



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS
CURSO BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

JOSÉ FRANCISCO GOMES

**ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO DE MÉTODOS NUMÉRICOS
DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES**

PAU DOS FERROS – RN

2016

JOSÉ FRANCISCO GOMES

**ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO DE MÉTODOS NUMÉRICOS
DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do
Semi-Árido – UFERSA, *Campus* Pau dos Ferros para a
obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

ORIENTADOR: Profº. Dr. Vinícius Samuel Valério de
Souza

COORIENTADOR: Profº. Msc. Francisco Carlos Gurgel
da Silva Segundo

PAU DOS FERROS – RN

2016

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

G633a

GOMES, JOSÉ FRANCISCO .
ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO
DE MÉTODOS
NUMÉRICOS DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE
EQUAÇÕES NÃO LINEARES / JOSÉ FRANCISCO
GOMES. - 2016.
34 f. : il.

Orientador: Vinícius Samuel Valério
de Souza.
Coorientador: Francisco Carlos
Gurgel da Silva Segundo.
Monografia (graduação) - Universidade
Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2016.

1. Métodos numéricos. 2. Critérios de
parada. 3. Zeros da função. 4. Métodos
iterativos. I. Valério de Souza, Vinícius
Samuel , orient. II. Gurgel da Silva Segundo,
Francisco Carlos , co-orient. III.
Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

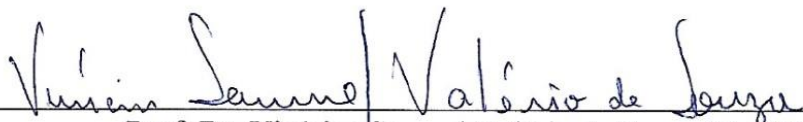
JOSÉ FRANCISCO GOMES

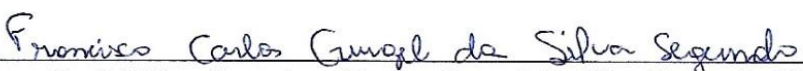
**ANÁLISE COMPARATIVA DE DESEMPENHO DE MÉTODOS NUMÉRICOS
DESTINADOS A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES**

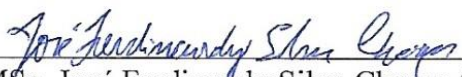
Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, *Campus* Pau dos Ferros, para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADO EM 30/05/2016

BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. Vinícius Samuel Valério de Souza (Presidente)


Prof. MSc. Francisco Carlos Gurgel da Silva Segundo (1º Membro)


Prof. MSc. José Ferdinandy Silva Chagas (2º Membro)

RESUMO

Afim de apresentar técnicas numéricas para resolução de equações não lineares, o presente trabalho mostra os resultados da implementação dos métodos da Bissecção, de Newton, do Ponto Fixo, Regula Falsi e das Secantes. Isso permitiu uma análise comparativa desses métodos, além implementações dos métodos com três critérios de parada diferentes: valor do $f(x)$, erro relativo e erro real absoluto. Para isso foram usadas como funções objeto três equações não lineares que foram inseridas nos algoritmos de resolução dos métodos no programa de computador SCILAB 5.5.2. A partir dos dados encontrados é possível afirmar o melhor desempenho em termos de rapidez de convergência para o método de Newton nos problemas objeto.

Palavras-chave: Métodos numéricos. Critérios de parada. Zeros da função. Métodos iterativos.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	OBJETIVOS DO TRABALHO	8
1.1.1	Objetivo Geral	8
1.1.2	Objetivos Específicos	9
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	9
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	10
2.1	MÉTODO DA BISSECÇÃO.....	11
2.2	MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR.....	12
2.3	MÉTODO DE NEWTON	13
2.4	MÉTODO DAS SECANTES	14
2.5	MÉTODO REGULA FALSI	15
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	16
3.1	CENÁRIO DE TESTE	16
3.2	RESULTADOS	19
3.3	DISCUSSÕES	30
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
5	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	34

1. INTRODUÇÃO

Na ciência em geral, os problemas são tratados em forma de equações e para solucioná-los é preciso resolver tais equações. Encontrar soluções para equações ou funções consiste em encontrar raízes ou valores com os quais a função seja verdadeira.

Nesse sentido, há basicamente duas formas de resolução desses problemas: métodos analíticos e métodos numéricos. No método analítico para resolver equações, espera-se que o problema siga um modelo predeterminado, pois os artifícios empregados são formulas e operações algébricas. Os métodos analíticos também são limitados pois não há previsão para resolverem equações de grau superior ou equações não lineares (FRANCO, 2006).

Assim surge a necessidade dos métodos numéricos para resolução de equações não lineares, os quais consistem em encontrar uma solução aproximada, mas essa aproximação necessita estar dentro de uma tolerância preestabelecida (GILAT, 2008). Considerando a importância dessas equações não lineares, já que a grande maioria dos problemas reais são trazidos dessa forma, é imprescindível o estudo desses métodos numéricos.

Diante disso, o presente trabalho pretende expor teoricamente alguns dos principais métodos numéricos para resolução de equações não lineares além de aplicá-los em funções objeto a fim de obter resultados e realizar comparações entre eles.

1.1. OBJETIVOS

1.1.1. OBJETIVO GERAL

Apresentar uma revisão bibliográfica dos principais métodos numéricos para resolver equações não lineares além de realizar uma análise comparativa deles aplicando também diferentes critérios de parada em seus algoritmos.

1.1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Apresentar os principais métodos numéricos para resolução de equações não-lineares;
- Realizar uma análise comparativa acerca dos principais métodos numéricos na resolução de equações não-lineares;
- Verificar, de forma comparativa, a influência dos critérios de parada na rapidez da convergência dos métodos numéricos para resolução de equações não-lineares.

1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 encontra-se a revisão bibliográfica dos métodos numéricos para resolução de equações não-lineares utilizados no presente estudo. No capítulo 3 será apresentado os resultados dos desempenhos dos métodos assim como a discussão desses dados. Nas considerações finais, capítulo 4, são mostrados pontos chaves dos resultados encontrados assim como sugestões para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Problemas do mundo real traduzidos para a matemática se mostram basicamente em forma de equações. São as chamadas aplicações matemáticas, onde havendo uma função da forma:

$$f(x) = 0,$$

É preciso encontrar sua solução, ou seja, verificar para quais valores da variável independente (no caso, x) satisfazem a igualdade (GILAT, 2008).

Essas funções podem ser resolvidas de modo analítico, quando utilizando regras aritméticas ou uma formula pronta, chega-se ao valor exato da solução. Porém, em polinômios de maior grau, o que não é raro em casos reais, necessita-se utilizar métodos numéricos afim de chegar a uma aproximação aceitável da raiz da equação.

Nos métodos numéricos parte-se de uma solução aproximada ou de um domínio onde a solução esteja, e a partir de procedimentos numéricos, seguindo etapas do fluxo do método, chega-se a um resultado com a precisão desejada (GILAT, 2008).

Segundo GILAT (2008), pode-se dividir os métodos de resolução numérica basicamente em dois grupos: métodos de confinamento e métodos abertos. No primeiro, sabe-se inicialmente de um intervalo em que a solução está inserida, aplicando-se sucessivas diminuições desse intervalo obtém-se um valor desejado para o resultado. Em métodos abertos não se tem um intervalo, mas uma estimativa, que é o ponto inicial de um refinamento da solução desejada.

