

PROPOSTA DE MÉTODOS HÍBRIDOS PARA APROXIMAÇÃO DE RAÍZES DE FUNÇÃO

Lúcio Paulo Fernandes de Queiroga¹, Matheus da Silva Menezes²

Resumo: O trabalho tem o objetivo de, a partir de implementações computacionais, realizar a comparação de dois métodos híbridos propostos para determinação de uma função frente ao método da Falsa Posição, Newton-Raphson e o método misto que são abordados na literatura. Tais métodos híbridos são constituídos pelos métodos da Falsa Posição e Newton-Raphson, no entanto trazem propriedades distintas no funcionamento que garantem a qualidade de seus resultados e tem o objetivo de provar com eficiência e eficácia a convergência para a raiz, precisão dos resultados encontrados, número de iterações e tempo. Desse modo, após a realização dos testes foi possível comprovar a eficiência das estratégias de refinamento propostas, bem como a eficácia e competitividade do método híbrido 2 frente ao método de Newton-Raphson.

Palavras-chave: Implementação computacional; Raiz da função; Falsa Posição; Newton-Raphson; Métodos Híbridos.

1. INTRODUÇÃO

Na vasta gama de tópicos abordados no campo do cálculo numérico, os métodos numéricos e o refinamento desempenham papéis cruciais, abrangendo uma diversidade de aplicações em diferentes áreas. Neste estudo, concentramos nossa atenção nos métodos iterativos para a determinação das raízes de funções. Embora esse seja um tema tipicamente associado às ciências exatas, é importante notar que esses métodos têm relevância em diversas áreas, incluindo aplicações variadas desde a mecânica estrutural, mercado financeiro, controle populacional, otimização de processos industriais dentre outras.

Em situações que não é viável determinar uma solução analítica para uma função, os métodos numéricos se destacam, fornecendo uma solução aproximada que atende a um nível predefinido de precisão, acompanhado de um erro considerado aceitável.

É importante notar que, ao analisar os métodos mais populares para encontrar as raízes de uma função, como o método da bissecção, falsa posição, ponto fixo, Newton-Raphson, secante e o método misto, que é pouco conhecido pela academia, estes apresentam vantagens e desvantagens quando considerados em termos de eficiência e eficácia. É com base nessa observação que surge a motivação para o desenvolvimento de duas metodologias híbridas com o objetivo de encontrar raízes de função, combinando elementos do método de Newton-Raphson e falsa posição, que serão objeto de desenvolvimentos deste trabalho.

Portanto, o escopo deste estudo inclui a conceitualização, aplicação computacional e comparação abrangente desses métodos, desenvolvidos em relação às estratégias de refinamento mais convencionais. As hibridizações propostas possuem potencial para se tornar uma ideia promissora frente a necessidade apresentada pois, reforçam os pontos positivos de sua atuação e controlam as deficiências dos métodos constituintes a fim de torná-los otimizado.

O trabalho é dividido em quatro seções para fornecer uma compreensão completa do estudo proposto. Inicialmente, a base teórica explora o funcionamento dos métodos que sustentam o estudo e os métodos propostos. A seguir, apresenta-se a metodologia adotada no estudo, detalhando os parâmetros de análise, as características do sistema e os problemas abordados. Além disso, discutem-se os resultados obtidos por meio da implementação computacional, análises do campo de estudo e conclusões derivadas dos experimentos realizados.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Através das implementações computacionais é possível solucionar situações relacionadas às ciências exatas, engenharia, processos produtivos e outros que são vividos diariamente e que podem ser interpretados por meio de raízes de equações polinomiais e transcendentais. Por esse motivo, é necessário conhecer as características, propriedades e comportamento dessas equações para realização de uma análise mais assertiva para a questão em si. À vista disso, os métodos numéricos iterativos são propostos, pois podem ser utilizados para solucionar eventuais problemáticas sobre o procedimento de encontrar raízes de cada equação. O cálculo computacional atrelado a esses métodos torna-o mais acessível, prático, com ótimo tempo de resposta e confiável por possuir um erro mensurado e controlado. O estudo, portanto, retrata a união desses processos citados: o desenvolvimento dos

métodos numéricos aplicados em um ambiente computacional.

Quando se trata da determinação das raízes de uma função, é necessário entender que existem duas etapas que devem ser cumpridas para alcançar o objetivo: (a) O isolamento de raízes tem por objetivo principal de realizar o estudo na função e delimitar intervalos onde existem raízes, ocorrendo por meio das aplicações de valores conhecidos na função, sendo possível observar através do tabelamento construído, o seu comportamento e consequentemente determinar em quais intervalos existe a presença do zero de função; (b) O processo de refinamento, que é realizado após o isolamento de raízes, tem o objetivo determinar o zero da função com base em método numérico e uma precisão estabelecida.

Atualmente, a variedade de métodos para o refinamento da função provém da maior complexidade para a sua resolução, o que se torna justificado quando associamos essa dificuldade as inúmeras raízes que podem existir ao longo do domínio. Portanto, é possível afirmar que os métodos alcançam o objetivo descrito quando dentro de uma precisão estabelecida esse consegue determinar uma aproximação da raiz no intervalo dado.

Dessa forma, destacamos a seguir, macro etapas de isolamento e refinamento de raízes.

2.1. Isolamento de raízes

Localizar a raiz de uma função de primeiro e segundo grau é simples, tendo em vista que podemos tomar como base resoluções algébricas de isolamento da incógnita ou a própria fórmula de Bhaskara para funções polinomiais de grau dois. Todavia, para além desses casos, de acordo com [4], diversos métodos ineficientes e grosseiros já foram utilizados para determinar zeros de função transcendentais ou polinomiais de grau elevado. No geral, a técnica de solução aproximada era algo comum frente a determinação por meio do comportamento do gráfico e com isso não sendo possível ter uma confiabilidade no resultado obtido, tal como possuímos hoje, embora fossem mais comuns antes do aparecimento da implementação computacional. Hoje possuímos estratégias que utilizam desses princípios para realizar tais processos como maior precisão e qualidade no resultado.

A etapa do isolamento de raízes tem destaque por ser um processo simples, trazendo a possibilidade de estudar tais funções de maneira mais rápida e analisar o comportamento para cada ponto ou intervalo das funções polinomiais e transcendentais.

É importante destacar que, para aplicar estratégias de refinamento, é fundamental garantir a unicidade da raiz no intervalo considerado. Nesse contexto, o teorema apresentado abaixo estabelece as condições primárias necessárias para o funcionamento dos métodos.

Teorema de Bolzano ou anulamento [1]: Se uma função contínua f assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a; b]$, isto é, se $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelos menos um ponto $c \in [a; b]$, tal que $f(c) = 0$.

De acordo com [2] e tomando como referência o teorema de Bolzano acima citado, quando possuímos o tabelamento, é possível concluir através da mudança de sinal que existe pelo menos uma raiz. Portanto, é considerada a importância, bem como destacado por [1], de se realizar o processo do isolamento de raízes previamente ao refinamento em virtude da determinação do intervalo em que o método deve atuar, não sendo necessário desprender capacidade de processamento ao analisar todo o domínio da função.

