



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

ÁLVARO FELIPE AGOSTINHO DA SILVA

DEFLEXÃO DE VIGAS COM CARGA VARIÁVEL

PAU DOS FERROS – RN

2018

ÁLVARO FELIPE AGOSTINHO DA SILVA

DEFLEXÃO DE VIGAS COM CARGA VARIÁVEL

Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
(UFERSA – Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros)

PAU DOS FERROS - RN

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS

DEFLEXÃO DE VIGAS COM CARGA VARIÁVEL

ÁLVARO FELIPE AGOSTINHO DA SILVA

Monografia apresentada à Banca Examinadora do Curso Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semiárido em cumprimento às exigências legais como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

APROVADA EM: 13/04/2018

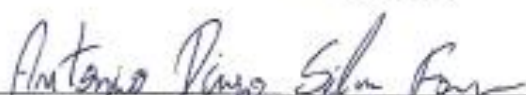
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Otávio Paulino Lavor
Orientador



Prof. Me. Matheus Fernandes de Araújo Silva
Membro



Prof. Me. Antônio Diego Silva Farias
Membro

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S587d Silva, Álvaro Felipe Agostinho da .
Deflexão de vigas com carga variável / Álvaro
Felipe Agostinho da Silva. - 2018.
40 f. : il.

Orientador: Otávio Paulino Lavor.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

1. Vigas. 2. Equações Diferenciais. 3. Linha
Elástica. 4. Deflexão. I. Lavor, Otávio Paulino,
orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Dedico este trabalho aos meus pais Joilda de Oliveira Silva Costa e Oscivaldo Agostinho da Costa, e aos meus tios Oscineide e Nadjalene, obrigado por todos os ensinamentos e incentivo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao senhor Deus todo poderoso, pela dádiva divina da vida, pela saúde e pelo fortalecimento em todo esse caminho acadêmico, que se finda um ciclo e que começa outro na vida. Pelas bênçãos e proteção depositada em mim em toda a minha vida.

Agradeço aos meus pais Joilda de Oliveira Silva Costa e Oscivaldo Agostinho da Costa que durante toda a minha vida não mediram esforços para realizar meus sonhos e de me dar toda a base para um bom futuro, incluindo os estudos, os meus mais sinceros agradecimentos, sem vocês eu não sou nada.

Agradeço ao meu tio Oscineide Agostinho e minha tia Nadjalene Maia, por tudo que proporcionam na minha vida, desde o meu primeiro caminhar, sem me desamparar, e me ensinando junto com minha família a seguir um caminho certo e adequado na formação como cidadão e profissional, do fundo do meu coração, obrigado.

Ao meu primo Neverton Gabriel, por ter caminhado comigo desde pequeno e se tornando um irmão, que mesmo não tendo o sangue de um, sempre se comportou como tal. A Giovana Nunes, por nessa caminhada ter depositado seu tempo, seu colo, seu amor e carinho, e trazer muita paz, esperança e felicidade para mim. A Rizomar Silva por estar sendo um amigo da vida toda, por nesses mais de 8 anos de amizade nunca ter abandonado o caminhar. Aos amigos proporcionados pela faculdade, que estão nesse andar acadêmico diário e convivem de mãos dadas e apoiando uns aos outros, meu muito obrigado Robson Thiago, Guilherme Oliveira, Gabriel Andrade, Gabriel Nogueira, Waleskha Benevenuto, Isis Costa, Simone Gameleira, Orlando Sobrinho, Victor Ezequiel, Pedro David, Edvar Júnior, e todos os outros. A todos os meus amigos de infância e que continuam comigo até hoje.

Ao meu orientador e professor de longa data Otávio Paulino Lavor, pela forma de tratamento, ensinamentos e exemplo profissional e pessoal, a todos os demais professores da instituição que participaram da minha formação. Agradeço a UFERSA e todo o seu corpo constituinte pela minha formação e por me apresentar um universo de conhecimento e formação como profissional.

A todos os meus familiares que de forma direta e indireta me ajudaram a galgar todo esse caminho, me dando forças para enfrentar cada batalha e sonhar cada dia mais. O meus mais sincero obrigado, que Deus abençoe todos vocês.

“Porque nos sonhos entramos num mundo inteiramente nosso, deixem que flutue na mais alta nuvem ou que mergulhem no mais profundo oceano”

**Harry Potter e o Prisioneiro de Azkaban (J.
K. Rowling).**

RESUMO

A flexão de vigas é um dos assuntos bastante estudados na engenharia, devido às diferentes abordagens em seus problemas. Em geral, o problema é apresentado com carga constante ao longo do eixo longitudinal da viga, e este trabalho fará um estudo de flexões com cargas variáveis em relação ao eixo. Por meio de uma análise bibliográfica, foi tomado um estudo sobre o comportamento das linhas elásticas tendo como abordagem principal uma estrutura linear, a viga, quando está sendo submetida a uma carga que esteja variando. Por meio de equações de equilíbrio, compatibilidade de deformações e modelo constitutivo do material chega-se a equações diferenciais não homogêneas que serão solucionadas. E após a aplicação de condições de contornos, os resultados são ilustrados de forma gráfica.

Palavras-chave: Vigas, Equações Diferenciais, Linha Elástica, Flexão.

ABSTRACT

The bending of beams is one of the subjects related to engineering, with the different strategies in their problems. In general, the problem is presented with constant load along the longitudinal axis of the beam, and this work will make a study of flexions with variable loads with respect to the axis. Through a bibliographical analysis, a study was made on the behavior of the elastic lines having as main approach a linear structure, the beam, when being subjected to a load that is varying. By means of equations of equilibrium, compatibility of deformations and constitutive model of the material comes to non-homogeneous differential equations that will be solved. And after the application of contour conditions, the results are graphically illustrated.

Keywords: Beams. Differential equations. Elastic line. Flexion.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Carga concentrada	24
Figura 2 – Carga distribuída	24
Figura 3 – Sinalização tátil e visual direcional no piso	25
Figura 4 – Viga engastada	25
Figura 5 – Viga biapoiada com balanço	26
Figura 6 – Exemplo de viga com cargas atuando	27
Figura 7 – Análise diferencial da viga	28
Figura 8 – Viga exemplo 1	30
Figura 9 – Gráfico primeiro trecho viga 1	34
Figura 10 – Viga exemplo 2	35
Figura 11 – Gráfico viga exemplo 2	38
Figura 12 – Viga com tamanho variados	39

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	16
2.1 TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	17
2.2 CLASSIFICAÇÃO POR ORDEM E POR LINEARIDADE	17
2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS E NÃO HOMOGÊNEAS	18
3 VIGAS	23
3.1 CARREGAMENTOS ATUANTES.....	23
3.2 TIPOS DE APOIOS E DE VIGAS	24
3.3 FLEXÃO DE VIGAS.....	26
3.3.1 LINHA ELÁSTICA, INCLINAÇÃO E DESLOCAMENTO	27
4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	30
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	40
REFERÊNCIAS	41

1 INTRODUÇÃO

Um dos elementos principais em construção civil são as vigas. Estas são elementos estruturais lineares projetados para suportar cargas aplicadas perpendicularmente a seus eixos longitudinais (HIBBELER, 2010). Um dos problemas mais correntes envolvendo estas são os deslocamentos excessivos, constituindo uma das principais patologias, e esta pode causar sensação de desconforto para os usuários e problemas para o resto da estrutura (LIMA, FONTES, LIMA, 2003).

Para compreender melhor esse fenômeno, tem-se de analisar a linha elástica. Quando não há a presença de nenhuma carga ao longo do baricentro. Entretanto quando é aplicada uma carga sobre essa, ocorrem deformações ao longo das seções transversais, e o eixo que liga todos os centroides de cada seção transversal é então chamada de linha elástica. Esta pode ser resolvida e abordada por intermédio de equações diferenciais. (ZILL, 2016).

