



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO DE ENGENHARIAS
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

RAIMUNDO LEIRTON FREITAS MAIA

ANÁLISE DE MATRICIAL DE CORTINAS DE ESTACAS JUSTAPOSTAS

MOSSORÓ

2023

RAIMUNDO LEIRTON FREITAS MAIA

ANÁLISE DE MATRICIAL DE CORTINAS DE ESTACAS JUSTAPOSTAS

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: John Eloi Bezerra, Prof. Dr.

MOSSORÓ

2023

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

RAIMUNDO LEIRTON FREITAS MAIA

ANÁLISE DE MATRICIAL DE CORTINAS DE ESTACAS JUSTAPOSTAS

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Defendida em: 14/ 10 / 2023.

BANCA EXAMINADORA

JOHN ELOI
BEZERRA

Digitally signed by JOHN ELOI
BEZERRA
Date: 2023.10.20 22:05:16 -03'00'

John Eloi Bezerra, Prof. Dr. (UFERSA)

Documento assinado digitalmente



JOAO PAULO MATOS XAVIER
Data: 22/10/2023 15:47:01-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

João Paulo Matos Xavier, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Ary Franck Baia Cordeiro, Dr. (Examinador Externo)
Membro Examinador

Ronaldo da Costa Duarte (In Memoriam).

A minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me dar a capacidade de superar mais essa parte da minha vida. E por tudo que ele fez por mim.

Agradeço aos meus pais, Maria do Socorro Freitas Maia e Luiz Gonzaga Silva Freitas (Lulu), por todos os ensinamentos que me passaram, por moldarem meu carácter e pelo exemplo são (trabalhadores e honestos). Além disso agradeço a todo o apoio que me dão.

Agradeço aos meus irmãos, primeiramente pelo apoio que recebo deles. Aos meus irmãos mais velhos, Luiz Lidenilson Freitas Maia (Maninho) e Maria Lidenizia Freitas (Maninha), agradeço por ser uma fonte de inspiração e por serem uma meta a serem alcançada. Aos meus irmãos mais novos, Francisco Leilson Freitas (Loro) Maia e Francisca Leizia Freitas Maia, agradeço por me motivarem a ser uma pessoa cada vez melhor, para que possam me ver como vejo os meus irmãos mais velhos.

Agradeço a minha esposa, Crisnara de Araújo Duarte, por estar comigo e ter me ajudado a vencer mais essa batalha. Por sempre estar ao meu lado me apoiando e por me dar mais uma motivação a continuar estudando.

Agradeço a família da minha esposa, por sempre me apoiar e por ser se tornado minha segunda família. Em especial em memória do meu sogro, Ronaldo da Costa Duarte, de tudo que fez por mim e por ser o grande exemplo de homem, marido e pai.

Agradeço a todos meus amigos do ensino fundamental, ensino médio, por todos os momentos feliz e descontraídos que tivemos.

Agradeço a todos os meus colegas aqui da faculdade, os que não puderam continuar e os que ainda estão na luta, pelo companheirismo e por todos os momentos de convivência.

Agradeço a UFERSA por ter me dado essa oportunidade de crescimento.

Agradeço ao meu orientador, John Eloi Bezerra, por todo apoio e pelas aulas que explodiram minha mente, abrindo minha visão para novos horizontes.

*“Qualquer coisa que possa ocorrer mal,
ocorrerá mal, no pior momento possível”*

(Lei de Murphy)

RESUMO

Há uma tendência em muitos centros urbanos de um crescimento populacional maior que o crescimento territorial, isso impulsiona a busca por uma utilização dos espaços com maior eficiência. Essa eficiência é muitas vezes obtida com a verticalização das edificações, bem como a construção de subsolos. Para esses tipos de obras é necessário a construção de estruturas de contenção, que devem ser bem dimensionadas, levando em consideração a magnitude dos problemas causados por acidentes que venham a acontecer. Nesse cenário, as cortinas de estacas justapostas são um dos tipos de estruturas de contenção mais utilizados para este fim. Paralelo a isso, ocorre a tendência cada vez mais crescente da utilização de computadores nas engenharias, onde na engenharia estrutural moderna é praticamente indispensável. Há vários métodos de análise estrutural, parte fundamental do dimensionamento de uma estrutura. Sendo que o método da rigidez direta, caracterizado por ser um método de análise matricial, tem uma boa afinidade para implementação computacional. O presente trabalho, buscou desenvolver uma planilha *Excel* automatizada com VBA para realização da análise estrutural em cortinas de estacas justapostas, utilizando-se do método da rigidez direta. A aplicação teve um resultado satisfatório, tendo em vista que os valores de saída da análise foram os mesmos do software utilizado para comparação. Além disso, com a base do método implementada é possível utilizá-la para realização da análise estrutural de outros tipos de estrutura, com a vantagem da flexibilidade de manuseio por se tratar de uma planilha e a possibilidade de expansão do código, que abre ainda mais possibilidades de alteração.

Palavras-chave: Estacas justapostas. Rigidez direta. Análise matricial. Estruturas de contenção. VBA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Exemplos de tipo de empuxo de terra.....	16
Figura 2 - Relação entre os tipos de empuxos de terra.....	16
Figura 3 - Visualização do sistema de eixos globais XoY	27
Figura 4 - Visualização de eixos locais $X'oY'$ em relação aos eixos globais.....	27
Figura 5-Distribuição das componentes dos deslocamentos locais nos nós de uma barra, representados nos eixos globais e locais	29
Figura 6 - Distribuição das componentes das cargas locais nos nós de uma barra, representados nos eixos globais e locais	29
Figura 7 - Dados de entrada.....	36
Figura 8 - Botões para controle de ações.....	36
Figura 9 - Dados utilizados para o exemplo de validação	43
Figura 10 - Modelo da análise do software ftool.....	44
Figura 11 - Diagrama do deslocamento horizontal	45
Figura 12 - Diagrama das rotações nodais.....	46
Figura 13 - Diagrama do esforço cortante	47
Figura 14 - Diagrama de momentos	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Fatores de forma.....	21
Tabela 2 - Valores de $\bar{k}_s1$ para argilas pré-adensadas	21
Tabela 3 - Valores de nh para areias	21
Tabela 4 - Análise estrutural de cortina de estaca	42
Tabela 5 - Comparação entre a planilha e a pesquisa de referência	48

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	11
2	OBJETIVOS	13
2.1	OBJETIVO GERAL	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3	REFERENCIAL TEÓRICO	14
3.1	ESTRUTURAS DE CONTENÇÃO.....	14
3.1.1	Muros de arrimo.....	14
3.1.2	Estacas justapostas	14
3.1.3	Empuxo de terra	15
3.1.4	Coeficiente de reação horizontal do solo	19
3.2	ANÁLISE ESTRUTURAL	22
3.2.1	Método da rigidez direta.....	25
4	METODOLOGIA.....	35
4.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	35
4.2	DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO	35
4.2.1	Entrada de dados e saída de dados	35
4.2.2	Estrutura de dados	37
4.2.3	Processamento dos dados.....	37
4.3	VALIDAÇÃO DO APLICATIVO	42
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	45
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
	REFERÊNCIAS	50
	ANEXO A	52
	ANEXO B.....	55

1 INTRODUÇÃO

Nos casos em que o crescimento espacial das áreas urbanas é inferior ao crescimento populacional, tendência bastante comum, surge a necessidade de melhor otimização do uso e ocupação do solo. Uma consequência direta desse fenômeno pode ser observada com clareza nos grandes centros urbanos, como por exemplo no aumento de construções de subsolos. Essas obras necessitam de vários cuidados, como o dimensionamento de estruturas de contenção para evitar que as escavações não afetem as edificações vizinhas e o colapso do solo. Um dimensionamento preciso é de fundamental importância para que as condições citadas sejam garantidas, além disso, diminuir o risco do surgimento de patologias nessas construções (BARUFFI; POLESE; VANIN; THOMÉ, 2013).

Existem várias estruturas destinadas à contenção de solos, que são divididas em muros, escoramentos, cortinas e reforços do terreno. Diante desse contexto, se inserem as cortinas de estacas justapostas, estruturas de contenção pré-moldadas ou moldadas in loco destinadas a resistir ao empuxo lateral do solo, bem como às cargas permanentes e acidentais que porventura vierem a existir (RANZINI; NEGRO JUNIOR, 1998). Elas são uma boa solução para as contenções necessárias à escavação de subsolos, por atenderem às condições necessárias para essas obras (BARUFFI; POLESE; VANIN; THOMÉ, 2013).

Moliterno (1980) afirma que vários fatores devem ser considerados para o correto dimensionamento das contenções: empuxos laterais, peso próprio da estrutura, cargas aplicadas e reações do solo. Além disso, de acordo com Botelho (2015), os projetistas devem escolher qual tipo de contenção deve ser utilizado, levando em consideração vários fatores como segurança, economia, estética, viabilidade, entre outros.

Outra forte tendência, que vem ocorrendo é a utilização de programas de computadores em diversas áreas, para automatizar tarefas repetitivas e abstrair atividades complexas. Segundo Garcia (2012), no meio da engenharia civil, a agilidade, rapidez e precisão são obtidas por meio do auxílio de aplicações computacionais, como são os exemplos das ferramentas de CAD (desenho assistido por computador). Assim, pode-se dizer que os softwares auxiliam os engenheiros a realizarem tarefas complexas de forma mais fácil.

Atualmente, a utilização de computadores é indispensável para a engenharia estrutural (MARTHA, 2010). Antes do advento dos computadores a análise de estruturas complexas, como treliças espaciais poderia durar meses e não ter muita precisão, mesmo com uma equipe de engenheiros estruturais experientes (LEET, UANG E GILBERT, 2009). A utilização de

computadores na engenharia estrutural começou a passos lentos na década de 60, mas com os avanços da computação digital tornou-se possível resolver facilmente problemas discretos com muitos termos (ZIENKIEWICZ, TAYLOR E ZHU, 2005).

A análise estrutural, é a etapa do projeto estrutural onde é feita a idealização de como uma estrutura se comporta. Existem vários métodos para análise estrutural, como método dos elementos finitos, método das forças e método dos deslocamentos, por exemplo. Sendo que o método dos deslocamentos, ou método da rigidez direta tem relativa facilidade de implementação computacional em relação aos outros dois (MARTHA, 2010; WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

Para a criação de um software de análise estrutural são necessários vários conhecimentos adicionais, além dos conhecimentos da engenharia de estruturas, como estruturas de dados, geração de modelos de discretização e aplicação de atributos de análise, o que muitas vezes é uma barreira difícil de se ultrapassar (MARTHA, 2019).

Diante disso, tem-se como motivação a necessidade de dimensionamento preciso, rápida e eficiente das estruturas de contenção necessárias a escavação de subsolos, fenômeno esse que vem crescendo cada vez mais nos grandes centros urbanos. As ferramentas computacionais podem ser utilizadas para atingir esse fim de modo eficaz, surge a iniciativa de elaborar uma planilha automatizada para dimensionar de maneira precisa e eficiente as estruturas de contenção do tipo cortina de estacas justapostas, utilizando para a análise estrutural destas o método da rigidez direta.

O presente trabalho justificasse pela necessidade de ferramentas simples e eficientes para análise desses tipos de estruturas, provendo parâmetros para o seu correto dimensionamento. tendo em vista a utilização cada vez maior delas e a necessidade de segurança requerida para esse tipo de obras, demandas pela busca da eficiência da ocupação do solo.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desse trabalho é realizar a análise estrutural de estruturas de cortinas de estacas justapostas de forma eficiente, utilizando o método da rigidez direta implementado em uma planilha automatizada.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Buscar na literatura as principais características que influenciam na análise estrutural das cortinas de estacas justapostas;
- Investigar a aplicabilidade do método da rigidez direta na análise estrutural desse tipo de estrutura;
- Desenvolver uma planilha automatizada que permita a entrada de dados das estruturas de cortinas de estacas justapostas, e que tenha como saída os resultados típicos de uma análise estrutural.
- Validar os resultados obtidos com resultados de softwares reconhecidos pelo meio acadêmico e profissional e com demais trabalhos publicados.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 ESTRUTURAS DE CONTENÇÃO

Nos casos em que o crescimento espacial das áreas urbanas é inferior ao crescimento populacional, surge a necessidade de melhor otimização do uso e ocupação do solo. Uma consequência direta desse fenômeno pode ser observada com clareza nos grandes centros urbanos, como por exemplo no aumento de construções de subsolos (BARUFFI; POLESE; VANIN; THOMÉ, 2013). No que tange a execução desse tipo de obras, para se garantir a estabilidade da construção é necessário a utilização de estruturas de contenção (CUNHA et. al. 2019).