A tarefa de aplicar intervalos do domínio a uma função não é, em si, complexa de compreender, visto que essa abordagem é amplamente utilizada em diversas disciplinas das ciências exatas. A complexidade do cálculo depende, principalmente, da natureza da função em questão, seja ela uma função polinomial ou transcendental, que engloba funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e outras funções menos convencionais, conforme discutido por [4]. Quando esse processo é realizado em um ambiente computacional, a capacidade de processamento da máquina acelera o cálculo, permitindo a obtenção de tabelas e resultados de forma eficiente.

A análise dos resultados obtidos tem como objetivo principal observar o comportamento da função em diferentes intervalos. Isso possibilita identificar os momentos em que a função está em crescimento ou decréscimo, bem como os períodos em que a função tem sinal positivo ou negativo. Além da praticidade de executar esse processo, a interpretação desses valores em um ambiente computacional pode ser realizada de maneira otimizada.

Entretanto, considerando que o propósito da metodologia em análise é determinar a raiz da função dentro dos padrões de precisão, minimizando erros e assegurando confiabilidade, não podemos depender exclusivamente do teorema para obter resultados satisfatórios. Isso se deve à possibilidade de, simultaneamente, nos depararmos com a presença de duas ou mais raízes dentro do intervalo estabelecido, tendo em vista situações que não são cobertas pelo teorema e que não garantem a unicidade das raízes.

Assim, apesar de reconhecermos que estamos considerando dois pontos no intervalo nos quais a função apresenta sinais opostos, é imprescindível, adicionalmente, avaliar o comportamento da curva. Para isso, faz-se valer o corolário do teorema.

Corolário do teorema de Bolzano ou anulamento [1]: Se f preservar o sinal em $[a; b]$, então existe um único $c \in [a, b]$ tal que $f(c)=0$;

Sabemos que o estudo das derivadas envolve a análise do comportamento da reta tangente a uma função em um ponto conhecido [5]. Essa análise é fundamental para compreender as variações locais da função, permitindo-nos identificar pontos críticos, como pontos de máximo, mínimo e pontos de inflexão. De mesma forma, podemos examinar o comportamento da curva em um contexto mais amplo. Para fazer isso, consideramos o par ordenado $[a; b]$ quando aplicado à derivada da função.

Dessa maneira, podemos concluir que em um intervalo contínuo onde a derivada da função mantém um comportamento consistente (crescente ou decrescente), a função original possui uma única raiz nesse intervalo. Isso é particularmente valioso na análise de funções, uma vez que nos permite identificar intervalos nos quais a função possui uma única solução.

Baseando-se nos conceitos apresentados, concluímos que o isolamento de raízes de uma função se torna viável quando atendemos a condições essenciais. Primeiramente, é vital garantir a continuidade da função, eliminando descontinuidades súbitas e comportamentos imprevisíveis, o que permite identificar mudanças de sinal da função de forma precisa. Além disso, o Teorema de Bolzano desempenha um papel central: ele afirma que, se uma função é contínua em um intervalo fechado $[a; b]$ e em seu intervalo existem pontos que quando aplicados a função apresentam valores de sinais opostos, então existe pelo menos um ponto onde a função se anula, indicando a presença de raiz no intervalo. O corolário de unicidade assegura que apenas uma raiz esteja presente no intervalo.

2.2 Métodos Numéricos

Muitas obras dedicadas ao estudo do Cálculo Numérico ao nível de graduação, incluindo aquelas que serviram de base para a nossa pesquisa, tendem a focar usualmente em apenas cinco métodos tradicionais para a determinação de raízes de funções. Esses métodos incluem a bissecção, ponto fixo, falsa posição, secante e Newton-Raphson. No entanto, é importante destacar que existe uma ampla variedade de outros métodos igualmente capazes de encontrar resultados de maneira eficiente. O estudo desse campo oferece espaço para o desenvolvimento e implementação de abordagens mais contemporâneas, que se apoiam em estratégias inovadoras de refinamento das funções. Essas técnicas não apenas expandem o conjunto de ferramentas disponíveis, mas também podem ser mais eficazes em cenários específicos. Portanto, a pesquisa contínua nesse domínio permite a descoberta de novos métodos e a evolução do campo de estudo.

Esse estudo visa apresentar um método eficaz quando comparada aos métodos tradicionais frequentemente discutidos por diversos autores. Para alcançar esse objetivo, é imprescindível que iniciemos compreendendo a fundamentação teórica que sustenta essa abordagem.

De maneira abrangente, a atuação dos métodos numéricos pode ser concebida como um processo iterativo e cíclico, no qual sucessivas aproximações são feitas para determinar a raiz de uma função. Essa abordagem é orientada por restrições impostas ao sistema, que englobam considerações relacionadas ao tempo de processamento, ao número de iterações e à precisão almejada na representação do resultado. Esse ciclo iterativo envolve, em essência, uma série de tentativas, onde espera-se que o método avance progressivamente em direção à solução desejada. O número de iterações reflete a quantidade de vezes que o método realiza essas tentativas, e a precisão define o grau de exatidão que se espera alcançar no resultado.

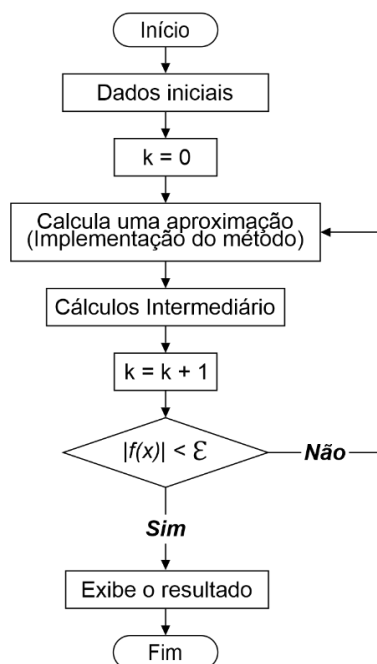


Figura 1. Fluxograma de métodos numéricos para refinamento de raízes [Autoria própria].

A Figura 1 ilustra o procedimento de refinamento de raízes no intervalo. A mesma logística do algoritmo pode ser aplicada em diversos métodos numéricos, em especial a falsa posição e Newton-Raphson que são foco do estudo, possuindo distinções apenas na forma de como são implementado o método. Tendo como base os dados iniciais obtidos por meio do processo de isolamento de raízes descrito na seção 2.1. Após a obtenção desses resultados o método segue realizando os cálculos iniciais que correspondem a primeira iteração para aproximação da raiz da função, onde após sua realização será verificado as condições de precisão do critério de parada. O refinamento é a melhoria contínua, ajustando a aproximação da raiz através de tentativa e erro. Se não for atendido o critério de parada, é possível realizar uma nova iteração, ajustando a aproximação da raiz até que os critérios sejam atendidos. Cada método realiza de maneira diferente, e quando atingem os critérios, o processo é encerrado e são apresentados os resultados.

