



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

MATEUS EMANUEL DE LIMA FREITAS

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
ASPECTOS HISTÓRICOS E EVOLUÇÃO**

CARAÚBAS

2024

MATEUS EMANUEL DE LIMA FREITAS

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL:
ASPECTOS HISTÓRICOS E EVOLUÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e tecnologia.

Orientador: Prof. Dra. Kelyane Barboza De Abreu

CARAÚBAS

2024

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

F862c Freitas, Mateus Emanuel De Lima .
Cálculo diferencial e integral: aspectos
históricos e evolução / Mateus Emanuel De Lima
Freitas. - 2024.
51 f. : il.

Orientadora: Kelyane Barboza De Abreu.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2024.

1. Origem. 2. Desenvolvimento. 3.
Contextualização. I. Abreu, Kelyane Barboza De ,
orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues
CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

MATEUS EMANUEL DE LIMA FREITAS

**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ASPECTOS HISTÓRICOS E
EVOLUÇÃO**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como requisito
para obtenção do título de Bacharel
Interdisciplinar em Ciência e tecnologia.

Defendida em: 11/ 10/ 2024

BANCA EXAMINADORA



Profª. Dra. Kelyane Barboza de Abreu (UFERSA)

Presidente



Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho (UFERSA)

Membro Examinador



Profª. Dra. Dayane Santos de Lira (UFERSA)

Membro Examinador

RESUMO

Desde a sua origem, o ser humano busca utilizar de tudo ao seu alcance para a sua sobrevivência. A sociedade atual é fruto de dedicação e estudos de grandes mentes do passado. Dentro do mundo acadêmico, pode-se destacar a matemática, que sempre representou uma grande ferramenta para todas as ciências. Uma das maiores descobertas matemáticas foi o que conhecemos hoje como Cálculo Diferencial e Integral. O objetivo deste trabalho é dissertar a respeito da origem, formação, e evolução desta área. A metodologia utilizada nesta obra será constituída de pesquisas bibliográficas. Muitos autores, mesmo sem as técnicas mais apropriadas, contribuíram para o que seria mais tarde composto por derivação e integração. Diferente do que muitos pensam, as ideias por trás do cálculo datam de muito antes da idade moderna. Logo, é incorreto afirmar que o cálculo teve origem exclusivamente europeia. Historicamente, o cálculo integral surgiu antes do diferencial. Isto se deu devido as suas finalidades primárias. Antes mesmo da criação dos modelos padrões no cálculo, ilustres mentes já tinham chegado a estudos similares. Contudo, este campo foi criado formalmente, e mutuamente, por dois cientistas completamente diferentes. Após isso, os infinitésimos eram retratados em muitos estudos, mas o rigor por trás destes não era alto. Foi só depois que este tópico ganhou relevância, levando a um trato matemático mais sofisticado. Portanto, cada um à sua maneira, em dado contexto, com as ferramentas disponíveis, proveu o melhor para ajudar esta área a crescer e se tornar a grande ferramenta que é atualmente.

Palavras-chave: Origem; Desenvolvimento; Contextualização.

ABSTRACT

Since its origins, human beings have sought to use everything within their reach for their survival. Today's society is the result of dedication and studies by great minds of the past. Within the academic world, mathematics can be highlighted, which has always represented a great tool for all sciences. One of the greatest mathematical discoveries was what we know today as Differential and Integral Calculus. The objective of this work is to discuss the origin, formation, and evolution of this area. The methodology used in this work will consist of bibliographic researches. Many authors, even without the most appropriate techniques, contributed to what would later be composed of derivation and integration. Contrary to what many people think, the ideas behind the calculation date back long before the Modern Ages. Therefore, it is incorrect to say that the calculation had exclusively European origins. Historically, integral calculus emerged before differential. This was due to its primary purposes. Even before the creation of standard models in calculation, illustrious minds had already carried out similar studies. However, this field was formally and mutually created by two completely different scientists. After that, infinitesimals were portrayed in many studies, but the rigor behind them was not high. It was only later that this topic gained relevance, leading to a more sophisticated mathematical approach. Therefore, each one in their own way, in their given context, with the tools available, provided the best to help this area grow and become the great tool it is today.

Keywords: Origin; Development; Contextualization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Papiro de Rhind.....	9
Figura 2: Geometria euclidiana	10
Figura 3: Paradoxo da dicotomia.....	11
Figura 4: Tangente.....	12
Figura 5: Método da exaustão	13
Figura 6: Integral moderna	14
Figura 7: Modelo eurocêntrico	15
Figura 8: Contagem hindu	16
Figura 9: Modelo heliocêntrico	17
Figura 10: Plano cartesiano	18
Figura 11: Método de Fermat	21
Figura 12: Método de Barrow	22
Figura 13: Área sob uma curva.....	24
Figura 14: Triângulo característico de Leibniz.....	25
Figura 15: Principia	27
Figura 16: Commercium philosophicum et mathematicum	28
Figura 17: Equação de Bernoulli	29
Figura 18: Multiplicadores de Lagrange	30
Figura 19: Continuidade	31
Figura 20: Limite de uma função	32
Figura 21: Soma de Riemman	34
Figura 22: Relação entre derivação e integração	35
Figura 23: Família de funções	36
Figura 24: Notação moderna das derivadas.....	37
Figura 25: Plano tangente	38
Figura 26: Reta tangente a uma curva	47
Figura 27: Assíntotas	48

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	7
METODOLOGIA.....	8
1 - OS PRIMEIROS PASSOS	9
1.1 - Relíquias de um passado distante.....	9
1.2 - O advento dos infinitésimos.....	11
1.3 - Um modelo exaustivo	13
1.4 - Desenvolvimento mútuo	15
1.5 - Primórdios de uma nova era.....	17
2- O ALVORECER DO CÁLCULO.....	19
2.1 - Modernização europeia	19
2.2 - Pré-cálculo.....	21
2.3 - Revolução matemática	23
2.4 - Uma perspectiva diferente.....	25
2.5 - Coincidências do destino.....	27
3 - CONSOLIDAÇÃO ATUAL.....	29
3.1 - Sistematização matemática	29
3.2 - Um mundo sem limites	31
3.3 - Concepção moderna	33
3.4 - Relações fundamentais.....	35
3.5 - Refino literário	37
4 - TEMPOS MODERNOS	39
4.1 - Limites fundamentais	39
4.2 - Diferencial moderno.....	41
4.3 - Propriedades básicas	45
4.4 - Respostas para antigos problemas.....	47
5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
REFERÊNCIAS	50

INTRODUÇÃO

Desde a sua origem, o ser humano busca constantemente utilizar de tudo ao seu alcance para facilitar a sua sobrevivência. Com o passar das eras, o homem foi ficando cada vez mais criativo em relação a utilização do meio e dos seus derivados. Consequentemente, a luta pela sobrevivência deu lugar a busca por inovação e sofisticação de sua civilização. A sociedade atual é fruto de dedicação, trabalho duro e estudos de grandes mestres do passado, nos mais diversos pilares do conhecimento. Dentro do mundo acadêmico, pode-se destacar a matemática, que sempre se mostrou uma grande ferramenta para todas as ciências em geral. O desenvolvimento matemático e a evolução humana possuem uma conexão muito profunda.

O saber matemático hoje disponível foi criado através de diferentes visões, em diferentes épocas, por muitos indivíduos, que a sua forma, moldaram a literatura moderna. Todas as inovações e descobertas ocorridas dentro deste setor levaram a grandes revoluções científicas em suas respectivas épocas. Assim como qualquer ciência, a matemática é moldada de acordo com seus criadores e desenvolvedores. A base contemporânea passou por inúmeras inovações e sistematizações ao longo das eras, sempre buscando propor maior clareza e lógica, sendo firmado em pesquisas, discussões e constatações norteadas por argumentos fortes, coerentes e bem estruturados.

Essa ferramenta mostrou utilidades nas mais diversas áreas. Pode-se citar o estudo das formas e suas relações, hoje conhecido como geometria, a manipulação de números, atualmente chamada de aritmética, o estudo de sistemas com diferentes incógnitas, representando a álgebra, dentre muitos outros campos, que serviram de grande ajuda para que o homem e sua civilização continuassem a se desenvolver. O desenvolvimento do regime matemático na sociedade culminou na criação de muitas atividades e tecnologias, tais como o sistema de moedas, indústria automobilística, computação e programação, atividades administrativas, pesquisas de mercado, e gestão de negócios. Estas eram ideias que só seriam cabíveis com o auxílio e o rigor do sistema matemático.

O mundo matemático é enorme e muito complexo. Este contém inúmeras extensões culminantes de grandes descobertas feitas no passado. Dentre estas, tem-se uma das mais renomadas e conhecidas, o famoso campo conhecido como Cálculo Diferencial e Integral. O advento do cálculo contribuiu para a solução de grandes problemas em seu tempo, e até os dias de hoje é utilizado em estudos de grandes áreas da sociedade moderna. Este serve como base para pesquisas de uma infinidade de fenômenos físicos, químicos, biológicos, dentre outros. Com ele, é possível elaborar e modelar sistemas econômicos, bem como auxiliar na concepção, gestão e análise de projetos nas mais diversas engenharias modernas.

Com base nestas premissas, o objetivo deste trabalho é dissertar a respeito da origem, formação, e influência dos principais pensadores e autores na evolução do que hoje se conhece como cálculo diferencial e integral, bem como mostrar como este passou por grandes reformulações em diferentes épocas, representando uma grande ferramenta para os mais diversos setores da civilização humana.

METODOLOGIA

A metodologia utilizada nesta obra será constituída de pesquisas de cunho bibliográfico. Inicialmente, serão abordados aspectos referentes as influências anteriores a criação e denotação do cálculo diferencial e integral, para consequentemente fomentar conceitos relativos à sua evolução histórica e constituição subsequente.

Ao decorrer desta obra, serão citadas figuras importantes para a consolidação desta área (cálculo diferencial e integral), tais quais autores, pensadores e mentes influentes, que ao longo das eras, contribuíram cada um à sua forma para o que hoje é visto na literatura. Posteriormente, será dado o capítulo referente as conclusões sobre os referidos dissertados.

Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é dissertar a respeito da origem, formação, e influência dos principais pensadores e autores, bem como seus papéis na evolução e consolidação do que hoje se conhece como cálculo diferencial e integral.

Objetivos específicos

- Buscar entender como o cálculo nasceu, se consolidou e progrediu ao longo das eras.
- Ilustrar como os conceitos, fundamentações e objetivos por trás do campo em questão remontam de muito antes dos tempos modernos.
- Demonstrar como cada autor, a sua maneira, em sua respectiva época, contribuiu para a evolução deste campo de estudo.
- Expor os contextos por trás de cada avanço deste importante ramo acadêmico.

1 - OS PRIMEIROS PASSOS

1.1 - Relíquias de um passado distante

Diferente do que muitos pensam, as ideias por trás do cálculo datam de muito antes da idade moderna. Muitos autores, mesmo sem as técnicas mais apropriadas, contribuíram para o que seria mais tarde composto por derivação e integração (EVES, 2004). Fontes históricas demarcam de épocas pertencentes a idade antiga, como a Grécia e até mesmo o império egípcio. Muitos achados arqueológicos do antigo Egito intrigam cientistas ao redor do mundo, seja pela mística por trás das histórias desta cultura, seja pela busca pelo conhecimento do império.

Em alguns destes, foi possível encontrar evidências visíveis relacionadas aos primeiros passos para a criação do que mais tarde seria o cálculo. O papiro de Rhind (figura 1) representa umas das primeiras e mais antigas escritas relacionando estudos de álgebra e geometria (EVES, 2004). Estas foram e continuam sendo pilares fundamentais para o cálculo como se conhece.



Figura 1: Papiro de Rhind

Fonte: Escola De Matemática Pontal

Neste achado, era possível observar uma grande variedade de estudos matemáticos que tratavam desde resolução de áreas, progressões, e até mesmo sobre volumes de sólidos. Devido as limitações, os objetos trabalhados eram mais simples do que os atuais (EVES, 2004). Muitos egípcios ganharam renome devido as suas realizações, tanto em suas épocas quanto em eras posteriores. Pode-se citar o sacerdote Ihmotep, que é amplamente considerado como um dos primeiros engenheiros da história. De acordo com TREIGHER (2022):

A tecnologia que deu origem às pirâmides é muito antiga, e o primeiro idealizador conhecido desses monumentos é o arquiteto Imhotep, que fez a mais antiga de todas, a de Djoser (2648 a.C.). Antes dela, os faraós eram enterrados nas mastabas, tumbas subterrâneas cobertas por pilhas retangulares de blocos e com paredes inclinadas, que continuaram a ser usadas ao longo de milênios por egípcios que não pertenciam à realeza.

Na Grécia antiga, a busca por conhecimento era vital. Em uma era onde a reflexão sobre a existência, o universo e a relação destes estava em pauta, muitos encontravam na matemática respostas acerca de seus questionamentos, sejam eles abstratos ou concretos. Esta foi uma época onde o conhecimento em si foi muito valorizado e almejado. Aqueles dotados do saber eram agraciados em seu meio social, sendo figuras de alto prestígio.

