



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Carlos Alberto Soares de Souza Filho

Estudo da Flambagem de Colunas Através de Rotina Computacional

ANGICOS

2025

Carlos Alberto Soares de Souza Filho

Estudo da Flambagem de Colunas Através de Rotina Computacional

Monografia apresentado ao curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Orientador(a): Prof^a. Dr^a Núbia Alves de Souza Nogueira

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S729e Souza Filho, Carlos Alberto Soare de .
Estudo da Flambagem de Coluna Atavés de Rotina
Computacional / Carlos Alberto Soare de Souza
Filho. - 2025.
32 f. : il.

Orientadora: Núbia Alves de Souza Nogueira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2025.

1. Flambagem. 2. Python. 3. Ferramenta
computacional. 4. Carga crítica. I. Nogueira,
Núbia Alves de Souza , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo) autor(a).

Biblioteca Campus Angicos
Bibliotecário: Helder Romero Maia Duarte
CRB: 15/673

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

Carlos Alberto Soares de Souza Filho

Estudo da Flambagem de Colunas Através de Rotina Computacional

Monografia apresentada ao curso de Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Defendida em: 16/12/2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br NUBIA ALVES DE SOUZA NOGUEIRA
Data: 22/12/2025 09:45:00-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Núbia Alves de Souza Nogueira, Prof.^a. Dr.^a. (UFERSA)
Presidenta

Documento assinado digitalmente
gov.br JOSELITO MEDEIROS DE FREITAS CAVALCANTE
Data: 21/12/2025 10:30:51-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Joselito Medeiros de Freitas Cavalcante, Prof. Dr. (UFERSA)
Membro Examinador

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO VIEIRA DE OLIVEIRA
Data: 21/12/2025 10:36:57-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Francisco Vieira de Oliveira, Prof. Dr. (UFERSA) Membro
Examinador

DEDICATÓRIA

Dedico a minha família, meu pai e minha mãe, aos meus avós Maria Salete e Saturnino Moreira (Seu Birico).

Ainda olhando e torcendo por mim de onde estiver presente.

AGRADECIMENTOS

Agradecer primeiramente a Deus, por me fortalecer, iluminar meus caminhos e por ter permitido que eu chegue até o dia de hoje. Mesmo diante que de grandes desafios que surgiram na minha vida acadêmica e profissional.

Expresso essa gratidão a minha família, Carleandra e Cesar, minha Vó Salete e meu tio Diego (Dede) por nunca terem descreditado do meu potencial e por ter oferecido apoio incondicional em cada etapa desta caminhada. A minha Tia Graça (Neném) por ser uma pessoa em que possa sempre está me espelhando com sua trajetória de vida. A todos deixo meu sincero reconhecimento por todo amor, dedicação, incentivo e por nunca medirem esforços para que eu pudesse alcançar meus objetivos.

Aos meus amigos, Alerson Fabricio e Daniel Alexandre com quem jogo para aliviar o estresse e tonar o curso menos doloroso e minha amiga Dayzi Valkiria que esteve do meu lado desde o começo do curso presente nos momentos de dúvidas, cansaço e insegurança, oferecendo conversas leves, me escutando e me fazendo rir tornando essa caminhada mais leve. Ao meu amigo Everton Venancio por ter ajudado a tomar decisões que estavam além da do que eu poderia enxergar.

Manifesto também meu agradecimento as minhas professoras de orientação, Marcilene e Núbia que com toda paciência e generosidade contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a banca pela disponibilidade, pelas observações valiosas e pelas contribuições que enriqueceram este trabalho. A todos que, de alguma forma, fizeram parte desta trajetória, deixo registrado meu mais profundo agradecimento.

RESUMO

O estudo de flambagem em elementos estruturais esbeltos é essencial no estudo da resistência dos materiais, pois trata da determinação do comportamento desses elementos quando submetidos a cargas axiais de compressão. Em algumas situações de projeto, essa carga axial provoca instabilidade nesses elementos e faz-se necessário a obtenção de uma carga, denominada de carga crítica de flambagem. Sua obtenção é baseada na Equação de Euler. Essa obtenção analítica é considerada um processo trabalhoso, onde qualquer resultado fora do padrão já geraria uma demanda a ser refeita. A metodologia abordada neste trabalho consiste no desenvolvimento de uma rotina computacional com entradas de dados, processamento de cálculos de acordo com o modelo matemático de Euler, contendo apresentação de gráficos e tabelas para comparação de materiais, utilizando a linguagem de programação Python e auxílio de bibliotecas específicas como NumPy, Streamlit e Plotly e com um banco de dados local utilizando o SQLite para busca de apuramentos anteriores. Como diferencial, essa rotina computacional como ferramenta simples e prática busca somar ao aprendizado e reduzir erros. Espera-se que a ferramenta contribua para atividades e torne o estudo da flambagem mais fácil à comunidade acadêmica. Para além disso, o Python tem se mostrado uma ferramenta bastante utilizada em análise de estruturas.