Ranzini e Negro Junior (1998) definem contenção como qualquer elemento destinado a estabilizar maciços de solo, em que houver desequilíbrio devido alguma movimentação como aterro ou escavação. Elas atuam para resistir as tensões e empuxos do solo gerados devido a essas alterações. Além disso, os autores dividem as contenções em quatro tipos: Muros, escoramentos, cortinas e reforços do terreno.

3.1.1 Muros de arrimo

Os muros de arrimo são estruturas de contenção utilizadas para estabilização de encostas e são classificados em dois grandes grupos: muros de gravidade e muros de flexão (MOLITERNO, 1980).

Botelho (2015) define os muros de arrimo de forma mais abrangente, como estruturas destinadas à contenção de maciços de solo que têm a tendência de desmoronar. Acrescenta que existem vários tipos de muro de arrimo: de concreto armado, de concreto ciclópico, gabiões, entre outros, que se enquadram nas classificações apresentadas anteriormente: muros de gravidade e flexão.

3.1.2 Estacas justapostas

As cortinas, incluso as cortinas de estacas, são estruturas de contenção caracterizadas por ter baixa dissociabilidade e que geralmente são apoiadas ou ancoradas em outros elementos estruturais. Elas são classificadas em dois tipos: rígidas e flexíveis, essa classificação depende se ocorrem deslocamentos significativos que alterem a distribuição de tensão do maciço de solo (RANZINI; NEGRO JUNIOR, 1998).

Diante desse cenário, são apresentadas as cortinas de estacas justapostas, que são estruturas de contenção pré-moldadas ou moldadas in loco destinadas a resistir ao empuxo lateral do solo, bem como as cargas permanentes e acidentais que porventura vierem a existir. Elas são uma boa solução para as contenções necessárias à escavação de subsolos, por atenderem às condições necessárias para essas obras (BARUFFI; POLESE; VANIN; THOMÉ, 2013). Elas vêm sendo bastante utilizadas para estabilização dessas escavações, como por exemplo no Distrito Federal, onde é o tipo de contenção mais comumente utilizado para esse fim (CUNHA et. al., 2019).

Baruffi, Polese, Vanin, Thomé (2013) ainda acrescentam que essas obras necessitam de vários cuidados, como o correto dimensionamento das estruturas de contenção para evitar que as escavações não afetem as edificações vizinhas e que ocorra o colapso do solo. Moliterno (1980) afirma que vários fatores devem ser considerados para o correto dimensionamento das contenções: empuxos laterais, peso próprio da estrutura, cargas aplicadas e reações do solo. Além disso, segundo Botelho (2015), os projetistas devem escolher qual tipo de contenção deve ser utilizado, levando em consideração vários fatores como segurança, economia, estética, viabilidade, entre outros.

3.1.3 Empuxo de terra

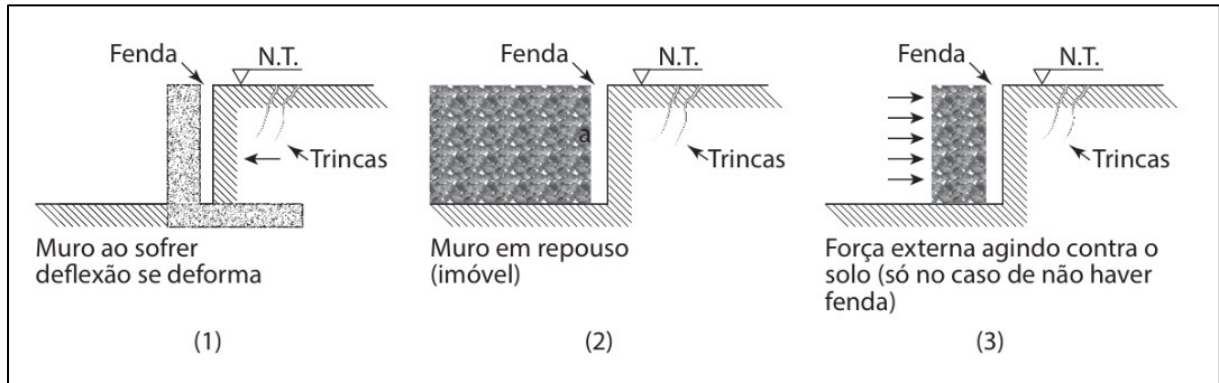
Pode-se dizer que o empuxo de terra ou empuxo lateral é a reação do solo em forma de pressão horizontal. É fator principal que deve ser considerado para o dimensionamento de estruturas de contenção. O empuxo de terra pode ocorrer de 3 formas diferentes, que são denominados como empuxo em repouso, empuxo ativo e empuxo passivo, essa nomenclatura toma como referência o solo. Os empuxos ativo e passivo só irão ocorrer quando houver ruptura da massa do solo, ou seja, quando há uma variação considerável de deslocamento horizontal em relação à altura da contenção (DAS; SOBHAN, 2019).

Moliterno (2018) descreve empuxo de terra como o esforço que o solo exerce na estrutura de contenção. Considerado passivo se o esforço ocorre no sentido muro-solo, como no caso de escoramento de valas ou atirantamento de encostas. É denominado empuxo ativo se ocorre no sentido solo-muro, onde ocorre a ruptura da massa de solo, que pressiona a estrutura de contenção.

Uma melhor visualização dos tipos de empuxo de terra é descrita por Botelho (2015): O empuxo ativo pode ocorrer com uma estrutura de concreto armado Figura 1-(1), onde a massa de solo desmoronada deforma consideravelmente a estrutura de contenção, se essa estrutura for trocada por concreto ciclópico, como na Figura 1-(2), que será muito mais rígido, assim

podendo desconsiderar o deslocamento da estrutura por ser muito pequeno, esse cenário seria considerado empuxo em repouso. Para o empuxo passivo considera-se agora uma estrutura que pressiona o solo comprimindo-o Figura 1-(3).

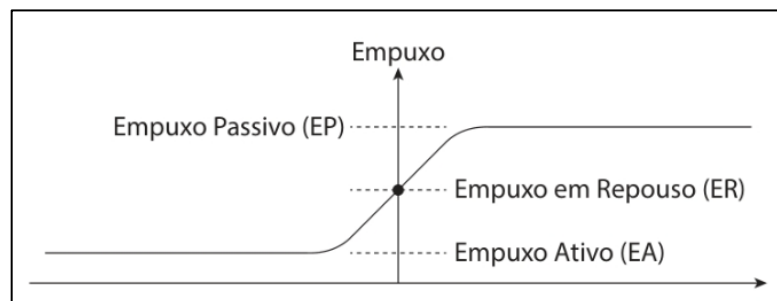
Figura 1 - Exemplos de tipo de empuxo de terra



Fonte: Botelho (2015).

Acrescenta-se que em mesmas condições o empuxo passivo é maior que o empuxo em repouso, que por sua vez é maior que o empuxo ativo, como pode ser visto na Figura 2 (BOTELHO, 2015).

Figura 2 - Relação entre os tipos de empuxos de terra



Fonte: Botelho (2015).

3.1.3.1 Empuxo em repouso

O empuxo de terra em repouso ocorre quando temos uma estrutura de contenção estática, ou seja, quando não há movimentações laterais de solo. Esse fenômeno pode ser descrito pela Equação (1) (DAS; SOBHAN, 2019).

$$k' = k_0 = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_0} \quad (1)$$

Em que:

- k' é o coeficiente de empuxo de terra em repouso;

- σ'_0 é a tensão efetiva vertical do solo;
- σ'_h é a tensão efetiva horizontal do solo ou pressão de empuxo horizontal.

A tensão efetiva vertical (σ'_0) é calculada multiplicando o peso específico (γ) do solo pela altura da camada de solo (z), como pode ser visto na Equação (2) (MOLITERNO, 1980).

$$\sigma'_0 = \gamma \cdot z \quad (2)$$

O coeficiente de empuxo em repouso pode ser calculado de acordo com Equação (3) para solos granulares grossos (areia fofa), Equação (4) para areias densas e compactas e Equação (5) para solos genéricos elas variam de acordo com o tipo de solo (DAS; SOBHAN, 2019).

$$k_0 = 1 - \text{sen}\phi \quad (3)$$

$$k_0 = 1 - \text{sen}\phi + \left[\frac{\gamma_d}{\gamma_{d,min}} - 1 \right] \cdot 5,5 \quad (4)$$

$$\gamma_d = (1 - \text{sen}\phi)(OCR)^{\text{sen}\phi} \quad (5)$$

Em que:

- γ_d é o peso específico real do solo;
- $\gamma_{d,min}$ é o peso específico no estado mais fofo do solo;
- OCR é a razão de sobre adensamento do solo.

3.1.3.2 Empuxo Passivo

O empuxo passivo é caracterizado quando há um deslocamento na estrutura de contenção que comprime o solo, ou seja, se atingiria a ruptura do solo por cisalhamento devido a tensões principais de compressão. Podemos descrever esse comportamento pela Equação (6) (DAS; SOBHAN, 2019).

$$k' = k_p = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_0} = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_0} \quad (6)$$

Em que:

- k_p é o coeficiente de empuxo passivo de terra;
- σ'_p é a pressão horizontal efetiva do solo quando no empuxo passivo.

O cálculo da pressão horizontal efetiva pode ser feito pela teoria de Rankine (1857), que estudou solos no estado plásticos na iminência do colapso. O estudo foi realizado analisando o círculo de Mohr de um elemento infinitesimal de solo, nas condições citadas. O empuxo passivo pode ser obtido pela Equação (7).

$$\sigma'_p = k_p \cdot \gamma \cdot z + 2c' \cdot \sqrt{k_p} \quad (7)$$

Em que c' é o coeficiente de coesão do solo.

O coeficiente de empuxo passivo de terra (k_p) pela teoria de Rankine (1857), pode ser calculado pela Equação (8).

$$k_p = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\phi}{2} \right) \quad (8)$$

3.1.3.3 Empuxo Ativo

O empuxo ativo é caracterizado quando há uma movimentação do solo no sentido de expansão do mesmo, causando deslocamentos consideráveis na estrutura de contenção, ou seja, se atingiria a ruptura do solo por cisalhamento devido a tensões principais de tração, é dado pela Equação (9) (DAS; SOBHAN, 2019).

$$k' = k_a = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_0} = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_0} \quad (9)$$

Em que:

- k_a é o coeficiente de empuxo passivo de terra;
- σ'_a é a pressão horizontal efetiva do solo quando no empuxo ativo.

O cálculo do da pressão horizontal efetiva no estado ativo pode ser feita pela teoria de Rankine (1857) pela mesma análise do círculo de Mohr feita para o estado passivo, podendo ser obtida pela Equação (10).

$$\sigma'_a = k_a \cdot \gamma \cdot z + 2c' \cdot \sqrt{k_a} \quad (10)$$

O coeficiente de empuxo ativo de terra (k_a) pela teoria de Rankine (1857), pode ser calculado pela Equação (11).

$$k_a = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\phi'}{2} \right) \quad (11)$$

3.1.4 Coeficiente de reação horizontal do solo

Para o cálculo das reações e dos deslocamentos horizontais de solo ocasionados por uma estaca carregada horizontalmente, surge um fator importante a ser considerado, o coeficiente de reação horizontal do solo (k_h), que a depender do método de análise, poderá ter mais ou menos influência nos resultados de reações e deslocamentos da estrutura (SILVA, FARO E SOUZA JUNIOR, 2020).

