçoando o método de Gauss-Seidel. Os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva são classificados de acordo com os valores que ω pode receber.

Esse trabalho tem como principal objetivo realizar um comparativo entre métodos de Gauss-Seidel e os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva, analisando o tempo de processamento e número de iterações necessárias para que os sistemas de equações lineares convirjam para uma solução ou não. Mais estritamente, iremos elaborar uma revisão bibliográfica sobre o método de Gauss-Seidel e os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva, desenvolver o algoritmo de cada método para execução, realizar comparações quanto ao número de iterações e tempo de processamento levando em consideração os resultados calculados em cada problema, assim como, determinar qual dos métodos em análise apresenta melhor eficiência em cada problema.

Este trabalho foi elaborado tomando como referência uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto apresentado, baseado em literaturas específicas da área, e na realização de testes dos métodos numéricos com auxílio computacional. No intuito de expor o assunto de maneira mais organizada, o trabalho está disposto em seis capítulos. O capítulo 1, contém a organização metodológica, justificativas e objetivos de estudo. O capítulo 2, contém a fundamentação teórica indispensável para compreender os conceitos que serão discutidos posteriormente. O capítulo 3, será direcionado a definição do método de Gauss-Seidel e dos métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva. O capítulo 4, se refere às informações metodológicas e à introdução dos problemas. O capítulo 5, será reservado à apresentação da discussão sobre os resultados calculados de cada método. E finalmente, o capítulo 6 irá apresentar as considerações finais deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção vamos apresentar alguns conceitos fundamentais relacionados a Álgebra Linear e ao Cálculo Numérico que são essenciais para o entendimento deste trabalho. As provas de alguns dos resultados serão omitidas, no entanto em todo o texto ficará evidente a referência para obter as respectivas justificativas.

2.1 Matrizes

De acordo com [1], matrizes são artifícios simples capaz de nos auxiliar na resolução de muitos problemas e são primordiais, visto que podem organizar, ordenar e simplificar os problemas, além de conseguir nos fornecer métodos de resolução alternativos.

Segundo [2], chamamos de matriz da ordem m por n a um quadro de $m \times n$ elementos distribuídos em m linhas e n colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Esses elementos podem ser números, polinômios, funções, entre outros. Uma matriz é sempre representada por letras maiúsculas. Cada elemento de uma matriz A é representado por a_{ij} , onde o índice i representa a linha do elemento a e o índice j representa a coluna, sendo que a ordem de uma matriz A pode ser expressa na forma $A_{(m,n)}$.

Ainda segundo [1], existem algumas matrizes que podem receber classificações especiais devido a suas características particulares, que diferem das demais.

- Matriz Quadrada: É aquela que o número de linhas é igual ao número de colunas, assim sendo $m = n$.
- Matriz Coluna: É aquela que possui uma única coluna, assim sendo $n = 1$.
- Matriz Diagonal: Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.
- Matriz Diagonalmente Dominante: É quando o elemento da diagonal principal é maior que a soma dos demais da mesma linha da matriz tal que

$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}|$. Esta condição é chamada critério das linhas. Analogamente, também pode obedecer ao critério

das colunas onde

$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j}^n |a_{ij}|$.

- Matriz Identidade: uma matriz é denominada Identidade quando satisfaz a condição de $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$.
- Matriz Triangular Superior: É uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
- Matriz Triangular Inferior: É uma matriz quadrada tal que $a_{ij} = 0$ para $i < j$.
- Matriz Simétrica: Toda matriz quadrada tal que $a_{ij} = a_{ji}$
- Matriz Definida Positiva: É quando os determinantes das n submatrizes principais da matriz A são positivos, isto é, $|A_{ii}| > 0, \forall 1 \leq i \leq n$.

2.2 Sistemas de equações lineares

O conceito de sistemas equações lineares é o alicerce e uma parte de extrema significância da álgebra linear, um conteúdo que é empregado na maior parte da matemática moderna. Dentro das ciências naturais, podemos encontrar várias utilidades dos sistemas de equações lineares, por exemplo, na física, na economia, na engenharia, na navegação, entre outros.