Historicamente, o estudo das equações diferenciais iniciaram com Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz ao começarem os seus estudos sobre o cálculo. Além deles, outros célebres cientistas participaram e contribuíram de forma importante para o desenvolvimento dessas equações, como Johann e Jakob Bernoulli, que participaram efetivamente no desenvolvimento de soluções para essas equações e suas aplicações. Ainda, temos Daniel Bernoulli, filho de Johann, que desenvolveu-se no âmbito da física e que temos hoje uma função com seu nome em mecânica dos fluidos, além de ser responsável pelas funções de Bessel. Ainda, tem-se Laplace, Lagrange, Euler, e entre outros que contribuíram para o desenvolvimento desse campo da matemática (BOYCE E DIPRIMA, 2006).

Equações diferenciais já foram usadas em muitos casos de estudos aplicados a ações práticas. Exemplos clássicos são, como no estudo se a AIDS é uma doença invariavelmente fatal, como o problema relacionado ao Bungee Jumping e também como um grande caso ocorrido como o Colapso da Ponte Suspensa Tacoma Narrows (ZILL, 2016).

Equações diferenciais são a parte da matemática destinada a solucionar por meio de metodologias aplicadas de diferentes formas para equações onde envolvam derivadas (ZILL, 2016).

Partindo desse contexto, este trabalho utilizará diversos tipos de equações. E o objeto de estudo deste trabalho será a determinação de linhas elásticas, a flexão apresentada com cargas, mas olhando para casos onde a carga aplicada varia com o espaço.

Como objetivo principal do trabalho, irá se utilizar de métodos de solução de equações diferenciais não homogêneas para encontrar a flexão causada em vigas onde a carga aplicada

varia no decorrer do espaço. E além disso, buscar-se a de forma específica, por meio de métodos de solução de equações diferenciais com problemas de contorno, aplicar as técnicas de coeficientes indeterminados em problemas de flexões de vigas, e abordar problemas de vigas com carga variando no espaço.

A metodologia empregada nesse presente trabalho tem como foco para o seu desenvolvimento o método de revisão bibliográfica sobre flexões de vigas e cálculo numérico. Serviram de apoio teórico as literaturas dos autores Cocian (2009), Hibbeler (2010), Zill (2016), Gere e Goodno (2014), Cengel e Palm III (2014), Boyce e DiPrima (2017), Nagle e Saff e Snider (2012), Timoshenko (1983), entre outros.

Em um segundo momento, ocorre o desenvolvimento de uma equação diferencial referente a flexão em vigas, para proporcionar o alcance dos principais objetivos e resultados deste trabalho de pesquisa. A resolução da equação diferencial em questão se dará por meio da solução de uma equação diferencial de quarta ordem e por meio do método de coeficientes indeterminados. Os gráficos com relações a equação gerada final são reproduzidos com ajuda de um *Software* matemático, mais especificamente o *MatLab*. Onde nesse, entra-se com a função e as variáveis, e o intervalo em que se deseja trabalhar, com ele serão apresentadas as linhas elásticas, funções de $y(x)$ ao longo do eixo das vigas.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Muitos dos problemas encontrados no mundo são vistos com suas grandezas variando de acordo com o tempo ou outra variável, seja uma velocidade que deve variar com o tempo, ou seja, uma função da velocidade dependente do tempo. Dessa maneira, muitos desses problemas levam em consideração a taxa com que esses fenômenos variam, entrando então como uma derivada (BOYCE E DIPRIMA, 2006).

Dessa maneira, equações diferenciais levam a compreensão e análise de

Muitos dos princípios, ou leis que regem, o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. (BOYCE E DIPRIMA, 2006, p.1).

De maneira simplória, pode ser definida como

Uma expressão matemática que possui um sinal de igualdade é chamada de **equação**. Uma equação que envolve as derivadas de uma ou mais funções é denominada **equação diferencial**. Em outras palavras, uma equação diferencial expressa a relação entre as funções e suas derivadas. (ÇENGEL E PALM III, 2014, p.2).

Assim Equações Diferenciais, expressão introduzida por Leibniz em 1676, é utilizada para vários ramos da ciência. Por exemplo, a descrição e resolução das maiorias dos problemas físicos é por intermédio destas, já que equações algébricas simplórias já não são capazes resolver (ÇENGEL E PALM III, 2014).

Diante disso, “equações diferenciais são usadas para investigar uma grande variedade de problemas nas ciências e na engenharia, além de fazerem parte da formação educacional dessas áreas” (ÇENGEL E PALM III, 2014). Problemas esses como “movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em um circuito, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou aumento de populações, entre muitos outros é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais” (BOYCE E DIPRIMA, 2006, p.1) para a sua solução.

As classificações das equações diferenciais podem se dar pela ordem da equação, quanto a linearidade dessa, e com isso resolver cada uma, necessita de métodos específicos de cada tipo de equação diferencial (ED). (BOYCE E DIPRIMA, 2006).

2.1 TIPOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais (ED) são classificadas quanto ao tipo de derivada ao qual essa está relacionada. Ou seja, quando na equação contiver apenas funções e suas derivadas dependentes de apenas uma variável independente essa é denominada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). Quando na equação possuir derivadas parciais, ou seja, dependendo de mais de uma variável independente é Equação Diferencial Parcial (EDP). (ZILL, 2016).

Por exemplo para um caso de eletricidade, tem-se:

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t) \quad \text{Eq. (1)}$$

É uma Equação Diferencial ordinária, onde $Q(t)$ é a carga, R a resistência e L a indutância. E também, para casos de equação diferencial parcial, tem-se a equação de onda. (BOYCE E DIPRIMA, 2006):

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{Eq. (2)}$$

2.2 CLASSIFICAÇÃO POR ORDEM E POR LINEARIDADE

A ordem de uma equação diferencial é obtida olhando o grau da maior derivada, ou seja, em uma equação diferencial de segundo grau a maior derivada é de segundo grau (y''). Como nas equações acima mostradas, vê-se uma equação diferencial de segunda ordem. (BOYCE E DIPRIMA, 2006).

Quando se trata de linearidade de uma equação diferencial, estará se observando a variável dependente, de modo que, “uma equação diferencial linear é aquela em que a variável dependente y e suas derivadas aparecem em combinações aditivas de suas primeiras potências” (NAGLE E SAFF E SNIDER, 2012, p.4). Caso contrário é dita não linear. (NAGLE E SAFF E SNIDER, 2012).

Dessa maneira, uma equação do tipo,

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{Eq. (3)}$$

É dita linear, caso F seja uma função linear das outras variáveis, caso contrário ela é dita não linear. Sendo que, de modo geral, uma equação diferencial ordinária linear de ordem n é: (BOYCE E DIPRIMA, 2006)

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad \text{Eq. (4)}$$

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS HOMOGÊNEAS E NÃO HOMOGÊNEAS

Para o caso de uma equação diferencial base de segunda ordem do tipo:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad \text{Eq. (5)}$$

A classificação da equação ser homogênea ou não estará de acordo com o termo após a igualdade, o termo g(t). Uma equação diferencial será classificada como homogênea se a função g(t) for igual a 0, caso contrário, ela é não homogênea. (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

De acordo com isso, uma equação diferencial linear na forma geral, de ordem n, é homogênea quando apresentada na seguinte forma: (ZILL, 2016).

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{(n-1)}(x) \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad \text{Eq. (6)}$$

Quando a equação possuir um g(x) não nulo essa será chamada de não homogênea, e estará na forma: (ZILL, 2016)

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{(n-1)}(x) \frac{d^{(n-1)} y}{dx^{(n-1)}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{Eq. (7)}$$

Explicitando que “a palavra homogênea nesse contexto não se refere a coeficientes que sejam funções homogêneas” (ZILL, 2016, p.128).

Quando se está diante de uma equação diferencial homogênea, a solução dessa equação diferencial (ED) se dará por uma solução geral, em que, conforme “seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ um conjunto de soluções da equação diferencial linear homogênea de ordem n em um intervalo I. Então, a solução geral da equação no intervalo é”. (ZILL, 2016, p.133).

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \text{Eq. (8)}$$

No entanto, para equações não homogêneas, além de uma solução geral para equação homogênea associada, terá uma solução a mais, chamada de solução particular, em que, “seja y_p uma solução particular qualquer da equação diferencial linear não homogênea de ordem n

em um intervalo I , e seja $y_1, y_2, \dots, y_n$ um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial homogênea associada em I . Então a solução geral da equação no intervalo é” (ZILL, 2016, p.134)

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) + y_p \quad \text{Eq. (9)}$$

Assim, sendo a primeira parte uma solução gerada por uma equação diferencial homogênea associada, e a outra parte será uma solução particular para o problema, sendo, $y = y_c + y_p$ (ZILL, 2016).