2.2.1 Método da Falsa Posição

O método da falsa posição, também conhecido em alguns contextos como o método da *Regula Falsi*, adota uma abordagem que considera o comportamento da função e os aspectos de convergência. Logo, baseando-se no cálculo ponderado de $f(x)$ e a partir dos valores nos extremos do intervalo. De certo modo, como podemos observar em (1), frente a demais estratégias, a falsa posição possui praticidade por se resumir a considerações algébricas não complexas, dado pela equação abaixo.

$$x = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \quad (1)$$

Neste cálculo, partimos do intervalo $[a; b]$ que alimentam a equação (1) para início do refinamento. O método, então, calcula um valor associado a x_n , que se aproxima gradualmente da raiz da função, refletido no resultado $f(x_n)$. É fundamental, portanto, que, tendo conhecimento da precisão definida, verifiquemos se o valor de $f(x_n)$ atende a essa precisão. Se isso for confirmado, podemos concluir que, dentro dos parâmetros estabelecidos de precisão e convergência, a raiz da função é igual ao ponto onde o $f(x)$ calculado é igual a zero. Caso contrário, usamos $f(x_n)$ extraído da iteração para atualizar o intervalo, de modo que se $f(a) \cdot f(x_n) < 0$, o novo intervalo poderá ser definido por $[a; x_n]$, caso contrário será $[x_n; b]$ de acordo com o teorema de Bolzano. Esse processo cíclico prossegue até que a precisão desejada, representada por ε , seja alcançada.

Com base no fluxograma apresentado na Figura 1, observamos que a implementação do método será dada com base na equação (1). Dessa forma, a cada iteração, o valor tende a ser aproximado da raiz, cada vez mais da precisão desejada como pode ser visto na figura 2 que representa o comportamento gráfico do método.

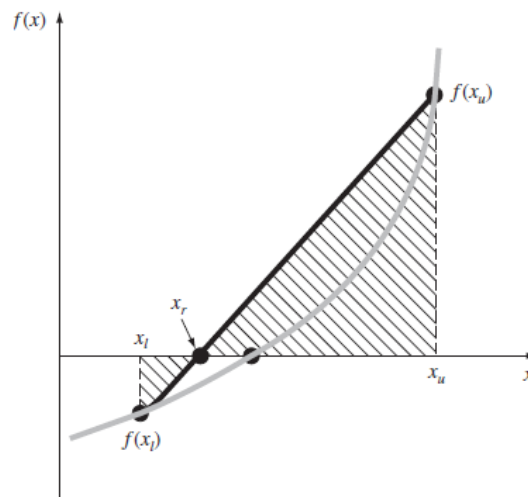


Figura 2. Aproximação geométrica do método do Ponto Fixo [4].

2.2.2 Método de Newton-Raphson

Conforme mencionado por [1], a derivação desse método pode ser rastreada até o conceito de iteração linear, onde um ponto inicial é escolhido dentro de um intervalo previamente definido durante a etapa de isolamento de raízes. O método de Newton se baseia na aplicação desse ponto inicial à função derivada. Esse processo permite a análise do comportamento de uma reta tangente à curva, indicando assim a aproximação ou afastamento da raiz.

A estratégia de refinamento é fundamentada na análise da reta tangente ao ponto escolhido. Portanto, ao determinar o valor de x_0 , da mesma forma que em outros métodos, esse acaba sendo inserido na função e uma reta tangente à curva é traçada a partir desse ponto. Essa reta tangente, por sua vez, tem por objetivo encontrar um novo valor de x , para que $f(x)$ se aproxime de zero. Esse processo é repetido iterativamente até que a precisão desejada

seja alcançada, ou até que o número de iterações estipulado seja atingido. A equação que fundamenta todo esse processo, de acordo com [1] pode ser observada abaixo.

$$x_{(k+1)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (3)$$

Torna-se necessário o conhecimento das derivadas da função e a compreensão do comportamento dela. Embora seja importante destacar que o cálculo das derivadas pode acumular tempo de processamento, uma vantagem notável é a capacidade de convergência de maneira eficaz quando comparado a outros métodos.

Para entender o funcionamento do método, é possível tomar como base o fluxograma apresentado na Figura 1, onde a Equação (3) será aplicada na etapa de implementação do método que objetiva a determinação da aproximação. A exemplo disso, é possível observar o funcionamento geométrico do método por meio do gráfico apresentado na Figura 3.

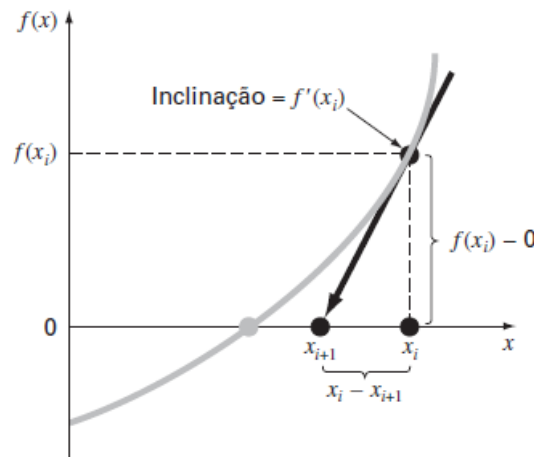


Figura 3. Aproximação geométrica do método de Newton-Raphson [4].

2.2.3 Método Misto

De acordo com [5], o método misto apresenta-se como uma aplicação sequencial dos métodos citados, sendo composto por respectivas aplicações sequenciais dos métodos de Newton-Raphson e falsa posição. Essa abordagem tem como objetivo acelerar o processo de refinamento, minimizando de erro acumulado e assegurando a determinação da raiz aproximada. É relevante destacar que, uma vez que esse método é uma combinação de dois métodos previamente abordados, ocorre um refinamento mútuo. Nesse refinamento mútuo, a quantidade de iterações é determinada pela evolução de x , seguindo uma sequência de $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, onde todas as iterações com índices pares são calculadas utilizando o método de Newton-Raphson e as iterações com índices ímpares são calculadas empregando a estratégia de falsa posição. Esse processo sinérgico visa otimizar a convergência em direção à raiz da função.

O processo tem início com a escolha de x_0 , sendo esse um valor determinado no intervalo compreendido e extraído pelo método de isolamento de raízes, e então utiliza-se do método de Newton dado pela Equação (3) para realizar a primeira aproximação. Posteriormente ao processo, com o resultado da primeira aproximação é verificado as condições de parada que a partir de então, caso não seja satisfeita, o resultado possa ser aplicado ao método da falsa posição, dado pela Equação (2). Destacando que método misto existe o movimento de alternância entre essas duas estratégias, criando uma espécie de sincronia entre elas.

É evidente que o objetivo aqui é alcançar uma convergência confiável, usando dois processos de forma alternada. Por um lado, temos o método de Newton-Raphson, conhecido por sua capacidade de convergência acelerada em relação aos parâmetros de tempo e iteração, mas que apresenta algumas incertezas relacionadas à garantia de processamento dentro do intervalo. Por outro lado, o método da Falsa Posição oferece uma confiabilidade na convergência de seus cálculos dentro do intervalo, no entanto, é uma abordagem que geralmente demanda mais tempo.

Por fim, a execução do método misto é dada como uma potencial estratégia para determinar raízes de funções, como demonstrado no fluxograma acima. Além disso, como critério de parada temos, além do número máximo iterações, a precisão estabelecida bem como exemplificado para os demais os métodos iterativos. Caso essa condição seja atendida, o programa irá interromper o processo e apresentar o resultado.