Segundo [2], uma equação é considerada linear quando puder ser definida por

➤ Métodos iterativos: são cálculos executados através de uma sequência de instruções que são repetidas em ciclos, onde o valor obtido a cada passo depende de valores obtidos anteriormente. Não se chega a uma solução exata sempre, mas se existir uma solução, encontra-se um valor aproximado, e que pode ser considerado se estiver dentro da margem de erro permitido.

Usar métodos iterativos já é de importante serventia em muitos casos e, além disso, existem algumas vantagens que devem ser consideradas, como o fato destes produzirem aproximações com a margem de erro muito pequena, além de que a matriz A nunca sofre alteração no decorrer do processo iterativo, possibilitando economia de memória e tempo de execução. Essa característica proporciona a possibilidade de serem adaptados para resolver sistemas de equações lineares de grandes dimensões com matrizes esparsas.

2.3.1 Erros

Segundo [3], mesmo que as técnicas numéricas sejam aplicadas de maneira correta, é impossível afirmar que o resultado obtido não contenha erros. Esses erros são advindos não apenas da coleta dos dados, mas também da fase de modelagem, como por exemplo, quando temos alguns problemas de caráter físico, de origem natural. Ou ainda durante a fase de resolução quando, por exemplo, a máquina usada não tem a capacidade de memória necessária. Prevendo isso, as técnicas têm sido aprimoradas em busca de minimizar tais erros, para que chegue o mais próximo possível de uma solução exata.

Em consequência de a máquina ter a capacidade limitada para armazenamento de dados, usamos as aproximações dos números, que são encontrados através dos métodos de arredondamento e truncamento.

➤ O erro de arredondamento é gerado quando um número y é arredondado seguindo: a partir de tal posição x , o dígito $x + 1$ deverá ser igual ou maior que metade da base do y , sendo assim, o dígito x será somado uma unidade, caso contrario esses dígitos serão descartados.

➤ O erro de truncamento surge cada vez que substituímos um procedimento matemático infinito por um processo finito ou discreto.

Segundo [4], ao calcularmos um resultado, precisamos estimar o erro cometido pela aproximação. Caso contrário, a aproximação obtida não tem significado. Normalmente é possível estimar esse erro ou ate delimita-lo, ou seja, determinar a menor das distâncias superiores para o erro. A delimitação do erro é sempre importante, pois com ela temos um valor em que o erro cometido seguramente é inferior a precisão.

Podemos estimar ou delimitar o erro, recorrendo aos conceitos de erro absoluto e erro relativo.

➤ Erro absoluto (EA): é definido como a diferença entre o valor exato de um número x e o valor aproximado $\bar{x}$.

➤ Erro Relativo (ER): é definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado $\bar{x}$.

3. MÉTODOS DE GAUSS-SEIDEL E RELAXAÇÃO SUCESSIVA

Nesta seção vamos introduzir os conceitos dos métodos numéricos que são essenciais para o entendimento deste trabalho. As provas de alguns dos resultados serão omitidas, no entanto em todo o texto ficará evidente a referência para obter as respectivas justificativas.

3.1 Método de Gauss-Seidel

Semelhante ao método do Ponto fixo, os métodos iterativos, de maneira em geral, tem como finalidade buscar soluções de uma equação. Dentre eles, o método de Gauss-Seidel que toma como base o método de Gauss-Jacobi, seguindo as mesmas diretrizes, porém, fazendo uso do termo $x_i^{(k+1)}$ o valor mais recente de x_i . Partindo da equação $Ax = b$, descrita na seção 2.2 desse trabalho, podemos convertê-la em $x = Cx + g$ através do processo de separação por diagonal, de tal forma que C e g obedeçam aos seguintes modelos

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

dessa maneira garantimos que as soluções encontradas para $x = Cx + g$ também sejam soluções para $Ax = b$, pois a matriz C não sofrerá alterações durante o processo, já que se tratam de métodos estacionários. Entendendo que $\varphi(x) = Cx + g$ é uma função de iteração dada na forma matricial, tomamos ela como referência. Tendo um $x^{(k)}$ onde k representa o número da iteração permitindo ser definido por qualquer número inteiro e positivo assim, $k = 0, 1, 2, \dots$, podemos escrever o processo iterativo do seguinte modo

$$\varphi(x^{(0)}) = x^{(1)} = Cx^{(0)} + g$$

$$\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)} = Cx^{(1)} + g$$

$$\varphi(x^{(k)}) = x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$$

Admitindo o $x^{(0)} = \frac{b_i}{a_{ii}}$ como ponto de partida, por este ser considerado o vetor de aproximação inicial, calculamos as sequências posteriores $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}$. Representando essa sequência de iterações em um sistema de equações, temos