Muitas das áreas de estudos presentes na literatura atual nasceram advindas de ideias e raciocínios provenientes de pensadores deste tempo. Um grande visionário de seu tempo foi Euclides (323 - 283 a.C.). Este daria luz a um conceito muito importante para as futuras gerações, a geometria euclidiana (figura 2).

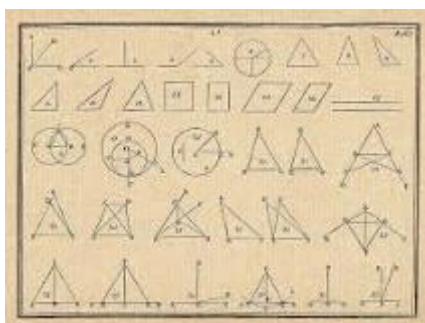


Figura 2: Geometria euclidiana

Fonte: Introdução a matemática, Rogério S. Mol

Suas obras são tidas como umas das mais impactantes em toda a história da humanidade. Muitos conceitos advindos de seu acervo são utilizados até os dias de hoje. Pode-se citar nomenclaturas e conceitos tais quais pontos, retas, superfícies, dentre outras designações como ângulos, circunferências, diâmetros, que seriam fundamentais em obras futuras de ilustres autores. Por tais concepções, Euclides é tido como pai da geometria, e uma das maiores figuras da antiguidade. Segundo MOL (2013, p.45):

Os Elementos de Geometria, de Euclides, representaram o apogeu da produção matemática na Grécia clássica. Esta foi a mais brilhante obra matemática grega e um dos textos que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e da ciência. Foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história, tendo sido usado como livro-texto no ensino de matemática até o final do século XIX e início do século XX.

A geometria euclidiana foi usada como padrão por muitas eras. Esta conseqüentemente deu base para um modelo mais claro e objetivo na idade moderna. Mas é válido ressaltar que, sem as influências destes monumentos antigos na literatura, nenhuma evolução geométrica poderia ter sido realizada.

1.2 - O advento dos infinitésimos

Outra figura marcante da antiguidade foi Zenão de Eleia (490 - 430 a.C.), um conhecido filósofo grego. Assim como outros de seu tempo, este buscava entender como as coisas fundamentalmente eram, no âmbito mais profundo da palavra, seja para realização pessoal, seja para auxiliar na busca por prestígio. Embora muitos pensem que os filósofos gregos se restringiam apenas questões de casualidade, existência e paradigmas morais, estes também embarcavam em discussões matemáticas fervorosas.

Um dos pontos que mais intrigava Zenão era o movimento. Uma reta representa um conjunto de pontos no espaço, enquanto o segmento é limitado entre dois deste grupo. Já o movimento é a relação entre um dado espaço, neste caso, a distância percorrida em uma linha reta, e um determinado período de tempo (STEWART, 2016). Segundo EVES (2004, p.418):

O filósofo Zenão de Eleia (c. 450 a.C.) chamou a atenção, de maneira candente, para as dificuldades lógicas ocultas em cada uma dessas suposições, através de alguns paradoxos que engendrou com essa finalidade. Esses paradoxos, que tiveram influência profunda na matemática, garantem que, admitindo-se qualquer das suposições consideradas, o movimento é impossível.

A partir destes tópicos, Zenão formulou algumas indagações. Uma destas é retratada no paradoxo da dicotomia (figura 3). Se um segmento de reta pode ser dividido infinitamente, isto impossibilita o movimento, já que não seria possível percorrer este trajeto antes de chegar à metade do percurso, e depois metade da outra remanescente, e assim por diante (EVES, 2004).

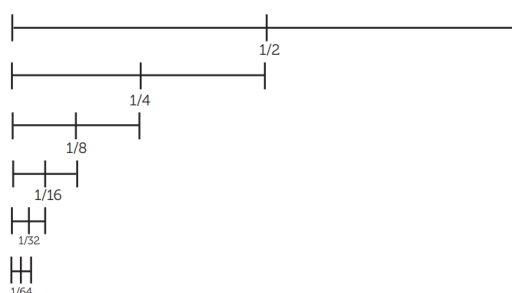


Figura 3: Paradoxo da dicotomia

Fonte: História da matemática, João Eichenberger Neto

Logo, não seria possível percorrê-lo, já que o final seria tão próximo do início que não existiria, devido ao ponto anterior sempre ser dividido ao meio. Então, o corpo nunca sairia do lugar, e o movimento seria uma ilusão. Este é um dos primeiros momentos na história onde pontos infinitesimais e limites são trabalhados, embora indiretamente (EVES, 2004).

Por outro lado, a origem da derivada está intimamente relacionada a um problema conhecido como ponto tangente a uma curva e a problemas envolvendo máximos e mínimos de uma função. Em épocas passadas, a tangencia era um dos problemas que mais gerava intriga entre os estudiosos, e a solução desse caso, por mais duradouro que este tenha sido, levou a muitas repercussões no âmbito matemático (EVES, 2004).

Na já citada Grécia antiga, o termo “*tangente*” já era conhecido. Um dos mais celebres autores a trabalharem sobre este tema foi Apolonio (15 - 98 d.C.) (NETO, 2016). Muitas de suas obras focavam em quadraturas envolvendo figuras e a relação destas com assíntotas, hipérboles e por fim, tangencias (figura 4).



Figura 4: Tangente

Fonte: História da matemática, João Eichenberger Neto

De acordo com MOL (2013, p.56):

Apolônio estudou ainda propriedades fundamentais das cônicas, tais como assíntotas, diâmetros conjugados e tangentes. Para Apolônio, uma tangente era uma “reta que toca a cônica e nenhuma outra reta pode estar entre ela e a cônica”.

A concepção de tangente de Apolonio era um pouco diferente em relação as da literatura atual, tanto em geometria propriamente dita quanto em conceito aplicado. Para ele, esta representava a reta mais próxima a tocar uma cônica. Atualmente, o conceito mais aceito pelo núcleo acadêmico é de que uma reta tangente é aquela que toca uma curva em somente um ponto (MOL, 2013).

Por mais que as definições de suas obras não sejam tão aceitas nos dias de hoje, é importante ressaltar como o estudo destes aspectos fundamentais foi importante para o desenvolvimento da geometria (EVES, 2004). Mais tarde, estas definições receberiam tratos mais rigorosos e seriam melhor conceituadas. Devido a estas contribuições, Apolonio foi, junto a Euclides e Arquimedes, considerados uma das maiores mente da antiguidade (MOL, 2013).

1.3 - Um modelo exaustivo

Historicamente, o cálculo integral surgiu antes do cálculo diferencial. Isto se deu em parte devido as finalidades para as quais estas eram designadas. Enquanto as derivadas, em sua função, forma e virtude fundamental sempre buscaram estudar a variação de certos parâmetros, a integral tinha como objetivo basilar auxiliar o cálculo de áreas de formas mais complexas em relação as convencionais (EVES, 2004).

Estas, diferentemente das mais usuais como triângulos, quadrados e afins, não apresentavam grande simetria, e não ofereciam particularidades para serem resolvidas facilmente. Por tal, o cálculo de suas áreas se mostrava bastante difícil. Para tentar achar estas áreas, uma técnica muito utilizada foi o método da exaustão, que utilizava da manipulação de formas já conhecidas afim de descobrir outras mais complexas. Por mais cansativo que fosse, a técnica oferecia eficiência nos resultados. Para EVES (2004, p.419):

O método de exaustão, que pode ser considerado como a resposta da escola platônica aos paradoxos de Zenão, comumente é creditado a Eudoxo (c. 370 a.C.). O método admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará pôr fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie

Para tal, um certo polígono de n lados era inscrito dentro do objeto a ser estudado (STEWART, 2016). A cada número de lados aferido, a forma do polígono mudava, com o intuito de convergir com o máximo possível de proximidade do objeto exterior. Um grande exemplo desta técnica é o cálculo da área do círculo, que pode ser visualizada na figura 5.

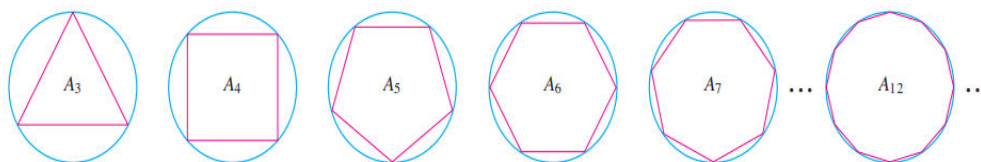


Figura 5: Método da exaustão
Fonte: Cálculo Vol. 1, James Stewart

Logo, pode-se afirmar que, de fato, o estudo dos infinitésimos remonta de muito antes dos conceitos que basearam o cálculo hoje conhecido. A aproximação dos pontos através do número de lados também se assemelha muito ao conceito da derivada, que trata da reta tangente a um determinado ponto. Por mais que os antigos não possuíssem a ideia de limites em mente, estes estavam usando de seus conceitos (STEWART, 2016).

Por sua vez, a base da literatura indiana nasceu advinda de inúmeras incorporações e contribuições de outros povos. Por tal, pode-se dizer que sua literatura é muito diversa. Nela, é possível encontrar vestígios de padrões usados hoje na notação científica, tais quais as dízimas decimais, uso de zeros, e notação específica para dezenas, que neste contexto, era representado por um ponto (MOL, 2013). A figura 8 exemplifica de forma clara a contagem hindu.

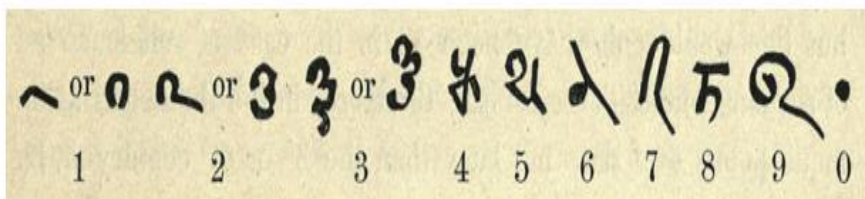


Figura 8: Contagem hindu

Fonte: Introdução a matemática, Rogério S. Mol

A matemática deste povo era tão eficiente que estes chegaram a elaborar um predecessor muito aceitável para o que hoje é tido como função seno. Outro ponto importante é o trato rigoroso para o estudo de cônicas. Os hindus conseguiram representar a constante *Pi* com duas casas de exatidão, algo realmente magnífico. Segundo MOL (2013, p.64):

Nos séculos IV e V d.C., os astrônomos e matemáticos indianos produziram os Siddhantas, ou sistemas de astronomia, textos que receberam forte influência dos astrônomos de Alexandria. Por exemplo, em um desses textos foi usada a aproximação $\pi \approx 3 \frac{177}{1250} = 3,1416$, essencialmente a mesma usada por Ptolemeu em seu Almagesto. Nos Siddhantas, a correspondência ptolemaica entre arco e corda da circunferência foi transformada: passou-se a associar metade da corda à metade do arco. Nasceu, assim, a função seno moderna.

Logo, é notória a contribuição dos achados árabes e hindus, de forma a se afirmar que muitos panoramas do cálculo foram, de forma direta e indireta, construídos graças a estes importantes trabalhos e suas influencias no paradigma europeu. A título de curiosidade, um dos grandes influentes do cálculo diferencial e integral, John Wallis, foi influenciado pelas obras do mundo árabe. Segundo EVES (2004, p.263):

Mas talvez a mais profunda e original contribuição algébrica árabe tenha sido a resolução geométrica de uma equação cúbica feita por Omar Khayyam (c. 1100), outro nativo de Khorâsân, conhecido no mundo ocidental como autor do primoroso Rubaiyat. [...] Outro escritor de Khorâzân, mas de uma época consideravelmente posterior, foi Nasír ed-dín (c. 1250). É dele o primeiro trabalho de trigonometria plana e esférica considerado independente da astronomia. Esses escritos foram traduzidos para o latim por John Wallis no século XVII e usados por ele em seus cursos em Oxford.

Por tal, pode-se afirmar que quanto maior for o valor de n , mais próxima da área desejada será a área formada, até que $A_n \cong A$, onde A_n é a medida da área de cada n -ésima figura. Logo, em notação moderna:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

Pode-se notar como este método é muito similar ao que mais tarde seria chamado de integral, que usa da soma de áreas infinitesimais para buscar formar a imagem desejada (STEWART, 2016). Logo, pode-se afirmar que a integração e suas bases remontam de muitas eras em relação a modernidade. Esta pode ser visualizada na figura 6.

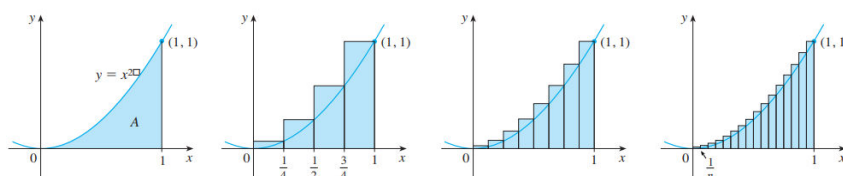


Figura 6: Integral moderna
Fonte: Cálculo Vol. 1, James Stewart

Isto foi por muito tempo a técnica mais utilizada para calcular figuras complexas. Muitos matemáticos conhecidos usaram desta em suas obras. O mais famoso foi Eudoxo de Cnido (390 - 340 a.C.), que é considerado por muitos como o criador da técnica (EVES, 2004). Outro que utilizou deste modelo para resolução de muitos casos complexos foi Arquimedes de Siracusa (287 - 212 a.C.). O método da exaustão era uma grande ferramenta nas mãos desse cientista, que a utilizava para comprovar suas conclusões. Segundo EVES (2004, p.421):

Dos antigos, quem aplicou de maneira mais elegante o método de exaustão e quem mais se aproximou da atual e verdadeira integração, sem dúvida foi Arquimedes. [...] na sua abordagem de áreas e volumes, Arquimedes chegou a resultados equivalentes a muitas integrais definidas que hoje figuram nos textos elementares de cálculo.