A exemplo disso, é possível observar de maneira mais intuitiva o funcionamento do método misto como descrito no fluxograma abaixo.

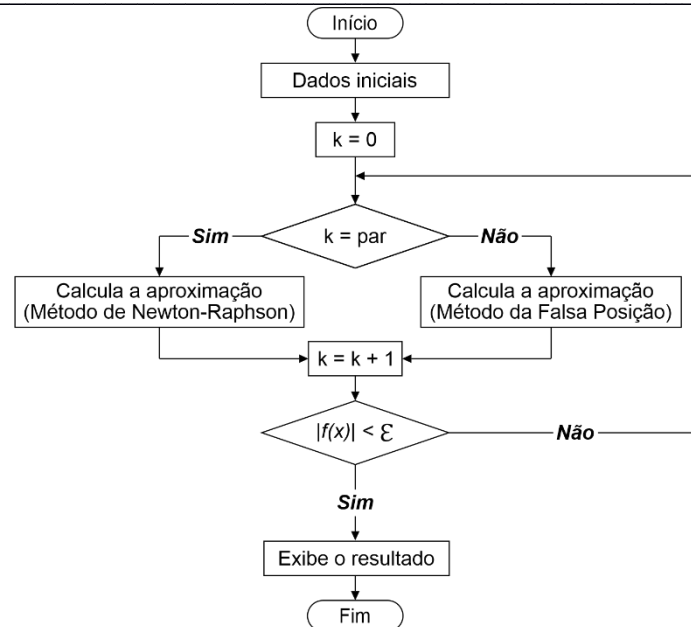


Figura 4. Fluxograma método misto [Autoria própria].

2.3 Definição da proposta de hibridização 1:

A abordagem de hibridização 1 se baseia nos métodos discutidos ao longo deste estudo e tem como principal objetivo combinar tais métodos, preservando a confiabilidade dos resultados obtidos individualmente por cada um. Consequentemente a essas ações, tem-se uma proposta de método otimizado e eficiente na determinação da raiz da função. É um método que, embora distinto do método misto apresentado, ainda sim utiliza como fundamentação os métodos de Falsa Posição e Newton-Raphson. Para isso, visto que existe a possibilidade de que os resultados obtidos através método de Newton-Raphson fujam do intervalo de estudo, surge a necessidade de verificação.

É possível notar o funcionamento deste método com base no fluxograma apresentado abaixo.

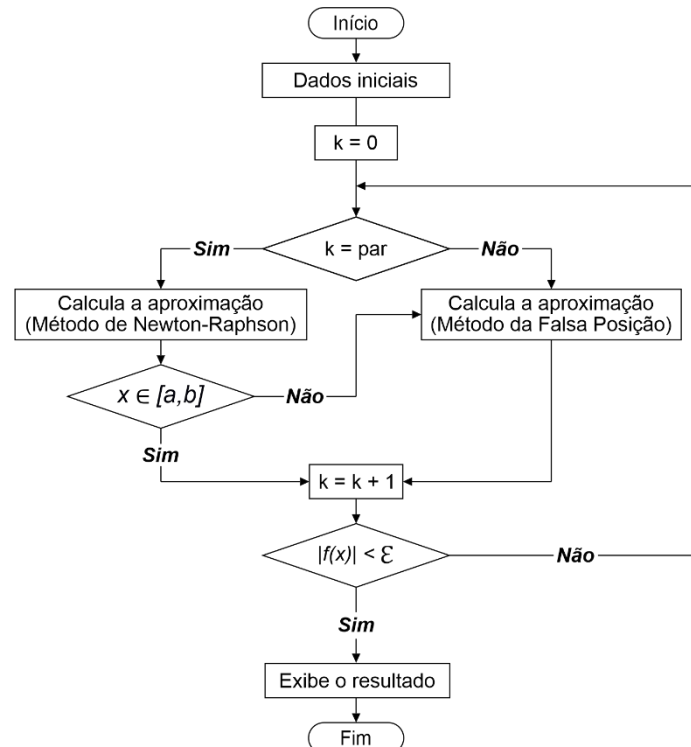


Figura 5. Fluxograma método híbrido 1 [Autoria própria].

Como observado no fluxograma, os resultados obtidos pelos métodos devem ser verificados para assegurar que estejam dentro do intervalo desejado de análise da função. Dado que o método da Falsa Posição garante a convergência para o intervalo e o método de Newton-Raphson assegura a rapidez na convergência, a proposta sugere iniciar com a estratégia de Newton, realizando a primeira iteração com base em sua fundamentação e

embasado pela Equação (3).

Como resultado disso, surgem duas situações possíveis. A primeira delas envolve o êxito da iteração por Newton, notando-se a convergência dos resultados em direção à raiz dentro do intervalo. A segunda possibilidade implica na falha dessa abordagem, incapaz de produzir resultados que estejam de acordo com as expectativas. É fundamental ressaltar que, a partir desse ponto, o algoritmo adotará o Método da Falsa Posição como estratégia para a iteração seguinte. Nela, para os casos de sucesso da iteração anterior, o método em questão tomará posse do intervalo para realizar a segunda iteração, atualizando o valor de x_l aproximando-o para a raiz da função. No entanto, para os casos de falha, o método da Falsa Posição descartará o resultado obtido pela iteração anterior, tendo a responsabilidade de calcular a nova raiz.

Portanto, conclui-se que, mesmo com a alternância de estratégias em seu escopo, a abordagem de hibridização 1 propõe descartar os resultados obtidos pelo método de Newton-Raphson quando estes estão fora do intervalo, mantendo os parâmetros anteriores do intervalo para o método subsequente realizar a próxima iteração. No caso de resultados satisfatórios, os métodos continuarão sendo intercalados e não desconsiderará a busca pela convergência em direção a raiz da função, como podemos observar no fluxograma abaixo.

2.4 Definição da proposta de hibridização 2

A segunda hibridização proposta no estudo busca um equilíbrio entre a metodologia da primeira hibridização e a busca pela otimização do processo, com o objetivo de alcançar uma convergência mais rápida. No entanto, ele ainda se baseia em uma lógica semelhante de alternância entre os métodos da Falsa Posição e de Newton-Raphson.

Uma questão que surge naturalmente é se é realmente necessário utilizar o método da Falsa Posição quando o método de Newton-Raphson produz resultados precisos dentro do intervalo estabelecido. Como destacado ao longo do estudo, a Falsa Posição é uma estratégia que tende a ter uma convergência mais lenta devido à sua abordagem. Portanto, o segundo método de hibridização propõe a aplicação sequencial do método de Newton-Raphson quando este estiver gerando resultados satisfatórios dentro do intervalo desejado e dentro dos limites de precisão estabelecidos. Isso evita a sobrecarga de cálculos da Falsa Posição quando não é estritamente necessário, otimizando assim o processo de busca da raiz da função.

Portanto, a segunda hibridização sugere, dentro dos parâmetros já conhecidos para a execução dos métodos da Falsa Posição e Newton-Raphson, o início do processo de refinamento por meio do método de Newton-Raphson. E, enquanto este estiver produzindo resultados satisfatórios, a hibridização continuará atualizando os intervalos com base na convergência anterior utilizando o mesmo método.