2.4 PROBLEMAS DE VALORES INICIAIS (PVI) E PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO (PVC)

Problemas de Valores Iniciais (PVI) é quando se tem condições iniciais para o problema, ou seja, um valor de $y(t_0) = y_0$ e $y'(t_0) = y'_0$. E leva-se a conclusão do PVI onde, tem-se uma solução, de forma que, existe solução, e essa solução apresentada é única. (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

Dessa maneira, sendo um problema de valor inicial do tipo:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad \text{Eq. (10)}$$

“Em que p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto t_0 . Então existe, exatamente uma solução $y = \varphi(t)$ deste problema, e a solução existe em todo o intervalo I ”. (BOYCE E DIPRIMA, 2017, p.123).

Já Problemas de Valor de Contorno consistem em “resolver uma equação diferencial linear de segunda ordem ou superior no qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes” (ZILL, 2016, p.127). Sendo:

$$a_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{Eq. (11)}$$

Com as condições $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$. (ZILL, 2016). Entretanto, diferentemente do Problema de Valor Inicial (PVI), os Problemas de Valores de Contorno (PVC) podem ter, uma, várias ou nenhuma solução. (ZILL, 2016).

2.5 MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS E VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Para resolução de equações não homogêneas, ou seja, equações na forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, pode ser adotados métodos como Coeficientes Indeterminados e Variação de Parâmetros. (BOYCE E DIPRIMA, 2017).

Um dos métodos mais simples para resolução de equações diferenciais não homogêneas com coeficientes constantes é o dos coeficientes indeterminados. (ÇENGEL E PALM III, 2014). Onde,

De acordo com esse método, deve-se fazer uma *hipótese inicial* para a forma geral de uma solução particular y_p que envolva alguns coeficientes constantes desconhecidos. Em seguida, esses coeficientes devem ser examinados de modo que a solução particular hipotética satisfaça a equação diferencial não homogênea. (ÇENGEL E PALM III, 2014, p.134).

Apesar de ser um método aparentemente não fundamentado, pois necessita de alguma hipótese inicial para o desenvolver dos cálculos e chegar a solução particular, entretanto, essa busca pela hipótese passa por procedimentos. (ÇENGEL E PALM III, 2014).

A maior vantagem de utilizar esse método é por ser de simples execução, uma vez tendo uma hipótese sobre a forma da solução particular. A limitação do método está no fato de ser útil principalmente para equações onde seja fácil escrever a solução particular antecipadamente. E “por essa razão, este método só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não homogêneo pertence a uma classe relativamente pequena de funções” (BOYCE E DIPRIMA, 2017, p.149).

Já o método da Variação de Parâmetro consiste no fato de que, para resolver uma função do tipo $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, encontra-se primeiro a função complementar $y = c_1y_1 + c_2y_2$, após isso para encontrar a solução particular $y = u_1y_1 + u_2y_2$ é necessário encontrar através do wronskiano (W) o u'_1 e u'_2 , conseqüentemente para achar o valor basta integrar. Sendo dado por: (ZILL, 2016).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \quad \text{Eq. (12)}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix} \text{ e } W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix} \quad \text{Eq. (13)}$$

Logo o u'_1 e u'_2 serão:

$$u'_1 = -\frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 \cdot f(x)}{W} \quad \text{Eq. (14)}$$

E

$$u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 \cdot f(x)}{W} \quad \text{Eq. (15)}$$

Como exemplo da aplicação do método dos coeficientes indeterminados temos para achar a solução particular da equação 16: (ZILL, 2016).

$$y'' - y' + y = 2 \operatorname{sen} 3x \quad \text{Eq. (16)}$$

Primeiramente, como trabalhamos com o termo $g(x)$ com seno, supõe-se uma solução particular sendo:

$$y_p = A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x \quad \text{Eq. (17)}$$

Diferenciando a solução particular adotada, obtém-se:

$$y'_p = 3A \cos 3x - 3B \operatorname{sen} 3x \quad \text{Eq. (18)}$$

E,

$$y''_p = -9A \operatorname{sen} 3x - 9B \cos 3x \quad \text{Eq. (19)}$$

Substituindo na equação geral, equação 16, do problema,

$$\begin{aligned} -9A \operatorname{sen} 3x - 9B \cos 3x - 3A \cos 3x - 3B \operatorname{sen} 3x + A \operatorname{sen} 3x \\ + B \cos 3x = 2 \operatorname{sen} 3x \end{aligned} \quad \text{Eq. (20)}$$

$$(-9A - 3B + A) \operatorname{sen} 3x + (-9B - 3A + B) \cos 3x = 2 \operatorname{sen} 3x \quad \text{Eq. (21)}$$

$$(-8A - 3B) \operatorname{sen} 3x + (-8B - 3A) \cos 3x = 2 \operatorname{sen} 3x \quad \text{Eq. (22)}$$

Quando solucionada, gera (ZILL, 2016)

$$y_p = \frac{6}{73} \cos 3x - \frac{16}{73} \operatorname{sen} 3x \quad \text{Eq. (23)}$$

Já pelo método da variação de parâmetros, tem-se por exemplo $y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{2x}$. (ZILL, 2016)

A solução parte da “equação auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 = 0$, temos que $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, com as identificações $y_1 = e^{2x}$ e $y_2 = x e^{2x}$, calculamos a seguir o wronskiano” (ZILL, 2016, p.167).

$$W(e^{2x}, x e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & x e^{2x} \\ 2e^{2x} & 2x e^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = e^{4x} \quad \text{Eq. (24)}$$

Identificando $f(x) = (x + 1)e^{2x}$, faz-se: (ZILL, 2016).

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{2x} \\ (x + 1)e^{2x} & 2x e^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix} = -(x + 1)x e^{4x} \quad \text{Eq. (25)}$$

E,

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x + 1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x + 1)e^{4x} \quad \text{Eq. (26)}$$

Assim,

$$u'_1 = -\frac{(x + 1)x e^{4x}}{e^{4x}} = -x^2 - x \quad \text{Eq. (27)}$$

$$u'_2 = \frac{(x + 1)e^{4x}}{e^{4x}} = x + 1 \quad \text{Eq. (28)}$$

Integrando os termos da equação 27 e 28, chega-se à conclusão: (ZILL, 2016).

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{6} x^3 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \quad \text{Eq. (29)}$$

3 VIGAS

Vigas são elementos estruturais que suportam forças ou “cargas” aplicadas perpendicularmente ao seu eixo longitudinal. Trabalham preponderantemente à flexão. Tendo sua aplicação muito vasta na parte estrutural quando esta é feita de aço ou alumínio. Quando feito de madeira, a viga, é comumente utilizada em casas. As forças aplicadas sobre esse elemento normalmente são perpendiculares, provocando nessa estrutura somente flexão e cisalhamento, entretanto, quando o carregamento não está formando necessariamente um ângulo reto com o elemento, poderá provocar também cargas axiais. (BEER et al, 2015).

Dessa maneira, quando ocorrem carregamentos, tende-se a analisar a viga devido a flexão em torno do seu eixo, que em suma, ocorrem que, quando estas estão submetidas a cargas transversais, a viga flete em relação ao seu eixo perpendicular à força. Com isso, ocorre anomalias nessa estrutura, e se faz necessário o cálculo em determinados pontos dessa, além de que, para projetos de estrutura deve-se minimizar a deformação que ocorre, visto que há um limite máximo para estas (TIMOSHENKO, 1983).