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

Desse modo, no método de Gauss-Seidel, durante a etapa que condiz calcular o $x_j^{(k+1)}$ empregamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram obtidos e os valores $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ restantes, ou seja, sempre usando os valores atualizados.

3.1.1 Critérios de convergência

Segundo [3], é muito importante que dentro do estudo dos métodos iterativos sejam estabelecidos critérios para nos auxiliar e garantir que o processo irá convergir. De acordo com [4], são critérios de convergência para o método de Gauss-Seidel:

Teorema 1: [4] *Se A é uma matriz diagonalmente dominante e se o sistema é irredutível, então, para qualquer tentativa inicial, o método de Gauss-Seidel converge.*

Outro critério a ser analisado é o critério de Sassenfeld que toma como partida um sistema linear $Ax = b$ em forma matricial, tendo

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

Observe que para calcular β_1 usamos apenas os valores atuais dos elementos da matriz e a partir do β_2 em diante, multiplicamos os valores dos betas já calculados por cada elemento da linha, respectivamente. Assim, quando $j = 2, 3, \dots, n$, temos

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{j,j-1}|\beta_{j-1} + |a_{j,j+1}| + \dots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

Esse critério estabelece que o maior β calculado para cada linha da matriz deve ser menor que 1, ou seja,

$$\max_{1 \leq i \leq n} \beta_i < 1$$

É importante observar que se houver uma permutação proposital entre linhas e colunas da matriz A de maneira adequada antes que haja a divisão de cada equação pelo termo a_{jj} , conseguimos diminuir ainda mais o valor de β , como consequência de sabermos que se β_i não for consideravelmente menor que 1, a convergência

poderá ser mais lenta, ou seja, quanto menor for o valor de β mais rápido irá convergir. Em resumo, no método de Gauss-Seidel quando o critério das linhas é satisfeito, automaticamente o critério de Sassenfeld também será satisfeito. Entretanto, o contrário não é verdade.

3.2 Métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva

Levando em consideração as limitações dos métodos iterativos para a resolução de sistema de equações lineares e com a necessidade de minimizar o trabalho demandado por esses processos, surgiu a necessidade de aprimorar as técnicas conhecidas a fim de otimizar o processo de convergência. Assim, foram desenvolvidos os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva.

De acordo com [4], esses métodos surgiram como uma derivação feita a partir do método de Gauss-Seidel, como uma maneira de aperfeiçoá-lo, dando a ele a possibilidade de acelerar ou atrasar o processo de encontrar uma solução.

Os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva consistem em adicionar um parâmetro de correção à função de iteração do método de Gauss-Seidel, dada pela equação a seguir

$$x_i^{(k)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j > i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + (1 - \omega) x_i^{(k-1)}$$

onde o parâmetro de correção ω pode receber valores no intervalo $]0, 2[$, assim conseguindo ser classificado em três casos:

Se $\omega < 1$ então o caracterizamos por Sub Relaxação Sucessiva

Se $\omega = 1$ então o caracterizamos por Gauss-Seidel

Se $\omega > 1$ então o caracterizamos por Sobre Relaxação Sucessiva

Segundo [7], por serem baseados no método de Gauss-Seidel, esses métodos tendem a obedecer as mesmas condições de convergência exigidas por ele, quando as matrizes apresentam as características exigidas para que convirjam pelo método de Gauss-Seidel, automaticamente, garantem convergência para os métodos de Sub e Sobre Relaxação dentro do intervalo já indicado, independente do vetor inicial $x^{(0)}$.