No entanto, é importante observar que, dependendo do comportamento da função, o método de Newton pode ser suscetível a instabilidades durante o processamento e poderá sair do intervalo de convergência. Para esse caso, a hibridização verificará os resultados após cada iteração e, se houver desvio do intervalo desejado, descartará o resultado mais recente obtido pelo método de Newton. Em vez disso, ela recorrerá ao resultado anterior e aplicará o método da Falsa Posição com o único objetivo de restabelecer a convergência da raiz da função dentro do intervalo desejado.

Após a conclusão bem-sucedida desse processo, com a garantia de que o método da Falsa Posição tenha assegurado a convergência, a hibridização retomará a estratégia de refinamento utilizando o método de Newton-Raphson para as próximas iterações na determinação da raiz da função. Portanto, podemos concluir que nesse processo, a Falsa Posição não é utilizada de forma padronizada dentro do método, mas sim como uma garantia de que o método possa ter bons resultados de convergência.

Como exemplo do funcionamento da hibridização 1, é possível observar o fluxograma abaixo como forma de compreender mais intuitivamente o método descrito.

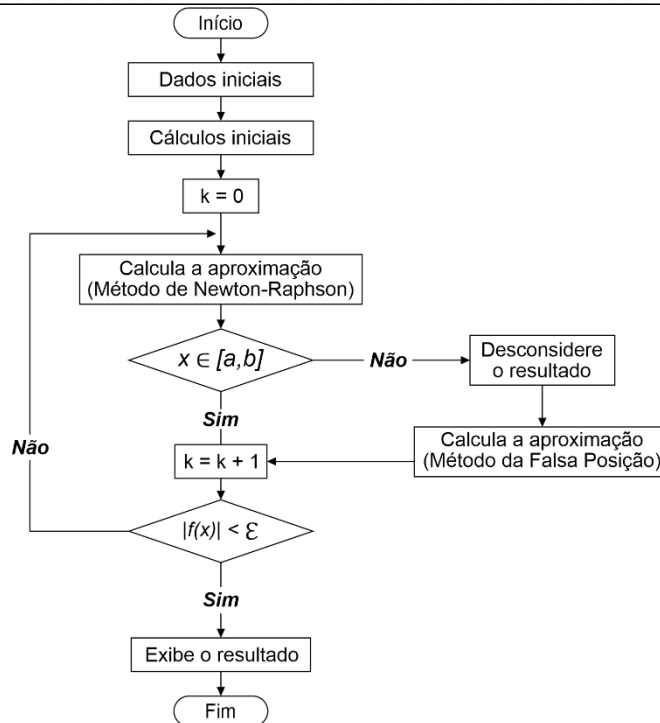


Figura 6. Fluxograma método híbrido 2 [Autoria própria].

3. METODOLOGIA

Com a finalidade de propor um método competitivo em comparação com aqueles que já foram discutidos ao longo de nossos estudos, é explorado a proposição de dois métodos híbridos. Estes métodos são baseados nos princípios dos métodos da Falsa Posição, descrita ao longo do tópico 2.2.1 e do método de Newton-Raphson, também descrito no item 2.2.2, empregam uma lógica distinta para abordar questões específicas.

A fim de justificar o empenho na pesquisa para o desenvolvimento de uma abordagem de hibridização que se diferencia do método misto, é relevante ressaltar que, como indicado por [5], o método misto se apoia na intercalação coordenada de métodos, com o propósito de alcançar a convergência. No entanto, em uma análise detalhada das características inerentes ao método misto e de suas bases teóricas revelou que, apesar de ser uma proposta voltada para otimizar a estratégia de refinamento de funções, ele demonstra instabilidades de convergência em circunstâncias específicas.

O método de Newton-Raphson exibe uma boa capacidade de convergência, tanto em termos de tempo quanto de número de iterações. Embora essa abordagem demonstre eficiência em muitos cenários, observou-se que, em casos específicos analisados, o método pode ultrapassar o limite do intervalo de busca. Mesmo que essa raiz exista na função, ela não satisfaz o resultado desejado por não estar contida no intervalo de estudo, destacando assim a importância de compreender os cenários em que o método de Newton-Raphson pode apresentar limitações.

Olhando por outra perspectiva, ao analisar o método da Falsa Posição, descrito na Equação (1), seus cálculos se mantêm dentro do intervalo desejado para o estudo. Baseando-se nessa abordagem, o método demonstra consistência na obtenção de resultados satisfatórios. Tais argumentos justificam a importância do método misto por ter pontos que ajudam na convergência para a raiz, ao passo que ele também condiciona as desvantagens de cada método.

3.1 Parâmetros de comparação

A implementação computacional, fundamental para a realização deste estudo, é intrinsecamente dependente do desempenho eficaz de cada método analisado. Com esse propósito em mente, optou-se por submeter cinco equações ao processamento, empregando os métodos discutidos neste estudo: Falsa Posição, Newton-Raphson, Método Misto, além de duas hibridizações que fazem parte do objetivo de estudo. Por meio dessa abordagem, é conveniente listar alguns parâmetros que nortear a análise dos resultados, tais como: a raiz aproximada (x), valor da raiz aproximada a função ($f(x)$), número de iterações (Iter.), quantidade de iterações ignoradas (Iter (I)) para os métodos híbridos 1 e 2, além do tempo de processamento. Com isso, visamos determinar e comparar a eficiência e eficácia relativa das estratégias de refinamento entre si. Esse processo permitirá avaliar a competitividade dessas estratégias no contexto da implementação computacional, fornecendo uma compreensão mais abrangente de suas capacidades e limitações.

A exemplo do estudo, podemos observar cinco equações abaixo que serão submetidas a implementação computacional por meio de cada metodologia descrita para aproximação de raízes de função.

$$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0, \in [0; 3] \quad (4)$$

$$f_2(x) = x^5 + 2x^4 - 9x^3 + 22x^2 + 4x - 24 = 0, \in [0; 5] \quad (5)$$

$$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0, \in [-5; 5] \quad (6)$$

$$f_4(x) = \sin(x) \cdot x + 4 = 0, \in [1; 5] \quad (7)$$

$$f_5(x) = x \cdot e^{(-x)} - 0,1 = 0, \in [0,5; 5] \quad (8)$$

3.2 Ambiente computacional

Para realizar a execução dos métodos, as equações citadas foram implementadas no Software Spyder 5.4.3, por meio do Anaconda Navigator e utilizando a linguagem Python 3.9.13. Como processador contamos com um Intel(R) Core(TM) i5-8250U CPU 1.80 GHz, contando com 8Gb de memória RAM, SSD 256Gb NVME e utilizando como ambiente computacional o *Microsoft Windows 11* de 64bits. Para todas as estratégias foi utilizado os mesmos critérios de parada, bem como precisão de $\varepsilon = 10^{-6}$ e o número máximo de 500 iterações, sendo também adotado para os problemas descritos pelas equações 4, 5, 6 e 7, o x_0 como sendo o ponto médio do intervalo. Para a problemática descrita pela equação 8 foi utilizado um $x_0 = 0.9$ com finalidade de exemplificar o comportamento dos métodos quando submetidos a condições especiais. Para cálculos de derivadas usamos a derivação numérica com $h = 10^{-6}$.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