A modelagem do comportamento reação-deslocamento do solo pelo módulo de reação horizontal k_h , é bastante utilizada, devido a sua simplicidade e por ser derivada da teoria de vigas restritas por apoios elásticos. Ou seja, uma faixa de solo pode ser modelada com uma mola de rigidez k_h , que define a proporcionalidade entre a reação p (dada em unidade de força por comprimento linear da estaca) do solo e seu deslocamento y . Ver Equação 12 (CINTRA, 2002).

$$k_h = \frac{p}{y} \quad (12)$$

Os valores de k_h podem sofrer variação de acordo com o tipo de solo, profundidade, forma da estaca, entre outros. Cada método para cálculo do coeficiente de reação horizontal do solo levará em consideração diferentes fatores (ALMEIDA, 2017). Muitos autores fazem uma consideração simplificada, onde consideram que para argilas pré-adensadas o coeficiente de reação horizontal do solo é constante ao longo da profundidade e para areias esse coeficiente cresce de forma linear com a profundidade (CINTRA, 2002).

Um dos métodos para o cálculo do coeficiente de reação horizontal do solo, que utiliza análise estatística, cujos parâmetros podem ser obtidos pelo ensaio de sondagem SPT foi publicado na Specifications for Highway Bridges, pela Japan Road Association (JRA). Onde coeficiente k_h deve ser calculado de acordo com as equações 13, 14, 15 (HONJO; ZAIKA; POKHAREL, 2005).

$$k_h = \frac{E_s}{30} \left(\frac{\sqrt{D^{\frac{1}{\beta}}}}{30} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (13)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k_h D}{4EI}} \quad (14)$$

$$E_s = 28N \quad (15)$$

Em que:

- k_h é o coeficiente de reação horizontal do solo em Kgf/cm²;
- E_s é o módulo de elasticidade do solo em Kgf/cm²;
- β é um valor que é característico da estaca;
- EI é a rigidez a flexão da estaca em Kgf.cm²;
- N é o número de golpes do ensaio Nspt;

Outro método utilizado para obter-se o coeficiente de reação horizontal do solo, que também pode utilizar o resultado do ensaio SPT, foi desenvolvido por Bowles (1997) baseado na teoria de capacidade de carga de uma sapata de Terzaghi (1943) (SILVA, 2018; CRISTIAN, 2012). O cálculo do coeficiente k_h segundo do método citado é feito pelas equações 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 e pela Tabela 1.

$$k_h = A_s + B_s \cdot z^n \quad (16)$$

$$A_s = 40(c \cdot N_c \cdot S_c + 0,5 \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot S_\gamma) \quad (17)$$

$$B_s = 40(\gamma \cdot B \cdot N_q \cdot S_q) \quad (18)$$

$$N_q = \frac{e^{2(\frac{3\pi}{4})tg\phi}}{2\cos^2(45 + \frac{\phi}{2})} \quad (19)$$

$$N_c = (N_q - 1) \cdot \cot g(\phi) \quad (20)$$

$$N_\gamma = \frac{tg\phi}{2} \left(\frac{3tg^2(45 + \frac{\phi+33}{2})}{\cos^2\phi} - 1 \right) \quad (21)$$

$$n = B_s \cdot tg^{-1}\left(\frac{z}{L'}\right) \quad (22)$$

Em que:

- c é a coesão do solo e pode ser obtido baseado no ensaio de sondagem SPT;
- ϕ é o ângulo de atrito interno do solo;
- z é a profundidade de interesse;
- L' é o comprimento da estaca.

Tabela 1 - Fatores de forma

Forma da fundação	Fatores de forma		
	S_c	S_q	S_γ
Corrida	1,0	1,0	1,0
Quadrada	1,3	0,8	1,0
Circular	1,3	0,6	1,0
Retangular	1,1	0,9	1,0

Fonte: Terzagui (1943).

Terzagui (1955) criou um método para estimar o coeficiente de reação horizontal do solo, esse método leva em consideração o tipo de solo, a dimensão da estaca para areias e a profundidade também é considerada, essa estimativa não condiz totalmente com a realidade, mas é uma boa aproximação. Para o cálculo do coeficiente de reação horizontal são utilizadas as Equações (23) e (24).

$$k_h = \frac{0,3048}{1,5D} \bar{k}_{s1} \quad (23)$$

$$k_h = n_h \frac{z}{D} \quad (24)$$

Em que:

- $\bar{k}_{s1}$ é o coeficiente de reação horizontal do solo para uma contenção com dimensão de 1 ft., encontrado na Tabela 2;
- n_h é uma constante, que pode ser obtida na Tabela 3;

Tabela 2 - Valores de $\bar{k}_{s1}$ para argilas pré-adensadas

Consistência da argila	Rija	Muito Rija	Dura
Intervalo $\bar{k}_{s1}$ (MN/m ³)	15,7 – 31,4	31,4 – 62,9	>62,9
Valores recomendados $\bar{k}_{s1}$ (MN/m ³)	23,6	47,1	94,3

Fonte: Terzagui (1943).

Tabela 3 - Valores de n_h para areias

Densidade relativa da areia	Fofa	Média	Compacta
Valores de n_h para areias secas (MN/m ³)	2,4	7,4	19,7
Valores de n_h para areias submersas (MN/m ³)	1,4	4,9	12,0

Fonte: Terzagui (1943).

Silva, Faro e Souza (2020), em seu estudo obtiveram o coeficiente de reação horizontal do solo para treze métodos diferentes na mesma configuração de estaca e mesmo perfil de solo,

em que os valores obtidos tiveram variação máxima de 42 vezes. A partir dos coeficientes obtidos e com o auxílio da ferramenta *ftool* foram obtidos deslocamentos e momentos fletores, que tiveram variação máxima de 6,62 vezes e 1,99 vezes, respectivamente. Chegando à conclusão de que, apesar da exorbitante variação que ocorreu nos coeficientes, refletiu em uma variação bem menor nos deslocamentos e momentos obtidos, no entanto, ainda é uma variação considerável, ressaltando assim a importância de se escolher o modelo adequado para a obtenção desses coeficientes.

3.2 ANÁLISE ESTRUTURAL

Conforme Garrison (2016), estruturas são as partes de uma edificação responsáveis por garantir a manutenção de sua forma quando ela estiver submetida a solicitações externas, como cargas, forças e outras ações ambientais. Além disso, o autor acrescenta que as estruturas podem ser concebidas com diversos materiais diferentes, como madeira, aço e concreto. A função de planejar, projetar, construir e manter sistemas estruturais é atribuição dos engenheiros estruturais.

O projeto estrutural, é feito em várias etapas complexas. Dentre elas está a idealização e previsão do comportamento da estrutura, essa fase é chamada de análise estrutural. Ela tem como objetivo, quantificar os esforços internos e externos atuantes, bem como as tensões e deslocamentos (deformação da estrutura) que se dão devido a esses esforços. Essa quantificação dependerá do tipo de modelo estrutural adotado, que, por sua vez, é função das hipóteses definidas. Há três categorias de suposições empregadas na formulação de modelos estruturais: requisitos de equilíbrio, harmonização de deslocamentos e deformações, e princípios constitutivos dos materiais. (MARTHA, 2010).

Segundo Azevedo (2003), existem três tipos de estruturas, classificadas de acordo com a sua geometria: reticuladas, laminares e sólidas. As Estruturas reticuladas são constituídas por barras prismáticas em que as dimensões da seção transversal são muito menores que o comprimento do seu eixo longitudinal, Martha (2019) complementa que esse eixo deve ser bem definido. Weaver Junior e Gere (1990) acrescentam que as estruturas reticuladas são divididas em 6 tipos: vigas, pórticos planos, pórticos espaciais, treliças planas, treliças espaciais e grelhas. Já as estruturas laminares são aquelas em que uma dimensão é muito inferior às outras duas, como são o exemplo de paredes e lajes. Por fim, as estruturas sólidas englobam todas as demais estruturas que não se enquadram nas outras duas classificações (AZEVEDO, 2003).

Existem quatro níveis de abstrações para as estruturas, no que diz respeito à análise estrutural moderna: modelo real, modelo estrutural, modelo discreto e modelo computacional. O modelo real descreve a estrutura na forma que de fato será construída. Já o modelo estrutural, também é chamado de modelo matemático, pois descreve a estrutura por meio de formulações matemáticas. Estas, por sua vez, são constituídas baseado em hipóteses físicas simplificadoras, como a compatibilização de deslocamentos, equilíbrio de forças e características constitutivas dos materiais. O modelo discreto representa a estrutura por uma série de variáveis e parâmetros, ou seja, descreve um modelo contínuo pelos parâmetros e variáveis adotados. Muitas vezes o modelo matemático é convertido para o modelo discreto, essa conversão é chamada de discretização. Já o modelo computacional é um conjunto de formulações que descrevem a estrutura com o auxílio de computadores (MARTHA, 2010; 2019).

Os métodos de análise estrutural têm como cerne a discretização do comportamento contínuo da estrutura, ou seja, fazer a representação do modelo estrutural com um número finito de parâmetros (MARTHA, 2019).

Quando uma estrutura é submetida a carregamentos, serão gerados deformações e deslocamentos. O cálculo desses, são uma parte essencial da análise estrutural. As condições de compatibilidade garantem que os deslocamentos serão contínuos ao longo da estrutura (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

Um artifício importante utilizado nos métodos de análise estrutural é o efeito da superposição, ele considera que o deslocamento total em um ponto de uma estrutura submetida a diversos carregamentos externos é igual à soma dos deslocamentos obtidos nesse ponto para cada carregamento aplicado separadamente. No entanto, o mesmo só pode ser aplicado em uma estrutura linear elástica, ou seja, quando é assumida uma relação linear entre as ações e os deslocamentos. Essa relação ocorre quando 3 condições são satisfeitas: A estrutura sofre pequenos deslocamentos, o material segue a lei de Hooke e não há interação entre ações axiais e os efeitos de flexão das barras (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990). Para Martha (2010), a combinação linear de forças aplicada a uma estrutura gera uma proporcional combinação linear de deslocamentos. De forma generalizada, seja uma estrutura onde os pontos $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$, tenham cargas aplicadas $G_1, G_2, G_3 \dots G_n$, gerando os deslocamentos $D_1, D_2, D_3 \dots D_n$, respectivamente. Se a aplicação da carga G_i no ponto P_i isoladamente, gerará os deslocamentos $D_{1j}, D_{2j}, D_{3j}, \dots D_{nj}$ nos pontos $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$. Então D_i será dado pela Equação (25).

$$D_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \quad (25)$$

Quando é possível obter os esforços internos e reações de apoio de uma estrutura utilizando apenas as equações de equilíbrio ela é dita estaticamente determinada ou isostática. Quando isso não ocorre, as estruturas recebem o nome de estaticamente indeterminadas ou hiperestática, estas são os tipos mais comuns encontrados. Dessa forma, para se realizar a análise estrutural desse tipo de estrutura são necessários outros métodos, como o método das forças e método dos deslocamentos, que se baseiam no princípio da superposição. (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990; MARTHA, 2010).

Além disso, como definimos como condição que o material se encontra no regime linear elástico podemos reescrever o deslocamento na posição P_i devido a carga G_j , D_{ij} , de acordo com a Equação (26). Onde, F_{ij} é chamado coeficiente de flexibilidade e é definido como o deslocamento no ponto P_i gerado por uma carga unitária no ponto P_j . Assim, podemos obter a Equação (27) substituindo a Equação (26) na (25). Além disso, com base na Equação (27) é possível escrever um sistema linear com todos os deslocamentos, que na Equação (28) aparece na sua forma matricial. Essa é a base para o método das forças, ou método da flexibilidade (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990; MARTHA, 2010).

$$D_{ij} = F_{ij} \cdot G_j \quad (26)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^n F_{ij} \cdot G_j \quad (27)$$

$$[D] = [F] \times [G] \quad (28)$$

Em que,

- $[D]$ é uma matriz $n \times 1$, que contém os deslocamentos $D_1, D_2, D_3 \dots D_n$, chamada de matriz dos deslocamentos;
- $[G]$ é uma matriz $n \times 1$, que contém as cargas $G_1, G_2, G_3 \dots G_n$, chamada de matriz das cargas;
- $[F]$ é uma matriz $n \times n$, que contém os coeficientes de flexibilidade F_{ij} , com $i, j = 1, 2, 3 \dots n$, chamada de matriz de flexibilidade.

