



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

NAYARA SOUZA DA SILVA

APLICAÇÕES DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS NA ENGENHARIA

CARAÚBAS - RN

2022

NAYARA SOUZA DA SILVA

APLICAÇÕES DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS NA ENGENHARIA

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciências e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Tony Kleverton Nogueira

CARAÚBAS-RN

2022

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva

ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586a Silva, Nayara Souza.
APLICAÇÕES DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS NA ENGENHARIA
/ Nayara Souza Silva. - 2022.
66 f. : il.

Orientador: Tony Kleverton Nogueira.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2022.

1. Cônicas . 2. Quádricas . 3. Aplicações . 4.
Engenharia . 5. Estudante. I. Nogueira, Tony
Kleverton , orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com

AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Caraúbas

Bibliotecária: Dalvanira Brito Rodrigues

CRB: 15/700

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas

da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

NAYARA SOUZA DA SILVA

APLICAÇÕES DAS CÔNICAS E QUÁDRICAS NA ENGENHARIA

Trabalho de conclusão de curso
apresentada a Universidade Federal
Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Bacharel em Ciências e Tecnologia.

APROVADA EM: 17/06/2022

BANCA EXAMINADORA

**TONY KLEVERSON
NOGUEIRA**

Assinado de forma digital por
TONY KLEVERSON NOGUEIRA
Dados: 2022.06.25 12:59:18 -03'00'

Prof. Dr. Tony Kleverson Nogueira (UFERSA)
Presidente


Prof. Dr. Rafael Barbosa da Silva (UFRPE-UAST)
Membro Examinador


Prof. Me. Jakcney Luan Azevedo de Sousa (UFERSA)
Membro Examinador

“Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é
alguém que acredite que ele possa ser realizado.”

(Roberto Shinyashiki)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer a Deus, porque sem ele não conseguimos enfrentar os obstáculos e os desafios que a vida nos proporciona. Agradecer também por sempre estar comigo e me permitir realizar um dos meus maiores sonhos, só ele sabe de tudo que tive que passar e enfrentar, pra chegar até aqui.

Em segundo, quero agradecer aos meus pais, Neta e Evanildo, por sempre estar comigo e me apoiar em todas as minhas decisões, ao meu irmão Junior e também à algumas pessoas da minha família que estão sempre torcendo por mim.

Também, quero agradecer aos meus amigos, não vou citar nomes, pois passaram muitas pessoas pela minha vida durante esses 3 anos, não só da universidade, como também fora dela, que acabaram de alguma forma deixando a sua contribuição.

Além do mais, quero agradecer a minha namorada, Lorena, que sempre esteve comigo, participando e dividindo momentos de alegria e sucesso, pois sempre acreditou muito em mim, estando também ao meu lado em todas as minhas crises de ansiedade.

Quero também, agradecer ao meu professor, orientador, doutor Tony Kleverson, pelo incentivo e dedicação quando precisei, sem contar que foi um dos meus melhores professores de cálculo. Também aos membros da banca avaliadora por terem aceitado o convite, o Professor doutor Rafael Barbosa e o Professor doutor Jakcney Luan.

À todos que de alguma forma torceram ou contribuíram para que eu chegasse até aqui o meu muito obrigada.

RESUMO

Esse trabalho foi fruto de uma revisão bibliográfica sobre cônicas e quádricas com o objetivo de apresentar sua história, conceituá-las, e descrever algumas aplicações na engenharia ou onde são utilizadas em nossas vidas. Nosso intuito com esse trabalho, é de ajudar os estudantes a compreender melhor o assunto e poder, talvez, usá-lo como forma de revisar o conteúdo.

Palavras-chaves: Cônicas, Quádricas, Aplicações, Engenharia, Estudante.

ABSTRACT

This work was the result of a bibliographic review on conics and quadrics in order to present their history, conceptualize them, and describe some applications in engineering or where they are used in our lives. Our intention with this work is to help students better understand the subject and, perhaps, use it as a way of reviewing the content.