Palavras-chave: Flambagem; Python; Ferramenta computacional; Carga crítica.

ABSTRACT

The study of buckling in slender structural elements is essential in the study of strength of materials, as it deals with determining the behavior of these elements when subjected to axial compression loads. In some design situations, this axial load causes instability in these elements and it becomes necessary to obtain a load called the critical buckling load. Its determination is based on Euler's Equation. This analytical determination is considered a laborious process, in which any result outside the expected pattern would already generate a need for the procedure to be redone. The methodology addressed in this work consists of developing a computational routine with data input, calculation processing according to the Euler mathematical model, including the presentation of graphs and tables for material comparison, using the Python programming language and the support of specific libraries such as NumPy, Streamlit and Plotly, and with a local database using SQLite to retrieve previous records. As a differential, this computational routine, as a simple and practical tool, seeks to contribute to learning and reduce errors. It is expected that the tool will contribute to activities and make the study of buckling easier for the academic community. Furthermore, Python has proven to be a tool widely used in structural analysis.

Keywords: Buckling; Python; Computational tool; Critical load.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2. 1- COLUNA EM ESTADO DE FLAMBAGEM.....	16
FIGURA 2. 2 – COMPOSTO ORIGINAL E FLEXIONADO LATERALMENTE APÓS A APLICAÇÃO DA CARGA.....	16
FIGURA 4. 1 - INTERFACE PRÉ DEFINIDAS COM SEÇÃO RETANGULAR COM VALORES PRÉ DEFINIDOS PARA A VISUALIZAÇÃO E ORIENTAÇÃO	21
FIGURA 4. 2– RESULTADOS EM QUE AS COLUNAS FORAM SUBMETIDAS.....	21
FIGURA 4. 3 – COLUNA DO PROBLEMA 10.15.....	22
FIGURA 4. 4 – ÁREA INICIAL DA ROTINA COMPUTACIONAL COM OS DADOS JÁ FORNECIDOS PARA A RESOLUÇÃO DESTE PROBLEMA.....	25
FIGURA 4. 5– RESULTADOS FORNECIDOS PELA ROTINA COMPUTACIONAL QUANDO SIMULADO	26
FIGURA 5. 1 - COLUNA DO PROBLEMA PF13.1.....	27
FIGURA 5. 2– INTERFACE DA ROTINA COMPUTACIONAL COM OS DADOS INSERIDOS PARA DESENVOLVER O PROBLEMA PF13.1	28
FIGURA 5. 3 – RESULTADOS FORNECIDOS PELA ROTINA COMPUTACIONAL SOBRE O PROBLEMA PF13.1	28
FIGURA 5. 4 – EXEMPLOS DE UM PILAR ENGASTADO-ENGASTADO DO PROBLEMA 13.2	29
FIGURA 5. 5 – INTERFACE DA ROTINA COMPUTACIONAL COM OS DADOS INSERIDOS PARA DESENVOLVER O PROBLEMA PF13.2	30
FIGURA 5. 6 – RESULTADOS FORNECIDOS PELA ROTINA COMPUTACIONAL SOBRE O PROBLEMA PF13.1	30

LISTA DE TABELAS

TABELA 1– DADOS DE ENTRADAS FORNECIDOS PELO MATERIAL E CONVERTIDO PELO AUTOR PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.	23
TABELA 2– COMPARAÇÃO DE RESULTADOS OBTIDOS POR AMBOS OS METODOS	26
TABELA 3 – RESPECTIVOS RESULTADOS FORNECIDOS PELA ROTINA COMPUTACIONAL EM COMPARAÇÃO COM OUTROS MATERIAIS SOBRE O EXERCICIO PF 13.1	28
TABELA 4– RESULTADOS PARA AMBOS AO MATERIAS QUE SE PODE CALCULAR E COMPARAR NA ROTINA COPUTACIONAL.....	30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Pcr	Carga Critica
FS	Fator de Segurança

LISTA DE SÍMBOLOS

δ	Deformação
σ	Tensão axial (Sigma)
σ_{adm}	Tensão Admissível
$\Delta\Theta$	Teta-ômega

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Objetivos.....	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
2.1 Estabilidade de Estruturas: Fenômeno da Flambagem	15
2.2 Carga Crítica Calculada Através da Equação da Flambagem.....	16
2.3 Fórmula de Euler para colunas bi apoiada.....	18
3 PYTHON Como Ferramenta de Apoio Ao Aprendizado.....	19
3.1 PYTHON: Linguagem de Programação	19
3.2 PYTHON e Engenharia Civil	20
4 METODOLOGIA.....	20
4.1 Simulações com Problemas Reais	20
4.2 Interface	20
4.3 Comparação: Cálculo Analítico versus Rotina Computacional.....	21
4.3.1 Cálculo da área e do momento de inércia.....	23
4.3.2 Cálculo da carga critica de euler e coeficiente de segurança.....	24
4.3.3 Entrada de Dados.....	25
5 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	26
5.1 EXERCÍCIOS	26
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	31
REFERÊNCIAS.....	32