Weaver Junior e Gere (1990) ainda concluem que as cargas podem ser expressas em função da combinação linear dos deslocamentos, expressa pela Equação (29), dando origem ao fundamento do método da rigidez ou método do deslocamento.

$$[G] = [S] \times [D] \quad (29)$$

Em que $[S]$ é chamada de matriz de rigidez, que contém os coeficientes de rigidez S_{ij} (carga no ponto P_i necessária para gerar um deslocamento unitário no ponto P_j) com $i, j = 1, 2, 3 \dots n$.

3.2.1 Método da rigidez direta

Os métodos dos deslocamentos e da rigidez direta têm a mesma essência, utilizado -se do princípio da superposição na forma da Equação (29), para se determinar os parâmetros que descrevem por completo o comportamento de uma estrutura (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990). A diferença entre eles reside apenas no procedimento utilizado para se encontrar a matriz de rigidez da estrutura (coeficientes de rigidez) e as cargas atuantes (MARTHA, 2019). O método da rigidez direta é o principal método de análise matricial e tem uma boa afinidade com a implementação computacional, como afirma Weaver Junior e Gere (1990). Assim, ele será detalhado a seguir, pois será adotado para implementação computacional do aplicativo tema deste trabalho.

Os parâmetros adotados na discretização desse modelo são os deslocamentos e rotações nodais da estrutura, obtidos pela resolução da Equação (29). De forma generalizada, os deslocamentos e rotações nodais são chamados de graus de liberdade, eles são divididos em dois tipos: livres e restritos. Os graus de liberdade restritos são aqueles fixados por um apoio, diferentes dos graus de liberdade livres, que não têm restrição de movimento (MARTHA, 2019). Além disso, Weaver Junior e Gere (1990) descrevem outro tipo de grau de liberdade, um meio termo entre livre e restrito, chamado de apoio elástico. Martha (2019) faz uma simplificação na nomenclatura, atribuindo o termo deslocamentos para se referir a ambos deslocamentos e rotações nodais, que também será adotado a partir de agora.

A aplicação desse método consiste primeiro na imposição das condições de compatibilidade dos deslocamentos, depois na utilização das leis constitutivas dos materiais e, por fim, a observância das equações de equilíbrio das forças e momentos (MARTHA, 2010). Para Weaver Junior e Gere (1990) o método tem como base escrever as equações de equilíbrio em função dos coeficientes de rigidez e dos deslocamentos desconhecidos.

Os casos básicos utilizados pelo princípio da superposição nesses métodos são caracterizados por serem configurações estaticamente determinadas da estrutura, ou seja, configurações em que todos os deslocamentos são conhecidos (MARTHA 2010; WEAVER JUNIOR E GERE 1990). Essa configuração também é chamada de sistema hipergeométrico, obtido adicionando restrições nos graus de liberdade livre, de tal forma que impeça todos os possíveis deslocamentos. São associados deslocamentos a essas restrições, que são chamados de deslocabilidades, e atuam como as variáveis principais do modelo (MARTHA, 2019).

3.2.1.1 Conceitos-chave

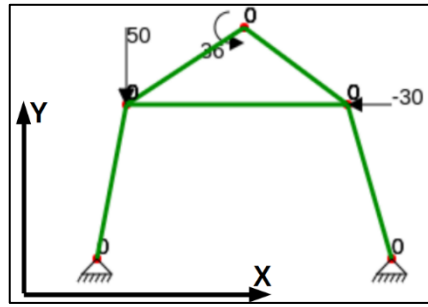
Serão definidos alguns conceitos utilizados na discretização e representação do modelo estrutural utilizado nesse método: nó, barra, sistema de eixos e matrizes de transformação. Eles são conceitos-chave necessários para o entendimento completo do método da rigidez.

As barras são os elementos principais da discretização, caracterizadas por sua forma geométrica linear, ou seja, uma de suas dimensões é bem maior que as outras duas. Além disso, nesses elementos são aplicados os carregamentos externos, que respondem com campos de tensão-deformação (AZEVEDO, 2003).

Um nó pode ser definido como o ponto geométrico de encontro de barras ou a extremidade livre de uma barra. Pode-se ainda generalizar sua definição chamando-o de ponto de discretização, ou seja, se um nó for inserido em uma barra, ela se divide em duas novas barras. Além disso, é possível inserir quantos nós forem necessários em uma estrutura, refinando sua discretização. A partir dessa ideia foi desenvolvido outro método de análise, o método dos elementos finitos. A inserção de nós também é utilizada para simplificar algumas situações de carregamento, como cargas concentradas e carregamentos distribuídos em uma parte da barra (MARTHA, 2019).

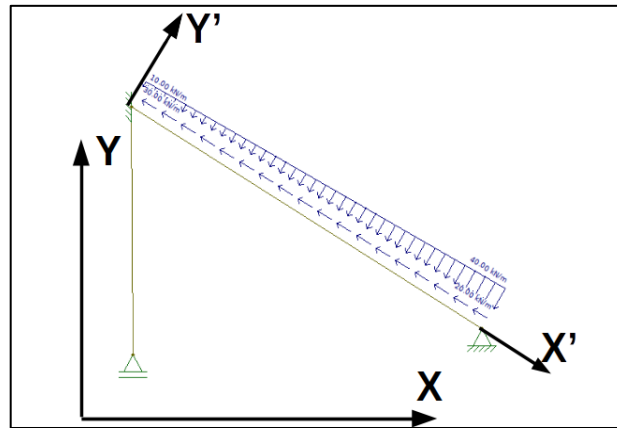
Para realização da análise estrutural pelo método da rigidez é necessário abordar a estrutura por um todo adotando um sistema de eixos globais XoY , como pode ser visto na Figura 3. No entanto, também se faz necessário abordar localmente cada barra da estrutura, assim, para cada barra além do sistema de eixos global adota-se um sistema de eixos locais $X'oY'$. O sistema de eixo local de cada barra é definido de tal forma que o eixo X' passa pelo eixo axial da barra, como pode ser melhor visualizado na Figura 4 (MARTHA, 2010).

Figura 3 - Visualização do sistema de eixos globais XOY



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 4 - Visualização de eixos locais $X'oY'$ em relação aos eixos globais



Fonte: Autoria própria (2023).

No método da rigidez, para se fazer a análise da estrutura, deve-se fazer a análise de cada barra isolada, considerando que as cargas aplicadas e os deslocamentos gerados e impostos estão decompostos nos eixos locais da barra. Posteriormente os efeitos de cada barra devem ser somados em suas respectivas posições para ser feita a análise global da estrutura, para isso é necessário converter as componentes das cargas e dos deslocamentos dos eixos locais para os eixos globais da estrutura (WEAVER JUNIOR E GERE 1990).

Assumindo-se que as cargas e deslocamentos atuantes nos nós da barra, na direção dos eixos locais sejam $f_1', f_2', f_3', f_4', f_5', f_6'$ e $d_1', d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$, respectivamente. Além disso, assumindo que as componentes dessas cargas e deslocamentos nos eixos globais sejam dadas por $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ e $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$, respectivamente. Nesse cenário, a conversão dessas cargas e deslocamentos entre os eixos locais e globais são dadas pelas Equações (30), (31), (32), (33), (34), (35), considerando que a barra faz um ângulo β com o eixo global X . A Figura 5 mostra como as cargas são distribuídas nos eixos locais e globais, enquanto a Figura 6 mostra a distribuição dos deslocamentos.

$$[d'] = [R] \times [d] \quad (30)$$

$$[f'] = [R] \times [f] \quad (31)$$

$$[d] = [R]^T \times [d'] \quad (32)$$

$$[f] = [R]^T \times [f'] \quad (33)$$

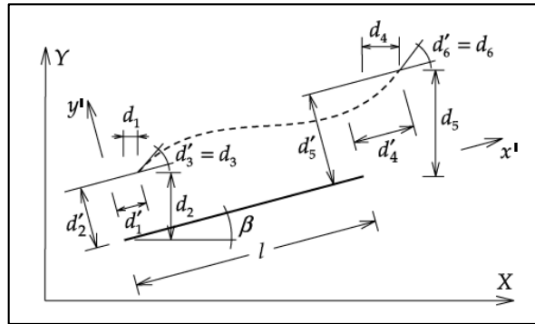
$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Em que:

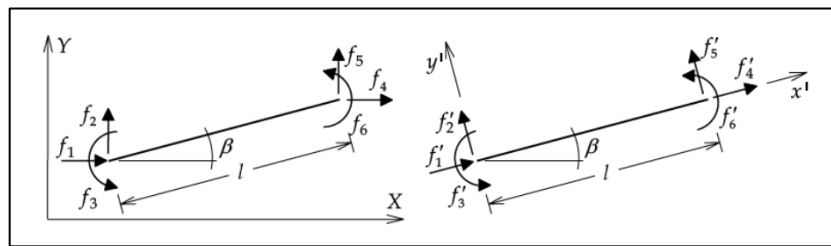
- $[d']$ é uma matriz 6×1 , que contém os deslocamentos nos eixos locais $d_1', d_2', d_3', d_4', d_5', d_6'$;
- $[f']$ é uma matriz 6×1 , que contém as cargas nos eixos locais $f_1', f_2', f_3', f_4', f_5', f_6'$;
- $[d]$ é uma matriz 6×1 , que contém os deslocamentos nos eixos locais globais $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$;
- $[f]$ é uma matriz 6×1 , que contém as cargas nos eixos globais $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$;
- $[R]$ é a matriz auxiliar de transformação de eixos globais para eixos locais;
- $[R]^T$ é a matriz auxiliar de transformação de eixos locais para eixos globais.

Figura 5 - Distribuição das componentes dos deslocamentos locais nos nós de uma barra, representados nos eixos globais e locais



Fonte: Martha (2019).

Figura 6 - Distribuição das componentes das cargas locais nos nós de uma barra, representados nos eixos globais e locais



Fonte: Martha (2019).

3.2.1.2 Componentes do sistema do método da rigidez

Para se resolver o sistema da Equação (29) (encontrar os valores dos termos de $[D]$), é necessário primeiro encontrar os valores para os termos de $[G]$, que são denominados de cargas nodais combinadas e posteriormente os termos de $[S]$, que são denominados de coeficientes de rigidez da matriz de rigidez global. Como foi dito anteriormente, esses termos serão encontrados para cada barra separadamente e depois transpostos para o sistema global (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990; MARTHA, 2019).

Os termos da matriz das cargas nodais combinadas $[G]$ são obtidos subtraindo-se de cada componente de carga aplicada nos nós as reações de engastamento perfeito gerados pelo carregamento aplicado de cada barra. As reações de engastamento ideal referem-se às reações de suporte da barra, presumindo que todas as suas possibilidades de movimento estejam limitadas. Uma das formas de se encontrar as reações de engastamento perfeito é utilizando o teorema de Betti, que é um corolário do princípio dos trabalhos virtuais (MARTHA, 2010). Martha (2019) apresenta as soluções de engastamento perfeito, $[G_{eng}]$, de uma barra submetida

a carregamentos distribuídos linear axial e transversal dados pelas Equações (36) e (37), respectivamente, como pode ser visto na Equação (38). Essas reações de engastamento perfeito fornecidas por Martha (2019) são dadas nos eixos locais, depois precisam ser passadas para os eixos globais (utilizando a Equação (33)) para só assim ser subtraídas das cargas externas aplicadas nos nós.

$$p(x) = (p_f - p_i)x/L + p_i, \quad 0 \leq x \leq L \quad (36)$$

$$q(x) = (q_f - q_i)x/L + q_i, \quad 0 \leq x \leq L \quad (37)$$

$$[G_{eng}] = \begin{bmatrix} \frac{-L(2p_i + p_f)}{6} \\ \frac{-L(7q_i + 3q_f)}{20} \\ \frac{-L^2(3q_i + 2q_f)}{60} \\ \frac{-L(2p_f + p_i)}{6} \\ \frac{-L(3q_i + 7q_f)}{20} \\ \frac{L^2(2q_i + 3q_f)}{60} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Em que:

- p_i é o valor inicial do carregamento distribuído axial;
- p_f é o valor final do carregamento distribuído axial;
- q_i é o valor inicial do carregamento distribuído transversal;
- q_f é o valor final do carregamento distribuído transversal;
- L é o comprimento da barra.