Keywords: Conics, Quadrics, Applications, Engineering, Student.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Seções cônicas	13
Figura 2: Apolônio	14
Figura 3: Hipócrates de Quio.....	15
Figura 4: Menecmo	16
Figura 5: Arquitas de Tarento.....	16
Figura 6: Euclides.....	17
Figura 7: Arquimedes	17
Figura 8: Parábola.....	18
Figura 9: O eixo da parábola no eixo do y	20
Figura 10: Parábola de vértice na origem	20
Figura 11: Parábola no eixo dos x.....	21
Figura 12: Parábola de vértice na origem	21
Figura 13: Transição de eixo	22
Figura 14: Transição de eixo	24
Figura 15: Parábola paralela ao eixo dos y	24
Figura 16: Parábola paralela ao eixo dos x	25
Figura 17: Parábola na forma explícita	27
Figura 18: Elipse	28
Figura 19: Elementos da elipse	29
Figura 20: Elementos da elipse	30
Figura 21: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo dos x	31
Figura 22: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo dos y	32
Figura 23: Elipse da equação reduzida	33
Figura 24: Elipse da equação reduzida	33
Figura 25: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo dos x.....	34
Figura 26: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo dos y.....	35
Figura 27: Hipérbole.....	35
Figura 28: Hipérbole.....	36
Figura 29: Elementos da hipérbole.....	37
Figura 30: Elementos da hipérbole.....	38
Figura 31: Excentricidade da hipérbole.....	39
Figura 32: Excentricidade da hipérbole.....	39

Figura 33: Hipérbole com o eixo real sobre o eixo dos x.....	40
Figura 34: Hipérbole com o eixo real sobre o eixo dos y.....	41
Figura 35: Hipérbole com o eixo real paralelo o eixo dos x.....	41
Figura 36: Hipérbole com o eixo real paralelo o eixo dos y.....	42
Figura 37: Seções cônicas	43
Figura 38: Seções cônicas	43
Figura 39: Seções cônicas	44
Figura 40: Seções cônicas	44
Figura 41: Seções cônicas	45
Figura 42: Elipsoide.....	47
Figura 43: Elipsoide.....	48
Figura 44: Hiperboloide de uma folha	50
Figura 45: Hiperboloide de duas folha.....	51
Figura 46: Paraboloide elíptico.....	53
Figura 47: Paraboloide hiperbólico.....	54
Figura 48: Hiperboloide	56
Figura 49: Torre de refrigeração.....	57
Figura 50: Ponte suspensa.....	57
Figura 51: Ponte suspensa de Akashi.....	58
Figura 52: Ponte suspensa de Hercíoluz.....	59
Figura 53: Antena parabólica	60
Figura 54: Templo expiatório da sagrada família.	62

SUMÁRIO

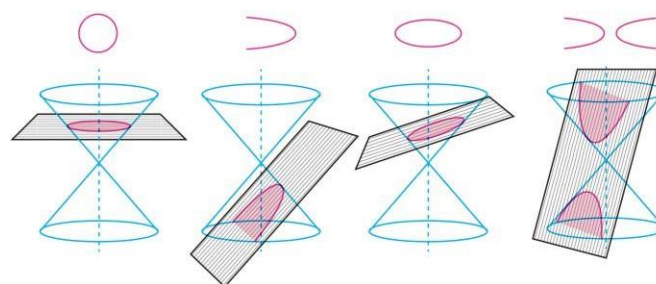
AGRADECIMENTOS	6
RESUMO	7
ABSTRACT	8
LISTA DE FIGURAS	9
1. INTRODUÇÃO	13
2. REFERECIAL TEÓRICO	15
2.1 HISTÓRIA DAS CÔNICAS.....	15
2.2 DEFINIÇÕES	19
2.2.1 PARABOLA	19
2.2.2 ELEMENTOS	19
2.2.3 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE NA ORIGEM DO SISTEMA	20
2.2.4 TRANSIÇÃO DE EIXO.....	22
2.2.5 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE FORA DA ORIGEM DO SISTEMA	24
2.2.6 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA NA FORMA EXPLICITA.....	26
2.3 ELIPSE	28
2.3.1 ELEMENTOS	29
2.3.2 EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM DO SISTEMA	31
2.3.3 EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO FORA DA ORIGEM DO SISTEMA	34
2.4 HIPÉRBOLE	35
2.4.1 ELEMENTOS	37
2.4.2 EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM DO SISTEMA	39
2.4.3 EQUAÇÕES DA HIPÉRBOLE DE CENTRO FORA A ORIGEM DO SISTEMA	41
2.5 SEÇÕES CÔNICAS.....	42
2.6 QUÁDRICAS.....	45