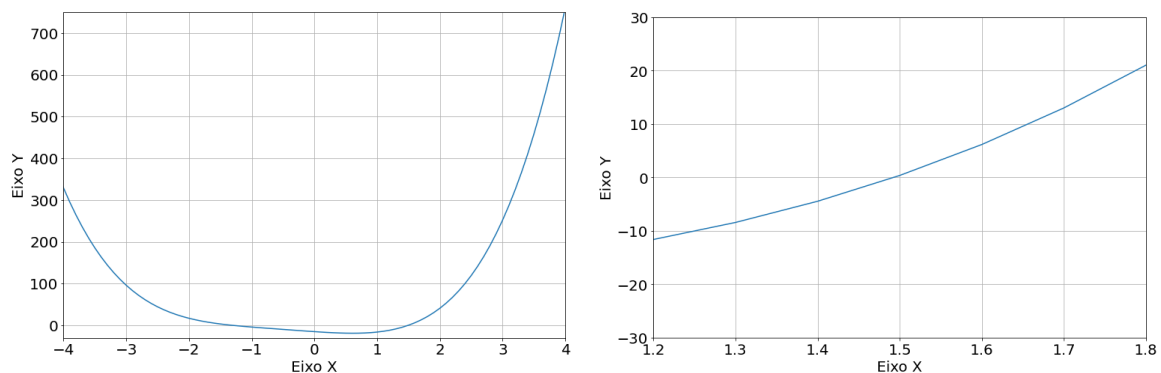


Figura 7. Comportamento da função $f_1(x)$ (4) [Autoria Própria].

Tabela 1 – Resultado da implementação computacional da função (4)

$f_1(x) = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 10x - 15 = 0, x \in [0; 3]$						
Método	x	$f(x)$	Iter.	Iter.(I)	Tempo	Resultado
Falsa Posição	1,492878	$-8,338556 \times 10^{-7}$	53	-	$8,19 \times 10^{-4}$	Convergiu
Newton-Raphson	1,492878	$1,022629 \times 10^{-7}$	2	-	$5,27 \times 10^{-7}$	Convergiu
Misto	-1,300384	$2,059525 \times 10^{-5}$	7	-	$6,16 \times 10^{-4}$	Não convergiu
Híbrido 1	1,492878	$1,421085 \times 10^{-13}$	18	4	$8,59 \times 10^{-4}$	Convergiu
Híbrido 2	1,492878	$1,022629 \times 10^{-7}$	2	0	$3,88 \times 10^{-4}$	Convergiu

A primeira implementação computacional, abordando a problemática descrita na Equação (4), apresentou, em sua maioria, resultados satisfatórios. É importante ressaltar que o método misto não convergiu para a raiz desejada dentro do intervalo. Esse comportamento pode ser justificado pelo fato de que, no método de Newton-Raphson contido dentro da estratégia, obtivemos um resultado fora do intervalo estabelecido para análise o que, devido seu funcionamento e ausência de uma verificação do intervalo enquanto o método da Falsa Posição deu continuidade as iterações, causando a insatisfação dos resultados. Esse equívoco foi motivo de erros subsequentes, afetando a qualidade dos resultados processados pelo algoritmo e introduzindo erros nas iterações, algo que provou ser corrigido por meio das estratégias híbridas 1 e 2.

Por outro lado, destacaram-se como estratégias eficazes os métodos da Falsa Posição, Newton-Raphson e os métodos híbridos 1 e 2 propostos neste estudo. A eficácia desses métodos está relacionada à capacidade de encontrar a raiz da função $f_1(x)$ de forma adequada, independentemente de outros parâmetros de análise. No entanto, merecem destaque o método de Newton-Raphson e o método híbrido 2, que não apenas atingiram o objetivo desejado, mas o fizeram com um menor número de iterações, aproximando $f_1(x)$ mais rapidamente de

zero e, assim, garantindo maior precisão. Além disso, esses métodos demonstraram excelentes resultados em termos de eficiência de tempo.

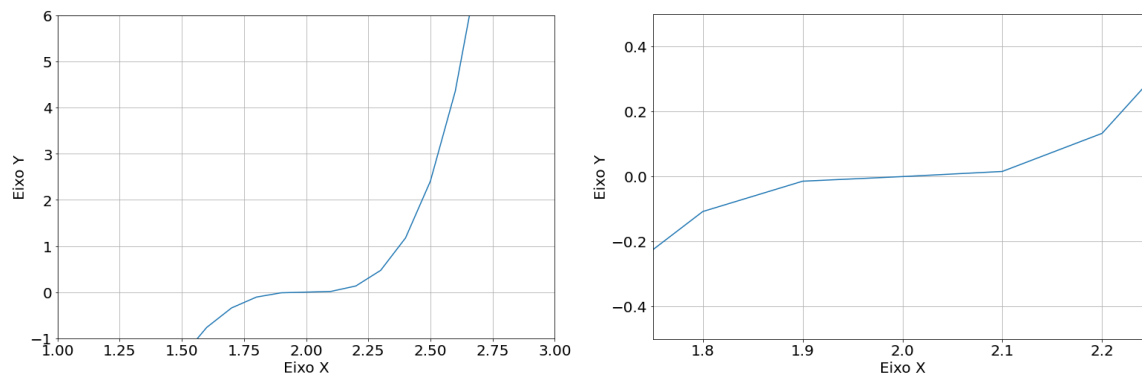


Figura 8. Comportamento da função $f_2(x)$ (5) [Autoria Própria].

Tabela 2 – Resultado da implementação computacional da função (5)

$f_2(x)=x^5-2x^4-9x^3+22x^2+4x-24=0, x \in [0;5]$						
Método	x	f(x)	Iter.	Iter.(I)	Tempo	Resultado
Falsa Posição	1,823557	-0,074812	500	-	$1,77 \times 10^{-2}$	Não convergiu
Newton-Raphson	2,002901	$3,668041 \times 10^{-7}$	13	-	$2,50 \times 10^{-4}$	Convergiu
Misto	1,995324	$-1,529128 \times 10^{-6}$	26	-	$1,89 \times 10^{-3}$	Convergiu
Híbrido 1	1,996261	$-7,824707 \times 10^{-7}$	26	0	$3,30 \times 10^{-3}$	Convergiu
Híbrido 2	2,002901	$3,668041 \times 10^{-7}$	13	0	$3,70 \times 10^{-4}$	Convergiu

Na análise da problemática apresentada pela Equação (5), os resultados obtidos demonstraram-se satisfatórios ao considerarmos a convergência para a raiz da função. Entre os métodos avaliados, o método de Newton-Raphson, o método misto e os métodos híbridos 1 e 2 se destacaram como eficientes. No entanto, vale ressaltar que o Método da Falsa Posição, mostrou-se ineficiente por não ter obtido convergência, mesmo utilizando do máximo de iterações possíveis.