A obtenção dos coeficientes de rigidez é o momento em que se levam em consideração as propriedades constitutivas do material. Eles podem ser definidos como as forças e momentos necessários para equilibrar a barras no caso da aplicação de deslocamentos unitários. Uma maneira de se encontrar os coeficientes de rigidez de uma barra nos eixos locais, é utilizando o princípio dos trabalhos virtuais (MARTHA, 2010). A Equação (39), apresenta a matriz de rigidez local de uma barra nos eixos locais $[S']$, que contém os coeficientes de rigidez de uma barra nos eixos locais obtidos por esse método. A matriz de rigidez local de uma barra nos eixos globais $[S_l]$ pode ser obtida de acordo com a Equação (40), os termos dessa matriz serão

utilizados para se montar a matriz de rigidez global da estrutura $[S]$, utilizando uma matriz auxiliar chamada de vetor de espalhamento (MARTHA, 2010).

$$[S'] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$[S_l] = [R]^T \times [S'] \times [R] \quad (40)$$

Em que:

- E é o módulo de elasticidade do material;
- A é a área da secção transversal do material;
- I é o momento de inércia da peça;
- $[S']$ é a matriz de rigidez local da barra nos eixos locais;
- $[S_l]$ é a matriz de rigidez local da barra nos eixos globais.

Para o caso de graus de liberdade com apoios elásticos, são atribuídos coeficientes de rigidez k_m , eles devem ser somados à diagonal principal da matriz de rigidez global da estrutura (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

O vetor de espalhamento é um artifício utilizado para passar as contribuições das cargas combinadas e dos coeficientes de rigidez de cada barra para a matriz de cargas combinadas globais e matriz de rigidez global respectivamente, bem como passar as reações de apoio, cargas internas e deslocamentos para as barras isoladas. O seu funcionamento está intrinsecamente ligado a como os graus de liberdade de uma barra isolada e da estrutura como um todo são numerados (MARTHA, 2019).

Os graus de liberdade de uma barra são numerados de 1 a 6, de tal forma que os graus de liberdade do primeiro nó recebem os números de 1 a 3 e o segundo nó recebe a numeração de 4 a 6, além disso para cada nó a ordem de numeração dar-se-á pela ordem: componente

paralela ao eixo X' , componente paralela ao eixo Y' e componente de momento (MARTHA, 2010).

Enquanto os graus da estrutura vão de 1 até a quantidade total de graus de liberdade, que para o caso de pórticos planos é três vezes a quantidade de nós da estrutura. Diferente da barra isolada que tem uma forma padrão de numeração, para os graus de liberdade da estrutura, deve-se adotar uma forma conveniente de numeração, que facilite a resolução do sistema da Equação (29). Então a forma de numeração adotada é dada por numerar primeiro os graus de liberdade de apoio elásticos, depois os livres e por fim os restritos, isso permitirá dividir a matriz de rigidez global em duas, o que facilitará a resolução do sistema, encontrar as reações de apoio e cargas internas da estrutura (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

Sendo assim, cada grau de liberdade local tem uma correspondente global, o vetor de espalhamento é o responsável por guardar essa informação, ou seja, cada barra terá uma matriz 6×1 (vetor de espalhamento), onde cada termo será a numeração do deslocamento da estrutura corresponde ao deslocamento da barra. Com esses dados é possível passar as cargas combinadas locais e coeficientes de rigidez locais para suas correspondentes globais, ou seja, espalhá-los nas matrizes globais (MARTHA, 2019).

3.2.1.3 Resultados da análise

Como dito, o sistema da Equação (29), pode ser dividido em dois para facilitar a resolução do mesmo e a busca das reações de apoio e cargas internas da estrutura. Assim, com o padrão adotado para numeração dos graus de liberdade globais, essa divisão pode ser feita de acordo com as Equações (41) e (42) (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

$$[G_l] = [S_{ll}][D_l] + [S_{lr}][D_r] \quad (41)$$

$$[G_r] = [S_{rl}][D_l] + [S_{rr}][D_r] \quad (42)$$

Em que:

- $[G_l]$ é a matriz das cargas combinadas vinculadas aos graus de liberdade livres e com apoios elásticos;
- $[G_r]$ é a matriz das cargas combinadas vinculadas aos graus de liberdade restritos;
- $[S_{ll}]$ é a matriz de rigidez dos coeficientes vinculados aos graus de liberdade livres e apoios elásticos gerados por deslocamentos unitários de graus de liberdade livres e apoios elásticos;

- $[S_{lr}]$ é a matriz de rigidez dos coeficientes vinculados aos graus de liberdade livres e apoios elásticos gerados por deslocamentos unitários de graus de liberdade restritos;
- $[S_{rl}]$ é a matriz de rigidez dos coeficientes vinculados aos graus de liberdade restritos gerados por deslocamentos unitários de graus de liberdade livres e apoios elásticos;
- $[S_{rr}]$ é a matriz de rigidez dos coeficientes vinculados aos graus de liberdade restritos gerados por deslocamentos unitários de graus de liberdade restritos;
- $[D_l]$ é a matriz dos deslocamentos vinculados aos graus de liberdade livres e apoios elásticos, incógnitas do sistema (deslocabilidades);
- $[D_r]$ matriz dos deslocamentos vinculados aos graus de liberdade restritos, que para efeitos desse trabalho serão considerados sempre nulos.

Como $[D_r]$ é uma matriz nula as equações (41) e (42) podem ser reduzidas para as Equações (43) e (44). Como $[S_{ll}]$ e $[G_l]$ a essa etapa já são conhecidos, então é possível encontrar as deslocabilidades do sistema nos eixos globais, resolvendo a Equação (45), por exemplo (outros métodos de resolução de sistemas lineares podem ser utilizados). Com o auxílio do vetor de espalhamento é possível distribuir as deslocabilidades encontradas para cada barra e com o auxílio da matriz de transformação de eixos global para eixos locais é possível fazer a transformação delas para os eixos locais, está é uma etapa necessária para se encontrar as cargas internas das barras (MARTHA, 2019).

$$[G_l] = [S_{ll}] \times [D_l] \quad (43)$$

$$[G_r] = [S_{rl}] \times [D_l] \quad (44)$$

$$[D_l] = [S_{ll}]^{-1} \times [G_l] \quad (45)$$

Em que $[S_{ll}]^{-1}$ é a matriz inversa de $[S_{ll}]$.

As reações de apoio dos graus de liberdade restritos $[C_{apoio}]$ são obtidas somando ao segundo membro da Equação (44), as cargas nodais combinadas, como pode ser visto na Equação (46) (MARTHA, 2019). As reações de apoio dos graus de liberdade livres são nulas e as reações de apoio dos graus de liberdade com apoios elásticos são obtidas multiplicando-se os coeficientes de rigidez atribuídos a eles pelas deslocabilidades correspondentes (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990). Martha (2019) explica que as cargas internas são obtidas para cada barra nos eixos globais $[C_I]$ ou locais $[C_I']$ por meio das Equações (47) e (48), respectivamente.

$$[C_{apoio}] = [S_{rl}][D_l] - [G_r] \quad (46)$$

$$[C_I] = [S_I][d] + [G_{eng}] \quad (47)$$

$$[C_I'] = [S'][d'] + [G_{eng}] \quad (48)$$

Após aplicadas todas as formulações do método da rigidez, se obtém os resultados esperados na etapa de análise estrutural. É possível encontrar as deslocabilidades, reações de apoio e cargas internas da estrutura, ou seja, ele descreve a estrutura completamente do ponto de vista estrutural (WEAVER JUNIOR e GERE, 1990).

4 METODOLOGIA

Nesta seção serão abordados os métodos, sistemas e ferramentas utilizados no desenvolvimento da planilha que fará a análise estrutural de estacas justapostas utilizando-se o método da rigidez direta.

4.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A presente pesquisa, de acordo com definições dadas por Oliveira (2011), se classifica como aplicada, visto que tem o propósito de adquirir conhecimentos para aplicação prática e resolução de problemas específicos da temática. Sua natureza é quali-quantitativa, pois procura-se compreender e explicar todo o equacionamento matemático e os resultados observados do desenvolvimento à conclusão do aplicativo, com base em proposições teóricas. E quanto aos procedimentos, caracteriza-se como uma pesquisa experimental, onde as variáveis e formulações são pré-definidas, realizando testes relativos aos métodos de construção do aplicativo.

4.2 DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO

O programa foi desenvolvido, em sua maior parte, em ambiente *Windows*, mais especificamente no sistema *Windows 10 Pro Education*. O aplicativo foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação VBA no software Excel do pacote office 365. Os arquivos foram armazenados localmente e na nuvem do *one drive* e *google drive*. Além disso, buscou-se sempre fazer *backups* das planilhas, para se fazer um controle de versões.

Ao longo do desenvolvimento foram feitos testes unitários validando pequenas partes do código com exemplos de resultados conhecidos.

Após a finalização de desenvolvimento da aplicação, foi feito um teste, comparando a análise (deslocamentos, reações de apoio e cargas internas) de uma estrutura da planilha desenvolvida, comparada com a análise feita pelo *software ftool - Two-Dimensional Frame Analysis Tool 4.00.04 Basic*.

4.2.1 Entrada de dados e saída de dados

Foram criados quatro *worksheets* (abas de uma planilha): Dados, Estrutura, Resultados e LogErros. A *worksheet* Dados é responsável pela entrada de dados, os dados necessários podem ser vistos na Figura 7, enquanto as demais são responsáveis pela saída. Uma observação,

a *worksheet* Estrutura também pode ser utilizada como entrada de dados caso o usuário queira fazer a análise estrutural de outro tipo de estrutura.

A *worksheet* Resultados guarda os resultados típicos de uma análise estrutural: Reações, deslocamentos, e cargas internas, além disso, são calculados os valores máximos dos deslocamentos, momentos e esforço cortante, bem como o tempo de execução da aplicação. Já a *worksheet* LogErros guarda um log com o histórico de erros que venham a ocorrer na aplicação.

Figura 7 - Dados de entrada

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Dados:										
2	Geometria da estaca			Camadas de Solo							
3	Comprimento:	8,00 m		índice	nome	Pos. inicial	Pos. final	Peso Espe.	N-spt	Âng. Atrito	Coesão
4	Forma:	circular		1	argila rijá	0	1	15,00 KN/m³	5	30,00°	5
5	Diâmetro:	0,40 m		2	argila dura	1	2	16,00 KN/m³	6	25,00°	6
6				3	areia fofa	2	3	13,00 KN/m³	8	16,00°	7
7				4	areia média	3	4	14,00 KN/m³	9	20,00°	10
8	Característica material			5	areia compacta	4	5	17,00 KN/m³	7	31,00°	9
9	Tipo:	Concreto		6	argila muito rijá	5	6	19,00 KN/m³	10	33,00°	5
10	Modulo de Elasticidade:	25000000 KN/cm²		7	argila dura	6	7	13,00 KN/m³	20	35,00°	10
11	Coeficiente de Poisson:	0,2		8	areia compacta	7	8	14,00 KN/m³	13	26,00°	11
12	Coeficiente de dilatação:	0,0010 /°C		9	areia média	8	9	15,00 KN/m³	25	27,00°	7
13				10	argila rijá	9	10	17,00 KN/m³	21	30,00°	9
14	Dados complementares										
15	Altura da escavação:	4,00 m									
16	Pontos de discretização:	5 pts/cmd									

Fonte: Autoria própria (2023).

Na *worksheet* Dados, está presente os botões de comando, que são utilizados para limpar os dados, montar os carregamentos, fazer a análise estrutural e plotar os diagramas de esforços, como pode ser visto na Figura 8.

Figura 8 - Botões para controle de ações

PAINEL DE AÇÕES

Limpeza de dados

ENTRADA

ESTRUTURA

RESULTADOS

COMPLETA

DEMAIS AÇÕES

MONTAR CARAREMENTOS

CALCULAR ESTRUTURA

MONTAR E CALCULAR

PLOTAR DIAGRAMAS

PLOTAR DIAGRMAS

☐ SIM
 ☒ NÃO

Fonte: Autoria própria (2023).

4.2.2 Estrutura de dados

Foram implementadas, no código VBA, quatro classes principais de objetos: nós, linhas (barras), estrutura, camada de solo, denominadas *cls_Nodes* e *cls_Lines*, *cls_Estrutura* e *cls_CamadaSolo* respectivamente. Os objetos dessas classes são criados a partir de dados de entrada, fornecidos pelo próprio usuário, através do preenchimento da planilha. Além disso, os objetos criados da classe *cls_Node* são armazenados e *cls_Line* são armazenados em objetos da classe *collection* do VBA.