Arquimedes era conhecido por ser um aficcionado por estudos. Quando focava em algo, nada o tirava daquele objeto ou assunto a ser pesquisado. Naturalmente, este conhecia muitas técnicas para tratar dos estudos das formas, a geometria, que representava uma das áreas mais instigantes para ele. Mas a ferramenta mais utilizada por ele foi de fato o método da exaustão, de tal forma, que muitos debatem se Eudoxo foi realmente quem criou essa técnica. Para evitar conflitos, alguns pesquisadores creditam o método para ambos os autores.

1.4 - Desenvolvimento mútuo

Por mais que os cientistas e mentes pertencentes ao continente europeu tenham sido realmente importantes para a evolução de muitas concepções e norteamentos modernos, tal qual o cálculo, é historicamente incorreto afirmar que o desenvolvimento deste foi exclusivamente advindo de mentes europeias. Segundo EVES (2004, p.267):

As avaliações do papel dos árabes no desenvolvimento da matemática de maneira nenhuma são unânimes. [...] Por outro lado, deve-se admitir que eles deram pelo menos contribuições pequenas à ciência; ocorre que suas realizações, quando vistas contra o pano de fundo cientificamente estéril do resto do mundo na época, assumiram dimensões maiores do que as que de fato tinham.

Por mais que por muito tempo o mundo como um todo fosse tratado como mera extensão dos territórios europeus, o passar das eras mostrou que isso era um pensamento retrogrado. Esse ideal é denominado de eurocentrismo, e foi por muito tempo um modelo aceito pela sociedade em geral. No entanto, estudos mostram que outras culturas chegaram a resultados semelhantes aos europeus, sendo este um ponto que denota como o eurocentrismo é limitado e vago em suas concepções. Este pode ser visualizado na figura 7.



Figura 7: Modelo eurocêntrico
Fonte: Conhecimento Científico R7

Em relação a isso, a literatura hindu é tida como uma das mais antigas presentes ao longo da história humana. Muitos dos caracteres e fundamentações usadas hoje provem de obras indianas. Um grande exemplo é a equação de Bhaskara, que é usada de forma fervorosa em muitas áreas da matemática moderna (EVES, 2004). Segundo MOL (2013, p.71):

Outra influência clara no pensamento árabe é a matemática hindu, sobretudo de Brahmagupta. Entre suas publicações mais importantes estão as soluções gerais para algumas equações quadráticas, sem a necessidade de completar quadrados. [...] No entanto, seus trabalhos deixaram importantes lacunas no estudo da Álgebra. Algumas delas foram preenchidas por outro indiano, chamado Bhaskara, que, segundo estimativa, viveu entre 1114 e 1185. A fórmula que utilizamos até hoje para resolver uma equação do 2º grau recebe seu nome.

1.5 - Primórdios de uma nova era

A idade média europeia ficou marcada por uma forte intervenção da igreja na sociedade como um todo. Logo, durante um certo período de tempo, houve-se pouco ou nenhum desenvolvimento científico relevante. Isto mudaria com a chegada de certas figuras históricas no período conhecido como renascimento (EVES, 2004). Com o poder da igreja ficando cada vez mais defasado, surgia um sentimento de maior liberdade por parte da população, e principalmente nos cientistas que queriam expor suas teorias.

Isto gerou muitos questionamentos sobre diversos temas. Com tais ideais em pauta, nascia uma espécie de nova ordem, onde só simplesmente aplicar conceitos não era mais aceitável. Com a fortificação das pesquisas e experimentos em geral, muitos dogmas foram quebrados. Segundo EVES (2004, p.288):

Infelizmente, os intelectuais do Renascimento foram incapazes de conciliar normalmente suas ideias sobre ciência com as doutrinas religiosas da Igreja católica e grande parte do trabalho científico da época encontrou tenaz oposição das autoridades eclesiásticas. Temendo a acusação de heresia, muitos intelectuais do Renascimento relutavam em publicar suas teorias, especialmente no campo da astronomia, uma ciência à qual a Igreja se opunha de maneira especial.

O geocentrismo foi um deles. Estudos de grandes mentes como Nicolau Copérnico (1473 - 1543), Galileu Galilei (1564 - 1642), e Johannes Kepler (1571 - 1630) mostraram como os conhecimentos precisavam ser baseados em fatos, não em crenças ou superstições. Estes acreditavam numa organização totalmente diferente para o sistema planetário aceito na época.

Este era o sistema heliocêntrico, que ficou marcado como o padrão a ser seguido no campo astronômico. Devido a esta descoberta, novas metodologias precisariam ser criadas para trabalhar da melhor forma possível com os astros e suas órbitas nessa nova configuração. O conceito do sistema pode ser observado na figura 9.

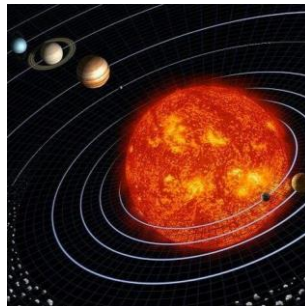


Figura 9: Modelo heliocêntrico
Fonte: Gaia Ciência

Os astros, inclusive o planeta terra, circundariam o sol realizando revoluções periódicas. Kepler propôs que as órbitas percorriam elipses e não circunferências como se pensava. Entretanto, não existia ferramentas precisas para embasar tais afirmações. Para isto, ele criou teoremas, denotados de leis de Kepler. Por mais que o autor tenha sido um dos pioneiros no uso do método da exaustão nos estudos das órbitas planetárias, este não tinha paciência para impor o rigor necessário que daria origem a integração (EVES, 2004). Mais tarde, um famoso físico inglês criaria as metodologias necessárias para lidar melhor com estes conceitos.

A queda do geocentrismo em virtude do modelo heliocêntrico representou uma grande influência para todas as áreas da ciência. Não obstante, a matemática estava entre eles. Muitos foram destaque nesse tempo, com pensamentos desafiantes aos quais eram padrões para a época. René Descartes (1596 - 1650) foi uma figura importante neste meio. No que tange a matemática, este criou uma espécie de revolução com suas ideias. Segundo MOL (2013, p.95):

A obra de Descarte representou um significativo avanço da álgebra formal, tanto em termos de notação como de interpretação geométrica. A notação sofreu grande evolução e assumiu um formato muito próximo do atual. [...] esse é o primeiro momento da história da matemática em que o leitor contemporâneo poderia identificar, sem dificuldades, a notação empregada.

Descartes foi uma das figuras centrais na criação da geometria analítica. Esta ofereceria os meios para a criação do cálculo. Com uma geometria mais prática e acessível, muitos avanços foram possíveis dentro do mundo científico. Isto se deve a facilidade e flexibilidade que o novo modelo oferecia. Um exemplo é o plano cartesiano, o qual oferecia uma relação fundamental entre a álgebra e a geometria. Este pode ser observado na figura 10.

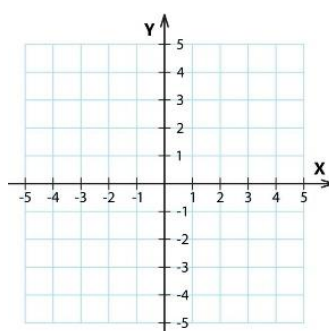


Figura 10: Plano cartesiano
Fonte: Geogebra

Por meio desta, era possível desenvolver argumentos geométricos com o auxílio de equações. Retas, parábolas, e figuras como círculos e elipses poderiam ser melhor trabalhadas por meio de equações características (equação de 1º e 2º grau, equação de circunferências, etc).

2 - O ALVORECER DO CÁLCULO

2.1 - Modernização europeia

Neste contexto, muitas obras nasciam e se desenvolviam diariamente com as novas contribuições vigentes. Antes mesmo da criação dos modelos que ficaram consolidados no cálculo, ilustres mentes já tinham chegado a estudos similares ao que seria reconhecido como derivação. Tal fato não é estranho perante o mundo acadêmico, visto que estes eram matemáticos reconhecidos em sua época e nas posteriores. Segundo EVES (2004, p. 424):

No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi ativada. Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, através de uma tradução, achada em Constantinopla, de uma cópia (do século IX) de seus manuscritos.

Depois de muitas guerras e discussões no âmbito civil, religioso e principalmente científico, a Europa passou por uma grande mudança de paradigma, principalmente no desenvolvimento literário. Neste contexto, surgia a chance perfeita para os alicerces do cálculo se difundirem. Um dos primeiros europeus a moldar bases sólidas para o futuro da diferenciação e integração foi Bonaventura Cavaliere (1598 - 1647). Este foi discípulo de Galileu, e por meio dos ideais de seu mestre, gerou contribuições fundamentais para a matemática europeia.

Cavaliere desenvolveu um meio bastante perspicaz para operar com infinitésimos em áreas e volumes de objetos. Este método ficou conhecido como método de Cavaliere em sua homenagem. Embora este estivesse a trabalhar com “*indivisíveis*”, não apresentava indagações sobre como estes se comportavam ou sobre o que eram. Para ele, uma região plana seria delimitada entre linhas paralelas em relação a uma reta.

Por sua vez, uma região sólida seria uma conjunção de seções planas em relação a um plano fixo. Em seu método, este utilizava de relações entre figuras para gerar decomposições e por meio destas achar áreas e volumes de formas não usuais. Usando do método de Cavaliere, pode-se estabelecer relações entre determinadas geometrias e achar novas conjunções. A título de ilustração, pode-se usar um exemplo envolvendo equações de círculos e elipses.

$$\text{Elipse: } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 ; \text{ Círculo: } x^2 + y^2 = a^2$$

Isolando os termos em relação aos segmentos verticais, isto é, y , pode-se estabelecer relações de semelhança entre as duas figuras as quais estas equações representam, que por sua vez, poderão culminar em novas seções planas e facilitar em futuros cálculos.

Com base nestas alegações, tem-se:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}; y = \sqrt{1 - x^2} \rightarrow A_{Elipse} = \frac{b}{a} A_{Circulo}$$

Portanto, pode-se observar como surgia novos meios de lidar com figuras complexas no ambiente europeu. A relação entre figuras e a composição de outras mais complexas por meio de áreas simples era fundamental na elaboração da integração. Segundo MOL (2013, p. 101):

De posse dessas decomposições e ciente da dificuldade em somar uma quantidade infinita de indivisíveis, Cavalieri evitou calcular áreas ou volumes pela soma desses elementos indivisíveis, mas desenvolveu um método para relacionar áreas ou volumes de figuras em que os indivisíveis têm relação constante.

Por sua vez, John Wallis (1616 - 1703) era um dos autores mais eficientes no uso das séries infinitas, e foi um precursor no conceito mais tarde conhecido como integral no infinito, ou integral imprópria (MOL, 2013). Influenciado nas conclusões de Cavalieri, este tentou aplicar metodologias numéricas as consolidadas indagações formuladas pelo modelo anterior.

Este presumiu que era necessário usar de série muito extensas, tendendo ao infinito, para gerar postulados mais apropriados. Este é um dos fatores que impossibilitaram Cavalieri de gerar conclusões gerais, já que para ele, era absurdamente complexo e abstrato tratar de magnitudes infinitesimais. Nas obras de Wallis, é possível observar uma integração bem conhecida nos dias de hoje, que será melhor trabalhada por Newton. Mas em um contexto geral, a contribuição de Wallis foi importante, já que serviu de acervo para mentes do cálculo.

O desenvolvimento do cálculo surgiria em grande parte advindo de obras de mentes, de certa forma, menos conhecidas no mundo matemático em geral. Blaise Pascal (1623 - 1662) foi um destes pioneiros. Este seria um dos maiores nomes por trás dos estudos envolvendo termodinâmica e teorias envolvendo fluidos, sendo tão reconhecido que seu sobrenome é representado na sistemática moderna de pressão, *pascal* (*Pa*). Mas diferente do que muitos pensam, Pascal era proficiente no que diz respeito ao trato matemático.

Em suas obras, pode ser observado um dos primeiros casos envolvendo integração de funções trigonométricas, a integração da função seno. Assim como Newton, Pascal usava de progressões binomiais em suas conjecturas (EVES, 2004). Sua metodologia era tão eficiente que anos mais tarde, Leibniz, que seria reconhecido como um dos ilustres pais do cálculo nos séculos seguintes, daria grandes agradecimentos e teria até mesmo afirmado que teria se inspirado firmemente nas obras de Pascal.