4. METODOLOGIA

Nesse trabalho foram apresentados três métodos numéricos onde todos eles possuem o mesmo objetivo, que é encontrar o vetor solução x de um sistema linear do tipo $Ax = b$, com objetivo de comparar qual o método tem maior eficiência em relação ao tempo de execução gasto para convergir e ao número de iterações necessárias para encontrar a solução de cada problema em análise.

Ao se tratar de matrizes estritamente diagonalmente dominantes os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva garantem a convergência para qualquer valor de ω dentro do intervalo $0 < \omega < 2$. Porém, nesse trabalho, foram apontados os seguintes valores para ω :

QUADRO 1: Valores de ω usados nos testes

Sub Relaxação Sucessiva				Gauss-Seidel	Sobre Relaxação Sucessiva			
0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8

Os testes foram realizados no software Scilab 5.4.1. e a execução foi feita por meio de um computador com sistema operacional Windows 10, processador intel core™ i5-2310M CPU 2.5 GHz, memória RAM de 6GB e HD de 1T, tipo de sistema de 64 bits fabricado por Asus. Como critério de parada, definimos como limite máximo de 3000 iterações ou distância relativa, que é obtida através do seguinte procedimento

$$d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$$

em seguida calculamos a distância relativa através da seguinte fórmula

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|} < \varepsilon$$

com precisão de $\varepsilon = 10^{-4}$.

Sendo assim, se faz necessário a realização de testes e comparações, para que se possa identificar qual método sobressai em relação aos outros, para cada problema analisado. As matrizes escolhidas para a realização dos testes foram retiradas dos repositórios Matrix Market e estão listadas no Quadro 2.

QUADRO 2 – Matrizes problemas

Nome	Ordem	Área do problema	Esparsa	Tipo
IBM32	32	Variedade de disciplinas	Não	Padrão assimétrica
ASH85	85	Variedade de disciplinas	Não	Padrão simétrica indefinida
BCSSTK05	153	Engenharia estrutural	Sim	Real simétrica def. positiva
DWT162	162	Engenharia estrutural	Não	Padrão assimétrica indefinida
NOS1	237	Engenharia estrutural	Sim	Real simétrica def. positiva
DWT_346	346	Engenharia estrutural	Não	Padrão assimétrica indefinida
CAN_445	445	Estruturas de aeronaves	Sim	Padrão assimétrica indefinida
494_BUS	494	Redes de sistemas de energia	Sim	Padrão simétrica indefinida
DWA512	512	Engenharia elétrica	Sim	Padrão simétrica indefinida
GR_30_30	900	Equações diferenciais parciais	Sim	Real simétrica def. positiva

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nos quadros abaixo, foram destacados em vermelho os piores resultados obtidos e em azul os melhores em cada quesito analisado. Em verde foram destacados os resultados para o método de Gauss-Seidel, para melhor analisar dados experimentais. A fim de apresentar os resultados obtidos de maneira organizada, os dados estão expostos Nas Tabelas 1 e 2, a seguir.

TABELA 1: Resultado dos experimentos em relação ao número de iterações

PROBLEMAS	Número de iterações								
	Valores de ω								
	Sub Relaxação Sucessiva				Gauss-Seidel	Sobre Relaxação Sucessiva			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
IBM32	-	2353	1234	714	493	390	340	289	229
ASH85	1731	864	604	440	337	256	199	108	84
BCSSTK05	-	-	2927	2552	1945	1531	1143	772	390
DWT_162	1261	581	365	264	207	171	148	132	116
NOS1	-	-	-	2384	1844	1387	1007	673	353
DWT_346	653	328	229	185	159	139	123	107	95
CAN_445	1044	472	261	114	38	21	13	9	7
494_BUS	2429	1938	-	-	-	-	-	-	-
DWA512	1920	903	585	438	357	306	271	246	228
GR_30_30	1754	983	654	463	334	240	166	103	42