Foi criada uma planilha para inserção dos dados dos usuários, que foi dividida em três partes, dados dos nós, dados das barras e dados das camadas de solo.

Os dados dos nós a serem inseridos pelo usuário consiste na posição nos eixos globais (X e Y), cargas concentradas nos eixos globais (Fx, Fy e Mz), Tipo de apoio de cada grau de liberdade (fixa, livre, mola), e coeficiente de rigidez no caso de apoio elástico (Kx, Ky e Kz).

Nas barras, os dados que devem ser inseridos são: O índice do nó inicial e do nó final, os valores iniciais e finais dos carregamentos distribuídos axial e transversal, a forma (circular ou retangular), base/diâmetros, altura, tipo de material, modo de elasticidade, coeficiente de Poisson e coeficiente de temperatura.

Para as camadas de solos, os dados a serem inseridos são tipo de solo, posição inicial e final, peso específico, N-SPT, ângulo de atrito e coesão.

Todos os parâmetros devem ser inseridos no mesmo sistema de unidades. Cada objeto é alimentado com esses dados por uma sub-rotina chamada de construtor. Os atributos de entrada dos objetos do tipo *cls_Estrutura* são as *collections* dos nós e barras.

4.2.3 Processamento dos dados

4.2.3.1 Propriedades geométrica

Na classe *cls_Line* foram implementadas funções para retornar as demais propriedades geométricas das barras: área da secção transversal, momento de inércia e comprimento da barra.

4.2.3.2 Matrizes de transformação

Dentro da classe *cls_Line* foram implementados métodos capazes de montar as duas matrizes de transformação para uma barra ($[R]$ e $[R]^T$), essas matrizes são montadas e retornadas em forma de um *array* bidimensional. Cada objeto *line* tem um método que cria as matrizes usadas para transformar as cargas (cargas nodais combinadas e coeficientes de rigidez)

e deslocamentos aplicados nos eixos locais de uma barra para os eixos globais dos sistemas e vice-versa, quando necessário.

4.2.3.3 Matrizes de rigidez local

Na classe *cls_Line*, foi implementada a função *mRigidezLocal()* para montar e retornar a matriz de rigidez de uma barra nos eixos locais, utilizando as fórmulas dos coeficientes de rigidez apresentados no referencial teórico. Da mesma forma foi implementada a função *mRigidezGlobal()* para montar e retornar a matriz de rigidez de uma barra nos eixos globais.

4.2.3.4 Vetores das reações de engastamento perfeito

Também foram criadas duas funções relacionados às reações de engastamento perfeito da barra dentro da classe *cls_Line*. A primeira é responsável por montar e retornar o vetor (matriz de ordem 6×1) das reações de engastamento perfeito nos eixos locais da barra. O segundo método ficou responsável por retornar o vetor das reações de engastamento perfeito nos eixos globais, ele utilizou a matriz retornada do primeiro método e a matriz de transformação de eixos locais para eixos globais.

4.2.3.5 Vetores de espalhamento

Na classe *cls_node* foi implementada a função *resumoDesloca()* que retorna uma *array* com a quantidade de graus de liberdade livres, fixas e do tipo apoio elástico do nó. Foi feito o mesmo para a classe *cls_Estrutura*, onde foi criada a função *resumoDeslocamentos()*, que retorna a quantidade de graus de liberdade livre, fixas, do tipo apoio elástico, bem como o total dos graus de liberdade da estrutura.

Na classe *cls_Estrutura* foram criadas duas funções que montam o vetor de espalhamento. A função *mntVetorEspalhamentoNodes()* monta o vetor de espalhamento de cada nó, salvando em no atributo *vetorEspalhamento* dos objetos *cls_Node*. A função *mntVetorEspalhamentoLines()* monta o vetor de espalhamento das barras no atributo *vetorEspalhamento* dos objetos do tipo *cls_Line*.

O algoritmo para criação do vetor de espalhamento dos nós, cuja função é a numeração dos graus de liberdade dos nós, seguiu a seguinte lógica: primeiramente foram numerados os graus de liberdade do tipo apoio elástico, depois os livres e posteriormente os graus de liberdade restritos. Para isso, foi utilizada a função *resumoDeslocamentos* da classe *cls_Estrutura*. Os graus de liberdade do tipo apoio elásticos começaram a ser numerados a partir do número 1, os graus de liberdade livres começaram a ser numerados a partir da quantidade de graus de

liberdade do tipo apoio elástico mais 1. Os graus de liberdade fixos começaram a ser numerados a partir da soma da quantidade dos graus de liberdade livre mais a quantidade dos graus de liberdade do tipo apoio elástico mais 1. Esse esquema de numeração foi conveniente para posterior resolução do sistema linear criado.

Com isso, o vetor de espalhamento das barras foi montado apenas juntando o vetor de espalhamento do primeiro nó da barra mais o vetor de espalhamento do segundo nó da barra.

4.2.3.6 Matriz de rigidez global

Em posse da função que monta os vetores de espalhamento das barras foi possível implementar a função *mntMatrizRigidezGlobal()* que monta a matriz de rigidez global da estrutura. Ela define uma matriz bidimensional, com comprimento $n \times n$ (n é a quantidade de graus de liberdade da estrutura), com todos os termos nulos. Posteriormente espalha as matrizes de rigidez local nos eixos globais de cada barra em suas devidas posições na matriz de rigidez global, com o auxílio do vetor de espalhamento.

Após a montagem da matriz de rigidez global da estrutura, a função *mntMatrizRigidezGlobal()* separa a matriz em duas, a primeira matriz vai da linha 0 até linha “ $m-1$ ” da matriz de rigidez global (m é a quantidade de graus de liberdade livres mais quantidade dos graus de liberdade do tipo apoio elástico), a segunda matriz vai da linha “ m ” até a linha “ $n-1$ ” da matriz de rigidez global (n é a quantidade total de graus de liberdade). Ambas as matrizes obtidas da separação da matriz de rigidez global têm m colunas, o restante dos termos seria anulado pelas deslocabilidades dos graus de liberdade restritos, pois elas têm valor nulo. Por fim a função retorna uma *collection* com essas três matrizes.

4.2.3.7 Vetor das cargas nodais combinadas

De forma independente foi implementada a função que monta o vetor de cargas nodais combinadas. Para isso segue-se os seguintes passos: foi criado um *array* com n elementos nulos (n é a quantidade de graus de liberdade), após isso, foi criado um *loop* que passa por todos os nós e distribui as cargas concentradas desses nós no *array* criado de acordo com o vetor de espalhamento de cada nó, em seguida, foi criado um *loop* que passa por todas as barras e que espalha as reações de engastamento perfeito, conforme o vetor de espalhamento de cada barra, subtraindo-as dos termos do *array* criado.

Da mesma forma que a matriz de rigidez global, o vetor de cargas combinadas também foi dividido em dois, o primeiro vetor vai da linha 0 à linha ($m-1$) e o segundo vetor vai da linha m até a linha n . Por fim a função retorna uma *collection* com esses três vetores.

4.2.3.8 Deslocabilidades

A primeira parte da matriz de rigidez global e a primeira parte do vetor cargas combinadas foram utilizadas na função *calcDeslocabilidadesLivres()* da classe *cls_Estrutura* para o cálculo das deslocabilidades livres de acordo com a Equação (43). Também foi criada a função *MntDelocamentoInNodes()* que guarda os deslocamentos encontrados em seus respectivos objetos do tipo *cls_Node*. No atributo deslocamentos, essa distribuição é feita com o auxílio do vetor de espalhamento de cada nó.

4.2.3.9 Reações de apoio

Posteriormente, foram implementadas as funções que calculam os resultados da análise estrutural. A princípio, foi criada a função que calcula as reações de apoio da estrutura *calcReactions()*, para isso, a função faz a multiplicação da segunda parte da matriz de rigidez global pelo vetor das deslocabilidades encontradas da resolução do sistema e, por fim, subtrai o vetor das cargas nodais combinadas. Além disso, também calcula a reação de apoio dos apoios elásticos de acordo com a teoria. O resultado dessas operações é armazenado em um *array* e utilizado como retorno da função. Por fim, ela também guarda as reações em seus respectivos nós no atributo *reactions* da classe *cls_Node*.

4.2.3.10 Cargas internas

Após isso, foi programada a função *calcCargasInternas()* que calcula as cargas internas iniciais e finais de cada barra. Basicamente foi utilizada a Equação (26) para o cálculo das reações internas de cada barra, os deslocamentos nos eixos globais armazenados nos nós foram convertidos para eixos locais, depois foi aplicada a Equação (26). As cargas internas foram guardadas diretamente no atributo *cargasInternas* da classe *cls_Line*.

4.2.3.11 Camada de solo

Na classe *cls_camadaSolo* foram implementados as funções que calcula o empuxo ativo e passivo de Rankine (1857) de acordo com as características da camada. Além disso, também foi criada a função que calcula o coeficiente de reação horizontal do solo de acordo com a teoria de Terzagui (1955).

4.2.3.12 Modelagem da estrutura

Com os dados das camadas de solo, dados da estaca e o nível de refinamentos da estrutura (quantidade de nós por camada), são gerados os nós e as barras do modelo estrutural, que são salvos na *worksheet* Estrutura.

A posição dos nós irá depender da posição das camadas e da quantidade de nós da estrutura, eles são gerados com a função *createNodes()*. Vale ressaltar que são obrigatoriamente criados nós na altura da escavação e no fim da estaca, tendo em vista que estes são importantes pontos de discretização. O nós acima da altura de escavação são criados com todos os graus de liberdade livres. Os nós que estão a partir da altura de escavação são livres na direção axial da barra e na direção de rotação, já na direção transversal são inseridos com apoio elástico, cuja constante é calculada a partir da teoria de Terzagui (1955). O nó do fim da estaca tem graus de liberdade fixos na direção axial e transversal, para garantir a estabilidade da estrutura na análise estrutural.

As barras são criadas utilizando os nós como referência. Além disso elas são criadas com as cargas devido ao empuxo lateral até a altura de escavação, que são calculadas utilizando a teoria de Rankine (1857). A partir da altura de escavação as cargas de empuxo são consideradas nulas, devido a ter sido inserido no efeito de mola no solo.

4.2.3.13 Cálculo da estrutura

A análise estrutural é feita com o auxílio da sub-rotina *calcularEstrutura()*, que tem como entrada os dados da *worksheet* Estrutura. Essa análise é feita utilizando a estrutura de dados citada nos tópicos anteriores. Primeiro são criados os objetos do tipo *cls_Node*, que são arquivado na variável do tipo *collection nodes*. Depois são criados os objetos da classe *cls_Line*, que são armazenados na variável do tipo *collection lines*. Com essas duas *collections* é criado objetos do tipo *cls_Estrutura*, que é utilizada para se fazer a análise estrutural propriamente dita: encontra os deslocamentos livres, as reações de apoio e as cargas internas (esforços axiais, esforços cortantes e momentos fletores).

Em seguida a sub-rotina insere os resultados da análise na *worksheet* Resultados. Além disso, os diagramas de esforço e deslocamentos podem ser plotados no *autocad* com o auxílio da sub-rotina *plotResultados()*.

4.3 VALIDAÇÃO DO APLICATIVO

Buscou-se na literatura um exemplo de análise estrutural de estacas justapostas, onde foi encontrado o trabalho de Antunes (2007), que realizou o dimensionamento de uma cortina de estacas justapostas utilizada para um prédio comercial na cidade de Campos dos Goytacazes. Foi feita a análise estrutural de forma manual e com o auxílio do *software GGU-Retain*, onde os resultados podem ser observados na Tabela 7 e serão usados como uma das bases de comparação para a planilha desenvolvida no presente trabalho. Vale ressaltar que no trabalho de Antunes (2007) foi utilizado outro método para obtenção do empuxo lateral do solo e não foi adotada a teoria do coeficiente de reação horizontal do solo.

Tabela 4 - Análise estrutural de cortina de estaca

	Momento máximo (KNm/m)	Cortante Máximo (KN/m)
Cálculo manual	155	174
GGG-Retain	165	182
Diferença percentual	6%	5%

Fonte: ANTUNES (2007).