2.6.1 SUPERFÍCIES QUÁDRACAS CENTRADAS.....	46
2.6.2 ELIPSOIDE	46
2.6.3 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA	49
2.6.4 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS	50
2.6.5 SUPERFÍCIE QUÁDRICA NÃO CENTRADA	52
2.6.6 PARABOLOIDE ELÍPTICO	52
2.6.7 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO	54
3. APLICAÇÕES DAS CÔNICAS	56
3.1 TORRES DE REFRIGERAÇÃO.....	56
3.2 PONTES SUSPENSAS	58
3.3 ANTENA PARABÓLICA.....	61
3.4 TEMPLO EXPIATÓRIO DA SAGRADA FAMÍLIA	62
5. REFERÊNCIAS	65

1. INTRODUÇÃO

Uma seção cônica é uma curva obtida pela interseção de um plano com um cone duplo de base circular. Dependendo da inclinação do plano, a curva será chamada de elipse, hipérbole ou parábola. Quando o plano é paralelo a base do cone, a curva é um círculo, que é considerado um caso especial de elipse. Quando o plano corta o cone com uma inclinação temos a elipse, quando corta o cone com mais inclinação temos a parábola e quando o plano corta os dois cones espelhados na vertical temos a hipérbole. A interseção do plano e o vértice do cone também pode produzir um ponto, uma reta ou duas retas coexistentes. (Rosimar Gouveia, 2019).

FIGURA 01: SEÇÃO CÔNICA



FONTE: (PENSE MATEMATICA, 2019).

Na engenharia e na arquitetura, como no caso de pontes, cúpulas, torres e arcos, as cônicas são utilizadas por suas propriedades físicas e até estéticas. Um bom exemplo é a ponte Juscelino Kubitschek em Brasília, que tem seus arcos em forma de parábola. Na astronomia, os planetas do sistema solar giram em torno do sol em uma trajetória elíptica, ou seja, a rotação dos mesmos forma uma elipse. Em óptica, todas as superfícies produzidas por cônicas, parábolas, elipse e hipérboles possuem propriedades reflexivas. (Raphael Neves, 2010).

Como podemos ver, as cônicas aparecem de várias formas no nosso dia a dia ou mesmo nas ciências. No curso de C&T, estudamos as cônicas na disciplina de Geometria Analítica e não é possível destacar todo esse

potencial de aplicação. Isso pode ser justificado pela falta de tempo para percorrer uma ementa tão grande quanto a de Geometria Analítica. Nesse trabalho fizemos uma revisão dos conceitos das cônicas e apresentamos algumas aplicações na engenharia, ou seja seu principal objetivo é servir de material de apoio ou complementar a disciplina e Geometria analítica. No primeiro capítulo ou referencial teórico primeiro é feita uma demonstração da história das cônicas, depois mostramos um pouco sobre as seções cônicas, logo em seguida é feita a revisão das cônicas, mostrando sua definição, equações e exemplos, em seguida falamos sobre quadricas. No segundo capítulo a gente mostra as aplicações das cônicas e quadricas na engenharia.

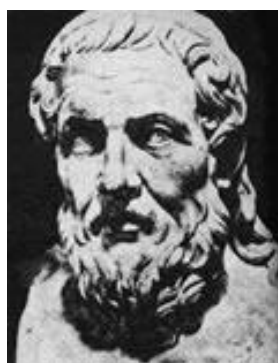
2. REFERECIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentaremos a teoria do nosso objeto de estudo. Começaremos apresentando um pouco da historia das cônicas. Em seguida, apresentaremos as definições formais e deduziremos as suas equações. Veremos ainda como obter as cônicas a partir das secções cônicas. De modo análogo, faremos uma revisão sobre as quádricas. Em posse dessa teoria estaremos prontos para o próximo capítulo, onde veremos as aplicações tanto na engenharia como na arquitetura, parte principal desse trabalho.

2.1 HISTÓRIA DAS CÔNICAS

Nesta seção, apresentaremos um pouco sobre a historia das cônicas, desde sua criação por Menecmo até seu último estudo feito por Apolônio. Pois antes de começar nossos estudos teoricos, queremos entender/ apresentar como foram criadas, para, em seguida, conseguirmos focar em cada um dos tópicos estudados. A partir daqui utilizamos o livro da história da matemática (“Introdução à História da matemática”, Hygino H. Domingues) e alguns sites de matemática como o (UNICAMP) para conseguirmo escrever sobre o assunto.