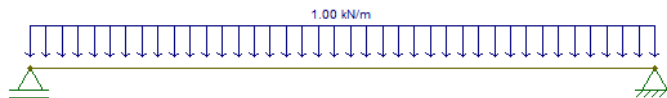
3.1 CARREGAMENTOS ATUANTES

A viga poderá estar sendo solicitada por variados tipos de cargas, desde uma que esteja somente atingindo um ponto do elemento, até mesmo uma carga que haja sobre essa de forma uniforme ou variando sobre toda a viga. Assim, os carregamentos atuantes são definidos como, forças concentradas, que pode ser expressa em Newtons, Libras ou seus múltiplos. E forças distribuídas que é definida pela medida do carregamento em relação ao comprimento como newtons/metro, libras/pé, e quando essa força distribuída é constante durante todo o segmento de viga é denominada como uniformemente distribuída. (BEER et al, 2015).

Nas figuras 1 e 2, tem-se um exemplo de carga concentrada e distribuída, respectivamente.

Figura 1: Carga Concentrada

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2: Carga distribuída

Fonte: Elaborado pelo autor

3.2 TIPOS DE APOIOS E DE VIGAS

Diferentes tipos de apoios são usados para se fazer suporte as vigas ao passo que, cada um desses utilizados tem a possibilidade de impedimento na movimentação desse elemento estrutural. O suporte móvel é usado para apoiar as vigas de maneira que esta ainda pode se mover horizontalmente e ainda será possível a rotação. Quando se trata de suporte fixo ele fixa a barra de maneira que ela não se desloque verticalmente ou horizontalmente, entretanto poderá ocorrer rotações. E por fim o engaste ocorre quando é proibido tanto os deslocamentos quanto a rotação. De maneira que, no primeiro caso acima ocorre somente uma reação no apoio, no

segundo ocorre duas reações nos apoios, e no terceiro três reações, sendo respectivamente, reação em x, reação em x e em y, e reação em x, y e momento. (ROY E CRAIG, 2015).

As vigas são classificadas de acordo com a maneira que estão vinculadas. A distância entre um apoio e outro é chamada de vão. (BEER et al, 2015). Quando uma viga está apoiada através de pino em uma extremidade e rolo em outro, é chamada de viga simplesmente apoiada e “a característica essencial de vigas desse tipo é que ambas as extremidades podem girar livremente durante a flexão, porém não podem deslocar-se lateralmente (transversal ao eixo)” (TIMOSHENKO, 1983, p.78).

Figura 3: Viga biapoiada



Fonte: Elaborado pelo autor

Outro tipo de viga é a em balanço, que é “engastada em uma extremidade e livre na outra. Na extremidade fixa, a viga não pode nem girar, nem ter movimento de translação, enquanto a extremidade livre pode ter ambos os movimentos” (TIMOSHENKO, 1983, p.79). Além disso, pode-se ter a viga biapoiada com balanço quando há dois apoios entretanto uma ou as duas extremidades continuam livres (BEER et al, 2015). Exemplos desses dois tipos de vigas são apresentados nas figuras 4 e 5.

Figura 4: Viga engastada



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 5: Viga biapoiada com balanço



Fonte: Elaborado pelo autor

3.3 FLEXÃO DE VIGAS

A análise de deformações causadas em vigas ajuda em vários aspectos da engenharia e da própria análise geral desse elemento, por exemplo,

As cargas transversais que atuam nas vigas causam deformações, curvando seu eixo longitudinal. Quando se projeta uma viga é frequentemente necessário calcular as deformações que ocorrerão em vários pontos ao longo do eixo. Por exemplo, nas vigas estaticamente indeterminadas, o cálculo das deformações é essencial. (TIMOSHENKO, 1983, p. 135).

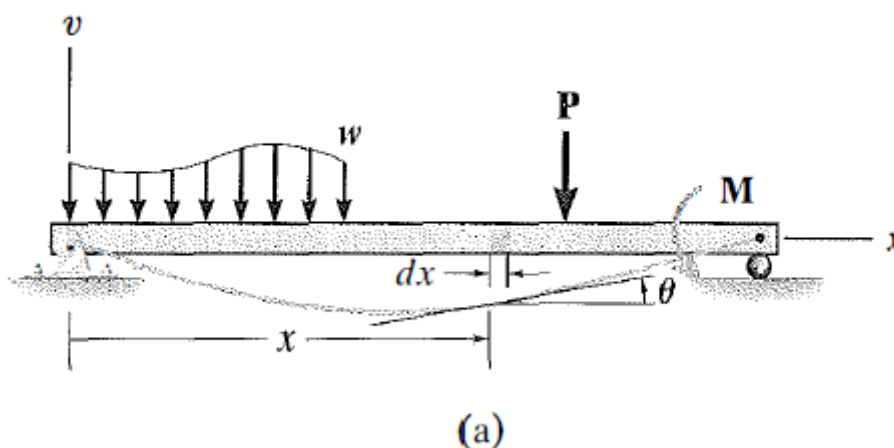
No âmbito das vigas estaticamente indeterminadas “um conhecimento das deflexões é necessário para se obter os esforços internos, estaticamente indeterminadas são as vigas nas quais o número de reações nos apoios excede o número de equações de equilíbrio disponíveis para determinar as incógnitas” (BEER et al, 2015, p. 570). É então possível fazer uma abordagem por meio das flexões e assim conseguir encontrar os valores das reações nos apoios.

Além disso, partindo para a análise de projeto em si, a análise da deflexão máxima causada em uma viga devido essa estar submetida a um carregamento transversal, é importante para a buscar minimizar os danos, já que “as especificações de projeto de uma viga geralmente incluem um valor máximo admissível para sua deflexão” (BEER et al, 2015, p. 570).

3.3.1 LINHA ELÁSTICA, INCLINAÇÃO E DESLOCAMENTO

Quando submetido a um carregamento, a linha que une todos os centroides do eixo da viga se desloca. O traçado da linha que convém a demonstrar, visualizando em parte o comportamento da viga com a carga, é denominado de linha elástica. Esse diagrama representa muito bem os casos, todavia, é necessário ter noção de como se comportará onde houver apoios, e saber as restrições que estes causam, sejam no impedimento de deslocamento na vertical, seja como impedimento de rotação. A figura 6 a seguir será base para a análise da equação de linha elástica. (HIBBELER, 2010).

Figura 6: Exemplo de viga com cargas atuando



Fonte: Hibbeler, 2010, pág. 422

Há uma relação direta entre o momento e a curvatura da linha elástica gerando uma equação base para análise do deslocamento e inclinação da viga. Assim, há relação entre o momento fletor interno na viga e o raio (ρ) de curvatura da linha elástica. Faz-se necessário primeiramente, determinando as relações de coordenadas em questão, onde o eixo x está da esquerda para a direita onde está o eixo longitudinal da viga, o eixo de v estende-se de baixo para cima perpendicular ao eixo x , esse medindo o deslocamento causado no centroide da viga, como demonstrado na imagem anteriormente apresentada. Sendo com base nessas coordenadas a dedução da equação da linha elástica. (HIBBELER, 2010).

Com base em uma análise mais direta, partira do princípio onde

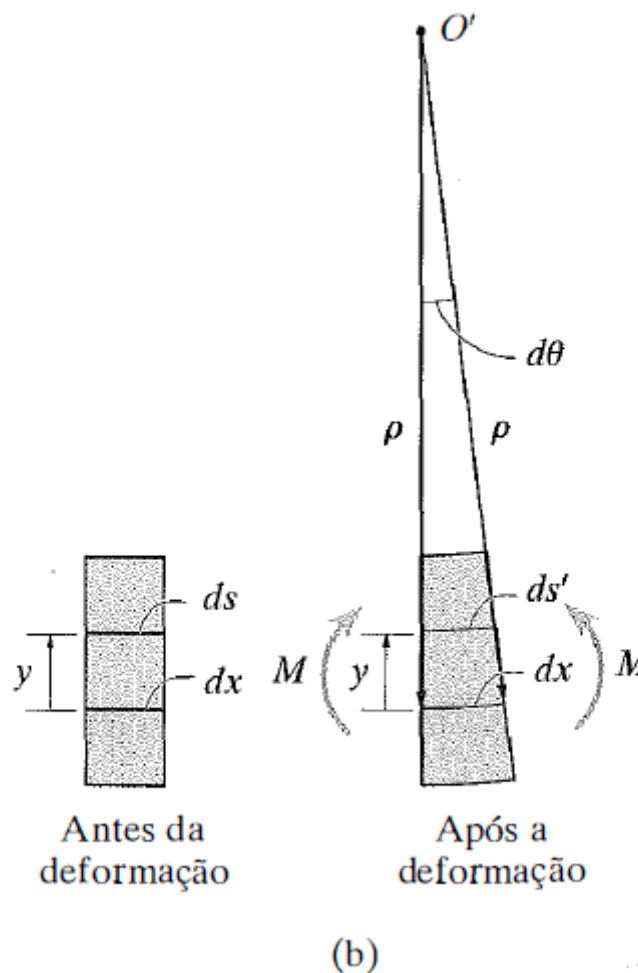
Para deduzir a relação entre o momento interno e ρ , limitaremos a análise ao caso mais comum de uma viga inicialmente reta que é deformada elasticamente por cargas aplicadas de modo perpendicular ao eixo x da viga e que se encontra no plano de simetria $x-v$ para a área da seção transversal da

viga. Devido à carga, a deformação da viga é provocada pela força cortante interna, bem como pelo momento fletor. (HIBBELER, 2010, p.422).