2.2 - Pré-cálculo

Pierre de Fermat (1607 - 1665) foi um exímio matemático em sua época, e foi um dos que mais se aproximaram da derivação. Embora alguns pesquisadores deem créditos a ele, boa parte da comunidade acadêmica ainda não o classifica como autor deste campo. Isso não mudou tanto com o passar do tempo, já que muitas obras não o citam. Segundo MOL (2013, p.97):

Fermat tinha a matemática como um hobby e nunca atuou como matemático profissional. Porém, foi um dos maiores gênios criativos da matemática do seu tempo. Deixou contribuições significativas em diversas áreas, que o fazem ser visto como um dos precursores da moderna teoria dos números e ainda como um dos criadores da geometria analítica e do cálculo diferencial.

Fermat utilizava de um método único para encontrar máximos e mínimos. Dada uma função $f(x)$, em um ponto máximo ou mínimo, pode-se dizer que os valores de $f(x)$ e $f(x + \epsilon)$ são tão próximos que seja possível igualá-los. Este intervalo é denotado por ϵ , e quando este tende a zero, pode-se empregar a seguinte situação:

$$g(x) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

Este é conhecido como método de Fermat (figura 11). Pode-se notar a semelhança desta expressão com a notação formal para a derivada. No entanto, devido ao autor não apresentar justificativas aceitáveis, não recebeu méritos pela obra. Fontes afirmam que Fermat elaborou esta expressão com base nos estudos de Kepler sobre o movimento dos astros (MOL, 2013).

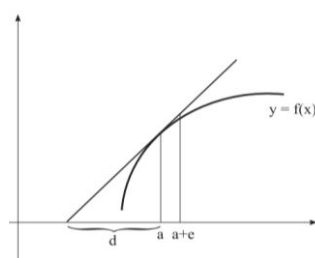


Figura 11: Método de Fermat

Fonte: Introdução a história da matemática, Rogério S. Mol

Por sua vez, Isaac Barrow (1630 - 1677) conhecia um meio para tratar de tangências, de certa forma, similar ao método de Fermat e aos modelos modernos (MOL, 2013). Este, assim como o anterior, era conhecido por sua versatilidade no trato matemático. Ele é conhecido como um dos mais famosos predecessores do cálculo. De acordo com MOL (2013, p.102):

Seu procedimento era similar ao de Fermat, mas no lugar de usar um único incremento — que Fermat denotava por e — Barrow usava duas quantidades, equivalentes ao que hoje chamamos de Δx e Δy . Para uma curva definida pela equação polinomial $f(x, y) = 0$, substituíamos x e y por $x + e$ e $y + a$, desprezamos os termos que não continham a ou e para, a seguir, eliminar os termos com grau maior que um em a e e .

A variação de incrementos, denotada por e , de Fermat era similar à notação de Barrow, caracterizada por Δx ou Δy . Em uma função $f(x, y) = 0$, poderia-se usar da semelhança de triângulos afim de encontrar a tangente em um ponto. A figura 12 exemplifica tal caso.

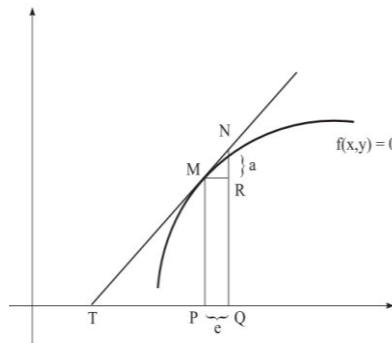


Figura 12: Método de Barrow

Fonte: Introdução a história da matemática, Rogério S. Mol

Para a função acima, $y^2 = px$, pode-se substituir os termos x e y por $x + e$ e $y + a$. Para tal, se dá o seguinte cálculo:

$$y^2 = px \rightarrow (y + a)^2 = p(x + e) \rightarrow y^2 + 2ya + a^2 = px + pe$$

Eliminando termos independentes em relação a a e e e de grau superior, obtém-se:

$$2ya = pe \rightarrow \frac{a}{e} = \frac{p}{2y}$$

A expressão $\frac{a}{e}$ lembra bastante a caracterização dada por dy/dx no cálculo moderno. No entanto, assim como Fermat, Barrow não dava justificativas para suas formulações, como por exemplo, o porquê de eliminar tais termos no caso anterior. Por tal, não recebeu atenção da comunidade científica em geral. Suas ideias seriam fundamentais para gerar o ânimo necessário em Newton, para que este, por fim, trouxesse à vida os pilares fundamentais do cálculo.

2.3 - Revolução matemática

Dentre as grandes mentes do mundo matemático, nenhuma chocou tanto a comunidade científica como o inglês Isaac Newton (1643 - 1727). Em poucos anos, Newton, de forma independente, criou um modelo que se mostraria fundamental para as futuras gerações (BOYER, 1993). Este foi um dos criadores do cálculo, composto basicamente por derivação e integração. Por mais que fosse uma inovação no campo matemático, Newton criou esta ferramenta afim de estudar órbitas de astros em sua nova teoria da gravitação (EVES, 2004).

Com o auxílio da geometria analítica, inspiração nas obras de Fermat e Barrow, e com o intuito de melhorar o que Kepler já tinha proposto, surgia uma nova sistematização matemática. Um ponto que difere os modelos de Newton dos demais eram as nomenclaturas. Os termos “*derivada*” e “*integral*” não eram encontrados em suas obras. Na verdade, estes eram designados por “*fluxão*” e “*fluente*” (EVES, 2004). Aliás, “*infinitésimos*” não eram usados. Para ele, “*momentos*” representavam melhor as variações. De acordo com EVES (2004, p.439):

A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente (uma quantidade que flui) e à sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente, como a ordenada do ponto gerador, era indicada por y , então o fluxo desse fluente era denotado por $\dot{y}$.

Para exemplificar como Newton trabalhava em suas obras, pode-se calcular a fluxão da função $y = x^n$. Para um intervalo o infinitesimal, $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ eram os incrementos infinitesimais de x e y (MOL, 2013). Substituindo y por $y + \dot{y}o$ e x por $x + \dot{x}o$, se dá a seguinte relação:

$$y = x^n \rightarrow y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

Newton empregava o uso de binômios e séries no desenvolvimento de suas ideias. Considerando $y = x^n$ e eliminando os termos contendo o da equação, tem-se:

$$y + \dot{y}o = x^n + nx^{n-1}\dot{x} + nx^{n-1}\dot{x}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\dot{x}^2o^2 + \dots = \frac{nx^{n-1}\dot{x} + nx^{n-1}\dot{x}o \dots}{o}$$

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} \rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}$$

Pode-se notar como esta é similar a uma regra referente a potências polinomiais da derivação moderna. Já a respeito da integração, ou fluente, Newton observou que essa poderia ser descrita a partir de um pequeno incremento em x dado por $x + o$ (MOL, 2013). Para ilustrar essa ideia, pode-se usar da função anterior, $y = x^n$. A relação pode ser vista na figura 13.

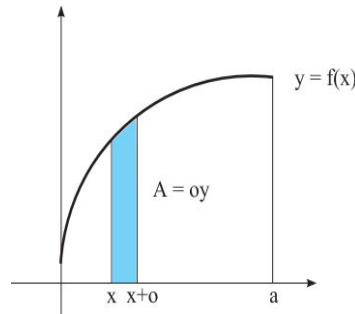


Figura 13: Área sob uma curva

Fonte: Introdução a história da matemática, Rogério S. Mol

A área pode ser definida por $z + oy = \frac{1}{n+1}(x + o)^{n+1}$ (MOL, 2013). Desenvolvendo-a:

$$z + oy = \frac{1}{n+1}(x + o)^{n+1} = \frac{1}{n+1}(x^{n+1} + (n+1)x^no + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}o^2 \dots) \rightarrow z = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

Cavalieri também conseguiu achar uma integral semelhante a esta, mas restrita à $n \neq -1$. Já a relação entre fluentes e fluxões pode ser vista ao aplicar $y = x^n$ e $z = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ na função anterior. Isolando y e eliminando os termos contendo o , tem-se:

$$z + oy = \frac{1}{n+1}(x + o)^{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + oy = \frac{1}{n+1}(x^{n+1} + (n+1)x^no + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1}o^2 + \dots) \rightarrow y = x^n$$

Por tal, Newton é amplamente creditado como pai do cálculo. Entretanto, por mais revolucionário que fosse, e mesmo utilizando de limites, não oferecia conceito para estes. Em suas obras, pode ser achado citações breves para este tópico. Segundo MOL (2013, p. 107):

As relações últimas nas quais certas quantidades desaparecem não são realmente relações de quantidades últimas, mas limites dos quais essas relações de quantidades, decrescendo sem limite, se aproximam sempre; e dos quais podem se aproximar tão perto quanto qualquer diferença dada [...]

A notação de Newton era curiosa. Isso advinha de sua personalidade. Para tal, suas obras eram de alta importância, e não queria que reles leitores as compreendessem, além de temer controvérsias. Logo, suas publicações foram fruto de indicações intensas de amigos próximos (EVES, 2004). Para ele e muitos de seus seguidores, esta descoberta representava algo sublime em sua carreira. No entanto, pouco tempo depois, outro matemático também chegaria à descoberta de um método similar ao do gênio inglês. Por sua vez, este seria Leibniz.

2.4 - Uma perspectiva diferente

Gottfried Leibniz (1646 – 1716) foi um matemático influente entre os autores alemães e em países próximos. Assim como o já citado Newton, este é reconhecido como um dos criadores do cálculo, e assim como no caso anterior, de forma independente (BOYER, 1993). No entanto, a escrita era um ponto relevante nas caracterizações de suas obras. Enquanto Newton aplicava uma linguagem dura aos leitores, Leibniz escrevia tudo de forma mais simples. Os termos “*diferencial*” e “*integral*” surgiram com os trabalhos escritos por Leibniz, denominadas “*calculus differentialis*” e “*calculus summatorius*” ou “*integralis*” (MOL, 2013).

Em seus escritos, era possível ver particularidades na forma como as contas eram redigidas. Em suas obras, pode ser encontrado o símbolo que mais tarde seria usual em todo cálculo envolvendo integração denotado por uma letra *s* alongada, $\int f(x)dx$, bem como a caracterização padrão de derivação $\frac{d(f(x))}{dx}$ (EVES, 2004). Este tipo de organização envelheceu tão bem que é usada até os dias de hoje. De acordo com EVES (2004, p. 443):

Leibniz tinha uma sensibilidade muito grande para a forma matemática e discernia com clareza as potencialidades de um simbolismo bem engendrado. Sua notação para o cálculo mostrou-se muito feliz e, inquestionavelmente, é mais conveniente e flexível do que a de Newton.

O método de Leibniz continha particularidades próximas aos de Barrow e Fermat. Diferente de Newton, Leibniz usava caracteres bem conhecidos e intuitivos para o trabalho envolvendo infinitesimais, tais quais dx , dy , $d(x + y)$, $d(xy)$, e dx^n . O método derivativo de Leibniz era muito similar ao de Newton, embora mais simples e compreensível. Enquanto o último sempre usava de series em suas formulações, o alemão utilizava de particularidades geométricas. Embora o conceito de tangente não tenha sido bem trabalhado, seus métodos conseguiam determinar graus de inclinação sobre curvas (MOL, 2013). Para exemplificar suas conclusões, pode-se observar função $y = f(x)$ (figura 14).

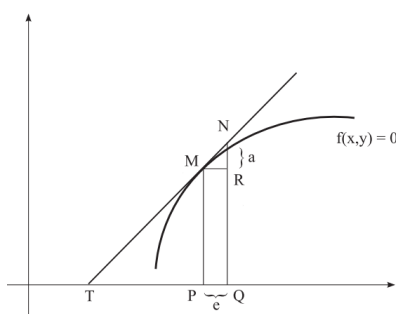


Figura 14: Triângulo característico de Leibniz

Fonte: Introdução a história da matemática, Rogério S. Mol

Com a comparação dos triângulos semelhantes, pode-se concluir a equivalência:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$$

Para o cálculo da tangente no caso da figura anterior, tem-se o seguinte:

$$y = f(x + dx) - f(x) ; s = (x + dx) - (x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \left[\frac{f(x + dx) - f(x)}{(x + dx) - (x)} \right] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Este era um método efetivo. Entretanto, assim como Newton, o alemão também não dava uma concepção para *infinitésimos*. Para o autor, estes representavam ferramentas de auxílio para as ideias principais (MOL, 2013). Esta ideia também era usada para o cálculo de áreas complexas abaixo de curvas, que para Leibniz, eram designadas como *integrais*. Estas seriam somatórios de pequenas áreas infinitesimais encaixadas entre a função limitante e o eixo das abscissas. Para tal, Leibniz usava da semelhança dos triângulos novamente. Se uma área infinitesimal é dada por $dx \cdot dy$, a área relacionada a este será o ponto da função, $f(x)$, multiplicado pelo seu respectivo diferencial, dx . Com isto, somando todas estas contribuições:

$$\text{Área infinitesimal} = dy \cdot dx \leftrightarrow \text{Área proporcional} = f(x) \cdot dx$$

$$\text{Área total} = \sum f(x) \cdot dx \rightarrow \int f(x) \cdot dx$$

Com isto, Leibniz, assim como Newton, especificou uma relação entre a derivação e a integração. Segundo MOL (2016, p.108):

Leibniz percebeu que a busca da tangente a uma curva dependia das relações entre as ordenadas e as abscissas quando elas se tornam infinitesimalmente pequenas e que a quadratura dependia da soma de retângulos de bases infinitesimalmente pequenas apoiadas sobre o eixo das abscissas.