2.1. Estimação de erros

Para verificar se a precisão dos resultados encontrados por métodos numéricos satisfaz ao proposto, é necessário estimar o erro contido na estimativa. Segundo GILAT (2008), pode-se considerar três medidas para isso:

- **Tolerância em $f(x)$:** é o valor, em modulo, da solução encontrada numericamente substituída na função.

$$\text{Tolerancia em } f(x) = |f(x)|$$

- **Erro relativo:** pode-se calcular o erro relativo em métodos numéricos iterativos onde a cada iteração aproxima-se da solução. Para isso utiliza-se a última e penúltima solução aproximada encontrada e aplica-se a seguinte formula:

$$\text{Erro Relativo Estimado} = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} \right|$$

➤ **Erro real:** Módulo da diferença entre o a solução aproximada atual e a penúltima:

$$\text{Erro Real Estimado} = |x_n - x_{n-1}|$$

2.2. Método da Bisseção

O método da Bisseção consiste em uma diminuição de um intervalo $[a,b]$ numa função $f(x)=0$ afim de aproximar-se de uma solução aproximada, até que o critério de aceitação seja atendido. Para isso considera-se que a função é contínua nesse intervalo, assim, se a solução está nesse intervalo, utiliza-se a condição de que $f(a) \times f(b) < 0$ (FRANCO, 2006).

O procedimento numérico nesse método se dá por diminuição do intervalo. Primeiramente, conhecendo-se a e b , calcula-se o ponto médio x_{m1} desse intervalo e o considera como a primeira solução aproximada. A partir da verificação do critério de parada do método sabe-se se essa estimativa é aceitável ou será preciso mais iterações. Caso haja necessidade de mais uma iteração, verifica-se a condição inicial para o primeiro subintervalo $[a, x_{m1}]$. Se $f(a) \times f(x_{m1}) < 0$, então a solução encontra-se nesse intervalo e o procedimento é refeito, agora com um intervalo menor. Se a condição não for atendida para o primeiro subintervalo, então a solução está no segundo subintervalo $[x_{m1}, b]$, e a próxima iteração será feita com base nesse novo intervalo (GILAT 2008).

A Figura 1 ilustra o método da bisseção num gráfico de uma função $f(x)$.

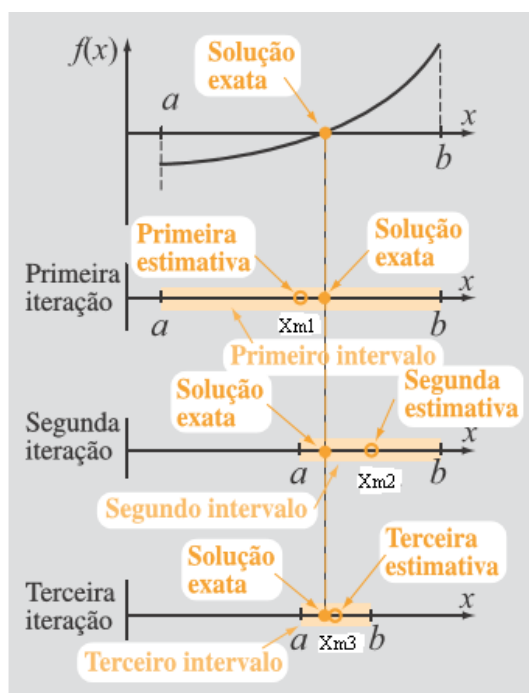


Figura 1: Método da Bisseção num gráfico. Fonte: adaptado de GILAT (2008).

Aplicando-se o método da bisseção numa equação do tipo $f(x)=0$ pode-se alcançar a solução, porém isso é raro de ocorrer. Nesse método e em métodos numéricos em geral procura-se uma solução aproximada, e para controlar o número iterações a ser realizadas pelo método, é necessário definir um critério de parada. Para isso é desejável predeterminar um valor mínimo do erro, assim a cada iteração é feita uma comparação desse valor com o erro atual do processo (GILAT, 2008).

Algoritmo do método:

- Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos a e b entre os quais existe uma solução. Isso significa que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais diferentes, de forma que $f(a)f(b) < 0$.
- Calcule a primeira estimativa da solução numérica x_m usando:

$$x_m = \frac{a + b}{2}$$

- Determine se a solução exata está entre a e x_m , ou entre x_m e b . Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a) \cdot f(x_m)$: Se $f(a) \cdot f(x_m) < 0$, a solução exata está entre a e x_m . Se $f(a) \cdot f(x_m) > 0$, a solução exata está entre x_m e b .
- Selecione o subintervalo que contém a solução exata (a até x_m , ou x_m até b) como o novo intervalo $[a, b]$ e volte para o passo 2.

Como desvantagem desse método pode-se destacar a sua lentidão na convergência.

2.3. Método da Iteração Linear

Esse método é denominado de Iteração linear ou de ponto fixo pois usa um artifício para encontrar a solução da equação. Nesse método, reescreve-se a função $f(x)=0$ como:

$$x = g(x)$$

chama-se $g(x)$ de função de iteração, pois partindo-se de uma estimativa inicial x_1 , pode-se obter as seguintes a partir da seguinte formula:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

onde x_n é a estimativa anterior a que se deseja calcular (GILAT, 2008).

Assim, através de iterações, converge-se para a solução desejada, que é o chamado ponto fixo, onde acontece a interseção da reta $f(x)=x$ e $y=g(x)$, ilustrado graficamente na figura 2:

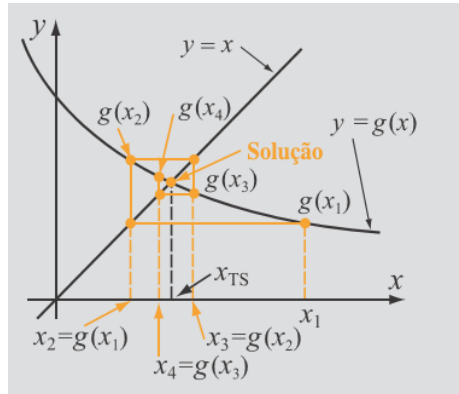


Figura 2: Método do ponto fixo num gráfico. Fonte: GILAT (2008).

2.4. Método de Newton

Na aplicação do método de Newton são necessários dois requisitos para a função $f(x)=0$: ser contínua e diferenciável. O procedimento numérico se dá a partir de uma solução aproximada inicial, onde esta servirá de base para a próxima, que por sua vez servirá para a seguinte (GILAT, 2008).

A interpretação geométrica desse método é que, dada a primeira estimativa x_1 , a próxima será obtida através de uma reta tangente a função no ponto $(x_1, f(x_1))$, ou seja, o x_2 será o valor onde a reta tangente cruza o eixo x (GILAT, 2008).

Segundo GILAT (2008), a formula para as soluções estimativas a partir da segunda é:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Onde n é o número da iteração e $f'(x_n)$ é a derivada primeira da função $f(x)$. A figura 3 ilustra o método de Newton num gráfico.

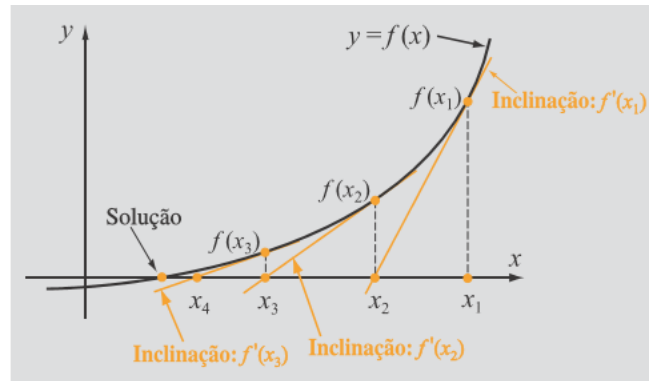


Figura 3: Método de Newton num gráfico. Fonte: GILAT (2008).