Em termos de dimensão da viga e curvatura se tem que as deformações por cisalhamento são desprezíveis, quando a diferença do comprimento da viga e a altura, sendo o primeiro muito maior que o segundo, a deformação maior é provocada por flexão. (HIBBELER, 2010).

De acordo com a Figura 7 apresentada a seguir, parte-se da análise de quando o momento fletor flete a viga, o termo observado em estudo é o raio da curvatura (ρ), pois quando o momento age, o ângulo entre as seções torna-se $d\theta$. E o raio do arco formado passasse a ser o distância (ρ) medida do centro da curvatura até o dx que é o comprimento que intercepta os eixos neutros. (HIBBELER, 2010).

Figura 7: Análise diferencial da viga



Fonte: Hibbeler, 2010, pág. 422

Logo, com a análise dos elementos infinitesimais, chega-se a

Qualquer arco sobre o elemento, exceto dx , está sujeito a uma deformação normal. Por exemplo, a deformação no ds , localizado em uma posição y em relação ao eixo neutro é $\epsilon = (ds' - ds)/ds$. Todavia, $ds = dx = \rho d\theta$ e $ds = [(\rho - y)d\theta - \rho d\theta]/\rho d\theta$ (HIBBELER, 2010, p.423)

Com isso se tem (HIBBELER, 2010)

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \quad \text{Eq. (30)}$$

Sendo o material homogêneo e se comportando elasticamente, ou seja, obedecendo as Leis de Hooke, chega-se a (HIBBELER, 2010).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. (31)}$$

Além disso, tem-se que “na maioria das aplicações práticas ocorrem apenas pequenas deflexões nas vigas. As linhas elásticas são muito achatadas e tanto o ângulo como a inclinação da curva são quantidades muito pequenas” (TIMOSHENKO, 1983, p. 136).

Partindo desse pressuposto, trabalhando com as equações acima, e diferenciais, chega-se a (HIBBELER, 2010)

$$\frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. (32)}$$

Com as considerações de tamanho de deflexão envolvendo inclusive a estética, e com relação a grandeza envolvendo as derivadas, conclui-se que a equação pode ter a forma como (HIBBELER, 2010).

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{Eq. (33)}$$

Podendo também ser escrita de outra maneira, passa-se o termo referente a rigidez a flexão (EI), onde o E é módulo de elasticidade do material, e o I é o momento de inércia calculado em torno do eixo neutro, para o lado esquerdo da igualdade, derivando mais 2 vezes a igualdade, tem por fim a equação (HIBBELER, 2010).

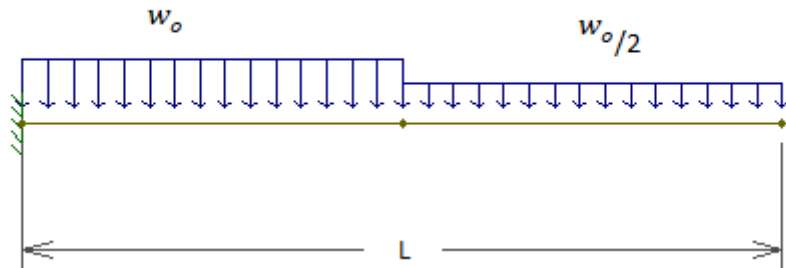
$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = -w(x) \quad \text{Eq. (34)}$$

O sinal do w se deve ao fato de que $-w = dV/dx$. (HIBBELER, 2010).

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A priori demonstra-se o que é uma carga variada através do seguinte problema apresentado na figura 8, onde se tem uma viga engastada, com uma carga w_0 até metade do comprimento da viga, e essa carga se diminui a metade, $\frac{w_0}{2}$ a partir do meio até o restante da estrutura. Com isso, fará uma abordagem de direção para a coordenada x , partindo da esquerda para direita, focando a carga w_0 , e após, toma-se a carga $\frac{w_0}{2}$, ou seja, analisando respectivamente do engaste até a metade da viga, da metade da viga até a extremidade livre.

Figura 8: Viga exemplo 1



Fonte: Elaborada pelo autor

A princípio, não se fará necessário a resolução da equação diferencial da linha elástica por meio do método dos coeficientes indeterminados, já que esse é a base para solução do problema a ser posteriormente apresentado, visto que no atual caso a carga é continua mudando apenas seu valor geral na metade do trecho, ou seja, não se comportando diretamente como uma função variando a todo x .

Logo, parte-se da integração, igualando a diferencial ao valor ao correspondente carregamento, partindo da análise primeiro do engaste até a metade da estrutura, então, submetendo um valor negativo, pois a carga está atuando na vertical de baixo para cima, ou seja, contra a indicação adotada por y , logo o sinal de menos, por isso,

$$EIv_1^{(4)} = -w_0 \quad \text{Eq. (35)}$$

Agora, integra-se até chegar ao termo da função v_1

$$EIv_1''' = -w_0x + C_1 \quad \text{Eq. (36)}$$

$$EIv_1'' = -\frac{1}{2}w_ox^2 + C_1x + C_2 \quad \text{Eq. (37)}$$

$$EIv_1' = -\frac{1}{6}w_ox^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3 \quad \text{Eq. (38)}$$

Por fim, chega-se a

$$EIv_1 = -\frac{1}{24}w_ox^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4 \quad \text{Eq. (39)}$$

Para a outra parte do problema, analisará da metade do vão até a extremidade livre, integra-se com o mesmo método, mudando somente o valor do esforço a qual a viga está submetida, logo resultará em uma linha elástica v_2

$$EIv_2^{(4)} = -\frac{w_o}{2} \quad \text{Eq. (40)}$$

$$EIv_2''' = -\frac{1}{2}w_ox + C_5 \quad \text{Eq. (41)}$$

$$EIv_2'' = -\frac{1}{4}w_ox^2 + C_5x + C_6 \quad \text{Eq. (42)}$$

$$EIv_2' = -\frac{1}{12}w_ox^3 + \frac{1}{2}C_5x^2 + C_6x + C_7 \quad \text{Eq. (43)}$$

$$EIv_2 = -\frac{1}{48}w_ox^4 + \frac{1}{6}C_5x^3 + \frac{1}{2}C_6x^2 + C_7x + C_8 \quad \text{Eq. (44)}$$

A partir desse momento, já se possui as 2 equações do problema na sua forma geral, entretanto, necessita encontrar os valores para todas as oito constantes, e assim ficar com a equação em si.