TABELA 2: Resultado dos experimentos em relação ao tempo de execução

PROBLEMAS	Tempo em segundos								
	Valores de ω								
	Sub Relaxação Sucessiva				Gauss-Seidel	Sobre Relaxação Sucessiva			
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
IBM32	-	30,385	15,86	9,215	6,484	5,11	4,581	3,735	3,047
ASH85	146,777	74,357	52,467	38,468	30,093	23,765	18,546	11,124	9,499
BCSSTK05	-	-	796,862	696,083	527,53	416,408	310,664	211,061	107,655
DWT_162	319,239	147,903	93,489	67,958	52,176	42,746	37,154	34,461	29,572
NOS1	-	-	-	1591,801	1267,225	949,39	685,878	466,098	252,86
DWT_346	786,426	383,963	266,607	215,1	182,495	159,962	140,917	123,493	109,311
CAN_445	2009,075	955,328	526,787	216,412	73,026	41,442	26,322	18,823	15,509
494_BUS	6952,237	5555,71	-	-	-	-	-	-	-
DWA512	5892,251	2770,965	1797,159	1344,831	1098,761	941,657	835,453	760,872	704,979
GR_30_30	14042,19	7810,26	5523,824	3657,759	2621,488	2239,005	1465,913	818,243	343,568

Observando as tabelas acima, conseguimos identificar que a matriz IBM32 não apresentou convergência para $\omega = 0.2$. observamos também que em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 53,55% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e de 90,26%

quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Ao compararmos o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, a eficiência foi de 79,04%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma eficiência de 89,97% e 53,0% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente.

Ao analisarmos a matriz ASH85 em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 75,07% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e de 95,15% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Ao compararmos o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, sua eficiência foi de 80,53%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve um comportamento superior de 93,53% e 68,43% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente.

Na matriz BCSSTK05 não houve convergência para $\omega = 0.2$ e $\omega = 0.4$, além disso, podemos dizer que o método de Sobre Relaxação Sucessiva apresentou os melhores resultados tanto em relação ao número de iterações quanto em relação ao tempo gasto, tendo uma melhora de 86,67% e 86,49% respectivamente, quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. E de 79,95% e 79,59%, respectivamente, quando comparado ao método de Gauss-Seidel.

Ao observarmos a matriz DWT_162 em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 43,96% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e de 90,80% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Ao compararmos o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, sua eficiência foi de 83,58%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve um comportamento superior de 90,73% e 43,32% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente. Comparando o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, nesse quesito, houve uma melhora de 83,65% em seu comportamento.

Ao analisarmos a matriz NOS1 verificamos que não houve convergência para $\omega = 0.2$, $\omega = 0.4$ e $\omega = 0.6$, além disso, podemos dizer que o método de Sobre Relaxação Sucessiva apresentou os melhores resultados tanto em relação ao número de iterações quanto em relação ao tempo gasto, tendo uma melhora de 85,19% e 84,11% respectivamente, quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. E de 80,85% e 80,04%, respectivamente, quando comparado ao método de Gauss-Seidel.

Na matriz DWT_346 ao analisarmos em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 40,25% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e de 85,45% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Ao compararmos o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, sua eficiência foi de 75,65%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve um comportamento superior, mensurando cerca de 86,10% e 40,10% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente. Comparando o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, nesse quesito, houve uma melhora de 76,79% em seu comportamento.

Analisando a matriz CAN_445 em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 81,58% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e uma melhora muito significativa de 99,33% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Comparando o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, sua eficiência foi de 96,36%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve o melhor comportamento quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente atingindo cerca 99,23% e 78,76% de eficiência. Comparando o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, também em relação ao tempo, houve uma melhora de 96,36% em seu comportamento.

Já a matriz 494_BUS convergiu apenas para $\omega = 0.2$ e $\omega = 0.4$, porém, mesmo com poucos dados obtidos também é possível verificar uma tendência em diminuir o número de iterações e tempo gasto para a convergência conforme o valor ω aumenta. Ainda assim, podemos afirmar que houve uma melhora de 20,21% em relação ao número de iterações e de 20,08% em relação ao tempo gasto para a execução. Para os valores de ω superiores a 0.6 o problema não apresentou convergência. Provavelmente esse comportamento pode ter ocorrido devido as características da matriz.