Além disso, da mesma forma que na primeira problemática abordada, é relevante destacar que os Métodos de Newton-Raphson e Híbrido 2 se mostraram eficazes, alcançando valores próximos a raiz da função em menos tempo e com menor número de iterações. Os métodos híbridos 1 e 2 não apresentaram iterações ignoradas (Iter. I), o que também contribuiu para uma convergência mais rápida.

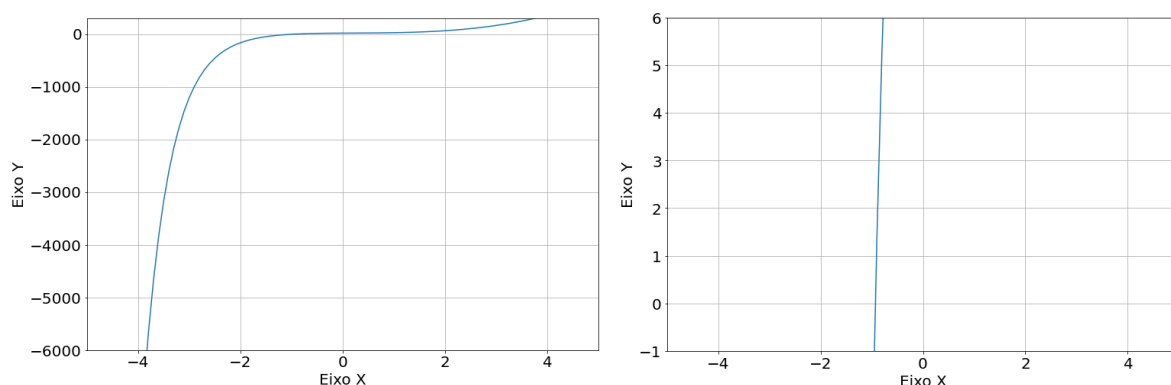


Figura 9. Comportamento da função $f_3(x)$ (6) [Autoria Própria].

Tabela 3 – Resultado da implementação computacional da função (6)

$f_3(x) = 5x^3 + x^2 - e^{1-2x} + \cos(x) + 20 = 0, x \in [-5;5]$						
Método	x	f(x)	Iter.	Iter. (I)	Tempo	Resultado
Falsa Posição	0,698715	22,287400	500	-	$2,17 \times 10^{-2}$	Não convergiu
Newton-Raphson	-0,929560	$8,732570 \times 10^{-12}$	10	-	$2,23 \times 10^{-4}$	Convergiu
Misto	-0,929556	$1,827024 \times 10^{-4}$	14	-	$1,70 \times 10^{-3}$	Convergiu
Híbrido 1	-0,929560	$-3,310841 \times 10^{-9}$	14	0	$1,74 \times 10^{-3}$	Convergiu
Híbrido 2	-0,929560	$8,732570 \times 10^{-12}$	10	0	$6,86 \times 10^{-4}$	Convergiu

Ao abordar a problemática apresentada pela Equação (6), observamos que a maioria dos métodos empregados obteve resultados satisfatórios ao avaliarmos a convergência. Portanto, considerando os métodos de Newton-Raphson, misto e os métodos híbridos 1 e 2 como eficientes, é evidente que esses métodos alcançaram resultados notáveis dentro da precisão estabelecida, aproximando x de maneira significativa à raiz da função. Isso reflete a confiabilidade desses métodos e ressalta a competitividade entre eles. No entanto, por outro lado, o método da falsa posição não conseguiu convergir para a raiz da função uma vez ultrapassando o número de iterações estabelecida e não sendo eficiente no seu processo.

Entre os métodos eficientes, é válido destacar que, de forma semelhante às problemáticas anteriores, os métodos de Newton-Raphson e o método híbrido 2 demonstraram eficácia na busca pela convergência em direção à raiz da função, aproximando o valor de x da função $f(x)$ ao zero e obtendo resultados satisfatórios em termos de iterações e tempo de processamento. No geral, ao avaliar a competição entre esses dois métodos, podemos afirmar que o Método Híbrido 2 proposto apresentou resultados satisfatórios, com exceção de um ligeiro atraso no tempo de processamento, justificado pela maior complexidade do algoritmo.

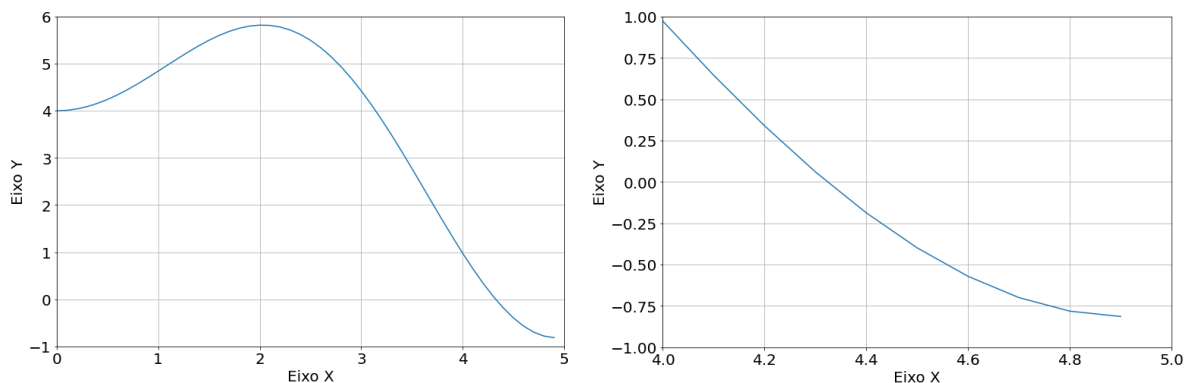


Figura 10. Comportamento da função $f_4(x)$ (7) [Autoria Própria].

Tabela 4 – Resultado da implementação computacional da função (7)

$f_4(x) = \sin(x) \cdot x + 4 = 0, x \in [1;5]$						
Método	x	$f(x)$	Iter.	Iter.(I)	Tempo	Resultado
Falsa Posição	4,323239	$-8,054490 \times 10^{-7}$	6	-	$1,80 \times 10^{-4}$	Convergiu
Newton-Raphson	4,323239	$1,923705 \times 10^{-11}$	5	-	$2,06 \times 10^{-5}$	Convergiu
Misto	4,323239	$5,660835 \times 10^{-7}$	5	-	$4,12 \times 10^{-4}$	Convergiu
Híbrido 1	4,323239	$-5,978852 \times 10^{-10}$	5	0	$4,74 \times 10^{-4}$	Convergiu
Híbrido 2	4,323239	$1,923705 \times 10^{-11}$	5	0	$3,58 \times 10^{-4}$	Convergiu

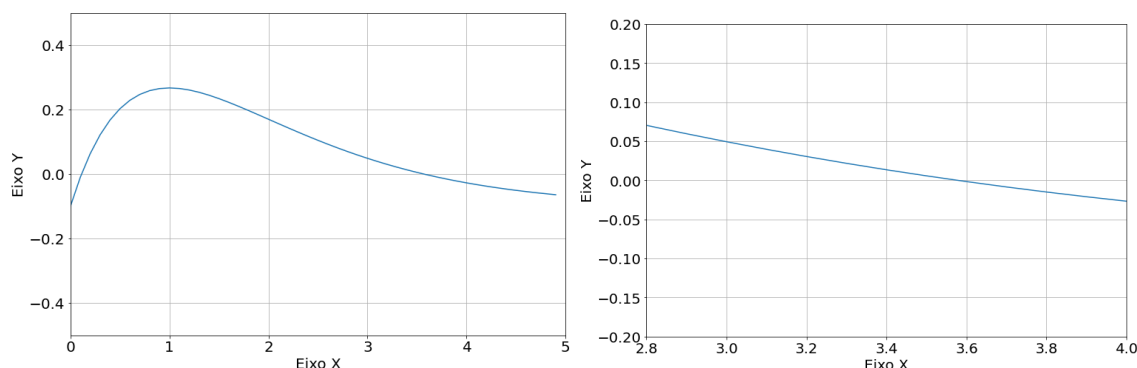


Figura 11. Comportamento da função $f_5(x)$ (8) [Autoria Própria].