1 INTRODUÇÃO

O estudo da mecânica dos materiais constitui-se uma importante ferramenta de conhecimento, e vem se expandido desde os principais autores clássicos como referências teóricas (Beer e Jhonston, 2010; Hibbeler, 2018) e tem contribuído com o avanço da tecnologia. Nesse contexto, a análise de flambagem em elementos esbeltos é conhecimento essencial na resistência dos materiais, uma vez que possibilita determinar o comportamento desses elementos quando submetidos a cargas axiais de compressão. Alguns parâmetros são importantes para a determinação da carga crítica de flambagem, como o módulo de elasticidade, o momento de inércia e o comprimento efetivo, que determinará o máximo valor de carga axial que uma coluna pode suportar antes de flexionar lateralmente. A determinação da carga crítica de flambagem, baseados na Equação de Euler, considerando o método analítico é um processo demorado e trabalhoso, onde qualquer resultado fora do padrão já geraria um retrabalho. Nesse contexto, o Python se apresenta como uma linguagem de programação moldável e eficaz para projetos de engenharia voltados para modelos computacionais e a visualização do comportamento estrutural, podendo auxiliar em desenvolvimentos de rotinas computacionais para facilitar os processos resolutivos. Para além disso, em relação aos outros métodos tradicionais, o Python se destaca por ser mais preciso e com capacidade de automatização de cálculos complexos, a redução do tempo de resolução e ainda possibilita fazer simulações com diferentes padrões para uma análise do comportamento estruturais mais completa e confiável.

1.1 Objetivos

Desenvolver rotina computacional para determinação da carga crítica de Euler em colunas com cargas concêntricas, utilizando linguagem de programação Python.

1.1.1 Objetivos Específicos:

- Estudar conceitos básicos sobre o comportamento teórico da flambagem em colunas;
- Estudar o Python como ferramenta computacional e sua aplicabilidade na engenharia e especificamente em Mecânica dos Sólidos;

- Desenvolver rotina no Python para determinar a carga crítica em colunas com cargas axiais variando as condições de apoios e fazendo comparações entre diferentes materiais;
- Verificar o comportamento de cargas críticas para seção transversal Retangular, Circular e Perfis em W;
- Apresentar resultados fornecidos por meio da rotina computacional.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Estabilidade de Estruturas: Fenômeno da Flambagem

Na engenharia civil, as colunas são elementos que cuja sua função é transmitir cargas – axiais e em alguns casos de compressão. Quando o esforço é do tipo fletor deve-se garantir que não chegue a uma instabilidade lateral, fenômeno denominado flambagem. Neste caso, de acordo com (HIBBELER, 2018):

Um elemento não deve apenas satisfazer requisitos específicos de resistência e deflexão, mas deve também ser estável. A estabilidade é particularmente importante se o elemento for comprimido e delgado e suporta uma carga de compressão que se torne grande o suficiente para fazer que o elemento sofra deflexão lateral repentina. (Hibbeler, 2018, pg. 570)

Esta instabilidade lateral ocorre no eixo longitudinal da peça, onde é considerado flambagem quando o material que compõe a coluna atingiu à tensão de escoamento. Em situações de colapso total, o comportamento da estrutura não depende apenas da tensão de escoamento, mas de uma análise adequada dos materiais que serão utilizados para a estrutura completa e, especificamente neste caso, do valor do Módulo de Elasticidade (ou Módulo de Young, E).

Para além disso, diversas formas de falhas podem ocorrer em sistemas estruturais quando estão submetidos a cargas mal dimensionadas e/ou quando há uma irregularidade nas condições de apoio, na geometria ou em outros parâmetros estruturais. Portanto, em toda análise deve-se considerar não apenas o tipo de material, mas também garantir que todos os requisitos, como os tipos de apoios, seções transversais, módulo de elasticidade do material sejam atendidos, a fim de garantir estabilidade e segurança.

2.2 Carga Crítica Calculada Através da Equação da Flambagem

Se a área de seção transversal A da coluna é selecionada de maneira que o valor da tensão em uma seção transversal ($\sigma = P/A$) seja menor do que a tensão admissível (σ_{adm}) para o material usado, e se a deformação ($\delta = PL/AE$) estiver dentro das especificações dadas, pode-se inferir que a coluna foi projetada corretamente. No entanto, pode ocorrer que na medida que o carregamento é aplicado, a coluna apresente flambagem (Figura 2.1), em vez de permanecer reta, ela subitamente se curva de maneira acentuada. (Beer, 2011)



Figura 2. 1- Coluna em estado de flambagem
Fonte: Beer, et al. (2011)

Considere a Figura 2.2 (Beer, 2011) composta por duas barras rígidas idênticas conectadas em C por um pino articulado a uma mola de torção de constante K .