Primeiro, com as condições de contorno fornecidas pela estrutura, ou seja, o engaste na extremidade, em $x = 0$, tem-se que o deslocamento e a inclinação tem que ser iguais a zero, resultando nos valores de constante.

$$x = 0 \rightarrow v = 0 \text{ e } \theta = v' = 0 \quad \text{Eq. (45)}$$

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + C_4 \rightarrow C_4 = 0 \quad \text{Eq. (46)}$$

$$0 = 0 + 0 + 0 + C_3 \rightarrow C_3 = 0 \quad \text{Eq. (47)}$$

E da extremidade livre, tem-se o cortante e o momento iguais a zero

$$x = L \rightarrow M = v'' = 0 \text{ e } V = v''' = 0 \quad \text{Eq. (48)}$$

$$C_5 = \frac{w_0 L}{2} \quad \text{Eq. (49)}$$

$$0 = -\frac{w_0 L^2}{4} + \frac{w_0 L}{2} \cdot L + C_6 \rightarrow C_6 = -\frac{w_0 L^2}{4} \quad \text{Eq. (50)}$$

Para encontrar as outras constantes se faz necessário usar agora das condições de continuidade da viga, para isso, nas equações abaixo, são supostos sempre para um $x = \frac{L}{2}$, e tomando também os valores acima já encontrados, verifica-se nesse caso, por não haver nenhuma força concentrada nem descontinuidade na viga do problema, que o deslocamento, o giro, o cortante e o momento terão que ser iguais nesse seção, assim

$$v_1''' = v_2''' \quad \text{Eq. (51)}$$

$$C_1 = -\frac{1}{4} w_0 L + \frac{1}{2} w_0 L + \frac{1}{2} w_0 L \rightarrow C_1 = \frac{3}{4} w_0 L \quad \text{Eq. (52)}$$

$$v_1'' = v_2'' \quad \text{Eq. (53)}$$

$$C_2 = -\frac{1}{16} w_0 L^2 + \frac{1}{4} w_0 L^2 - \frac{1}{4} w_0 L^2 + \frac{1}{8} w_0 L^2 - \frac{3}{8} w_0 L^2 \quad \text{Eq. (54)}$$

$$C_2 = -\frac{5}{16} w_0 L^2 \quad \text{Eq. (55)}$$

$$v'_1 = v'_2 \quad \text{Eq. (56)}$$

$$\begin{aligned} -\frac{w_0}{6} \cdot \frac{L^3}{8} + \frac{3}{4} w_0 L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4} - \frac{5w_0 L^2}{16} \cdot \frac{L}{2} \\ = -\frac{w_0}{12} \cdot \frac{L^3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{w_0 L}{2} \cdot \frac{L^2}{4} - \frac{w_0 L^2}{4} \cdot \frac{L}{2} + C_7 \end{aligned} \quad \text{Eq. (57)}$$

$$C_7 = -\frac{w_0 L^3}{96} \quad \text{Eq. (58)}$$

E por fim, a última constante para ser encontrada, será pela igualdade da flexão, logo

$$\begin{aligned} -\frac{w_0 L^4}{24 \cdot 16} + \frac{3w_0 L^4}{4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{5w_0 L^4}{16 \cdot 4 \cdot 2} \\ = -\frac{w_0 L^4}{48 \cdot 16} + \frac{w_0 L^4}{12 \cdot 8} - \frac{w_0 L^4}{8 \cdot 4} - \frac{w_0 L^4}{96 \cdot 2} + C_8 \end{aligned} \quad \text{Eq. (59)}$$

$$C_8 = +\frac{w_0 L^4}{768} \quad \text{Eq. (60)}$$

Agora, já obtidas todas as oitos constantes geradas durante a integração da equação do problema (equação 35 e 40). Substitui-se as constantes pelos seus respectivos valores, obtendo a equação para o caso apresentado, assim, sendo do trecho do engaste até a metade da viga, a deflexão será indicada pela função

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^4}{24} + \frac{3w_0 L x^3}{24} - \frac{5w_0 L^2 x^2}{32} \right) \quad \text{Eq. (61)}$$

E a parte subsequente, será regida pela equação

$$v_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 x^4}{48} + \frac{w_0 L x^3}{12} - \frac{w_0 L^2 x^2}{8} - \frac{w_0 L^3 x}{96} + \frac{w_0 L^4}{768} \right) \quad \text{Eq. (62)}$$

Ou seja, com as equação apresentadas acima, equação 61 e 62, elas possuem o mesmo valor, ou seja, o mesmo ponto no eixo y, no momento em que $x = \frac{L}{2}$. O valor onde elas se encontrarão será no ponto

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{w_0 L^4}{24 \cdot 16} + \frac{3w_0 L^4}{24 \cdot 8} - \frac{5w_0 L^4}{32 \cdot 4} \right) \rightarrow v_1 = \frac{-5w_0 L^4}{192EI} \quad \text{Eq. (63)}$$

E,

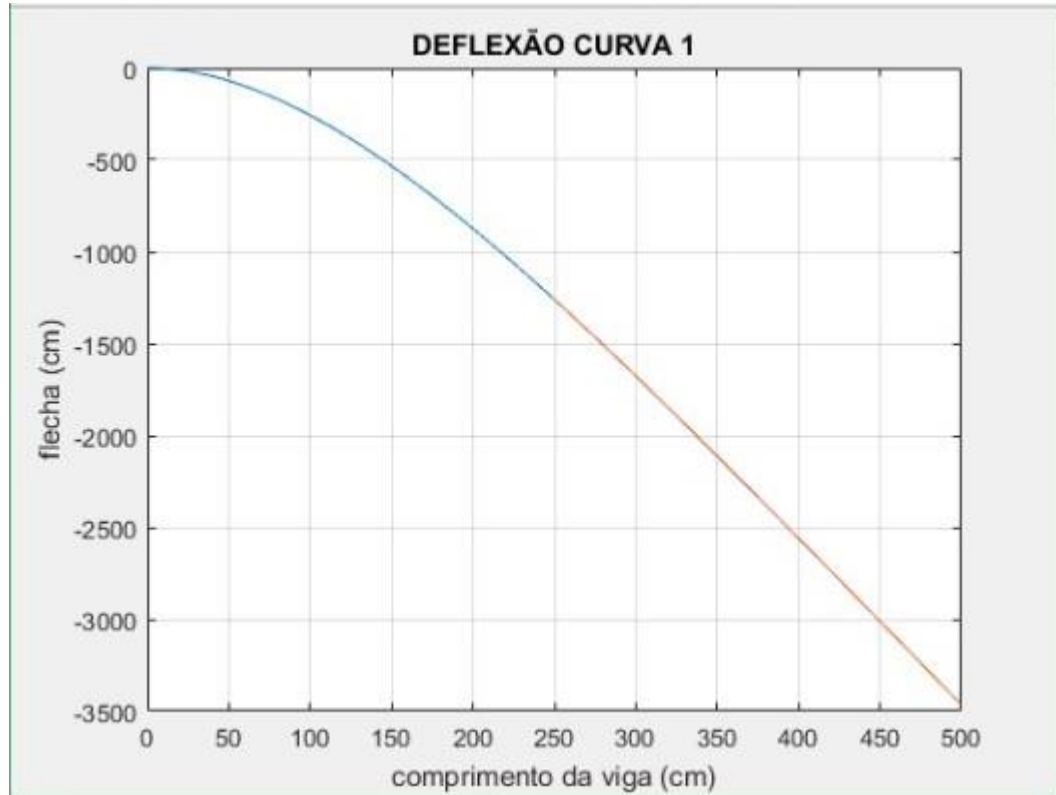
$$v_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{-w_0 L^4}{48 \cdot 16} + \frac{w_0 L^4}{12 \cdot 8} - \frac{w_0 L^4}{8 \cdot 4} - \frac{w_0 L^4}{96 \cdot 2} + \frac{w_0 L^4}{768} \right) \quad \text{Eq. (64)}$$

$$v_2 = \frac{-5w_0 L^4}{192EI} \quad \text{Eq. (65)}$$

Portanto, o ponto de encontro de ambas funções em $x = \frac{L}{2}$, será o ponto em que a deflexão da viga, ou seja, o deslocamento na direção de y será de $v_2 = \frac{-5w_0 L^4}{192EI}$, o motivo do sinal negativo é justamente devido a considerarmos o sinal positivo de baixo para cima, e a viga deslocar para baixo.

Com os valores acima apresentados das equações, e tendo o valor EI como constante, supondo E igual a 20500 kN/cm^2 , uma carga de w_0 igual a 64 kN , uma inércia em relação ao eixo x de 252 cm^4 , a viga de comprimento igual a $L = 500 \text{ cm}$, ou seja, 5 metros, entretanto o x para a primeira função variará de 0 até 250 cm, e após esse trecho x irá variar de 250 até 500 cm regido pela segunda função. Com isso, o gráfico da deformação que a viga sofre com essas cargas está apresentado na figura 9.