Algoritmo do método:

- Escolha um ponto x_1 como tentativa inicial da solução.
- Para $i = 1, 2, \dots$, até que o erro seja menor que um valor especificado, calcule x_{i+1} usando a equação:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

O método de Newton apresenta como desvantagem o fato de precisar de um x_1 próximo a solução, a mal escolha dessa solução inicial acarreta uma convergência demorada, além disso é necessário conhecer a derivada da função.

2.5. Método das Secantes

O método numérico das secantes tem como ponto de partida dois pontos no eixo x , conhecidos e próximos da solução. As duas interseções desses pontos na função $f(x)$ gera uma reta, essa reta é secante a função e sua interseção no eixo x é a solução aproximada da iteração atual (GILAT, 2008).

Assim, chamando de x_1 e x_2 os pontos iniciais, para encontrar a primeira estimação, x_3 , é preciso traçar a reta secante e verificar em qual ponto, no eixo x , essa reta intercepta. A figura 4 ilustra graficamente o método:

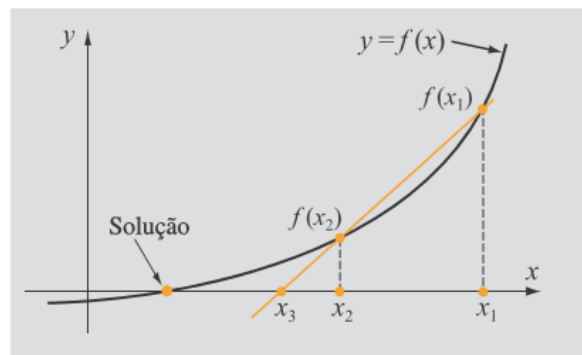


Figura 4: Método das Secantes num gráfico. Fonte: GILAT (2008).

GILAT (2008) generalizou o processo com a seguinte fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_{n-1} - x_n)}{f(x_{n-1}) - f(x_n)}$$

Onde o x_3 precisa do x_1 e x_2 no seu cálculo, e na próxima iteração será usado juntamente com x_2 para o cálculo do x_4 , e assim sucessivamente para as seguintes iterações.

Ao escolher pontos iniciais muito próximos da solução a convergência pode ser comprometida, sendo assim uma desvantagem do método das secantes.

2.6. Método Regula Falsi

Por ser um método de confinamento, o método Regula Falsi ou Falsa Posição é usado quando tem-se um intervalo $[a, b]$ numa função $f(x)$ contínua nesse intervalo e há uma solução (GILAT, 2008).

O procedimento numérico empregado nesse método consiste em calcular a primeira solução aproximada a partir dos valores extremos do intervalo, a equação para isso é:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

As próximas iterações serão feitas com um novo intervalo, aquele em que o seus pontos extremos tenham sinais contrários, ou seja, $[a, x_1]$ se $f(a) \times f(x_1) < 0$ ou $[x_1, b]$ se $f(x_1) \times f(b) < 0$. A cada estimativa encontrada verifica-se a precisão pré-fixada, afim de se obter a melhor solução para o problema em questão (FRANCO, 2006).

Uma interpretação geométrica do método Regula Falsi é mostrada na Figura 5, onde as estimativas encontradas são os pontos de intersecção de retas traçadas a partir dos pontos extremos de cada novo intervalo.

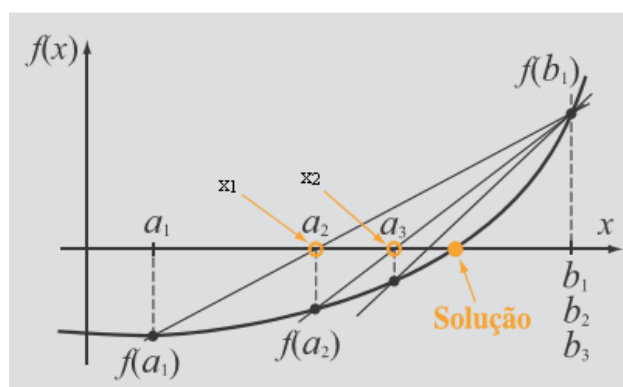


Figura 5: Método Regula Falsi num gráfico. Fonte: adaptado de GILAT (2008).

Algoritmo do método:

- Escolha o primeiro intervalo encontrando os pontos a e b entre os quais existe uma solução. Isso significa que $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais diferentes, de forma que $f(a)f(b) < 0$.
- Calcule a primeira estimativa da solução numérica x_m usando a equação:

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

- Determine se a solução exata está entre a e x_m , ou entre x_m e b. Isso é feito com a verificação do sinal do produto $f(a) \cdot f(x_m)$:

Se $f(a) \cdot f(x_m) < 0$, a solução exata está entre a e x_m .

Se $f(a) \cdot f(x_m) > 0$, a solução exata está entre x_m e b.

- Selecione o subintervalo que contém a solução (a até x_m , ou x_m até b) como o novo intervalo $[a, b]$ e volte para o passo 2.

Por ser um método de confinamento considera-se lento, sendo isso uma desvantagem.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nessa seção serão apresentados resultados e suas respectivas discussões acerca dos dados encontrados a partir de implementações utilizando métodos numéricos para resolução de equações não-lineares.

3.1. Cenário de Teste

Para a implementação dos métodos numéricos para resolução de equações não lineares foram utilizadas três funções:

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15$$

$$f_2(x) = 5x^3 + x^2 - e^{(1-2x)} + \cos(x) + 20$$

$$f_3(x) = \sin(x)x + 4$$

Foi definido ainda os seguintes intervalos onde as soluções das funções se encontram:

$$f_1 \rightarrow [0,3]$$

$$f_2 \rightarrow [-5,5]$$

$$f_3 \rightarrow [1,5]$$

As Figuras 6, 7 e 8 mostram os gráficos das funções onde é possível verificar também a curva cruzando o eixo x dentro do intervalo predefinido.



Figura 6: Gráfico da função 1. Fonte: autoria própria.

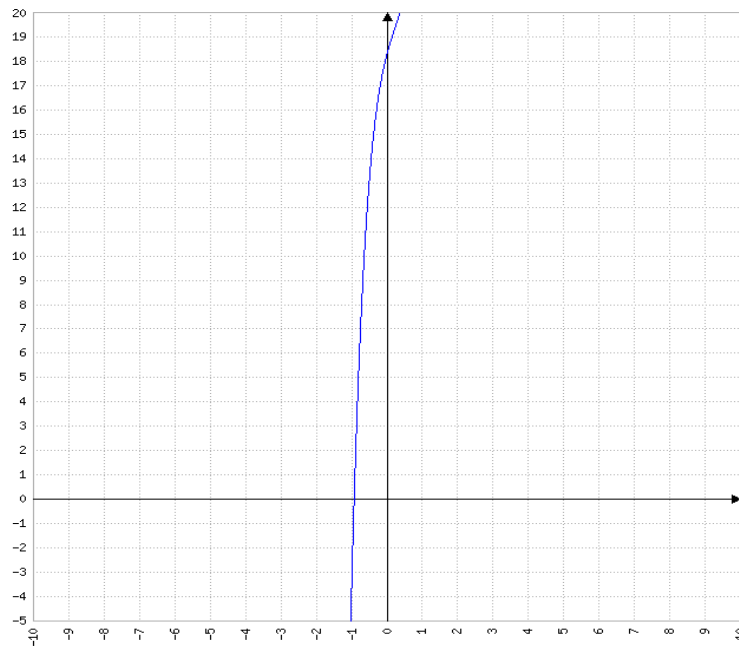


Figura 7: Gráfico da função 2. Fonte: autoria própria.