Estes foram por muito tempo os métodos mais utilizados para calcular derivadas e integrais, principalmente pela sua beleza e praticidade em relação ao método de Newton. Isto durou até figuras como D’Lambert, Lagrange, Weierstrass e Cauchy questionarem a viabilidade e aplicação dos infinitésimos e designassem a criação do conceito de *limites*.

2.5 - Coincidências do destino

Seja por acaso ou forças maiores, os resultados obtidos pelos estudos de Newton e Leibniz foram primorosos e coincidentemente idênticos. Em súpula, por incrível que pareça, o cálculo foi criado por dois cientistas completamente diferentes no século XVII. No entanto, esse acaso do destino não foi aceito pelas partes no início e gerou muitas discussões (BOYER, 1993). O cálculo de Newton foi publicado em sua obra mais sublime, o *Principia* (figura 15).

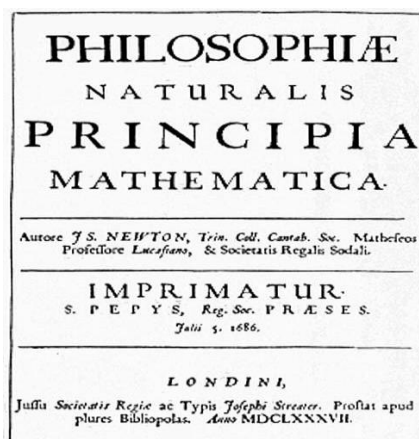


Figura 15: Principia
Fonte: Revista Pesquisa FAPESP

Esta obra foi considerada, e ainda é por muitos, um grande divisor de águas para o mundo científico em geral. Assim como a Bíblia está para a literatura e religião como um todo, esta obra representa um grande impacto na forma como a ciência é estudada e exposta ao mundo. Por mais dura que a leitura deste possa ser para os mais leigos, é de se destacar a grande influência e importância de seus conteúdos, tais quais as Leis do movimento e dinâmica, gravitação universal e o próprio cálculo diferencial e integral. Por tais fatores, para os seguidores newtonianos, a descoberta deste último tópico era exclusiva de seu mestre, mesmo com este tendo publicado seus escritos após o rival.

Já para os seguidores de Leibniz, o motivo citado anteriormente (publicação) era forte o suficiente para a glória do feito acompanhar seu conterrâneo nos registros históricos. Ou seja, o tempo estava do lado do alemão. Por tal, este grande embate intelectual durou até que ambos fossem creditados pela comunidade acadêmica de forma igualitária na criação do novo modelo matemático (BOYER, 1993). Leibniz também deixou grandes obras no mundo científico, sendo uma das mais famosas a *Commercium philosophicum et mathematicum* (figura 16), onde neste também expôs suas ideias sobre o cálculo, reunindo muitas características que seriam herdadas no cálculo moderno como um todo, tanto em simbologias quanto em teoremas práticos.

3.2 - Um mundo sem limites

Como já citado, os infinitésimos eram retratados em muitos estudos, mas o rigor por trás destes não era tão grande. Foi com Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) que este tópico ganhou relevância. Ele foi o primeiro a dar um conceito formal para limites. Outro aspecto que surgiu devido a este renomado autor foi a continuidade. Esta é vital para o entendimento da derivada, e surgiu nas obras deste mesmo autor. Em suas obras, é possível ver como este definia o contínuo de uma função. De acordo com MOL (2013, p.123):

[...] quando valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam infinitamente de um valor fixo, de maneira a diferir deste por tão pouco quando se queira, este último é chamado limite de todos os outros. [...] quando uma função $f(x)$ admitindo um valor único e finito para todos os valores de x compreendidos entre dois limites dados, a diferença $f(x + i) - f(x)$ é sempre entre esses limites uma quantidade indefinidamente pequena, dizemos que $f(x)$ é uma função contínua da variável x entre os limites em questão.

Para uma função ser contínua, esta, seja pela esquerda ou pela direita, deverá tender a um certo limite. Estes por sua vez, deverão ser iguais, para que a unicidade de limites seja respeitada (STEWART, 2016). Logo, para uma determinada função, conclui-se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ se, e somente se } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Uma função pode ser descrita como uma expressão de transformação de fatores, sejam eles x , y , ou outros caracteres. Isto é, a cada parâmetro inicial, tem-se um concomitante final. Um exemplo ilustrativo é a função $y = x + 1$. A cada ponto do domínio x , pertencente as abscissas, tem uma imagem, pertencente as ordenadas y (STEWART, 2016). Este tipo de função é muito comum na literatura matemática. Por outro lado, existem outros que contém restrições em relação a seu domínio e que não apresentam conformidades. Por tal, é preciso ter cuidado no que tange as tendencias presentes. Para ilustração, pode-se analisar a figura 19.

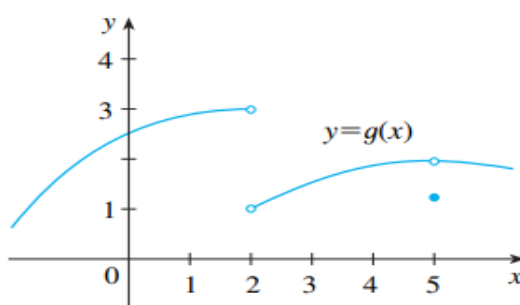


Figura 19: Continuidade
Fonte: Cálculo Vol. 1, James Stewart



Figura 16: *Commercium philosophicum et mathematicum*
Fonte: Milestone Books

No fim das contas, para uma boa parcela, até mesmo dentro da Inglaterra, Leibniz também foi reconhecido como uma mente brilhante, e muitos passaram a procurar cada vez mais suas obras, tomando este até mesmo como ídolo e figura de inspiração. Isto se devia em partes a forma de escrita, onde era visível que um era mais seletivo com seus leitores (Newton) e o outro era mais aberto para as massas literárias (Leibniz). De toda forma, o cálculo estava em alta em toda a extensão da Europa, e muitas das bases modernas já estavam bem consolidadas. Segundo EVES (2004, p.444):

Por algum tempo depois de Newton e Leibniz, os fundamentos do cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, pois era a enorme aplicabilidade da matéria o que atraía os primeiros pesquisadores. Por volta de 1700, a maior parte do cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados, como o cálculo de variações.

No fim de tudo, para a comunidade científica em geral, os dois foram e são creditados como os criadores do cálculo diferencial e integral moderno. Isto, de certa forma, atrapalhou em muito a evolução e refino do campo recém descoberto, visto que, muitos seguindo seus respectivos ídolos, ignoravam os feitos de seu respectivo rival. Segundo EVES (2004, p.444):

A opinião generalizada hoje é que ambos criaram o cálculo independentemente. Embora a descoberta de Newton seja anterior, Leibniz foi o primeiro a publicar seus resultados. Se Leibniz não era tão profundo em matemática quanto Newton, era talvez mais eclético, e embora inferior ao seu rival inglês como analista e físico-matemático, era provavelmente dotado de uma imaginação mais aguda e um sentido superior quanto à forma matemática. A controvérsia, que irrompeu por maquinações de outras partes, levou os britânicos a negligenciar por muito tempo os progressos da matemática no Continente em prejuízo de sua própria matemática.

3 - CONSOLIDAÇÃO ATUAL

3.1 - Sistematização matemática

Com o advento do cálculo, muitas possibilidades já eram acessíveis advindas das particularidades deste novo método. Entretanto, por mais que pareça controverso, até certo tempo depois de sua criação, somente alguns tinham acesso a esta obra. Estes eram Newton, Leibniz e a família Bernoulli. Tal fato não é espantoso perante a comunidade científica, visto que, essa família é uma das mais influentes desde o século XVII, além de ser um dos, senão o, grupo que mais gerou contribuições para a ciência. Segundo EVES (2004, p. 463):

Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667 1748), dos quais, anteriormente, se mencionaram alguns trabalhos. Ambos os irmãos se bandearam para a matemática, deixando outros interesses e outras carreiras, quando começaram a aparecer na Acta eruditorum os artigos de Leibniz. Eles estavam entre os primeiros matemáticos que perceberam a potência espantosa do cálculo e que aplicaram esse instrumento a uma gama ampla de problemas.

Seja na física ou na matemática, a família Bernoulli sempre esteve presente, gerando contribuições que seriam importantes para a sua e para as futuras gerações. Sejam as equações de Bernoulli na Hidrodinâmica (figura 17), ou em equações diferenciais, seja a teoria cinética dos gases e a famosa equação dos gases ideais, estes membros eram dotados de grande maestria em lidar com a ciência (EVES, 2004). Foi a partir desta curiosidade científica que o cálculo pode se disseminar por toda a Europa. Isto seria vital para sua evolução e consolidação do cálculo nas mais diversas áreas da ciência moderna e para a expansão de suas teorias.

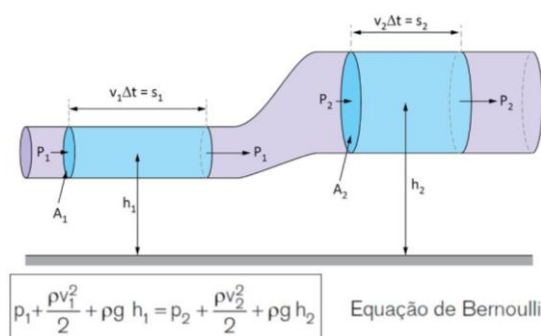


Figura 17: Equação de Bernoulli

Fonte: Khan Academy

O cálculo já estava consolidado como uma das maiores descobertas da matemática. Com isto, muitos buscaram entender seus princípios. Um nome que apresentou grandes melhorias para o campo do cálculo foi Leonard Euler (1707 - 1783). Este foi responsável por realizar uma grande reformulação nas caracterizações e nomenclaturas da matemática como um todo.

A título de curiosidade, a formulação para funções $f(x)$ e $\sum$ para somatórios surgiram em suas obras. Este apresentou relações de suma importância em diferentes áreas, chegando ao ponto de ser considerado como um dos mais versáteis matemáticos de todos os tempos. Muitas de suas inovações foram e continuam a ser empregadas em diversas áreas da matemática moderna. Segundo MOL (2013, p. 118):

Euler foi responsável pela introdução de diversos símbolos empregados na escrita matemática. A letra “e” para “o número cujo logaritmo hiperbólico vale 1” foi introduzida por Euler, possivelmente tendo como referência a primeira letra da palavra exponencial. Embora não tenha sido criação sua, o símbolo π , denotando a razão entre a circunferência e o diâmetro do círculo, passou a ter uso generalizado após ser sistematicamente empregado por Euler.

No entanto, para muitos, a conjectura envolvendo infinitésimos era muito fraca e vaga. Figuras, tais qual Jean-le-Rond D’lambert (1717 - 1783), foram cruciais para incentivar outros estudiosos da área a abandonar tais princípios. Para este, era preciso estimar de forma mais sistemática como as variações, sejam estas ínfimas ou não, se comportam ao longo de uma função. Partindo disto, D’lambert chegou à conclusão de que os infinitésimos eram ambíguos e não contribuía para esta formulação. Isto levaria Cauchy a mais tarde basear suas conclusões em limites e não mais em infinitésimos (EVES, 2004).

Outro que introduziu formulações matemáticas muito bem aceitas foi Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813). Este foi um dos primeiros a formular derivadas de grau superior, isto é, derivada segunda, terceira e afins. Estas são denotadas por $f'(x)$, $f''(x)$ e $f^{(3)}(x)$. Lagrange foi um grande nome no que tange a área do cálculo das variações, sendo este muito famoso na matemática moderna. Uma de suas maiores e mais influentes contribuições matemáticas são os “*multiplicadores de Lagrange*” (figura 18).

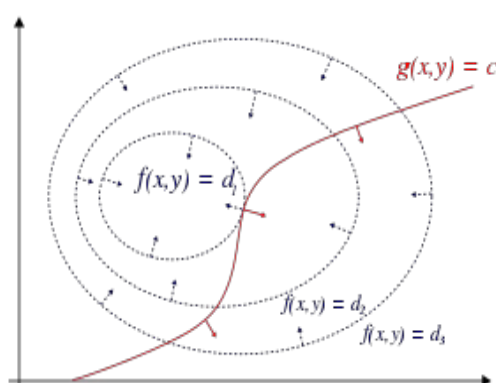


Figura 18: Multiplicadores de Lagrange
Fonte: Khan Academy

Partindo da observação desta, pode-se notar uma certa ambiguidade quando a função tende ao ponto $x = 2$. Quando esta percorre o caminho pela esquerda, a função vai ao ponto $y = 3$. Já pela direita, a função vai ao ponto $y = 2$. Por tal, o conceito de continuidade é um ponto muito importante para o cálculo como um todo (STEWART, 2016). Por mais que os limites tenham sido de fato já citados e reconhecidos no mundo acadêmico, ainda faltava um conceito que de fato expressasse com rigor e sistemática o que este aspecto representava.