Figura 9: Gráfico viga exemplo 1

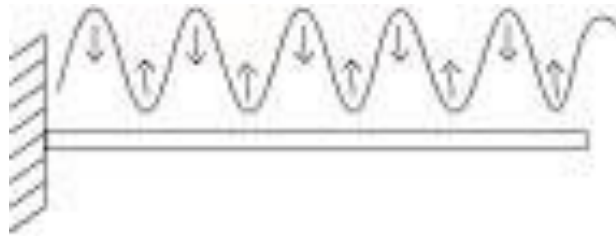


Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, como apresentado acima na Figura 9, vê-se uma grande flexão em relação ao tamanho da viga, provocada na metade desta, onde se encontra um valor de 1000 cm fletidos, muito devido aos valores do carregamento aplicados, e também pelas características materiais viga escolhida, como inércia e comprimento.

Para o principal caso de estudo, tem-se uma viga onde ela está sendo solicitada por uma carga referente a uma soma de parcelas de seno e cosseno, devido a isso, quando os valores de comprimento vão se alternando em certas faixas ocorre mudando no sentido da força aplicada, por exemplo, quando o comprimento estiver em π , o valor do cosseno será -1 e o seno igual a 0, ou seja alternará os valores dos esforços na qual a viga estará sendo solicitada, com base, nisso, vê-se a figura 10 referente ao problema.

Figura 10: Viga exemplo 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Como apresentado, a parte após a igualdade da equação base da linha elástica é:

$$w_0 = A\cos(x) + B\sin(x) \quad \text{Eq. (66)}$$

A princípio encontra-se a resolução da parte homogênea igualando-se a 0 a parte a esquerda da equação, visto que a expressão acima apresentada será usada para encontrar a solução particular, aplica a integração e com isso aparecerá constantes que com auxílio das condições de contorno e continuidade terá o real valor delas.

$$EIv^{(4)} = 0 \quad \text{Eq. (67)}$$

$$EIv''' = C_1 \quad \text{Eq. (68)}$$

$$EIv'' = C_1x + C_2 \quad \text{Eq. (69)}$$

$$EIv' = \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad \text{Eq. (70)}$$

Executando a última integração, então a solução homogênea será v_h , apresentado abaixo.

$$EIv = \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4 \quad \text{Eq. (71)}$$

Devido o problema ser não homogêneo, se faz necessário supor uma solução particular para o caso. Supõe-se um y_p que é apresentado na forma abaixo, e derivando até chegar a ordem da equação base do problema, e sendo a igualdade apresentada no começo dessa análise, encontra-se como demonstrado abaixo que os valores, de E e F são exatamente o próprio A e B.

$$y_p = E\cos(x) + F\sin(x) \quad \text{Eq. (72)}$$

$$y_p' = -E\sin(x) + F\cos(x) \quad \text{Eq. (73)}$$

$$y_p'' = -E\cos(x) - F\sin(x) \quad \text{Eq. (74)}$$

$$y_p''' = E\sin(x) - F\cos(x) \quad \text{Eq. (75)}$$

$$y_p^{(4)} = E\cos(x) + F\sin(x) \quad \text{Eq. (76)}$$

$$EI(E\cos(x) + F\sin(x)) = -A\cos(x) - B\sin(x) \quad \text{Eq. (77)}$$

$$E = -A \quad \text{Eq. (78)}$$

$$F = -B \quad \text{Eq. (79)}$$

Logo, como solução geral, será a soma da solução homogênea com a particular.

$$y = y_h + y_p \quad \text{Eq. (80)}$$

$$v = \frac{1}{EI} \left(\frac{C_1 x^3}{6} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4 - A \cos(x) - B \sin(x) \right) \quad \text{Eq. (81)}$$

Com isso, tem-se então a equação da linha elástica para o problema, entretanto, se faz necessário aplicar as condições de contorno para que com isso, chegue-se ao resultado final da equação, como primeira condição, tomando a análise de x da esquerda para a direita, assumindo o valor dessa coordenada igual a 0, tanto a deflexão como a angulação na viga tem de ser 0, devido a mesma estar engastada nessa extremidade, assim,

$$x = 0 \rightarrow v = 0 \text{ e } \theta = v' = 0 \quad \text{Eq. (82)}$$

$$0 = \frac{1}{EI} (0 + 0 + 0 + C_4 + 0 - A) \rightarrow C_4 = A \quad \text{Eq. (83)}$$

$$EI v' = \frac{3.0^2}{6} \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + C_3 + B \cos(0) - A \sin(0) = 0 \quad \text{Eq. (84)}$$

$$C_3 = B \quad \text{Eq. (85)}$$

Logo com essas condições já aplicadas, encontra-se dois valores, tanto a terceira como a quarta constantes como apresentado acima. Sabe-se que como a viga está engastada numa extremidade e livre na outra, aplica-se agora para a outra extremidade, sendo o ponto final, no ponto x igual a L, para encontrar as duas constantes que restam, para isso, sabe-se que para extremidade livre o momento e o cortante deve ser igual a zero, logo a segunda e terceira derivada da linha elástica são iguais a zero, respectivamente.

$$x = L \rightarrow M = v'' = 0 \text{ e } V = v''' = 0 \quad \text{Eq. (86)}$$

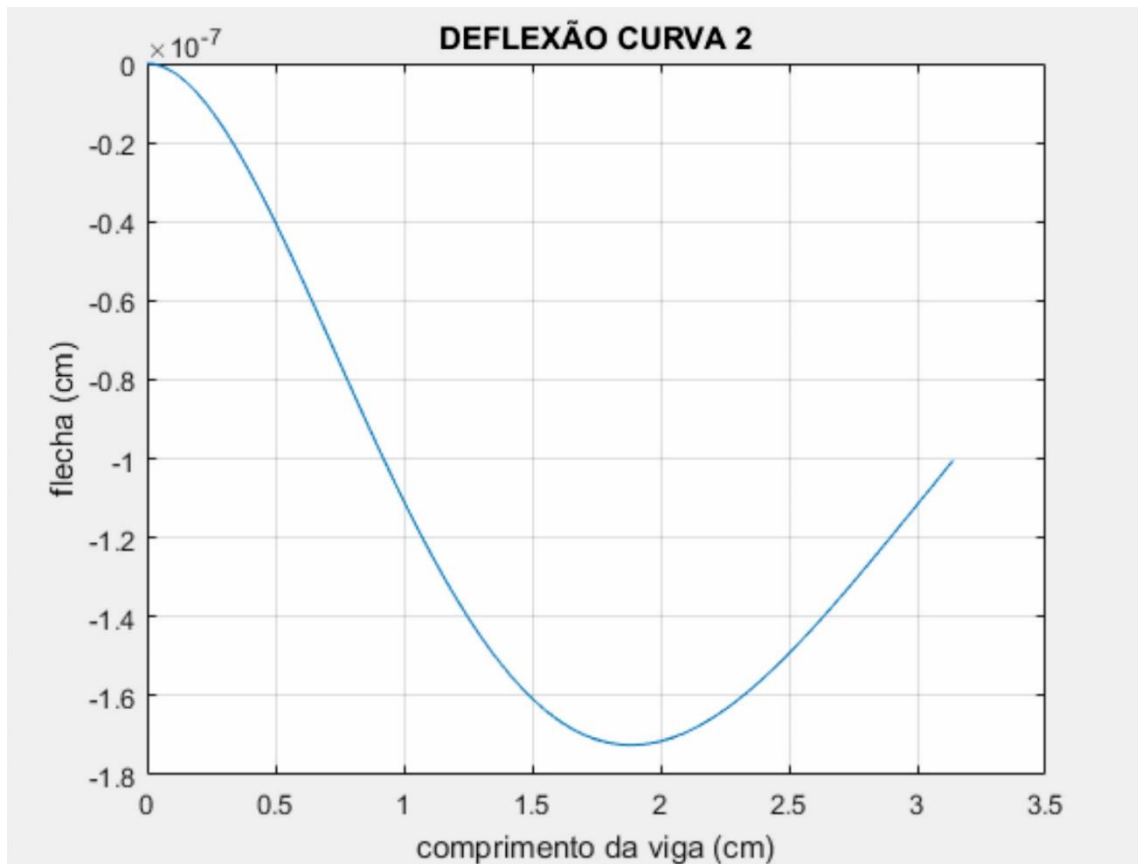
$$C_1 - A \sin(L) + B \cos(L) = 0 \quad \text{Eq. (87)}$$

$$C_1 = A \sin(L) - B \cos(L) \quad \text{Eq. (88)}$$

$$v = \frac{1}{EI} \left[(A \sin(L) - B \cos(L)) \frac{x^3}{6} + ((-AL - B) \sin(L) + (BL - A) \cos(L)) \frac{x^2}{2} + Bx + A - A \cos(x) - B \sin(x) \right] \quad \text{Eq. (89)}$$