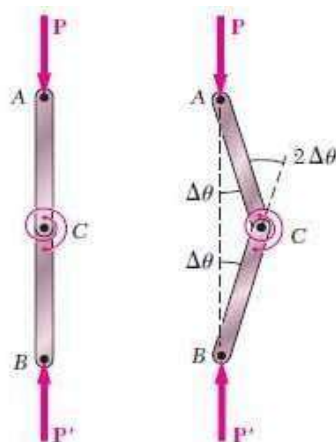


Figura 2. 2 - Composto original e flexionado lateralmente e após a aplicação da carga

Fonte: Beer, et al. (2011)

A estrutura está submetida a uma carga axial P e P' aplicada nas extremidades A e B. Na posição vertical, o sistema se encontra em equilíbrio. Contudo, ao mover ligeiramente para a direita, de maneira que a barra forme um ângulo $\Delta\theta$ com a vertical. A estabilidade inicial depende do momento da carga axial aplicado na mola e da força restauradora que ela possui, o momento devido a carga pode ser descrito como:

$$M_p = P \frac{L}{2} \text{Sen}(\theta)$$

Esse momento possui capacidade de aumentar o deslocamento inicial, afastando todo o sistema da posição inicial. Para além disso, o momento de torção da mola é dada por:

$$M_k = K(2\theta)$$

Uma vez que a rotação total da mola K corresponde a 2θ . Esse momento atua para restaurar o equilíbrio vertical da coluna. Portanto, a condição para ocorrer a estabilidade é a igualdade das forças momentos:

$$M_k = M_p$$

Substituindo as duas expressões pelo momento devido a carga e o momento de torção da mola, obtém-se:

$$K(2\theta) = P \frac{L}{2} \text{Sen}(\theta)$$

Fazendo os devidos ajustes, obtém-se a Equação da Carga Crítica de Flambagem:

$$P_{cr} = \frac{4K}{L}$$

Contudo, pode-se interpretar os resultados como:

- Para $P < P_{cr}$ o sistema está em situação estável, onde retornará a sua posição inicial após um deslocamento curto.
- Para $P = P_{cr}$ o sistema está em ponto de equilíbrio em diversas possibilidades de posição.

- Para $P > P_{cr}$ o sistema está em condição de flambagem, qualquer deslocamento leva a coluna a deflexão lateral maior.

2.3 Fórmula de Euler para colunas bi apoiado

O modelo da equação de deflexão lateral foi uma base para Euler prever a flambagem em elementos comprimido. Utilizando uma coluna esbelta, bi apoiada e submetida a uma carga axial (compressão) centrada, podendo ser tratada pela teoria do equilíbrio utilizando o momento fletor devido a força que causa um deslocamento lateral.

$$M = -py$$

O sinal negativo indica que a coluna vai flexionar lateralmente. Pela teoria de pequenas flexões, tem-se:

$$M = EI \frac{d^2y}{dx^2}$$

Ao igualar as equações de deslocamento lateral e teoria de pequenas flexões resulta em uma equação diferencial homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$$

Dividindo-se por EI para definir a constante P e reescrevendo a equação padrão:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$$

O menor valor que determina a primeira instabilidade, ou seja, a mais crítica é denominada Carga Crítica de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(k \cdot L)^2}$$

Essa carga inicial corresponde a flambagem. Contudo, está dedução assume comportamento elástico linear, pequenas deflexões laterais, geometria inicial perfeita e carregamento no ponto central. Colunas com diferentes tipos de apoios podem ser interpretadas com diferentes valores para a constante K :

- Biarticulada: $K = L$
- Biengastada: $K = L/2$
- Engastada – Livre: $K = 2L$
- Engastada – Articulada: $K = 0,7L$

3 PYTHON Como Ferramenta de Apoio Ao Aprendizado

Este tópico apresenta uma curta história sobre o Python e suas bibliotecas de pacotes utilizadas na construção do código. Posteriormente é apresentado como o PYTHON está inscrito em diversas áreas de atuação engenharia civil.

3.1 PYTHON: Linguagem de Programação

A linguagem de programação Python teve seu desenvolvimento no final da década de 80 pelo seu criador Guido Van Rossun, sendo oficialmente lançado em 1991 pelo Centro de Wiskunde & Informática – CWI (Instituto Nacional de Pesquisa para Matemática e Ciência da Computação), na Holanda.

Além de ter sua estrutura de código-aberta que permite aos usuários incorporar pacotes adicionais importantes para agilidade, praticidade e versatilidade. Portanto, este trabalho, além de utilizaremos PYTHON e pacotes específicas por velocidade, praticidade e versatilidade.