FIGURA 02: APOLÔNIO

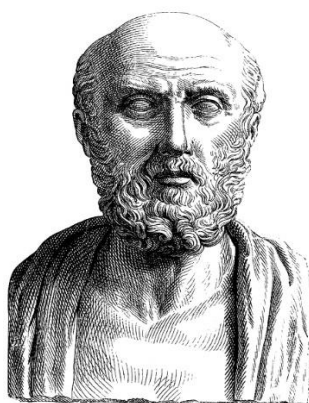


FONTE: (SÓ MATEMÁTICA, 1998)

O estudo das seções cônicas e das suas propriedades geométricas começou na Grécia, como parte da busca pela solução do problema da duplicação do cubo, após a redução deste por Hipócrates de Quio (c. 440 a. C.)

à construção de duas proporcionais médias entre dois segmentos de reta paralelos de razão 2. Provavelmente na busca pelo local geométrico da solução do problema das proporcionais médias, Menaecmo (c. 350 a. C.) resolveu o problema por meio das seções de um cone reto de revolução por planos perpendiculares a alguma das geratrizes, possivelmente seguindo a solução de Arquitas de Tarento (c. 400 a. C.) para o mesmo problema por meio da intersecção de um cone reto de base circular, um cilindro de base circular e um toro de raio interno nulo. Menaecmo tornou-se então, como afirma uma carta de Eratóstenes ao rei Ptolomeu Euergeta, o descobridor das seções cônicas.

FIGURA 03: HIPÓCRATES DE QUIO



FONTE: (WIKIPÉDIA, 2013)

Os primeiros estudos das cônicas limitaram-se à definição inicial de Menaecmo referentes ao cone reto de revolução, e a sua classificação e nomenclatura seguiam a classificação desses cones. Assim, a elipse era a “seção do cone acutângulo”, a hipérbole a “seção do cone obtusângulo” e a parábola a “seção do cone reto”, referindo-se os termos “acutângulo”, “obtusângulo” e “reto” ao ângulo entre duas geratrizes opostas no vértice do cone. Essa abordagem manteve-se quase completamente até Euclides e Arquimedes, enquanto a nomenclatura atual foi criada por Apolônio.

FIGURA 04: MENECMO



FONTE: (FLOWVELLA)

As contribuições de Euclides sobre as cônicas perderam-se. Existem, porém, referências a quatro livros de uma obra euclidiana sobre as cônicas, da qual parte do conteúdo pode ser aferido de referências em trabalhos posteriores, principalmente os de Arquimedes e Pappus.

FIGURA 05: ARQUITAS DE TARENTO



FONTE: (SÓ MATEMÁTICA, 1998)

Uma suposição aferida por referências posteriores é a de que, como “Os Elementos”, também “as Cônicas de Euclides” seriam uma compilação de conhecimentos existentes, particularmente de uma obra, também perdida, de Aristeu. Esses trabalhos caracterizariam as cônicas por meio de métodos de proporções, como os postos por Euclides no livro V dos Elementos, e estabeleceriam suas propriedades fundamentais, citadas por Arquimedes como presentes nos “elementos das cônicas”. Nos Fenômenos, ainda, Euclides reconhece a “seção do cone acutângulo” como a seção formada por qualquer plano oblíquo cortando qualquer cilindro ou cone, mas sem expandir a generalização às outras seções cônicas.

FIGURA 06: EUCLIDES

FONTE: (MAESTROVIRTUALE, 2017)

Apesar de ter pouco avançado nos teoremas específicos das seções cônicas, Euclides estabelece as bases dos maiores desenvolvimentos posteriores sobre o tema, concretizados por Apolônio e Pappus. O primeiro, além de ter estudado entre os discípulos de Euclides em Alexandria, usou os quatro livros de Euclides sobre as cônicas como base dos primeiros livros do seu próprio tratado. Além disso, o tratamento de áreas utilizado para a caracterização das curvas por Apolônio foi o tema do sexto livro dos Elementos de Euclides.

FIGURA 07: ARQUIMEDES

FONTE: (GESTÃO EDUCACIONAL, 2022)