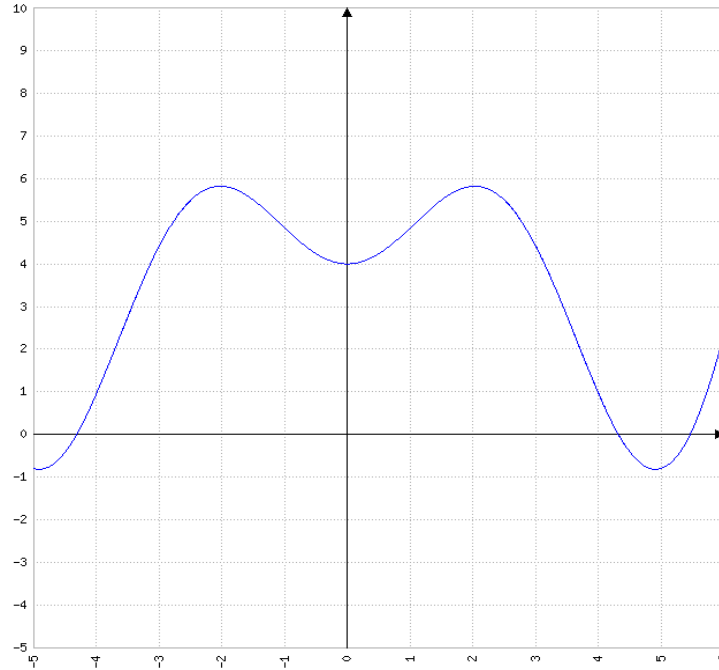


Figura 8: Gráfico da função 3. Fonte: autoria própria.

Na execução do método do ponto fixo é preciso definir uma função de iteração para cada função a resolver, nesse trabalho as respectivas funções de iteração escolhidas foram:

$$f_{(it)1} = \frac{-4x^3 - 3x^2 + 15}{2x^3 - 10}$$

$$f_{(it)2} = \sqrt{-5x^3 + e^{1-2x} - \cos(x) - 20}$$

$$f_{(it)3} = \frac{-4}{\sin(x)}$$

Na execução de todos os métodos, foram adotados três critérios de parada separadamente afim de analisar o desempenho dos algoritmos em cada um dos critérios, quais sejam:

- Valor da função $f(x)$: $|f(x)| < \epsilon$
- Erro Absoluto: $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$
- Erro Relativo: $\left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} \right| < \epsilon$

Onde $\epsilon = 10^{-6}$ é a tolerância.

Além desses critérios de parada, adotou-se ainda o número máximo itmax=1000 de iterações para todas as implementações.

Os métodos numéricos utilizados nesse trabalho são os descritos no tópico anterior, e foram implementados no programa de computador SCILAB em sua versão 5.5.2.

3.2. Resultados

3.2.1. Resultados para função $f_1(x)$

Nesse subtópico serão apresentados os resultados referentes a implementação dos métodos numéricos da Bisseção, Newton, Ponto Fixo, Regula Falsi e Secantes, na função $f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15$ onde sua solução encontra-se no intervalo $[0,3]$.

As Figuras 9,10 e 11 apresentadas a seguir mostrarão a evolução dos valores de $f(x)$, do erro absoluto e do erro relativo conforme o número de iterações aumenta. Esses gráficos mostram, comparativamente, a evolução da curva dos valores dos critérios de parada em relação ao número de iterações para cada método implementado.

- Critério de parada valor de $f(x)$:

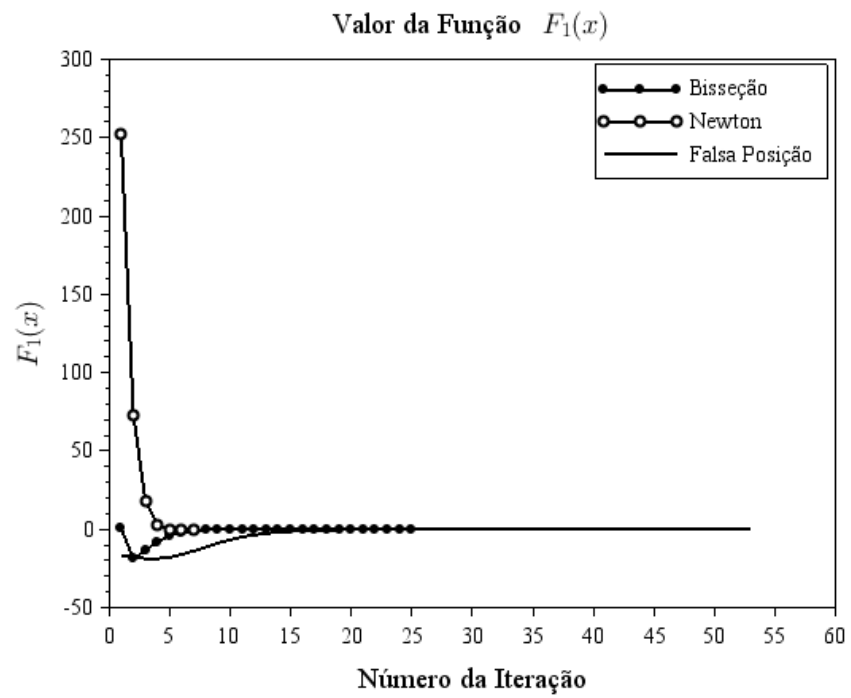


Figura 9: Valor do Valor de $f_1(x)$ versus número de iterações na função f_1 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro absoluto:

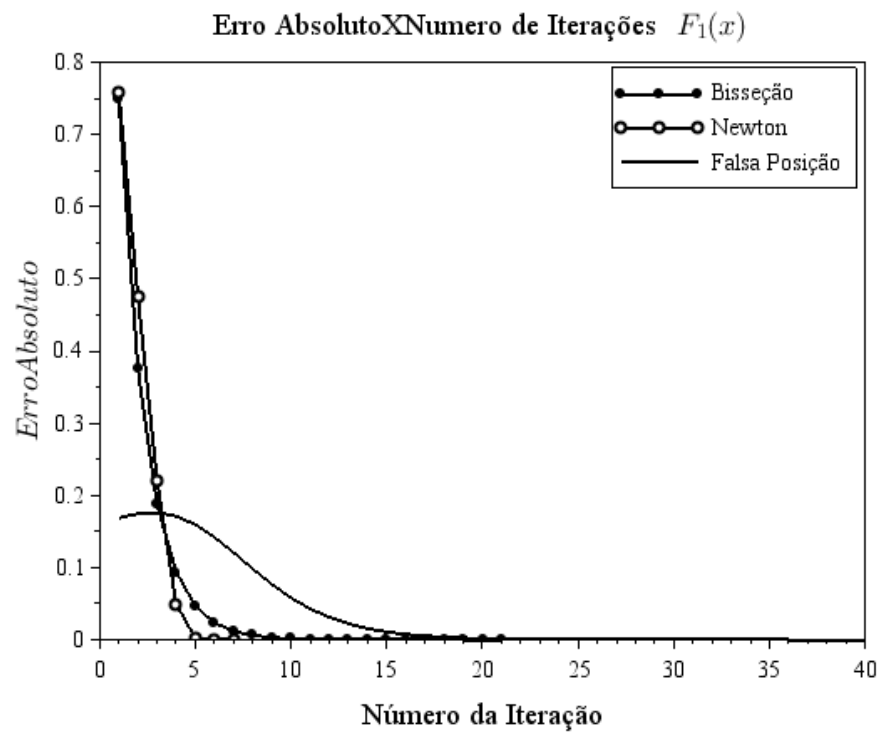


Figura 10: Valor do erro absoluto versus número de iterações na função f_1 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro relativo:

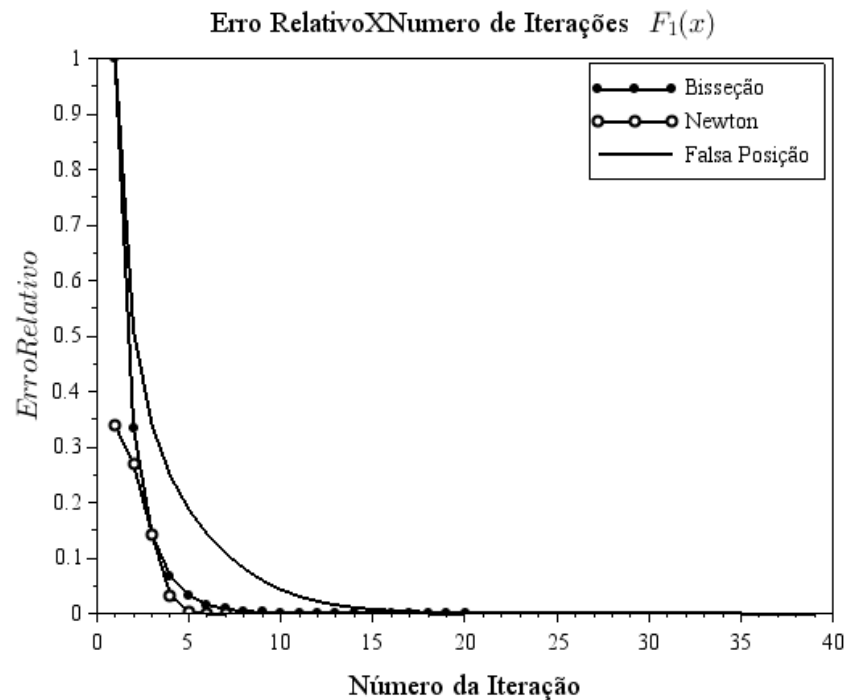


Figura 11: Valor do erro relativo versus número de iterações na função f_1 .
Fonte: Autoria própria.

Nessa implementação somente os métodos da Bisseção, de Newton e da Falsa Posição convergiram. Os métodos do ponto fixo e das secantes apresentaram erros, em ambos as soluções estimadas saíram do intervalo definido.

3.2.2. Resultados para função $f_2(x)$

Aqui será apresentado os resultados referentes a implementação dos métodos numéricos da Bisseção, Newton, Ponto Fixo, Regula Falsi e Secantes, na função $f_2(x) = 5x^3 + x^2 - e^{(1-2x)} + \cos(x) + 20$ onde sua solução encontra-se no intervalo $[-5,5]$.

As Figuras 12, 13 e 14 que serão apresentadas a seguir tem o propósito de mostrar os resultados gráficos obtidos com as implementações dos métodos na função objeto utilizando como critério de parada o valor do módulo de $f_2(x)$, modulo do erro absoluto e erro relativo respectivamente:

- Critério de parada valor de $f(x)$:

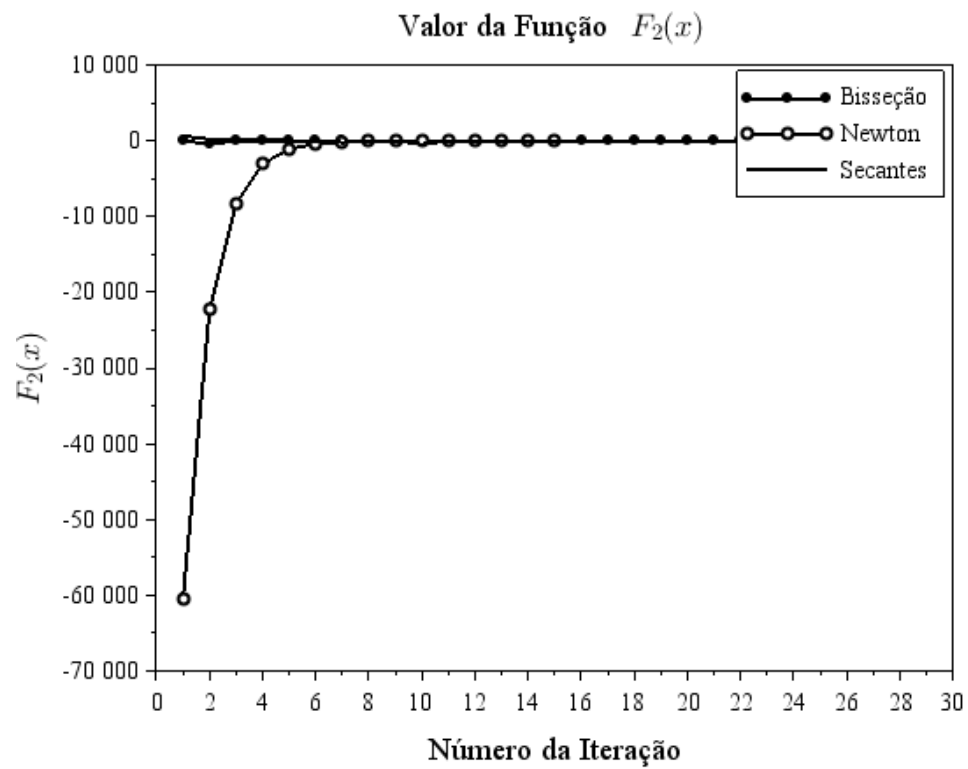


Figura 12: Valor do Valor de $f_2(x)$ versus número de iterações na função f_2 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro absoluto:

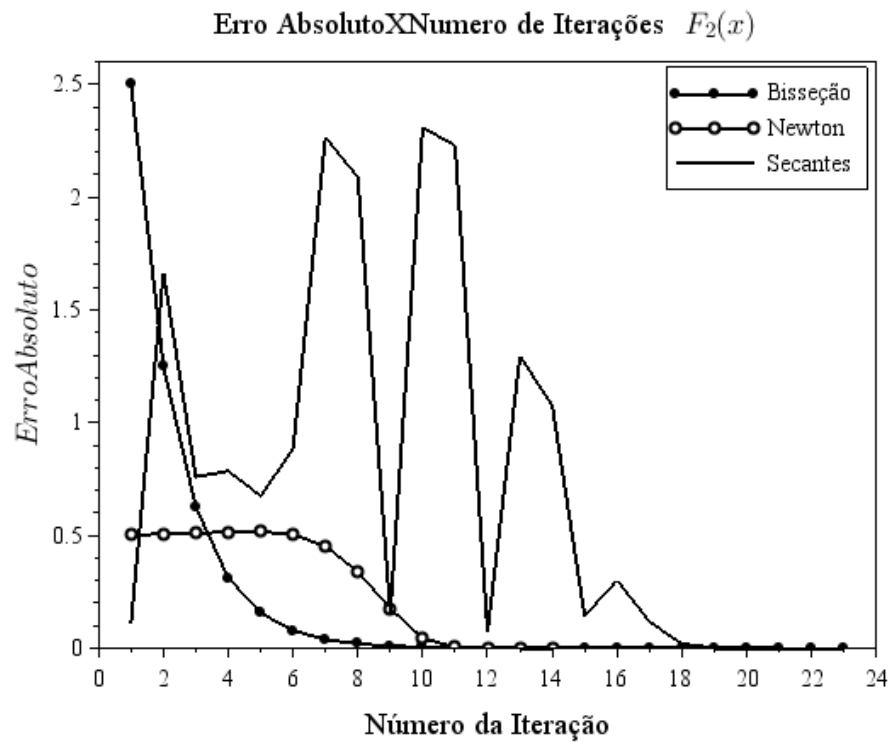


Figura 13: Valor do erro absoluto versus número de iterações na função f_2 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro relativo:

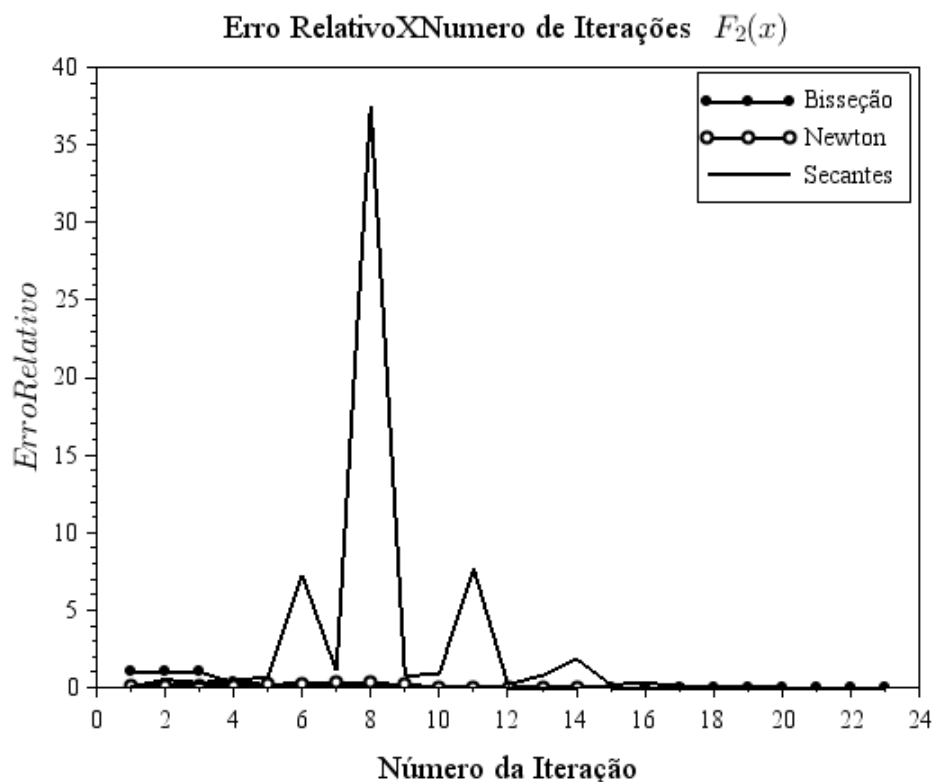


Figura 14: Valor do erro relativo versus número de iterações na função f_2 .

Fonte: Autoria própria.

Ao aplicar os algoritmos nessa função, os métodos que convergiram para uma solução foram o método da Bisseção, método de Newton e o método das Secantes. Em contrapartida os métodos do Ponto Fixo e o da Falsa Posição apresentaram erro, ou seja, não chegaram a soluções como esperado. Nessa implementação o método do Ponto Fixo mostrou valores muito grandes nas primeiras iterações e tendeu ao infinito. O método da Falsa Posição atingiu o número máximo de iterações, mil, e não convergiu para uma solução aproximada na tolerância desejada.

3.2.3. Resultados para função $f_3(x)$

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes a implementação dos métodos numéricos da Bisseção, Newton, Ponto Fixo, Regula Falsi e Secantes, na função $f_3(x) = \sin(x)x + 4$, onde sua solução encontra-se no intervalo $[1,5]$.

As figuras 15, 16 e 17 que serão mostradas a seguir tem o intuito de apresentar os resultados gráficos obtidos com as implementações dos métodos na função em questão utilizando como critério de parada o valor do módulo de $f_3(x)$, do erro absoluto e erro relativo respectivamente:

➤ Critério de parada valor de $f(x)$:

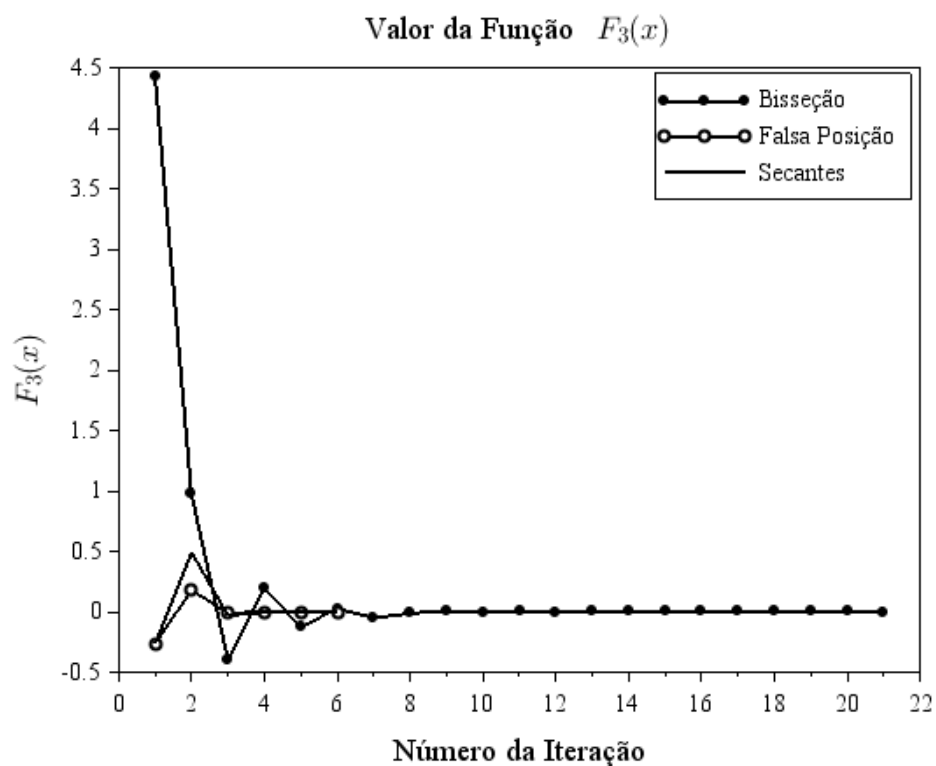


Figura 15: Valor do Valor de $f_3(x)$ versus número de iterações na função f_3 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro absoluto:

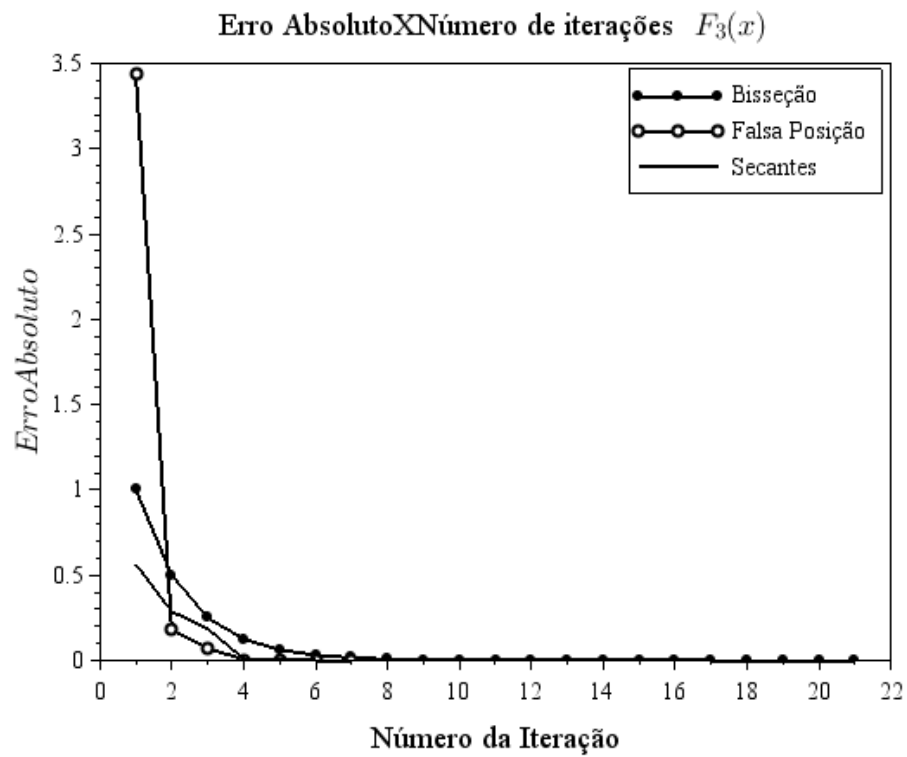


Figura 16: Valor do erro absoluto versus número de iterações na função f_3 .
Fonte: Autoria própria.

- Critério de parada valor do módulo do erro relativo:

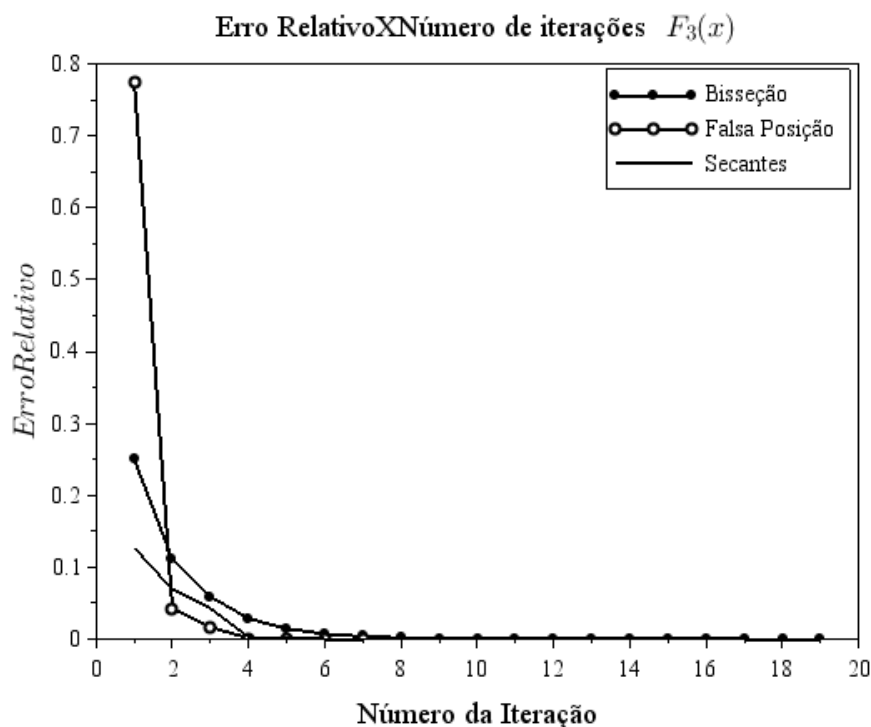


Figura 17: Valor do erro relativo versus número de iterações na função f_3 .
Fonte: Autoria própria.

Os resultados dessa implementação mostram que os métodos que obtiveram êxito ao encontrar uma solução desejável foram o método da Bisseção, método da Falsa Posição e o método das Secantes. Enquanto o método de Newton apresentou um erro em que os valores de x saem do intervalo delimitado previamente, já o método do Ponto Fixo também não convergiu, atingiu o limite máximo de iterações que no caso são mil.

3.2.4. Resultados tabelados

Nesta seção serão apresentados dados de forma tabelados. A Tabela 1 apresenta os resultados das implementações dos métodos numéricos na função $f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15$:

Equação 1									
	Erro Absoluto	Valor de x	Nº de iterações	Erro Relativo	Valor de x	Nº de iterações	f(x)	Valor de x	Nº de iterações
Bisseccção	0.000001	1,492877	21	0.000001	1,492879	20	-0.000003	1,492879	25
Newton	0.000000	1,492879	7	0.000000	1,492879	7	0.000000	1,492879	7
Ponto Fixo	-	- 1,30038	-	-	- 1,300384	-	-	- 1,300384	-
RegulaFalsi	0.000001	1,492877	40	0.000001	1,492876	39	-0.000001	1,492879	53
Secantes	-	- 1,300384	-	-	- 1,300384	-	-	- 1,300384	-

Tabela 1: Resultados das implementações dos métodos numéricos para a Função 1. Fonte: Autoria própria.

A Tabela 1 mostra os valores dos critérios de parada na última iteração realizada pelo método, apresenta também o número de iterações que o método precisou realizar para chegar a uma solução aproximada satisfatória.

Com essas informações é possível analisar o método que convergiu mais rápido e com qual critério de parada os métodos tiveram uma melhor precisão.

Pelos dados, infere-se que quando utilizado o critério de parada do Erro absoluto o método de Newton chegou a uma solução mais rápido, apenas com 7 iterações, enquanto o método Regula Falsi apresentou o maior número de iterações, 40, para chegar a um resultado.

Nos outros critérios de parada os métodos se comportaram de maneira similar, onde o método de Newton apresentou uma maior rapidez ao encontrar a solução.

Na Tabela 2 os resultados das implementações dos métodos numéricos na função $f_2(x) = 5x^3 + x^2 - e^{(1-2x)} + \cos(x) + 20$ são apresentados:

Equação 2									
	Erro Absoluto	Valor de x	Nº de iterações	Erro Relativo	Valor de x	Nº de iterações	f(x)	Valor de x	Nº de iterações
Bisseccção	0.000001	-0,929559	23	0.000001	- 0,929559	23	0.000001	- 0,929560	27
Newton	0.000000	-0,929561	14	0.000000	- 0,929561	14	-0.000000	- 0,929560	15
Ponto Fixo	-	null	-	-	null	-	-	null	-
RegulaFalsi	-	-0,149000	-	-	- 0,149000	-	-	- 0,149000	-
Secantes	0.000000	-0,929560	21	0.000000	- 0,929560	21	0.000000	- 0,929560	21

Tabela 2: Resultados das implementações dos métodos numéricos para a Função 2. Fonte: Autoria própria.