O grande nome por trás da fundamentação dos conceitos de limites no espectro do cálculo atual foi Karl Weierstrauss (1815 – 1897). Este foi o primeiro a elucidar com rigor o conceito necessário para a formulação moderna. Este tópico que para muitos era de certa forma controverso e confuso, foi muito bem retratado em suas obras. Segundo MOL (2013, p.131):

Se for possível determinar um limite δ tal que, para todo valor h menor em valor absoluto que δ , $f(x + h) - f(x)$ seja menor que uma quantidade ϵ , tão pequena quanto se queira, então dizemos que fizemos corresponder a uma variação infinitamente pequena da variável uma variação infinitamente pequena da função.

Este complexo trecho serviu como referência para conceitos vagos que muitos leitores e até mesmo autores tinham, e mais tarde seria ponto comprobatório para a existência de um limite. Hoje, os limites tem um conceito bem aceito e rigoroso. Por definição, tem-se que para $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ de forma que se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Caso isso seja obedecido, o limite desta função existirá (STEWART, 2016). Intuitivamente, diz-se que o limite de uma função, quando x se aproxima de um valor a é chamado L . Esta é expressa por:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

O conceito de limites pode ser ilustrado por meio da análise do comportamento de uma função. Portanto, pode-se observar que em pequenas variações os resultados são similares de certa forma. Esta tendência pode ser visualizada na figura 20.

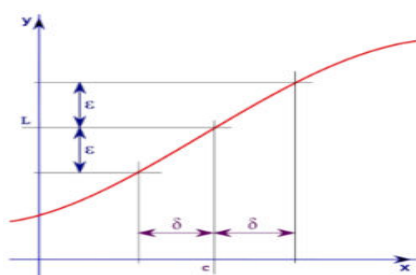


Figura 20: Limite de uma função
Fonte: Um curso de cálculo Vol.1, H.L. Guidorizzi

3.3 - Concepção moderna

Hoje, a derivação pode ser descrita como uma variação de magnitudes infinitesimais. Este conceito surgiu nas obras de Cauchy. Para uma função f , pode-se afirmar que a derivada é a relação entre diferença dessa função acrescida de uma parcela, $f(x + h)$, a sua versão original, $f(x)$, e a variante em si, h , quando este tende a zero. Segundo EVES (2004, p531):

Deve-se a Cauchy grande parte da abordagem do cálculo apresentado nos atuais textos universitários, como os conceitos básicos de limite e continuidade. Cauchy definiu a derivada de $y = f(x)$ em relação a x como o limite, quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Por tal, a derivada de uma função $f(x)$ é:

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Visto isso, pode-se afirmar que uma inclinação de uma reta varia à medida que a variação dos seus pontos se torna cada vez mais ínfima em relação ao estado inicial. Para ilustração, pode-se usar uma reta secante. Ao passo que a distância entre suas extremidades for diminuindo, uma tangência irá ser gerada de forma consequente.

Para ilustração, pode-se utilizar de uma determinada função para demonstrar como esta identidade é aplicada. Considere a equação $f(x) = 4x^2 - 2x - 1$. Com base nesta equação, pode-se empregar o regime clássico do cálculo diferencial afim de encontrar a sua derivada. Para esta função em específico, a derivação pode ser trabalhada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{df(x)}{dx} = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4(x + h)^2 - 2(x + h) - 1] - [4x^2 - 2x - 1]}{h} = \\ \frac{df(x)}{dx} = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 8hx + 4h^2 - 2x - 2h - 1 - 4x^2 + 2x + 1}{h} \\ \frac{df(x)}{dx} = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8hx + 4h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(8x + 4h - 2)}{h} \\ \frac{df(x)}{dx} = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h - 2) = 8x - 2 \end{aligned}$$

Por sua vez, Bernhard Riemann (1826 – 1866) ofereceu uma formalização que seria bem aceita para a integração. Para este, a integral seria equivalente à soma de figuras abaixo da curva de uma função, com o intuito de convergir com a área procurada, de forma intuitiva e objetiva.

Segundo EVES (2004, p.614):

Riemann tornou claro o conceito de integrabilidade pela definição do que chamamos agora integral de Riemann, abrindo caminho, no século XX, para o conceito mais geral de integral de Lebesgue e, daí, para generalizações ulteriores da integral.

Seu método foi considerado convincente, metódico, rigoroso e ao mesmo tempo didático, de tal forma que é utilizado até os tempos atuais no ensino, oferecendo grande elucidação na forma como a integração funciona para o público, sendo amigável tanto para os estudiosos quanto para entusiastas. Um exemplo deste método pode ser visto na figura 21.

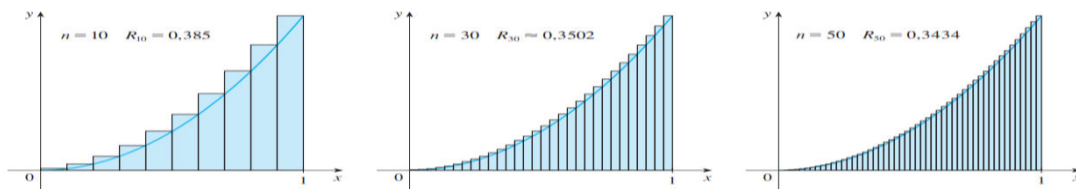


Figura 21: Soma de Riemman
Fonte: Cálculo Vol. 1, James Stewart

Cada retângulo R_n é dado pelo produto da largura, $1/n$ e da altura, x^2 . Logo, a área total é denotada pelo $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$. Para a função mostrada no intervalo $[0,1]$ o somatório será:

$$n = 10: R_n = \frac{1}{n} \cdot x^2 \rightarrow \frac{1}{10} \times \frac{1^2}{10^2} + \frac{1}{10} \times \frac{2^2}{10^2} + \frac{1}{10} \times \frac{3^2}{10^2} \dots = 0,38500$$

$$n = 100: R_n = \frac{1}{n} \cdot x^2 \rightarrow \frac{1}{100} \times \frac{1^2}{100^2} + \frac{1}{100} \times \frac{2^2}{100^2} + \frac{1}{100} \times \frac{3^2}{100^2} \dots = 0,33835$$

$$n = 1000: R_n = \frac{1}{n} \cdot x^2 \rightarrow \frac{1}{1000} \times \frac{1^2}{1000^2} + \frac{1}{1000} \times \frac{2^2}{1000^2} + \frac{1}{1000} \times \frac{3^2}{1000^2} \dots = 0,3338$$

$$\text{Logo, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,3333 = \frac{1}{3}$$

A integração pode ser vista como uma soma de pequenas partes, quando estas tendem ao infinito dentro de um intervalo definido (STEWART, 2016). Este somatório é denominado integral. Logo, pode-se relacionar os conceitos de Riemann com o uso dos limites para gerar uma expressão formal para a integração. Por tal, a integral pode ser expressa pelo seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

3.4 - Relações fundamentais

O novo conceito de limites seria uma grande ferramenta nas mãos de Cauchy. Este teria papel fundamental para relacionar derivação e integração. As particularidades entre essas operações já eram conhecidas por estudiosos, tais quais Barrow, Newton e Leibniz, os quais usavam, sem apresentar indagações ou as preposições necessárias, de suas bases para nortear suas conclusões e fundamentações teóricas. Essa relação pode ser vista na figura 22.

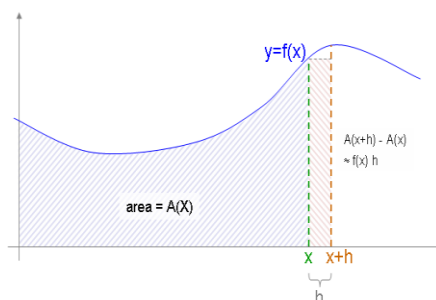


Figura 22: Relação entre derivação e integração

Fonte: Research gate

Os já citados infinitésimos não eram muito rigorosos na visão de Cauchy. Com o auxílio dos conceitos e relações envolvendo limites, Cauchy chegaria ao ponto fundamental que une os dois espectros do cálculo. Este formulou as bases que se mostrariam importantes para o que mais tarde seria conhecido teorema fundamental, também chamado de TFC, que é o pivô central para o cálculo moderno. Segundo NETO (2016, p.140):

Hoje, após as contribuições significativas de Augustin-Louis Cauchy, esse teorema é dividido em duas partes. A primeira diz que se f é uma função contínua em um intervalo dado, a função F que resulta da integral de f nesse intervalo também é contínua e a derivada de F é igual a f . Isso equivale a dizer que a integral de uma função é outra função que, se for derivada, resulta na função integrada inicialmente.

Geralmente, antes de entrar nas integrais, é necessário compreender o conceito de primitiva de uma função. Esta, seguindo de acordo com a sua nomenclatura, é uma função posterior a estudada em questão. Para encontrar a primitiva de uma equação, é preciso recorrer ao *Teorema Fundamental do Cálculo*. Em sua primeira parte, é afirmado o seguinte: *Seja f uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, então uma função g definida por:*

$$g(x) = \int_a^x f(x) dx ; a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a, b]$, e diferenciável em (a, b) , onde $g'(x) = f(x)$ (STEWART, 2016).

Para exemplificá-lo, pode-se usar da função $f(x) = 2x + 1$. Analisando-a, pode-se afirmar que sua primitiva é $f(x) = x^2 + x$, já que $\frac{d(x^2+x)}{dx} = 2x + 1$. Mas a função encontrada não é adequada, já que a derivada não representa de fato a expressão original. Por tal, a primitiva é dada por $F(x) = x^2 + x + C$. A incógnita C indica o fato de que não é possível definir as constantes em uma primitiva quando o intervalo onde ela está definida não é dado, já que esta pode estar dentro de uma família de funções (STEWART, 2016). A figura 23 reflete este fato.

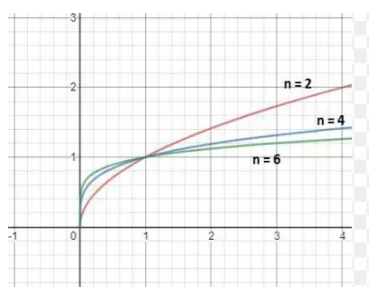


Figura 23: Família de funções
Fonte: Geogebra

Por tal, funções como esta são chamadas integrais indefinidas. Já quando o intervalo é dado, entra em vigor a segunda parte do teorema fundamental. Neste caso, a função gerada será apropriada, sem a existência da constante de integração. Logo, a integral passa a ser chamada de integral definida. De acordo com a segunda parte do TFC: *Se uma função f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então:*

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde F representa uma primitiva qualquer de f , isto é, uma função tal que $F' = f$ (STEWART, 2016). O teorema fundamental representou um avanço de proporções tão grandes quanto a própria criação do cálculo. Por meio deste aparato, muitas resoluções e abstrações foram possíveis. É curioso o fato de que um conceito tão vago para alguns autores, que simplesmente consideravam a integral uma antiderivada, gerou um teorema magnífico e importante como este, que é literalmente fundamental para este campo. Nas palavras de NETO (2016, p.142):

O importante aqui é percebermos que a partir de uma ideia aparentemente inocente, ou mesmo inútil, com algumas contribuições, podemos fazer coisas geniais, caminhando “passo a passo”, utilizando a lógica matemática que foi sendo construída dessa forma.

3.5 - Refino literário

Devido a inúmeras mentes trabalhando de formas simultâneas no cálculo diferencial e integral, hoje, existem muitas formas de representar as variações infinitesimais, as derivadas. O que antes era restrito a Leibniz, Newton e alguns privilegiados, agora era alvo de pesquisas por cientistas espalhados por toda a Europa. Estas peculiaridades dependem exclusivamente do autor da obra abordada. Esta ideia fica clara na figura 24.



Figura 24: Notação moderna das derivadas

Fonte: O Baricentro Da Mente

Portanto, pode-se afirmar que, como em todo campo de estudo em crescimento, a constante entrada de novas mentes no escopo de estudos dessa área recém-descoberta culminou na criação de muitas siglas, nomenclaturas, áreas de pesquisa e de certa forma, campos individuais padronizados para determinados trabalhos. Segundo EVES (2004, p.462):

O cálculo, apoiado pela geometria analítica, foi o maior instrumento matemático descoberto no século XVII. Ele se mostrou notavelmente poderoso e eficiente para atacar problemas inexpugnáveis em tempos anteriores. Foi sua ampla e surpreendente aplicabilidade que atraiu o grosso dos pesquisadores em matemática da época, resultando daí uma profusão de artigos pouco preocupados com o estado bastante insatisfatório dos fundamentos do assunto. Os processos empregados eram frequentemente justificados com o argumento de que eles funcionavam. E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa.

Isso também foi responsável pela aplicação de versatilidade no estudo da derivação e, conseqüentemente, da integração. Muitos axiomas, teoremas e aparatos modernos foram criados advindos dos estudos individuais destes autores. Assim como a evolução nos estudos, os problemas também ficaram mais complexos. A figura 25 exemplifica o nível de problemas encontrados na literatura atual.