Para a construção desse código foi utilizados quatros pacotes de auxílio, dentre eles o Numpy, uma biblioteca voltada para cálculos numéricos e manipulação de grandes volumes de arrays (vetores e matrizes). O Pandas para análise e manipulação de dados tabulares (filtrar, agrupar, organizar e tratar dados). O Streamlit que além de criar aplicativos com interação de dados foi o maior facilitador para a criação da interface web. O Plotly no sentido de produzir gráficos em 2D e integrar a visualização com o Streamlit.

Para além disso, a estrutura foi desenvolvida da forma mais simples possível, utilizando o Visual Studio Code (VSCODE), aplicativo que serviu de console a fim de ser compressível, onde permite inserir o código-fonte que irá servir para o estudo da análise estrutural.

3.2 PYTHON e Engenharia Civil

As aplicações de PYTHON na engenharia civil incluem desde a criar um software utilizando ensaio em SPT (Standard Penetration Test) com um banco de dados com relatório e sondagens passadas para auxiliar empresas sobre o solo local. Também fazer análises de risco dos custos de um projeto de obra civil e ainda criar um código fonte para realizar cálculos de pórticos tridimensionais.

Dessa forma, o uso de tal ferramenta não se limita apenas a programação, mas de forma que podemos utiliza-lo como instrumento lúdico na aprendizagem. Portanto, o PYTHON destaca-se por sua simplicidade, versatilidade e rapidez dentro da comunidade acadêmica, onde muitos profissionais podem se beneficiar desse recurso.

4 METODOLOGIA

4.1 Simulações com Problemas Reais

Com o objetivo de testar a rotina computacional e sua interface, foram escolhidos na literatura exemplos padrões, os quais foram resolvidos analiticamente e o resultado foi comparado com os valores fornecidos pela rotina computacional. Essa análise foi feita considerando o comportamento para diferentes materiais, como alumínio, aço e alvenaria estrutural.

4.2 Interface

Para obtenção do valor da carga critica de flambagem, alguns estágios são necessários (Figura 4.1):

- Escolher o tipo de seção que deseja;
- Escrever o diâmetro da seção e o comprimento, em metros;
- Inserir a condição de apoio que a coluna se encontra;
- Selecionar o/os material/is que serão utilizados na análise;
- Aplicar a carga aplicada (opcional, afim de curiosidade sobre o coeficiente de segurança).

Figura 4. 1 - Interface pré definidas com seção retangular com valores pré definidos para a visualização e orientação
Fonte: Autoria Própria

Por fim, será apresentado um gráfico de tabela em colunas com a aplicação do Pcr para análise comparativa dos materiais e mostrará uma tabela com resultados mais demorados de se obter (Figura 4.2).



Figura 4. 2– Resultados em que as colunas foram submetidas
Fonte: Autoria Propria (2025)

Esses valores apresentados são respectivos dos dados básicos de 959,5kN no aço com fator de segurança 191,91, 319,8kN no alumínio com fator de segurança de 63,97 e a alvenaria com 68,53kN com fator de segurança de 13,71.

4.3 Comparação: Cálculo Analítico versus Rotina Computacional

Para validação da rotina, considere o exemplo 10.15 do livro de Mecânica dos Materiais de Beer e Johnston (2011) no qual deseja determinar o valor da carga crítica de flambagem da coluna (Figura 4.3).

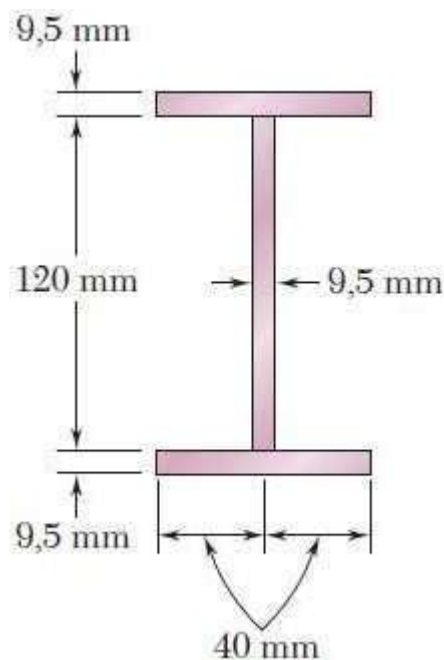


Figura 4.3 – Coluna do Problema 10.15
Fonte: Beer, et al. (2012)

Os dados (Beer, 2012) fornecidos para a simulação apresentam valores de comprimento (L) igual a 6 metros, o módulo de elasticidade (E) equivalente a 200 GPa, uma carga centralizada de 16 kN e seus respectivos valores podem ser encontrados na Figura 4.3. O problema pede para encontrar o valor de coeficiente de segurança à flambagem.