Logo apresentamos acima, a equação da linha elástica para o problema apresentado, supondo agora que essa viga tenha um comprimento L igual ao valor de pi, os valores A e B ambos equivalentes a 2 kN (quilonewtons), e tendo a viga uma estrutura com valor de E igual a 20500 kN/cm² e uma inércia em relação ao eixo que está sendo fletido de 252 cm⁴, logo o gráfico que representa a deformação provocada de acordo com a equação está apresentado abaixo.

Figura 11: Gráfico viga exemplo 2

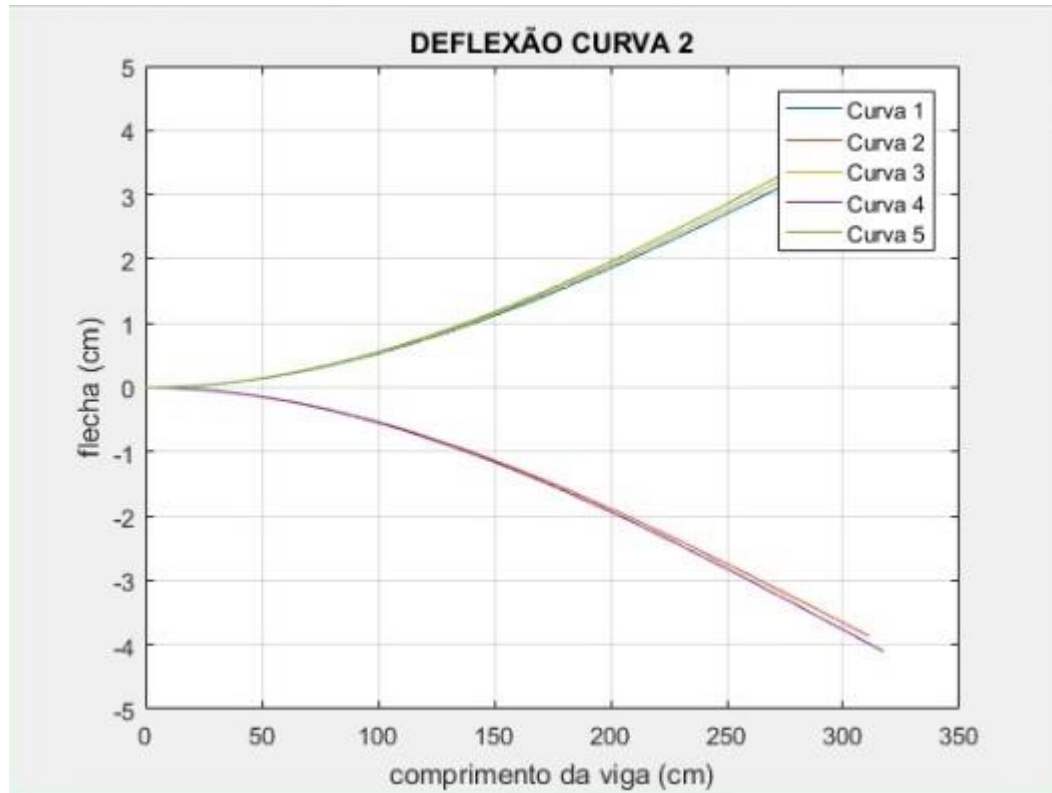


Fonte: Elaborada pelo autor

Como apresentado anteriormente no gráfico da viga exemplo 2, a deflexão foi muito pequena provocado pela carga variante, e o maior valor em módulo, foi provocado aproximadamente a $1,8 \times 10^{-7}$ cm, já que foi tratado a viga como muito pequena, devido o valor adotado de comprimento ser o valor de pi. Assim, dessa maneira, com o valor do expoente mostrado, é desprezível o valor de deflexão.

Para outros casos, onde a viga terá comprimento maior, a tanto a deflexão como o valor dela serão modificados, muito disso devido, as mudanças provocadas no comprimento da viga afetarem os valores do seno e do cosseno, consequentemente, alternará ainda mais entre resultados para cima do eixo y e para baixo do mesmo, com isso, para o caso de vigas maiores sendo apresentados abaixo, é perceptível a alternância.

Figura 12: Viga com tamanho variados



Fonte: Elaborado pelo autor

A curva 1 é com uma viga do tamanho 98π , e as outras curvas até a curva 5, são respectivamente de tamanho, 99π , 100π , 101π e 102π . O que comprova a alternância na deflexão e demonstra o aumento da flecha nos pontos, principalmente no final do elemento estrutural estudado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi feito com um propósito de estudo adequado de cargas variando no espaço e no tempo, motivado principalmente pela carência ainda de muitos materiais didáticos com esse tipo de abordagem de problema, vislumbrando vigas de diferentes tamanhos e sendo solicitadas por cargas de distribuídas que não se enquadram nas especificadas pelos livros, sendo, por exemplo, a base de seno e cosseno.

A metodologia adotada foi uma análise bibliográfica que proporcionou uma boa base teórica, do estudo de equações diferenciais e do problema de flexão da viga quando essa está submetida a um carregamento, o que culminou com uma aplicação desses linhas elásticas encontradas em softwares matemáticas, especificadamente sendo utilizado nesse caso o MatLab, para visualizar o problema de forma gráfica, assim, conseguindo enxergar toda a curva e os valores com base no que foi proposto.

Os resultados obtidos demostram o quanto um pequeno espaço nessas cargas modificam todo um comportamento na forma como a viga irá se comportar, o que se torna efetivo devido o estudo utilizar de metodologia de integração para resolver a equação diferencial, desde o lado para o qual essa irá fletir até o tamanho da flecha provocada. Como continuidade, sugere-se abordagem de vigas apoiadas de outras maneiras, como as biapoiadas e as apoiadas com balanço, além de novas variações de cargas, como funções de exponenciais.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Oitava edição. [S.l.]: LTC, 2006. Trad. De Valéria de M. Iorio.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Décima edição. LTC, 2017. Trad. De Valéria de M. Iorio.

BEER, F. P.; RUSSELL, E. J. J.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F.; *Mecânica dos Materiais*. Sétima edição. AMGH, 2015. Trad. De José Benaque Rubert

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. Sétima edição. São Paulo: PEARSON, 2010.

LIMA, P. R. L.; FONTES, C. M. A.; LIMA, J. M. F; Análise não-linear da deflexão de concreto armado. *Sitientibus*, Feira de Santana, n. 28, p. 91-108, 2003.

NAGLE, R. Kent.; SAFF, B. Edward.; SNIDER, Arthur David.; *Equações Diferenciais*. Oitava Edição. São Paulo: PEARSON, 2012. Trad. Daniel Vieira.

ROY, R.; CRAIG, Jr.; *Mecânica dos Materiais*. Segunda Edição. Rio de Janeiro. LTC, 2015. Trad. José Roberto Moraes d' Almeida, Sidnei Paciornik, Verônica Calado.

TIMOSHENKO, S. P.; *Mecânica dos sólidos*. Volume 1. Rio de Janeiro: LTC, 1983. Trad. José Rodrigues de Carvalho.

ZILL, D. G.; *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. Terceira edição. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Trad. De Márcio K. Umezawa.

ÇENGEL, Yunus A.; III, William J. Palm. **Equações Diferenciais**. Porto Alegre: Amgh Editora Ltda, 2014. 585 p. Tradução de Marco Elisio Marques