Observando os resultados da matriz DWA_512 podemos dizer que o método de Sobre Relaxação Sucessiva apresentou os melhores resultados tanto em relação ao número de iterações quanto em relação ao tempo gasto, tendo uma melhora de 88,13% e 88,03% respectivamente, quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. E de 36,13% e 35,84%, respectivamente, quando comparado ao método de Gauss-Seidel. No método de Gauss-Seidel é possível identificarmos também uma melhora de desempenho nos dois quesitos analisados, tendo respectivamente cerca de 81,40% e 81,35% de eficiência quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva.

E finalmente, quando analisamos a matriz GR_30_30 em relação ao número de iterações, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve uma melhora no desempenho de 87,42% quando comparamos ao método de Gauss-Seidel e uma melhora de 97,60% quando comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva. Comparando o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, sua eficiência foi de 80,95%. Em relação ao tempo de processamento, o método de Sobre Relaxação Sucessiva teve o melhor comportamento quando

comparado ao método de Sub Relaxação Sucessiva e ao método de Gauss-Seidel, respectivamente atingindo cerca 97,55% e 86,89% de eficiência. Quando comparamos o método de Gauss-Seidel ao método de Sub Relaxação Sucessiva, também em relação ao tempo, notamos uma melhora de 81,33% em seu comportamento.

Após a verificação da coleta de dados, os resultados foram organizados e expostos com o objetivo de facilitar a compreensão e visualização do comportamento de cada matriz quando aplicado um determinado ω . Os resultados podem ser observados nas Figuras a seguir.

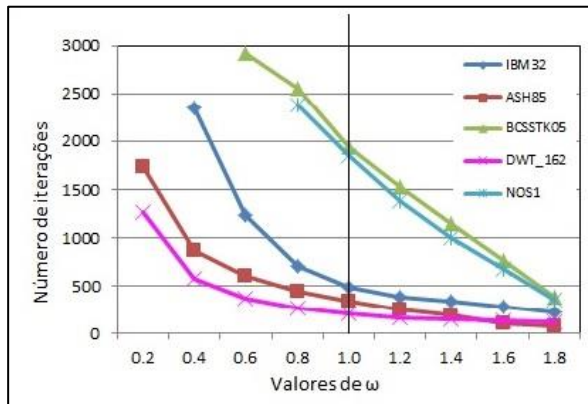


FIGURA 1: Número de iterações × Valores de ω
(Autoria própria)

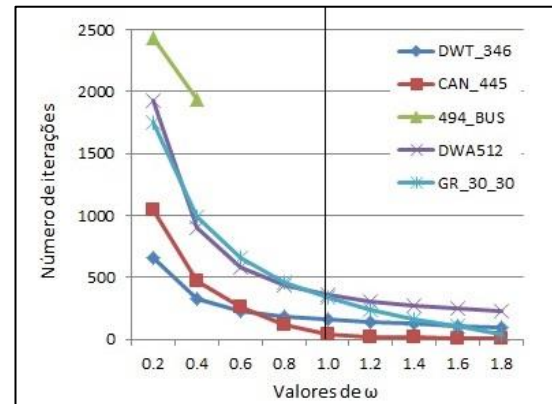


FIGURA 2: Número de iterações × Valores de ω
(Autoria própria)

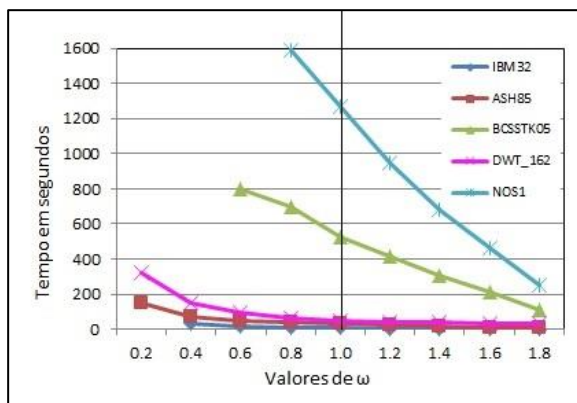


FIGURA 3: Tempo em segundos × Valores de ω
(Autoria própria)