Resolvendo analiticamente, tem-se:

- Cálculo do momento de inércia da seção (eixo forte);
- Cálculo da carga crítica de Euler;
- Coeficiente de segurança (segurança à flambagem).

Antes de tudo é importante colocar todas as unidades de comprimento para o sistema internacional (SI) - Tabela 1.

Símbolo	Nome por Extenso	Valor/Unidade (Dados)	Valor/ Unidade (SI)
b_f	Largura da flange	80mm	0,08m

tf	Espessura da flange	9,5mm	0,0095m
hw	Altura da alma (distância entre as faces internas das flanges)	120mm	0,12m
tw	Espessura da flange	9,5mm	0,0095m

TABELA 1– Dados de entradas fornecidos pelo material e convertido pelo autor para a resolução do problema.
Fonte: Autoria Própria

4.3.1 Cálculo da área e do momento de inércia

Cada flange é apresentado como um retângulo de largura **bf** e espessura **tf**. O momento de inércia de uma flange em torno do seu eixo central é dada por:

$$I_{Centro} = \frac{bf * tf^3}{12}$$

A área da flange é:

$$Af = bf * tf$$

A distância entre o centro geométrico e o centro da flange é:

$$d = \frac{hw}{2} + \frac{tf}{2}$$

Portanto o momento de inercia total de uma flange em relação ao seu eixo neutro é obtido pelo teorema dos eixos paralelos:

$$I_{total} = I_{Centro} + af * d^2$$

A seção geometrica da alma também é um retângulo, de espessura **tw** e altura **hw**. Seu momento de inercia em relação ao eixo neutro horizontal, que passa pelo centro da seção, é dada pela seguinte equação:

$$I_w = \frac{tw * hw^3}{12}$$

Como há duas flanges e uma alma, o momento de inercia total da seção é:

$$I_{total} = 2I_{f_{total}} + I_w$$

Substituindo na equação de momento de inercia todos os termos semelhantes com obtidos através de deduções analíticas correspondentes às suas dimensões das chapas que compõem o perfil, podemos obter:

$$I_{total} = 2 \left[\frac{bt * tf^3}{12} + bf * tf * \left(\frac{hw}{2} + \frac{tf}{2} \right)^2 \right] + \frac{tw * hw^3}{12}$$

Substituindo por seus respectivos valores da Tabela 1, tem-se:

$$I_{total} = 2 \left[\frac{0,08 * 0,0095^3}{12} + (0,08 * 0,0095) * \left(\frac{0,12}{2} + \frac{0,0095}{2} \right)^2 \right] + \frac{0,12 * 0,0095^3}{12}$$

Obtemos o valor de:

$$P_{cr} = 7,75 \times 10^{-6} \text{ m}^4 (\text{valor aproximado})$$

4.3.2 Cálculo da carga crítica de Euler e coeficiente de segurança

Aplicando na Fórmula de Euler apresentado posteriormente na equação da Carga Crítica de Euler, com $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 7,75 \times 10^{-6}$ (valor aproximado), $K = 1$ e $L = 6 \text{ m}$.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (200 * 10^9) * (7,75 * 10^{-6})}{(1 * 6)^2}$$

Obtemo o valor de:

$$P_{cr} = 425 \text{ kN} (\text{valor aproximado})$$

Após encontrar a carga crítica, definimos o coeficiente de segurança a flambagem como a razão entre o valor da carga crítica e o da carga aplicada, logo:

$$FS = \frac{P_{cr}}{P_{aplicado}} = \frac{425 \text{ kN}}{16 \text{ kN}} = 26,6 (\text{valor aproximado})$$

Por fim, com os resultados acima, a coluna tem fator de segurança muito conservador, visto a sua carga de 16 kN.

4.3.3 Entrada de Dados

Deseja-se determinar o valor do coeficiente de segurança da coluna da Figura 4.3 que corresponde a questão 10.13 do livro de Mecânica dos Materiais, (Beer, 2012). Nesse exemplo, a rotina computacional, precisou dos seguintes dados de entradas:

- Valor da base da flange (já que os valores são espelhados, considera-se apenas uma) ;
- Valor da altura da flange ;
- Valor da base da alma ;
- Valor da altura da alma ;
- Valor do comprimento da coluna ;
- Tipo de apoio que a coluna se encontra;
- Selecionar o material, visto que já está configurado o material aço em 200Gpa;
- Valor da carga aplicada em N.

Em seguida, o sistema calcula os momentos de inércia correspondentes a cada passo da flange e da alma. Logo após, é feito o resultado da carga crítica de euler e por fim, o resultado do coeficiente de segurança. Na Figura 4,4 foram inseridos todos os dados e condições e na Figura 4.5 os resultados mostrados no gráfico e em tabela.