Dos resultados da Tabela 2, conclui-se que, em todos os critérios de parada, o método de Newton apresentou o resultado final com o menor número de iterações, 14, enquanto o método da Bisseccção precisou de mais iterações (27) que os demais métodos para chegar a uma solução. Além disso, nota-se que não há maiores diferenças na quantidade de iterações quando muda-se o critério de parada.

A Tabela 3 mostra os valores dos critérios de parada na última iteração realizada pelos métodos na função $f_3(x) = \sin(x)x + 4$:

Equação 3									
	Erro Absoluto	Valor de x	Nº de iterações	Erro Relativo	Valor de x	Nº de iterações	f(x)	Valor de x	Nº de iterações
Bisseccção	0.000001	4,323240	21	0.000001	4,323235	19	-0.000002	4,323240	21
Newton	-	- 5,461308	-	-	- 5,461308	-	-	- 5,461308	-
Ponto Fixo	-	4,760328	-	-	4,003577	-	-	- 4,003577	-
RegulaFalsi	0.000000	4,323240	7	0.000000	4,323240	7	-0.000001	4,323240	6
Secantes	0.000000	4,323240	7	0.000000	4,323240	7	-0.000000	4,323240	6

Tabela 3: Resultados das implementações dos métodos numéricos para a Função 3. Fonte: Autoria própria.

Com implementações na função 3 percebe-se uma grande similaridade nos métodos Regula Falsi e das Secantes, onde ambos chegaram a um resultado satisfatório com o mesmo número de iterações: 6. Enquanto o método da Bisseccção apresentou uma discrepância em relação aos outros, necessitando de 21 iterações para alcançar a solução aproximada.

3.3. Discussões

De modo geral, os métodos empregados nessa análise desempenharam o proposto: cada um seguiu seu algoritmo afim de alcançar uma solução aproximada. Como esperado, desempenharam diferentes performances e consequentemente variados resultados de forma que foi possível fazer comparações.

O método da Bisseccção cumpriu o esperado chegando aos resultados em todas as implementações, apesar de não ser o mais rápido a convergir, por ser um método de confinamento já esperava-se esse comportamento lento.

O método de Newton apresentou grande rapidez na obtenção da solução nas funções em que convergiu, o que denota uma técnica eficaz, porém não é sempre que irá funcionar, isso porque o valor inicial escolhido deve ser próximo da raiz real.

O método do Ponto Fixo foi o único em que apresentou erros em todas as implementações, seja por alcançar o número máximo de iterações ou apresentar soluções fora do intervalo proposto, pode-se atribuir esse desempenho pouco desejado a função de iteração escolhida.

O método Regula Falsi seguiu seu algoritmo e apresentou os resultados esperados, exceto na função f2 em que alcançou o número máximo de iterações e com isso não retornou uma solução aproximada satisfatória, como esperado é preciso um intervalo preciso pois sua convergência é lenta.

O método das Secantes apresentou erro na função f1, onde apresentou valores para a solução que estavam fora do intervalo predefinido. Mas o método foi satisfatório nas outras funções.

3.3.1. Melhor método quanto a rapidez de convergência

A partir dos resultados obtidos nas implementações e após uma compilação destes, é possível verificar que, quanto a rapidez de convergência, o método de Newton apresentou uma melhor performance nas funções 1 e 2. Ao observar os gráficos das Figuras 9 e 12, por exemplo, percebe-se essa rápida convergência pela sua curva suave, sem muitas discrepâncias nos pontos.

Na função 3 os métodos de Regula Falsi e das Secantes chegaram a resultado esperado com o mesmo número de iterações, apesar de os gráficos do critério dos critérios de parada versus número de iterações apresentarem diferenças.

3.3.2. Melhor critério de parada

Analisando o desempenho dos métodos quanto ao critério de parada utilizado, observa-se uma diferença não significativa no número de iterações quando muda-se o critério de parada. Porém, os resultados das tabelas mostram quando o critério de parada é o erro relativo há uma pequena diminuição no número de iterações necessárias para se chegar a solução aproximada desejável.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando que a maioria das funções não lineares não podem ser resolvidas por métodos diretos ou analíticos, o estudo de métodos numéricos para resolução dessas equações se faz necessário. O presente trabalho procurou analisar os principais métodos numéricos existentes a fim de apresentar uma revisão bibliográfica além de comparações de resultados obtidos por seus algoritmos.

Os métodos para resolução de equações não lineares de forma numérica estudados nesse trabalho foram: método da Bissecção, método de Newton, método do Ponto Fixo, método Regula Falsi e o método das Secantes. As análises feitas a partir dos resultados obtidos tiveram como intuito verificar o método que convergiu mais rapidamente, além de observar e descrever diferenças quando muda-se o critério de parada nos algoritmos.

Verificou-se a partir dos dados tabelados na seção 3.2.4 que do modo geral o método a convergir mais rapidamente foi o método de Newton, embora tenha apresentado erro em uma das funções. Essa rapidez na convergência do método pode ser verificada visualmente também a partir dos gráficos da seção 3.2.1 a 3.2.3. Os demais métodos chegaram a resultados satisfatórios em um número razoável de iterações, o que pode-se atribuir ao pequeno intervalo de solução previamente atribuído. A exceção foi método do Ponto Fixo, este não convergiu em nenhuma das funções objeto, seja por alcançar o número máximo de iterações ou apresentar soluções fora do intervalo proposto, pode-se atribuir isto a escolha da função de iteração. Vale aqui destacar aqui o método da Bissecção, que mesmo não convergindo mais rápido que os demais, conseguiu convergir em todas as funções com êxito.

Os critérios de parada usados nos algoritmos para implementação dos métodos foram o valor em módulo de $f(x)$, do erro absoluto e do erro relativo, todos com uma tolerância máxima de $e=10^{-6}$. Assim, analisando os resultados encontrados, tanto de forma tabelada quanto na forma de gráficos, verificou-se que não houve diferenças significantes na rapidez de convergência dos métodos quando muda-se o critério de parada. Mas considerando mesmo as pequenas diferenças percebeu-se a necessidade de um menor número de iterações para chegar a uma solução quando utilizado o critério de parada do erro relativo.

4.1. Trabalhos futuros

Como sugestão de trabalhos futuros visando complementar o presente estudo assim como explanar o tema, segue alguns tópicos relevantes:

- Aplicações na engenharia: implementar os métodos aqui estudados em problemas reais da engenharia, visto que as funções aqui estudadas são somente problemas teóricos.
- Resolução de sistemas de equações não lineares: a aplicação dos métodos nesse trabalho se restringiu a resolução de funções, mas a implementação dos métodos em sistemas envolvendo esses tipos de equações é de grande relevância no estudo cálculo numérico.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FRANCO, N. B. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice-Hall, 2006.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos Para Engenheiros e Cientistas**: Uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Porto Alegre: Bookman, 2008. 480p.

RIBEIRO, R. R. J. **Revisão bibliográfica de alguns métodos numéricos para obtenção de zeros reais de funções transcendentais e polinomiais**. 2012. 65f. Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus Angicos*. Angicos/RN, 2012.