Para validar os resultados da planilha foram utilizados os mesmos dados de perfil de solo e da estaca do trabalho de Antunes (2007), a discretização da estrutura foi feita com pontos de discretização a cada 10 centímetros, O que gerou mais de 100 pontos de discretização na estrutura, esse valor pode ser ajustado na planilha de acordo com a necessidade de refinamento dela. todos os dados utilizados podem ser vistos na Figura 9 e o modelo discretizado gerado pode ser visto na Tabela no Anexo A. O mesmo modelo discreto obtido com a planilha foi utilizado no *ftool*, que pode ser visualizado na Figura 10, cujos resultados também serão utilizados para fins de comparação. O N-spt não foi utilizado na planilha, mas foi inserido como dado de entrada, para necessidade de implementações futuras, como para a correlação do ângulo de atrito ou calculo do coeficiente de reação horizontal do solo pelo método da JRA (1991).

Figura 10 - Modelo da análise do software *ftool*

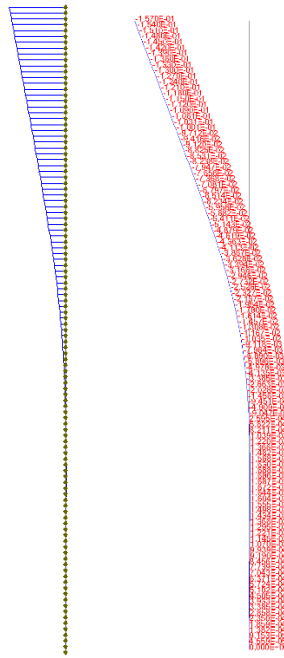


Fonte: Autoria própria (2023).

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

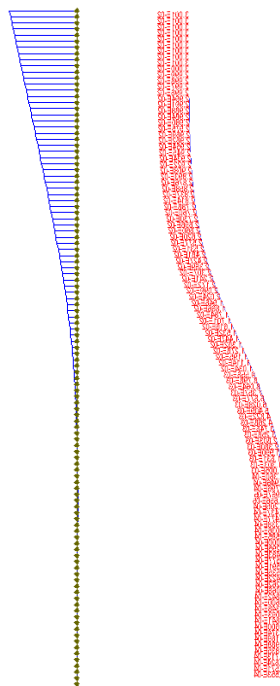
Serão apresentados os resultados obtidos a partir da execução da planilha com o exemplo proposto, bem como os resultados da análise estrutural feita pelo *ftool*. As Figuras 11, 12, 13, 14 representam os diagramas obtidos pelo *ftool* e pela planilha desenvolvida, à esquerda e à direita respectivamente. Pode-se observar que as duas aplicações obtiveram resultados semelhantes, mostrando que a parte de implementação do método da rigidez direta está correto. Na questão em termo de diferença de valores a maior diferença de valores obtidos estavam na casa do quarto algarismo significativo. Os resultados de todas as barras de nós podem ser vistos no Anexo B.

Figura 11 - Diagrama do deslocamento horizontal



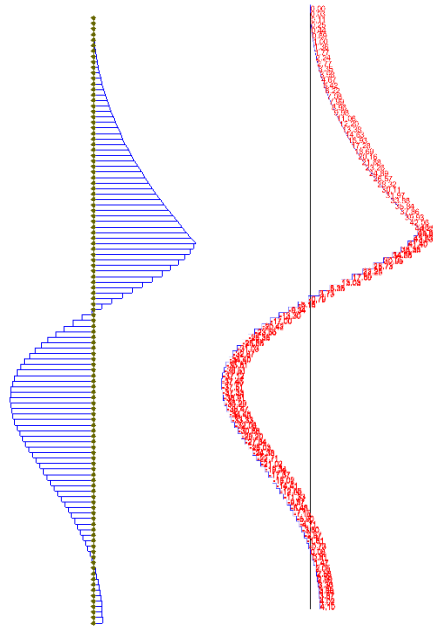
Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 12 - Diagrama das rotações nodais



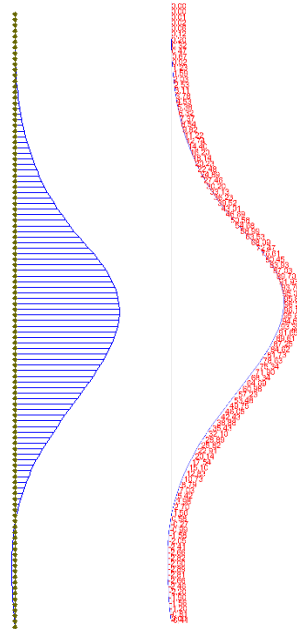
Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 13 - Diagrama do esforço cortante



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 14 - Diagrama de momentos



Fonte: Autoria própria (2023).

A Tabela 5, mostra a comparação entre os esforços máximos obtidos pela planilha e a pesquisa de Antunes (2007), em que foi utilizada uma média dos resultados obtidos por ele e divididos pelo fator de segurança de 1,5 que foi utilizado no seu trabalho. Pode ser visto que o método utilizado por Antunes (2007) é mais conservador, tendo em vista os maiores valores

obtidos. O valor da cortante teve uma variação mais expressiva de 61%, que também pode ser explicada pela diferença dos métodos utilizados. No mais, o momento máximo teve uma variação baixa de apenas 10%, mostrando que os resultados da planilha estão dentro da faixa esperada.

Tabela 5 - Comparação entre a planilha e a pesquisa de referência

	Momento Máximo (KNm/m)	Cortante máximo (KN/m)
Planilha	96,2	46,5
Antunes (2007)	106,67	118,67
Variação percentual	10%	61%

Fonte: Autoria própria (2023).

Vale ressaltar que o código fonte do projeto, bem como a planilha modelo está disponível no seguinte endereço: <https://github.com/leirton52/AMEJP>.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do cenário imposto pelo crescimento desigual entre o território de áreas urbanas e sua população, a demanda por soluções eficientes para o dimensionamento preciso de estruturas de contenção em escavações de subsolos torna-se cada vez mais crucial. Neste contexto, a presente pesquisa buscou unir a expertise da engenharia civil com o potencial das ferramentas computacionais, culminando no desenvolvimento de uma planilha automatizada para análise estrutural de estacas justapostas, utilizando o método da rigidez direta.

O estudo abordou aspectos fundamentais, desde a necessidade de otimização do uso do solo até os fatores determinantes para o dimensionamento adequado das estruturas de contenção. A escolha do método da rigidez direta para a análise estrutural se mostrou pertinente, dada a sua relativa facilidade de implementação computacional, alinhada à precisão necessária para garantir a segurança e estabilidade das edificações.

A elaboração da planilha envolveu a integração de conhecimentos multidisciplinares, indo além das tradicionais práticas de engenharia estrutural. A interface amigável desenvolvida para a planilha visa facilitar a utilização dos usuários, proporcionando agilidade e precisão no processo de dimensionamento.

Os objetivos específicos delineados foram alcançados, desde o cálculo do empuxo lateral de terra até a validação dos resultados obtidos. O algoritmo de análise estrutural, aliado à montagem da estrutura e carregamentos a partir do perfil do solo, representa um avanço significativo na automação de tarefas complexas, contribuindo para a eficiência operacional no campo da engenharia civil.

A validação dos resultados obtidos por meio de comparações com softwares reconhecidos no meio acadêmico e profissional reforça a robustez da planilha desenvolvida. A precisão e confiabilidade dos resultados alcançados destacam a viabilidade e relevância do uso de ferramentas computacionais na engenharia estrutural, reforçando a importância da evolução tecnológica no setor.

Além disso, algumas melhorias podem ser sugeridas para trabalhos futuros, como a implementação das demais partes de um projeto estrutural, o dimensionamento e detalhamento da estrutura, bem como a implementação de mais métodos para o cálculo dos empuxos de terra e o coeficiente de reação horizontal do solo. Também poderiam ser considerados os carregamentos pontuais ou distribuídos já existentes na superfície do solo. Tudo isso, poderia ser conciliado com uma refatoração do código, buscando melhorar sua eficiência.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, Á. F. M. **Método dos elementos finitos**. Porto: Universidade do Porto, 2003.
- GARRISON, P. **Fundamentos de estruturas**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018.
- MARCHETTI, O. **Muros de arrimo**. São Paulo: Blucher, 2007.
- ALMEIDA, O. H. G. de. **Análise do comportamento de estacas verticais submetidas a ações horizontais**. 2017. 92 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, 2017. Disponível em: <https://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/6438/1/analisecomportamentoestacasverticais.pdf>. Acesso em: 04 set. 2023.
- ANTUNES, R. de B. **Dimensionamento de cortina de estacas justapostas para execução de subsolo de edifício comercial**. 2007. 39 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacaze, 2007.
- BARUFFI, D.; POLESE, M. A.; VANIN, V.; THOMÉ, A. **Dimensionamento de estacas prancha atirantadas para estruturas de contenção**. In: congresso regional de iniciação científica e tecnológica em engenharia – CRICTE 2013, XXV, 2013, Passo Fundo. Anais [...] . Passo Fundo: Upf, 2013. p. 1-4.
- BOTELHO, M. H. C. **Princípios da Mecânica dos Solos e Fundações Para a Construção Civil**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2015. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 31 ago. 2023.
- BOWLES, J. E. **Foundation analysis and design**. 5. ed. New York: McGraw-Hill, 1997.
- CHRISTAN, P. de. **Estudo da interação solo-estaca sujeito a carregamento horizontal em ambientes submersos**. 2012. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2012. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/584>. Acesso em: 04 set. 2023.
- CINTRA, J. C. A. **Carregamento lateral em estacas**. São Carlos: Eesc/Usf, 2002. Disponível em: <http://repositorio.eesc.usp.br/handle/RIEESC/7332>. Acesso em: 04 set. 2023.
- DAS, B. M.; SOBHAN, K. **Fundamentos de engenharia geotécnica**. 9. ed. São Paulo: Cengage, 2019.
- GARCIA, J. G. M. **Desenvolvimento de uma plataforma web para aplicações de cálculo estrutural**. 2012. 55 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia Universidade do Porto, Porto, 2012.
- HONJO, Y.; ZAIKA, Y.; POKHAREL, G. **Estimation of subgrade reaction coefficient for horizontally loaded piles by statistical analyses**. Soils And Foundations. Tokyo, p. 51-70. jun. 2005. Disponível em: https://www.jstage.jst.go.jp/article/sandf1995/45/3/45_51/_pdf. Acesso em: 04 set. 2023.

JRA. **Specifications for Highway Bridges IV**, Japan Road Association. 1991.

LEET, K. M.; UANG, C.M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. Porto Alegre: Amgh, 2009.

MARTHA, L. F. **Métodos básicos da análise de estruturas**. Elsevier, Rio de Janeiro, 2010.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise matricial de estruturas com orientação a objetos**. Rio de Janeiro: Elsevier: Puc-Rio, 2019.

MOLITERNO, A. **Caderno de Muro de Arrimo**. São Paulo: Edgard Blücher, 1980.

OLIVEIRA, M. F. **Metodologia científica: um manual para a realização de pesquisas em Administração**. Catalão: Universidade Federal de Goiás, 2011.

R.P. C.; SILVA, C. M. da; Matos, Y.M.P.; RUGE, J. C. **Experiência de projeto e investigação de cortinas de estacas justapostas no Distrito Federal**, In: 4º. Cong. Int. Fundações Profundas, Santa Cruz de La Sierra ? 4º. CFPB, Santa Cruz de La Sierra, 2019.

RANKINE, W . J. M. II. **On the stability of loose earth**. Philosophical Transactions Of The Royal Society Of London, [S.L.], v. 147, p. 9-27, 31 dez. 1857.

RANZINI, S. M. T.; NEGRO JUNIOR, A. **Obras de contenção: tipos, métodos construtivos, dificuldades executivas**. In: HACHICH, W.; FALCONI, F. F.; SAES, J. L.; FROTA, R. G. Q.; CARVALHO, C. S.; NIYAMA, S. **Fundações: teoria e prática**. 2. ed. São Paulo: Pini, 1998. Cap. 13. p. 497-515.