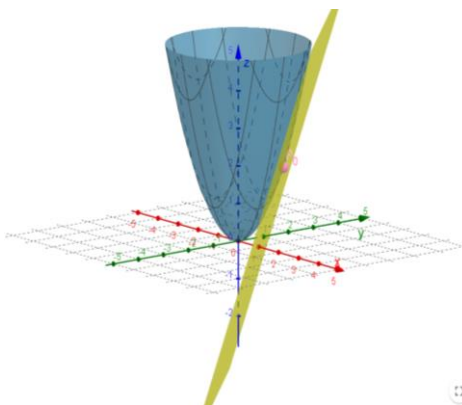


Figura 25: Plano tangente
Fonte: Geogebra

Este tipo de problema é uma consequência positiva do maior grau de estudos após a idade média, também chamada de idade das trevas. Assim como a sociedade humana, a matemática também evoluiu em grandes passadas. Muitas áreas do campo matemático foram evoluindo em grandes velocidades nas mãos de inúmeras mentes. Muitos destes pontos foram se encontrando e dando origem a novos conceitos. O estudo vetorial, álgebra linear e a geometria analítica foram aspectos cada vez mais abordados na literatura, seja devido às necessidades provenientes de estudos mais complexos ou pela demanda científica crescente nos séculos posteriores a revolução industrial. Segundo EVES (2004, p.518):

A Revolução Industrial que deu nascimento à sociedade moderna começou no século XVIII na Inglaterra. Durante o século XIX espalhou-se pelo continente europeu e pela América. Conforme proliferavam as grandes manufaturas e se esparramavam as cidades, a estrutura da sociedade mudavam radicalmente. Entre essas mudanças, o progresso tecnológico rápido desencadeou uma era de investigações científicas sem precedentes, especialmente na mecânica e na química. Embora de início a maioria das invenções fosse feita por artesãos e funileiros, as necessidades da indústria no século XX exigiram a participação de matemáticos e cientistas com grau universitário.

Por consequência, o campo diferencial e integral também entrou nesse meio. A relação destes últimos deu origem ao que se conhece como *cálculo de funções multivariáveis*. Hoje existem ferramentas para tratar de variações infinitesimais em diferentes planos tridimensionais, como as conhecidas *derivadas parciais* e *integrais múltiplas*. Outro campo importante para os estudos modernos é o *cálculo vetorial*, que mescla a mecânica vetorial e o cálculo diferencial e integral. Neste, pode-se encontrar tópicos de suma importância para a física, química, biologia, dentre outras áreas da ciência moderna, tais quais *vetor gradiente*, *derivadas direcionais*, *rotacional*, *divergente*, *integrais de superfície*, *integrais de linha*, dentre outras grandes ferramentas vetoriais.

4 - TEMPOS MODERNOS

4.1 - Limites fundamentais

Assim como qualquer área científica de renome, o cálculo recebeu um tratamento especial ao que tange fundamentação e formulação. Para o ramo de limites, existem certos teoremas e axiomas que tornam o cálculo destes muito mais flexíveis. Por exemplo, o limite envolvendo a função $f(x) = \text{sen}(x)$, assim como todos os demais, é encontrado por meio de análise dos seus gráficos e aproximação. No entanto, é preciso observar em que intervalo este limite pode ser encontrado e se este é viável (GUIDORIZZI, 2001). Logo, é preciso ter cautela nesta escolha. Para pequenas variações em x , pode-se afirmar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Para demonstrar como esta identidade é útil, pode-se utilizar dele para calcular o limite da função $f(x) = \frac{\text{tg}(x)}{x}$ quando esta tende a zero. Este caso seria particularmente difícil de lidar. No entanto, ao usar da identidade mostrada, ele se torna bem simples. Considerando as seguintes relações:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \text{ e } \text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$$

Utilizando destes parâmetros, tem-se o seguinte panorama:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) \cdot x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x) \cdot x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(0)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

Logo, pode-se observar como esta pequena equação pode facilitar muitas equações complexas e de difícil resolução. Visto sua grande flexibilidade e aplicação, este é considerado o limite trigonométrico fundamental. Outras equações também se enquadram nesta categoria, levando nomes que referenciam suas respectivas funções elementares.

Este é o caso do limite fundamental exponencial. Ele é dado pela seguinte identidade:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Assim como no caso anterior, pode-se empregar um exemplo para demonstrar a eficácia deste teorema. Para tal, pode-se calcular o limite da função $f(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1}$ quando esta tende ao infinito. Assim como no outro caso, esse seria um problema complexo. Mas, pode-se usar do limite fundamental para facilitar este cenário. Por tal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right).$$

Realizando a mudança de variável $\frac{1}{t} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 2t$, tem-se o seguinte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2t}\right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{2}{2t}\right) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e^2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{x+1} = e^2$$

Assim como no caso anterior, pode-se averiguar como uma equação trabalhosa se tornou muito maleável em poucos passos. Estas foram algumas das expressões utilizadas para ajudar na resolução de limites. Existem muitas outras com este mesmo intuito. Estas são muito úteis tanto para formulações matemáticas mais rigorosas quanto para tratamentos numéricos em estudos de problemas físicos e químicos, bem como as relações existentes entre diferentes áreas basilares da ciência em geral.

Já outras ferramentas se resumem às simplificações de princípios já existentes, afim de evitar indeterminações ou evitar formalização desnecessária. Estes teoremas exercem papéis parecidos no que tange o trato matemático para limites modernos. Pode-se citar o teorema de L'Hospital, o teorema de Rolle, dentre outros. Estes são muito difundidos nos centros acadêmicos, vista sua aplicabilidade e facilidade de manejo em situações práticas. Isto ajudou muitos físicos, já que este campo usa das ferramentas matemáticas para formalizar suas teorias.

4.2 - Diferencial moderno

Hoje, muitas funções se apresentam de forma composta, e exigem tratamento diferente das demais, seja para evitar transtornos em trabalhos posteriores, seja para aliviar o trabalho restante. Neste ponto, é preciso conhecer a regra da cadeia. Por sua vez, esta pode ser expressa da seguinte maneira:

$$y = F(x) = f(g(x))$$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Para fins ilustrativos, a função $f(x) = \text{sen}(x^2)$ será de grande utilidade. Para este caso, a sua derivada será:

$$f(x) = \text{sen}(2x) \rightarrow f'(x) = 2x \cdot \cos(2x)$$

Este é um exemplo básico. Mas em funções complexas, é comum ver este tipo de identidade. Regras como essa auxiliam na velocidade da resolução. Por exemplo, para a função $f(x) = 5e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{\text{sen}(2x)}$ tem-se o seguinte:

$$f(x) = 5e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{\text{sen}(2x)}$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{\text{sen}(2x)})$$

$$\frac{d}{dx}(5e^{\sqrt{2x}}) = \frac{d(5e)}{dx} \cdot 5e^{\sqrt{2x}} + \frac{d(\sqrt{2x})}{dx} \cdot 5e^{\sqrt{2x}}$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{\text{sen}(2x)}) = \frac{d(\text{sen}(2x))}{dx} \cdot \sqrt{\text{sen}(2x)} + \frac{d(\sqrt{\text{sen}(2x)})}{dx} \cdot \sqrt{\text{sen}(2x)}$$

$$\frac{d}{dx}(5e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{\text{sen}(2x)}) = \frac{5e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} + \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\text{sen}(2x)}}$$

$$f'(x) = \frac{5e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} + \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\text{sen}(2x)}}$$

Com esta função e sua respectiva derivada, pode-se observar como certas operações são difíceis e precisam de ferramentas adequadas para sua resolução não se tornar algo complexo e demandar tempo além do limite necessário. Portanto, a regra da cadeia é de fato um utensílio bastante eficaz no que se propõe a fazer e no que de fato faz.

Esse é um ponto muito importante nas regras, seja de limites, derivadas ou integrais. Problemas que antes poderiam durar muito ou até consumir muito espaço, são resolvidos em minutos e até segundos para certos casos. Isto demonstra como o cálculo se tornou uma área muito refinada e especializada com o passar do tempo e dedicação dos autores. Outra ferramenta importante é conhecida como derivação implícita. Esta é uma forma mais elegante e de certa forma ilustrativa para demonstrar como as derivadas são em sua essência. Esta permite encontrar derivadas mesmo quando a função não está definida de forma clara. A nível de demonstração, para a função $f(x) = x^2 + 2x + 4$ tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned} f(x) = y(x) &= x^2 + 2x + 4 ; f'(x) = \frac{dy}{dx} \\ f'(x) &= \frac{d(y(x))}{dx} = \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 2x \frac{dx}{dx} + 2 \frac{dx}{dx} + 0 \frac{dx}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= 2x + 2 \end{aligned}$$

Um exemplo mais efetivo desta técnica é visto quando aplicado na equação de uma circunferência. Esta, sendo $x^2 + y^2 = 1$, se dá da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \frac{d(x^2 + y^2)}{dx} &= \frac{d(1)}{dx} \\ 2x \frac{dx}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x + y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Este resultado é muito interessante, pois parte de uma equação onde não é possível, pelo menos à primeira vista, estabelecer relações claras entre as incógnitas fornecidas. Este foi um exemplo simples e de fácil reflexão e entendimento, mas em equações compostas, isto é, onde há presença de polinômios mais complexos, essa ferramenta mostra-se muito útil para demonstrar resultados com clareza e eficiência.

4.3 - Os meios de integração moderna

Uma etapa fundamental para qualquer processo do mundo contemporâneo é a velocidade com que este é executado. Assim como qualquer outro, a integração pode ser um processo trabalhoso para certos casos. Por exemplo, a função $f(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$ não pode ser resolvido pelos meios padrões. Para tal, é preciso recorrer ao método da substituição. Aplicando este último na expressão, tem-se o seguinte:

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 1}dx \rightarrow u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x dx$$

$$\int \sqrt{u}du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Este método representa uma ótima ferramenta para funções compostas como a mostrada, e representa de certa forma uma contraparte a regra da cadeia da derivação (GUIDORIZZI, 2001). Entretanto, o mesmo não se repete com outras regras do campo citado. A regra da substituição também se estende para funções trigonométricas. Estas podem ser utilizadas com o auxílio das relações e propriedades geométricas e trigonométricas. Por tal, se estabelece razões entre as funções originais e identidades trigonométricas, que podem variar em cada situação. Por exemplo, considere a função $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$. Para este caso, pode-se usar a relação $x = a\text{sen}(\phi)$, $dx = a\cos(\phi)d\phi$. Por tal, tem-se o seguinte:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{9-[3\text{sen}(\phi)]^2}}{[3\text{sen}(\phi)]^2}3\cos(\phi)d\phi = \int \frac{\sqrt{9-9\text{sen}(\phi)^2}}{9\text{sen}(\phi)^2}3\cos(\phi)d\phi$$

Usando a relação $\text{sen}(\phi)^2 + \cos(\phi)^2 = 1$, tem-se:

$$\int \frac{\sqrt{9(1-\text{sen}(\phi)^2)}}{9\text{sen}(\phi)^2}3\cos(\phi)d\phi = \int \frac{\sqrt{9\cos(\phi)^2}}{9\text{sen}(\phi)^2}3\cos(\phi)d\phi = \int \cot g^2 d\phi$$

$$\int \cot g^2 d\phi = \int \cos \sec^2 d\phi - \int d\phi = -\cot g - \phi$$

$$-\cot g - \phi = -\frac{\cos(\phi)}{\text{sen}(\phi)} - \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Diferente da regra do produto diferencial, o caso envolvendo produtos na integração é mais complexo. Para tal, é preciso cautela na análise das partes que formam a função a ser integrada. Dada uma função $f(x)g(y)$, com $f(x)$ e $g(y)$ deriváveis, pode-se afirmar:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(y)] = f'(x)g(y) + f(x)g'(y) \rightarrow \int f'(x)g(y) + f(x)g'(y) = f(x)g(y)$$

Esta é chamada de integração por partes, que geralmente é expressa da seguinte forma. Seja $u = f(x)$ e $v = g(y)$ respectivamente, suas diferenciais serão $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(y)dy$. Logo, por substituição, tem-se:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Para exemplificar seu uso, pode-se usar da função $f(x) = x \sin(x)$. Inicialmente, é preciso definir u e v , que para este caso, as escolhas mais adequadas são $u = x$ e $v = \sin(x)$ respectivamente. Portanto:

$$u = x ; dv = \sin(x) \rightarrow du = dx ; v = -\cos(x)$$

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx = x \cos(x) + \sin(x) + C$$

Outra grande aliada na resolução de problemas é a integração por frações parciais. Esta consiste em um método para flexibilizar integrandos fracionários complexos para outros mais viáveis. Seja $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios, esta fração pode ser expressa em frações simples, desde que o grau de $f(x)$ seja menor que o de $g(x)$ (STEWART, 2016). Este tipo é denominado fração *própria*. Caso os graus não obedecem a essa regra, a fração será denominada *imprópria*, e deverá passar por outro regime, onde $g(x)$ deverá ser dividido por $f(x)$ até seu resto, $r(x)$ ter grau menor que $g(x)$. Para ilustração, pode-se usar a função $\frac{x^3 + x}{x - 1}$. Neste caso, deve-se dividir o numerador pelo denominador até que o resto seja adequado. Logo:

$$\int \frac{x^3 + x}{x - 1} dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x - 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x - 1| + C$$

4.4 - Propriedades básicas

Devido à alta complexidade de algumas expressões e ao trabalho preciso para chegar em seus resultados, muitos passaram a utilizar certas regras e propriedades. Estas provêm da base clássica, e oferecem grande ajuda na resolução de questões mais extensas.