Tabela 4 – Resultado da implementação computacional da função (8)

$f_5(x) = x \cdot e^{(-x)} - 0,1 = 0, x \in [0,5;5], x_0=0.9$						
Método	x	$f(x)$	Iter.	Iter.(I)	Tempo	Resultado
Falsa Posição	3,577152	$-1,800386 \times 10^{-8}$	4	-	$1,62 \times 10^{-4}$	Convergiu
Newton-Raphson	0,111832	$-6,350020 \times 10^{-11}$	13	-	$3,94 \times 10^{-5}$	Não convergiu
Misto	3,578890	$-1,251541 \times 10^{-4}$	4	-	$1,70 \times 10^{-4}$	Convergiu
Híbrido 1	3,577148	$2,673752 \times 10^{-7}$	4	0	$1,57 \times 10^{-4}$	Convergiu
Híbrido 2	3,577152	$2,762170 \times 10^{-9}$	4	1	$1,22 \times 10^{-4}$	Convergiu

Na problemática da Equação (8), a fim de destacar as condições em que o método de Newton-Raphson não se mostra eficaz, foi deliberadamente escolhido um intervalo mais amplo na função em questão. Isso permitiu observar a presença de um ponto de máximo e uma mudança no comportamento da função, que, teoricamente, poderiam dificultar o processo de convergência do método em análise. Após a implementação e execução do problema proposto, é notável que os resultados obtidos foram satisfatórios frente essas condições desafiadoras de convergência.

Conforme o esperado, o método de Newton-Raphson extrapolou o intervalo tabelado e convergiu para uma raiz que, embora exista, não está contida dentro do intervalo de estudo. Essa ineficiência se deve à mudança de comportamento da função em relação à sua derivada, incompatibilidade que reflete nos resultados de x , $f(x)$ e no número de iterações, que foi 325% maior quando comparação aos demais métodos.

Por outro lado, em relação às estratégias que se mostraram eficientes, os métodos da falsa posição e o método misto demonstraram competitividade, produzindo resultados próximos em termos de x , $f(x)$, iterações e tempo. Os melhores padrões de comportamento foram dos métodos híbridos 1 e 2 propostos, nesse contexto, o método híbrido 2 se destaca por oferecer os valores mais favoráveis em termos de x , $f(x)$, iterações e tempo. Destaca-se que em uma de suas iterações, um resultado foi ignorado, ressaltando o seu funcionamento, conforme esperado.

Foi possível observar que método de Newton-Raphson, em sua primeira iteração, partindo do valor inicial $x_0=0.9$, convergiu para fora do intervalo estabelecido. Com isso, as iterações subsequentes utilizaram um valor inadequado e convergiram para a raiz da função fora do intervalo. Em contrapartida, o método proposto na segunda hibridização foi capaz de identificar o erro gerado pelo método de Newton-Raphson e o desconsiderou. Dessa forma, não atualizou o intervalo e optou pelo método da Falsa Posição para realizar a correção e convergência e, daquele ponto em diante, o procedimento apresentou resultados apropriados convergindo para a raiz da função.

Considerando o experimento, o método híbrido 2 mostrou ser altamente eficaz na determinação de zeros de função, destacando-se por sua capacidade de corrigir erros de métodos anteriores, adaptar-se a desafios e fornecer resultados precisos. Em comparação com o método de Newton-Raphson, o método híbrido 2 superou suas limitações, sendo capaz de lidar com situações em que o Newton-Raphson falhou, tornando-se uma escolha valiosa em aplicações práticas que envolvem funções complexas e cenários difíceis de convergência.

5. CONCLUSÃO

Com base nos estudos realizados, fica claro que os métodos numéricos possuem características distintas, embora compartilhem do objetivo em comum de aproximar o intervalo para a raiz da função expressando um valor estritamente próximo. No entanto, a eficiência e eficácia dessas estratégias varia, e é possível identificar abordagens que se destacam em termos de desempenho. Portanto, podemos concluir que a apresentação de duas alternativas de métodos híbridos se mostrou relevante, especialmente ao compará-las a outros métodos convencionais. Essas estratégias, mesmo partindo de implementações computacionais simples, apresentam êxito no funcionamento, fornecendo resultados satisfatórios.

No entanto, identificamos algumas inconformidades em sua aplicação, principalmente no primeiro método híbrido, que possui limitações relacionadas ao tempo e ao número de iterações, muitas vezes causadas pela execução desnecessária do método da falsa posição, incluído na hibridização. Similarmente, o segundo método híbrido se mostrou competitivo em comparação com o Método de Newton-Raphson, obtendo resultados comparáveis e, em certos casos, mais otimizados.

Portanto, este trabalho, possui uma relevância significativa para a comunidade acadêmica, abrindo novas possibilidades no desenvolvimento de estratégias de refinamento distintas que buscam atingir objetivos tão claros quanto as metodologias convencionais encontradas na literatura. Como forma de atestar tal importância, uma primeira versão do método misto foi apresentada no Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC) de 2023, destacando sua contribuição para o avanço na área de métodos numéricos e análise computacional. Além disso, ressaltando aplicações futuras no âmbito de questões que tratem sobre as condições e limites para o uso de estruturas protendidas ou convencionais, tão como o dimensionamento das flexas dessas estruturas que são problemas ligados a engenharia civil.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FRANCO, Neide Bertoldi. Cálculo Numérico - Ed. Única – São Paulo: Pearson, 2006.
- [2] AQUINO, Francisco J. A. Tópicos de métodos numéricos com Scilab – 1ª Ed. – Rio de Janeiro: PoD, 2020.
- [3] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais – 1ª Ed. – São Paulo: Pearson Makron Books, 1997.
- [4] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. Métodos Numéricos para Engenharia – 5ª Ed. – Porto Alegre: AMGH, 2011
- [5] SANCHES, Ionildo José. Métodos Numéricos - Dissertação de mestrado. UFPR, 2007.
- [6] STEWART, James; ROMO, Jorge Humberto. cálculo. Cengage Learning, 2017.
- [6] BORCHE, Alejandro. Métodos Numéricos. Editora UFRGS, Porto Alegre, 2008.
- [7] R.R.J. Ribeiro. “Métodos numéricos para aproximação de raízes de funções” CMAC Nordeste, 2012.