FIGURA 4. 4 – Área inicial da rotina computacional com os dados já fornecidos para a resolução deste problema

Fonte: Autoria própria (2025)

O resultado da Carga Crítica de Euler foi fornecido de 424,98 kN com valor de FS de 26,51 pela rotina computacional, que está apresentando na Figura 4.5 foi condizente com o valor da carga crítica obtida analiticamente. Para além disso, a rotina utilizou dos dados numéricos completos sem restrições de casas decimais, enquanto no analítico tem-se margens de erro devido aproximação.



Figura 4. 5– Resultados fornecidos pela rotina computacional quando simulado
Fonte: Autoria própria (2025)

Assim, pode-se fazer uma comparação de ambos os resultados.

Método	Carga Crítica de Euler (kN)	Fator de Segurança
Analiticamente	425	26,6
Rotina computacional	424,08	26,51

TABELA 2– Comparação de resultados obtidos por ambos os metodos
Fonte: Autor Próprio

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta algumas simulações utilizando a rotina computacional realizadas com exemplos presentes na literatura. Para tal, é preciso encontrar a carga crítica, cujo valores são momentos de geometria das seções, módulo de elasticidade e condição que a coluna está inserida.

5.1 EXERCÍCIOS

Será aplicado um exemplo (Hibbeler, 2018) de coluna onde suas extremidades foram engastadas. Usando o problema PF13.1 para realização e teste de comprovação da rotina computacional.



Figura 5. 1 - Coluna do problema PF13.1
Fonte: Autoria Própria

Observando o problema pede-se para encontrar a carga crítica de flambagem ou de Euler, sabendo-se que as suas duas extremidades foram engastada e possui 25mm de diâmetro e tem comprimento de 1,25m. Além disso, foi considerado no problema todos os materiais que temos disponível na rotina computacional.

Neste exemplo, a rotina computacional precisou dos seguintes dados de entrada:

- Escolher o tipo de seção geométrica para análise;
- Diâmetro da seção em m;
- Comprimento da coluna em m;
- Condição de apoio – neste caso é engastada nas duas pontas;
- Carga axial aplicada, como não há carga, não se torna necessário preencher.

Análise de Flambagem com Diferente Tipo de Seção e Material

Geometria da Seção

Tipo de Seção: Circular

Diâmetro da seção (m): 0,2058

Comprimento da Coluna (m): 1,24

Condição de Contorno: Engastado-Engastado

Selecione os materiais para análise: Aço, Alumínio, Alvenaria

Carga Base Aplicada (kN): 100

Figura 5. 2– Interface da rotina computacional com os dados inseridos para desenvolver o problema PF13.1

Fonte: Autoria própria (2025)

Figura 5. 3 – Resultados fornecidos pela rotina computacional sobre o problema PF13.1



Fonte: Autoria própria (2025)

Os resultados das Figuras 5.1 e 5.2 são apresentados na Tabela 3:.

Material	Carga Crítica	Fator de segurança
Aço	101,739kN	----
Alumínio	33,913kN	----
Alvenaria	7,267kN	----

TABELA 3 – Respetivos Resultados fornecidos pela rotina computacional em comparação com outros materiais sobre o exercício PF 13.1

Fonte: Autoria Própria

Observando os valores, pode-se considerar que o material mais resistente com a carga aplicada é o aço, por ter melhores propriedades elásticas.

Outra situação em que pode utilizar a rotina computacional está no exemplo problema fundamental 13.2 (Figura 5.3) da bibliografia de Resistência dos Materiais (HIBBELER, 2018).

O problema pede para determinar a carga crítica se as extremidades estão apoiadas por pino. O material de tipo madeira retangular onde possui comprimento de 3,6m, com comprimento de lados medidos em 100mm e 50mm mostrados na Figura 5.3 .

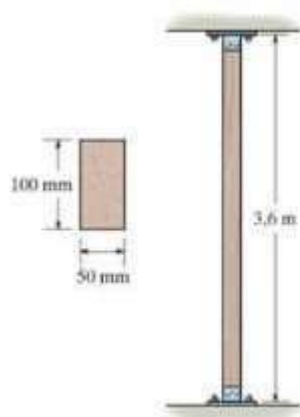


Figura 5. 4 – Exemplos de um pilar engastado-engastado do problema 13.2
Autor: HIBBELER, 2018

Neste exemplo, a rotina computacional necessitou dos seguintes dados de entradas para análise da coluna:

- Escolher o tipo de seção para análise;
- Base da seção, em m;
- Altura da seção, em m;
- Comprimento da coluna, em m;
- Condições de apoio que está inserida;
- Tipo de material, neste caso faremos uma comparativa com os materiais da rotina computacional;
- Carga axial aplicada, como não há carga, não se torna necessário preencher.