PROPRIEDADES DOS LIMITES

Limite de uma constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

Limite da soma:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Limite da diferença:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Limite do produto:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Limite do quociente:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Limite de uma potência:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n = L^n$$

Limite de uma raiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

Derivada de uma constante: Seja $f(x) = a$, sua derivada será:

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = 0$$

Derivada de uma potência: Seja $f(x) = x^n$, sendo n um número inteiro, sua derivada será:

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = nx^{n-1}$$

Derivada da soma: Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, sua derivação será:

$$\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] + \frac{d}{dx} [g(x)]$$

Derivada da diferença: Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, sua derivação será:

$$\frac{d}{dx} [f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] - \frac{d}{dx} [g(x)]$$

Derivada do produto: Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, sua derivação será:

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx} [f(x)] \cdot [g(x)] + [f(x)] \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]$$

Derivada do quociente:

Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis, com $g(x) \neq 0$, sua derivada será:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\frac{d}{dx} [f(x)] \cdot [g(x)] - [f(x)] \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]}{g(x)^2}$$

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a c x dx = c \int_b^a dx, \text{ onde } c \text{ é uma constante}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ onde } a \leq c \leq b$$

Integral definida de uma função constante: Seja $f(x) = c$, sua integral será:

$$\int_b^a c dx = c(b - a)$$

Integral definida de polinômios: Seja $f(x) = x^n$, onde n é um número inteiro, sua integral será:

$$\int_b^a f(x) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Integral definida da soma: Para $f(x)$ e $g(x)$, sua integral será:

$$\int_b^a [f(x) + g(x)] dx = \int_b^a [f(x)] dx + \int_b^a [g(x)] dx$$

Integral definida da diferença: Para $f(x)$ e $g(x)$, sua integral será:

$$\int_b^a [f(x) - g(x)] dx = \int_b^a [f(x)] dx - \int_b^a [g(x)] dx$$

4.5 - Respostas para antigos problemas

Por muitas eras, a tangente foi alvejada em centros de discussão. Como já citado, até mesmo em tempos antigos o termo tangente já era conhecido. Entretanto, os conceitos não eram adequados e precisaram ser refinados com uma matemática mais rigorosa. Foi com a derivação que a reta tangente recebeu uma formalização. A figura 26 exemplifica este fenômeno.

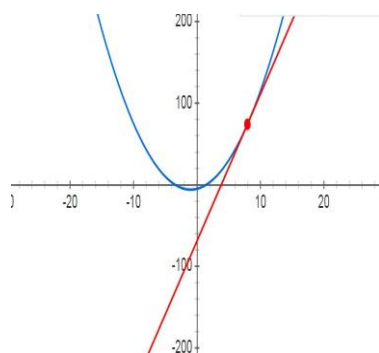


Figura 26: Reta tangente a uma curva

Fonte: Um curso de cálculo Vol.1, H.L. Guidorizzi

Com o auxílio das técnicas derivativas, é possível definir com exatidão a expressão característica para uma tangente em um ponto. Para elucidação, pode-se usar da derivada já calculada. Dada a função $f(x) = 4x^2 - 2x - 1$, a inclinação da reta tangente m no ponto $x = 2$ seria dada por:

$$f(x) = 4x^2 - 2x - 1 \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = 8x - 2$$

$$m = \frac{df(2)}{dx} = 8 \cdot (2) - 2 \rightarrow m = 14$$

Por sua vez, a inclinação m é a relação entre a variação correspondente entre as ordenadas e abcissas. Para a reta tangente, pode-se usar o ponto (2,4). Logo, a expressão será:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 14 = \frac{y - 4}{x - 2} \rightarrow y - 4 = 14x - 28 \rightarrow y = 14x - 24$$

Na antiga Grécia, como citado anteriormente, trabalhar com magnitudes ínfimas ou muito extensas era algo considerado impossível e muito abstrato. Os problemas abordados por Zenão levaram a muitos questionamentos que duram até os dias de hoje. No entanto, atualmente é possível trabalhar com magnitudes absurdas, sendo possível até lidar com o infinito.

Como já dito, John Wallis foi um dos primeiros a usar do infinito em suas obras, sendo um predecessor do que hoje é conhecido como integral imprópria. Para estes casos, é preciso tomar cuidado para evitar a ocorrência de indeterminações (GUIDORIZZI, 2001). Por exemplo, pode-se analisar o comportamento da função $f(x) = 1/x$.

Quando x tende a zero, o denominador não chega exatamente ao zero, mas sim em pontos muito próximos deste. Por sua vez, quanto mais este último diminui, maior o resultado da sentença se torna, chegando a valores de alta magnitude, próximos ao infinito. Para tal, pode-se concluir a seguinte afirmação:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Já em outro caso, quando x tende a ∞ , ocorre o oposto. O denominador tende a números próximos do infinito, o que gera resultados muito próximos do zero absoluto como consequência (STEWART, 2016). Por tal, pode-se concluir intuitivamente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Em alguns casos, pode-se identificar a existência de uma reta quando a função tende a zero ou ao infinito. Quando isto ocorre, este ponto dá origem a uma assíntota, podendo ser vertical e horizontal. Um bom exemplo pode ser visto na figura 27, a qual ilustra a função citada e trabalhada anteriormente.

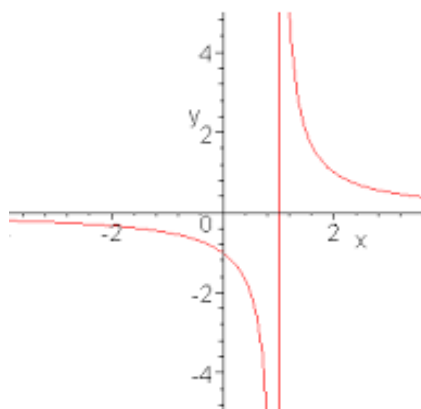


Figura 27: Assíntotas

Fonte: Um curso de cálculo Vol.1, H.L. Guidorizzi

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, ficou claro como cada aspecto e particularidade do cálculo atual é fruto de participações coletivas de inúmeras mentes do passado. Cada um à sua maneira, em seu devido contexto, e com as ferramentas disponíveis, proveu o melhor que pôde para ajudar esta área a crescer e se tornar a grande ferramenta que é atualmente. Por mais que a princípio este não tenha sido o objetivo, hoje, o cálculo é uma tecnologia utilizada em todos os setores da ciência moderna. O que antes era simplesmente designado para trabalhar primariamente em sistematizações matemáticas geométricas e algébricas tais quais variações infinitesimais, comportamentos de funções, máximos e mínimos e tangentes, atualmente é usado na medicina, na engenharia, nas físicas, e dentre outras inúmeras áreas do conhecimento humano em geral.

Isso demonstra o quão eficiente o cálculo se mostra para as mais diversas situações do dia a dia, sejam as mais atreladas a matemática até mesmo as mais complexas cientificamente. Logo, pode-se afirmar que o cálculo era, é, e ainda continuará sendo uma grande ferramenta para toda a comunidade científica. É válido ressaltar como mentes, mesmo separadas por eras, pensavam de forma muito semelhante. O método da exaustão e a soma de Riemman, os conceitos de tangentes da antiguidade e os de hoje, as diferentes vertentes da derivação e integração, e os conceitos básicos dos limites da Grécia antiga e as bases modernas dos mesmos.

Todos estes aspectos, por mais diferentes que possam ser, representam camadas de algo que cresceu exponencialmente com o tempo. Visto a ampla gama de autores que trabalharam nesta área, pode-se afirmar que, não existem pais legítimos para este campo. Por mais importantes que Newton e Leibniz possam ter sido, Fermat, Barrow, Cavaliere e até mesmo Kepler e Descartes, poderiam ter chegado nestas conjecturas modernas mais cedo ou mais tarde. Pode-se dizer que faltou paciência, dedicação ou até mesmo, uma pitada de sorte. Mesmo os mais influentes autores citados neste trabalho basearam suas obras em outras já existentes, e delas extraíram o ânimo e o fervor necessário para elucidar suas ideias.

Tampouco isso, estes conseguiram conjecturar estruturas e concepções complexas da forma mais simples, objetiva e metodológica possível, apesar das circunstâncias enfrentadas. As obras consultadas por mentes recentes foram criadas por mentes visionárias, que chegaram até a desafiar paradigmas sociais de suas épocas, tudo em nome da ciência e em busca de elevar ao máximo o desenvolvimento humano. Em resumo, o cálculo diferencial e integral representa algo intrinsecamente humanitário, assim como a matemática no geral. Um conjunto de conceitos e saberes, que foram agregados periodicamente ao longo dos tempos, e que hoje, é uma área independente e muito importante para a literatura acadêmica em geral.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo - SP: Edgard Blucher Ltda, 1993.

CONHECIMENTO CIENTÍFICO. Imagem sobre Eurocentrismo. Disponível em: <https://conhecimentocientifico.r7.com/eurocentrismo/>. Acesso em: 30 out. 2024.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 4. ed. Campinas;SP: Editora UNICAMP, 2004.

ESCOLA DE MATEMÁTICA PONTAL. Imagem do Papiro de Rhind. Disponível em: <https://www.escoladematematicapontal.com.br/l/o-papiro-de-rhind/>. Acesso em: 30 out. 2024.

FULINI, MÁRCIO ANTÔNIO. **HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL**. Orientador: Profa. Andréia Malacarne. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - Universidade Federal de São João Del-Rei, [S. l.], 2016. Disponível em: http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/86/MARCIO%20ANTONIO%20FULINI_11929_assignsubmission_file_TCC%20Final%2003.12.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 24 ago. 2024.

Gaia Ciência. Heliocentrismo: definição, origem e modelo. Imagem. Disponível em: <https://gaiaciencia.com.br/heliocentrismo-definicao-origem-e-modelo-espaco-fisica>. Acesso em: 30 out. 2024.

GEOGEBRA. GeoGebra: a plataforma favorita para ferramentas matemáticas. Imagem. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 30 out. 2024.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de Cálculo, V. 1, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda, 5a edição (2001)

JÚNIOR, José Firmino de Melo. **Um Universo Interdisciplinar chamado Cálculo Diferencial e Integral**: Concepções e Aplicações. Orientador: Prof. Me. Geraldo Herbetet de Lacerda. 2020. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em Matemática) - Instituto Federal da Paraíba, [S. l.], 2020. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/jspui/handle/177683/1517>. Acesso em: 24 ago. 2024.

KILHIAN, Kleber. A evolução da notação para derivadas. *O Baricentro da Mente*, 23 fev. 2019. Disponível em: <https://www.obaricentrodamente.com/2019/02/a-evolucao-da-notacao-para-derivadas.html>. Acesso em: [data de acesso].

KHAN ACADEMY. O que é a equação de Bernoulli? Imagem. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/science/physics/fluids/fluid-dynamics/a/what-is-bernoullis-equation>. Acesso em: 30 out. 2024.

KHAN ACADEMY. Exemplo de multiplicadores de Lagrange. Imagem. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-examples>. Acesso em: 30 out. 2024.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm; **BERNOULLI**, Johann. *Commercium philosophicum et mathematicum*. Imagem. Lausanne e Genebra: Marc-Michel Bousquet, 1745. Disponível em: <https://www.milestone-books.de/pages/books/003605/gottfried-wilhelm-leibniz-johann-bernoulli/commercium-philosophicum-et-mathematicum?soldItem=true>. Acesso em: 30 out. 2024.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAEDUFMG, 2013.

NETO, João Eichenberger. **História da matemática**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A., 2016. 224 p.

RESEARCHGATE. Figura 1: Interpretação geométrica da derivação e integração. Disponível em: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Interpretacao-geometrica-da-derivacao-e-integracao-A-partir-deste-conceito_fig18_331973240. Acesso em: 30 out. 2024.

REVISTA PESQUISA FAPESP. Imagem sobre os primeiros exemplares do *Principia*. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/onde-estao-os-primeiros-principia/>. Acesso em: 30 out. 2024.

RIBEIRO, Taís Alves Silva. **CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ABORDAGEM HISTÓRICA**. Orientador: Prof. Me. Ronaldo Rodrigues Nogueira. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática) - UNISAL, [S. l.], 2015. Disponível em: <https://revista.unisal.br/lo/index.php/revistajornada/article/view/482/212>. Acesso em: 24 ago. 2024.

SANTOS, Elizabeth Bispo dos. **Cálculo Diferencial e Integral: Uma abordagem prática mediante o uso do Software Geogebra**. Orientador: Dr. Tarciana Maria Santos da Silva. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO, [S. l.], 2016. Disponível em: <https://repository.ufrpe.br/handle/123456789/2071>. Acesso em: 24 ago. 2024.

STEWART, James. Cálculo: volume 1. 8ª 2 v. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016, 672 p.

TREIGHER, Thamires. **Afinal, como foram feitas as lendárias pirâmides egípcias?** [s. l.], 5 maio 2022. Disponível em: <https://inbec.com.br/blog/afinal-como-foram-feitas-lendarias-piramides-egipcias>. Acesso em: 20 mar. 2024.