SILVA, J. P. S. **Análise comparativa de métodos para definição do coeficiente de reação horizontal em solo coesivo friccional**. 2018. 140 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Construção Civil, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em: <https://hdl.handle.net/1884/59395>. Acesso em: 04 set. 2023.

SILVA, J. P. S.; FARO, V. P.; SOUZA JUNIOR, T. F. de. **Análise da Influência do Coeficiente de Reação Horizontal do Solo no Dimensionamento Estrutural de Estacas de Concreto**. Engenharia Estudo e Pesquisa, Rio de Janeiro, v. 20, n. 1, p. 09-17, jan. 2020. Disponível em: http://www.abpervista.com.br/v20n1_jan_jun_2020.html. Acesso em: 04 set. 2023.

TERZAGHI, K. **Theoretical Soil Mechanics**. John Wiley and Sons Inc. New York 1943.

TERZAGHI, K. **Evaluation of coefficient of subgrade reaction**. Geotechnique vol.5., n.4,1955.

WEAVER JUNIOR , W.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of framed Structures**. 3. ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

ANEXO A

Nós da estrutura, utilizados para análise estrutural

índice	Posição		Cargas			Apoio					
	X (m)	Y (m)	Fx (KN)	Fy (KN)	Mz (KN.m)	X	Y	Z	Kx (KN/m)	Ky (KN/m)	Kz (KN.m /rad)
1	0,00	0,00	0	0	0	livre	livre	livre			
2	0,00	-0,10	0	0	0	livre	livre	livre			
3	0,00	-0,20	0	0	0	livre	livre	livre			
4	0,00	-0,30	0	0	0	livre	livre	livre			
5	0,00	-0,40	0	0	0	livre	livre	livre			
6	0,00	-0,50	0	0	0	livre	livre	livre			
7	0,00	-0,60	0	0	0	livre	livre	livre			
8	0,00	-0,70	0	0	0	livre	livre	livre			
9	0,00	-0,80	0	0	0	livre	livre	livre			
10	0,00	-0,90	0	0	0	livre	livre	livre			
11	0,00	-1,00	0	0	0	livre	livre	livre			
12	0,00	-1,10	0	0	0	livre	livre	livre			
13	0,00	-1,20	0	0	0	livre	livre	livre			
14	0,00	-1,30	0	0	0	livre	livre	livre			
15	0,00	-1,40	0	0	0	livre	livre	livre			
16	0,00	-1,50	0	0	0	livre	livre	livre			
17	0,00	-1,60	0	0	0	livre	livre	livre			
18	0,00	-1,70	0	0	0	livre	livre	livre			
19	0,00	-1,80	0	0	0	livre	livre	livre			
20	0,00	-1,90	0	0	0	livre	livre	livre			
21	0,00	-2,00	0	0	0	livre	livre	livre			
22	0,00	-2,10	0	0	0	livre	livre	livre			
23	0,00	-2,20	0	0	0	livre	livre	livre			
24	0,00	-2,30	0	0	0	livre	livre	livre			
25	0,00	-2,40	0	0	0	livre	livre	livre			
26	0,00	-2,50	0	0	0	livre	livre	livre			
27	0,00	-2,60	0	0	0	livre	livre	livre			
28	0,00	-2,70	0	0	0	livre	livre	livre			
29	0,00	-2,80	0	0	0	livre	livre	livre			
30	0,00	-2,90	0	0	0	livre	livre	livre			
31	0,00	-3,00	0	0	0	livre	livre	livre			
32	0,00	-3,10	0	0	0	livre	livre	livre			
33	0,00	-3,20	0	0	0	livre	livre	livre			
34	0,00	-3,30	0	0	0	livre	livre	livre			
35	0,00	-3,40	0	0	0	livre	livre	livre			
36	0,00	-3,50	0	0	0	livre	livre	livre			
37	0,00	-3,60	0	0	0	livre	livre	livre			
38	0,00	-3,70	0	0	0	livre	livre	livre			
39	0,00	-3,80	0	0	0	livre	livre	livre			
40	0,00	-3,90	0	0	0	livre	livre	livre			

41	0,00	-4,00	0	0	0	mola	livre	livre	0
42	0,00	-4,10	0	0	0	mola	livre	livre	23,870968
43	0,00	-4,20	0	0	0	mola	livre	livre	47,741935
44	0,00	-4,30	0	0	0	mola	livre	livre	71,612903
45	0,00	-4,40	0	0	0	mola	livre	livre	95,483871
46	0,00	-4,50	0	0	0	mola	livre	livre	119,35484
47	0,00	-4,60	0	0	0	mola	livre	livre	143,22581
48	0,00	-4,70	0	0	0	mola	livre	livre	167,09677
49	0,00	-4,80	0	0	0	mola	livre	livre	190,96774
50	0,00	-4,90	0	0	0	mola	livre	livre	214,83871
51	0,00	-5,00	0	0	0	mola	livre	livre	238,70968
52	0,00	-5,10	0	0	0	mola	livre	livre	262,58065
53	0,00	-5,20	0	0	0	mola	livre	livre	286,45161
54	0,00	-5,30	0	0	0	mola	livre	livre	310,32258
55	0,00	-5,40	0	0	0	mola	livre	livre	334,19355
56	0,00	-5,50	0	0	0	mola	livre	livre	358,06452
57	0,00	-5,60	0	0	0	mola	livre	livre	381,93548
58	0,00	-5,70	0	0	0	mola	livre	livre	405,80645
59	0,00	-5,80	0	0	0	mola	livre	livre	429,67742
60	0,00	-5,90	0	0	0	mola	livre	livre	453,54839
61	0,00	-6,00	0	0	0	mola	livre	livre	477,41935
62	0,00	-6,10	0	0	0	mola	livre	livre	501,29032
63	0,00	-6,20	0	0	0	mola	livre	livre	525,16129
64	0,00	-6,30	0	0	0	mola	livre	livre	549,03226
65	0,00	-6,40	0	0	0	mola	livre	livre	572,90323
66	0,00	-6,50	0	0	0	mola	livre	livre	596,77419
67	0,00	-6,60	0	0	0	mola	livre	livre	620,64516
68	0,00	-6,70	0	0	0	mola	livre	livre	644,51613
69	0,00	-6,80	0	0	0	mola	livre	livre	668,3871
70	0,00	-6,90	0	0	0	mola	livre	livre	692,25806
71	0,00	-7,00	0	0	0	mola	livre	livre	716,12903
72	0,00	-7,10	0	0	0	mola	livre	livre	740
73	0,00	-7,20	0	0	0	mola	livre	livre	763,87097
74	0,00	-7,30	0	0	0	mola	livre	livre	787,74194
75	0,00	-7,40	0	0	0	mola	livre	livre	811,6129
76	0,00	-7,50	0	0	0	mola	livre	livre	835,48387
77	0,00	-7,60	0	0	0	mola	livre	livre	859,35484
78	0,00	-7,70	0	0	0	mola	livre	livre	883,22581
79	0,00	-7,80	0	0	0	mola	livre	livre	907,09677
80	0,00	-7,90	0	0	0	mola	livre	livre	930,96774
81	0,00	-8,00	0	0	0	mola	livre	livre	954,83871
82	0,00	-8,10	0	0	0	mola	livre	livre	978,70968
83	0,00	-8,20	0	0	0	mola	livre	livre	1002,5806
84	0,00	-8,30	0	0	0	mola	livre	livre	1026,4516
85	0,00	-8,40	0	0	0	mola	livre	livre	1050,3226
86	0,00	-8,50	0	0	0	mola	livre	livre	1074,1935
87	0,00	-8,60	0	0	0	mola	livre	livre	1098,0645
88	0,00	-8,70	0	0	0	mola	livre	livre	1121,9355
89	0,00	-8,80	0	0	0	mola	livre	livre	1145,8065
90	0,00	-8,90	0	0	0	mola	livre	livre	1169,6774
91	0,00	-9,00	0	0	0	mola	livre	livre	1193,5484
92	0,00	-9,10	0	0	0	mola	livre	livre	1217,4194
93	0,00	-9,20	0	0	0	mola	livre	livre	1241,2903
94	0,00	-9,30	0	0	0	mola	livre	livre	1265,1613
95	0,00	-9,40	0	0	0	mola	livre	livre	1289,0323
96	0,00	-9,50	0	0	0	mola	livre	livre	1312,9032
97	0,00	-9,60	0	0	0	mola	livre	livre	1336,7742
98	0,00	-9,70	0	0	0	mola	livre	livre	1360,6452
99	0,00	-9,80	0	0	0	mola	livre	livre	1384,5161

100	0,00	-9,90	0	0	0	mola	livre	livre	1408,3871		
101	0,00	-10,00	0	0	0	mola	livre	livre	1432,2581		
102	0,00	-10,10	0	0	0	mola	livre	livre	1456,129		
103	0,00	-10,20	0	0	0	mola	livre	livre	1480		
104	0,00	-10,30	0	0	0	mola	livre	livre	1503,871		
105	0,00	-10,40	0	0	0	mola	livre	livre	1527,7419		
106	0,00	-10,50	0	0	0	mola	livre	livre	1551,6129		
107	0,00	-10,60	0	0	0	mola	livre	livre	1575,4839		
108	0,00	-10,70	0	0	0	mola	livre	livre	1599,3548		
109	0,00	-10,80	0	0	0	mola	livre	livre	1623,2258		
110	0,00	-10,90	0	0	0	mola	livre	livre	1647,0968		
111	0,00	-11,00	0	0	0	fixa	fixa	livre			

ANEXO B

Barras da estrutura geradas para análise estrutural:

indice	Pontos		Carga				Geometria			Material			
	Inicial	Final	Inicial X	Final X	Inicial Y	Final Y	forma	b (m)	h (m)	Tipo	E (KN/m ²)	v	α /°C
1	1	2	0	0	0,00	-0,55	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
2	2	3	0	0	-0,55	-1,11	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
3	3	4	0	0	-1,11	-1,66	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
4	4	5	0	0	-1,66	-2,21	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
5	5	6	0	0	-2,21	-2,77	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
6	6	7	0	0	-2,77	-3,32	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
7	7	8	0	0	-3,32	-3,87	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
8	8	9	0	0	-3,87	-4,42	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
9	9	10	0	0	-4,42	-4,98	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
10	10	11	0	0	-4,98	-5,53	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
11	11	12	0	0	-5,53065	-6,08372	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
12	12	13	0	0	-6,08372	-6,63678	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
13	13	14	0	0	-6,63678	-7,18985	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
14	14	15	0	0	-7,18985	-7,74291	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
15	15	16	0	0	-7,74291	-8,29598	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
16	16	17	0	0	-8,29598	-8,84905	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
17	17	18	0	0	-8,84905	-9,40211	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
18	18	19	0	0	-9,40211	-9,95518	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
19	19	20	0	0	-9,95518	-10,5082	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
20	20	21	0	0	-10,5082	-11,0613	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
21	21	22	0	0	-11,0613	-11,6144	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
22	22	23	0	0	-11,6144	-12,1674	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
23	23	24	0	0	-12,1674	-12,7205	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
24	24	25	0	0	-12,7205	-13,2736	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
25	25	26	0	0	-13,2736	-13,8266	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
26	26	27	0	0	-13,8266	-14,3797	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
27	27	28	0	0	-14,3797	-14,9328	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
28	28	29	0	0	-14,9328	-15,4858	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
29	29	30	0	0	-15,4858	-16,0389	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
30	30	31	0	0	-16,0389	-16,592	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
31	31	32	0	0	-16,592	-17,145	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
32	32	33	0	0	-17,145	-17,6981	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
33	33	34	0	0	-17,6981	-18,2512	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
34	34	35	0	0	-18,2512	-18,8042	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
35	35	36	0	0	-18,8042	-19,3573	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
36	36	37	0	0	-19,3573	-19,9104	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
37	37	38	0	0	-19,9104	-20,4634	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
38	38	39	0	0	-20,4634	-21,0165	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
39	39	40	0	0	-21,0165	-21,5695	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
40	40	41	0	0	-21,5695	-22,1226	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
41	41	42	0	0	-22,1226	-22,6757	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
42	42	43	0	0	0	0	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
43	43	44	0	0	0	0	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
44	44	45	0	0	0	0	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001
45	45	46	0	0	0	0	circular	0,31	0	Concreto	25000000	0,2	0,001