Geometria da Seção

Tipo de seção: Retângulo

Base da seção (m): 0,0500

Altura da seção (m): 0,3000

Comprimento da Coluna (m): 3,00

Configuração de Cargas: Desprezado

Selecione os materiais para análise:

Aço Alumínio Alvenaria

Carga Real Aplicada (kN): 0,0

Figura 5. 5 – Interface da rotina computacional com os dados inseridos para desenvolver o problema PF13.2
Fonte: Autoria Própria



Figura 5. 6 – Resultados fornecidos pela rotina computacional sobre o problema PF13.1
Fonte: Autoria própria (2025)

Os resultados obtidos nas Figuras 5.4 e 5.5 são apresentados na Tabela 4..

Materiais	Carga crítica	Fator de Segurança
Aço	666,351kN	----
Alumínio	222,117kN	----
Alvenaria	47,596kN	----

TABELA 4– Resultados para ambos os materiais que se pode calcular e comparar na rotina computacional

Fonte: Autoria Própria

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos numéricos computacionais são ferramentas de enorme importância no estudo da engenharia civil. A rotina computacional mostrou-se eficiente para a determinação das cargas críticas em pilares sobre efeito de flambagem.

Pode-se afirmar que todos os resultados obtidos estão condizentes com os valores esperados. Após a obtenção de dados a própria rotina cria tabelas de colunas para comparação de material, além disso, utilizar fórmulas como momento de inércia o mais rápido possível. Nesse sentido, pode-se afirmar que os objetivos foram alcançados, pois em todas as simulações o valor da carga crítica de flambagem foi capaz de ser determinado.

Logo, é imprescindível que os estudantes de engenharia busquem utilizar tais ferramentas que apresentem resultados consistentes, que sejam capazes de auxiliar a interpretação e assertividade dos dados e comportamento dos gráficos fornecidos.

Para trabalhos futuro, pretende-se tornar essa ferramenta ainda mais completa, aumentando sua capacidade de resolver questões com duas partes diferentes da coluna e envolver-se com cálculo diferencial.

Portanto, pode-se considerar a ferramenta computacional criada em Python um objeto de estudo básico, visto que sua versatilidade está na resolução de problemas da engenharia estrutural.

REFERÊNCIAS

- HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais**. 10. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2018. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- POPOV, E. P. **Introdução à mecânica dos sólidos**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- PORTO, Thiago Bomjardim. **Flambagem em colunas e projeto de pilares**. 2. ed. São Paulo, SP: Oficina de Textos, 2023. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- BRASIL, R. M. L. R. F.; LENZ, W. B.; GÓIS, W. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2015. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- PORTO, Thiago Bomjardim. **Flexão e projeto de vigas**. 2. ed. São Paulo, SP: Oficina de Textos, 2023. E-book. Disponível em: <https://plataforma.bvirtual.com.br>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- COSTA, B. B.; SILVA, A. C. **A Inovação na Gestão Pública: uma análise das práticas inovadoras em órgãos públicos brasileiros**. *Research, Society and Development*, [S. l.], v. 12, n. 11, e2820324478, 2023. Disponível em: <https://rsdjournal.org/rsd/article/view/28203/24478>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- OLIVEIRA, Weibert Araújo. *Desenvolvimento de um programa em Python para análise de vigas pelo método das seções*. Monografia (Graduação) — Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Curso de Engenharia Civil, Caraúbas, RN, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufersa.edu.br/items/4d7c25c3-8bd7-4686-9c7b-d7dee7cc9860>. Acesso em: 30 nov. 2025.
- SANTOS, Dora Letícia Pereira. **Implementação computacional de pórtico tridimensional em linguagem Python**. 2024. 67 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) — Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano, Rio Verde, 2024. Disponível em: <https://repositorio.ifgoiano.edu.br/handle/prefix/4272>. Acesso em: 30 nov. 2024.
- PALMIERI, Bruno Henrique Serpa; MARIN, Cristiane Prado. Desenvolvimento de software iterativo em Python para reconhecimento de solo da área escolhida pelo usuário na cidade de Votuporanga-SP. *REGRASP* (ISSN 2526-1045), [S.l.], v. 9, n. 2, [p. 1-13], set. 2024. Disponível em: <https://regrasp.spo.ifsp.edu.br/index.php/regrasp/article/download/1198/910/>. Acesso em: 30 nov. 2025.

NOGUEIRA, Lucas Naaty. Elaboração de Algoritmo para Análise de Vigas Utilizando a Linguagem de Programação Python, 2025. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Ceará, Campus Russas, Russas, 2025. Disponível: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/80133/1/2025_tcc_lnnogueira.pdf. Acesso: 25 jun. 2025.

BEEAR, F. P.; JOHNSTON, E. R.; DEWOLF, J. T.; MAZUREK, D. F. **Mecânica dos materiais**. 5. ed. Porto Alegre: AMGH. 2011. Disponível em: <https://archive.org/details/livro-beer-5a-ed-mecanica-dos-materiais-livro>. Acesso em: 30 maio 2025.