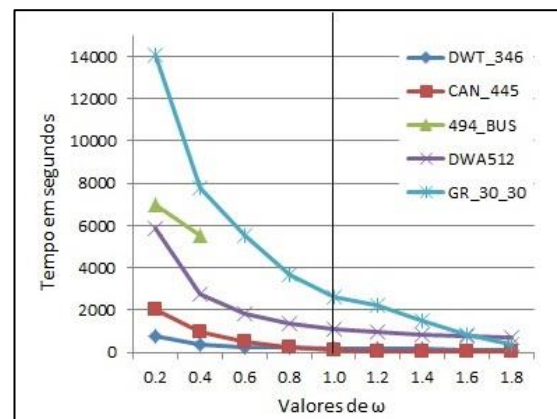


FIGURA 4: Tempo em segundos × Valores de ω
(Autoria própria)

Comparando os métodos de Sub Relaxação Sucessiva e de Gauss-Seidel podemos notar que na maioria das matrizes o método de Gauss-Seidel teve uma melhora de maneira significativa tanto em relação ao número de iterações necessárias para convergência, quanto em relação ao tempo de processamento gasto, a medida que o valor de ω se aproxima de 1. Ao compararmos o método de Gauss-Seidel ao método de Sobre Relaxação Sucessiva, a tendência se manteve, porém, de maneira mais linear para os dois quesitos analisados. Dessa maneira, podemos dizer que o método de Sobre Relaxação Sucessiva foi o que apresentou na maioria dos casos apresentados neste trabalho, a menor demanda de iterações e de tempo necessários para que os problemas convergissem para a solução, quando comparado aos outros dois métodos estudados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através do estudo de métodos numéricos que nos auxiliam a encontrar as soluções de sistemas de equações lineares, o presente trabalho realizou comparações analisando o número de iterações e o tempo de processamento entre o método de Gauss-Seidel e os métodos de Sub e Sobre Relaxação Sucessiva para valores de ω pré-determinados. Por meio da análise dos resultados apresentados, concluímos que o comportamento dos métodos pode sofrer algumas variações de acordo com as características das matrizes, porém, a maioria dos problemas apresentou relativamente a mesma tendência de comportamento.

Contudo, levando em consideração os problemas analisados neste trabalho, podemos afirmar que quanto maior o valor de ω , a tendência é que mais rápido obtenhamos a convergência, com exceção do problema

494_BUS. Comprovando assim, a superioridade do método de Gauss-Seidel em relação ao método de Sub Relaxação Sucessiva, e ainda a superioridade do método de Sobre Relaxação Sucessiva em relação aos outros dois métodos. Foi possível verificar que quando mais o valor de ω se aproxima de 1.8 melhores são os resultados apresentados, tomando como critério de análise o número de iterações necessárias, como também o tempo gasto para convergir.

Com o intuito de ampliar as pesquisas feitas sobre essa temática, podemos sugerir que sejam realizados estudos com valores de ω próximos a 1.8 para verificar qual possui o melhor desempenho em relação ao número de iterações e tempo de processamento. Além disso, conforme [7], foi desenvolvida uma maneira para calcular ω em função do raio espectral, de tal forma que nos apresenta um valor ótimo para o parâmetro de correção, para determinado caso. Sendo assim, também sugerimos que sejam realizadas análises sobre como calcular o ω ótimo para cada problema em questão e aplicá-los, de maneira que a convergência aconteça o mais rápido possível.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. Álgebra Linear, ampliada e revisada, 3a Edição, Editora HARBRA Ltda. 1980.
- [2] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Álgebra Linear. 2a ed. São Paulo: McGraww-Hill, 1987.
- [3] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.
- [4] SPERANDIO, Décio; MENDES, João Texeira; SILVA, Luiz Henry Monke e. Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. Sao Paulo: Pearson, 2003.
- [5] CAMPOS, Filho; FERREIRA, Frederico. Algoritmos Numéricos. 2. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2010.
- [6] FRANCO, Neide Bertold. Cálculo Numérico. São Paulo: Prentice Hall, 2006.
- [7] BURDEN, Richard L.; FAIRES, Douglas J.; BURDEN, Annette M. Análise numérica: Tradução da 10ª edição norte-americana. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.
- [8] MATRIX MARKET - Um repositório visual de dados de teste para uso em estudos comparativos de algoritmos para álgebra linear numérica, disponível em <http://math.nist.gov/MatrixMarket/>, acesso em 23/02/2019, 23h.