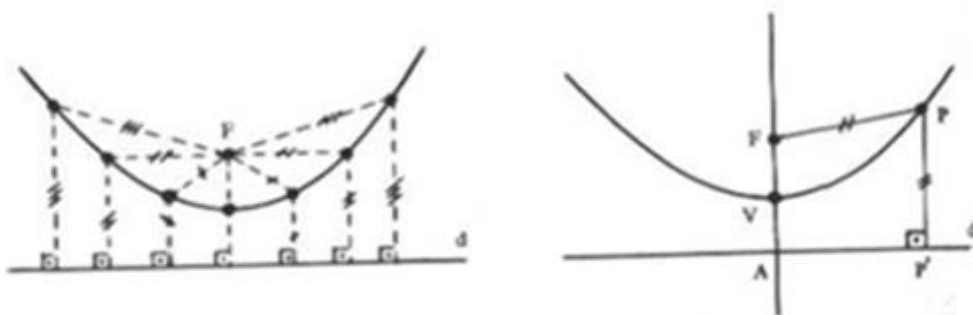
Euclides (c. 295 a. C.) também seria o primeiro a trabalhar o problema dos lugares geométricos de três e quatro linhas, no livro perdido dos Porismas, referido posteriormente por Pappus, de grande importância nas evoluções futuras do tratamento das seções cônicas e da própria geometria.

2.2 DEFINIÇÕES

2.2.1 PARÁBOLA

Considerando em um plano uma reta e um ponto F não pertencente a d . Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixado F (foco) e uma reta fixada d (reta diretriz).

FIGURA 08: PARÁBOLA



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Na figura 08 estão sete pontos que são equidistantes do ponto F e da reta d . Sendo P' o pé perpendicular baixada de um ponto P do plano sobre a reta d (Fig.08), de acordo com a definição a cima, P pertence a parábola se, e somente se:

$$d(P, F) = d(P, P')$$

Ou também:

$$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PP'}|$$

Observação:

Considerando o fato de $F \notin d$, pois, caso contrário, a parábola se degeneraria numa reta.

2.2.2 ELEMENTOS

Considerando a figura 8, temos:

Foco: é o ponto F .

Diretriz: é a reta d .

Eixo: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz.

Vértice: é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

Obviamente, tem-se :

$$d(V, F) = d(V, A).$$

Com a finalidade de obtermos uma equação da parábola, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos, iniciemos pelos casos mais simples.

2.2.3 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE NA ORIGEM DO SISTEMA

1º caso: O eixo da parábola é o eixo dos y

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola (Fig.9).

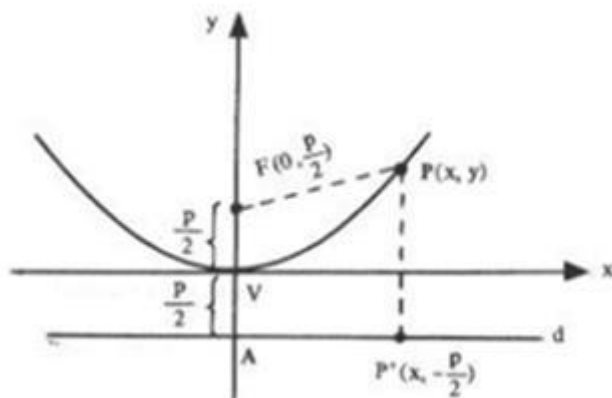
Da definição de parábola, tem-se:

$$|\vec{PF}| = |\vec{PP'}|$$

Ou

$$|\vec{PF}| = |\vec{PP'}|$$

FIGURA 9: O EIXO DA PARÁBOLA NO EIXO DO Y



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Como $P(x, \frac{p}{2})$, vem:

$$|(x-0, y - \frac{p}{2})| = |(x - x, y + \frac{p}{2})|$$

Ou

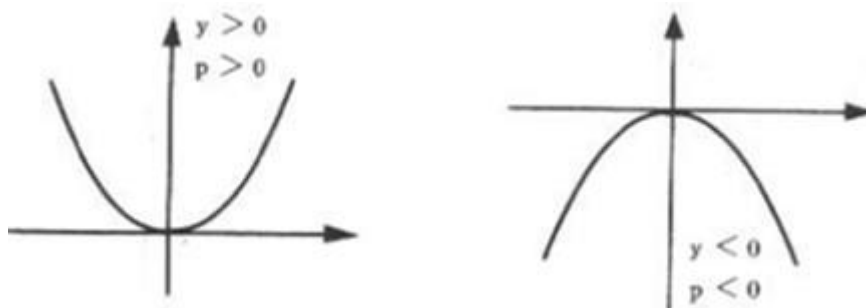
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+\frac{p}{2})^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$x^2 = 2py$$

Esta equação é chamada equação reduzida as parábolas e constitui a forma padrão da equação da parábola de vértice na origem tendo para eixo o eixo dos y . Da análise desta equação conclui-se que, tendo em vista ser $2py$ sempre positivo ou nulo (pois é igual a $x^2 \geq 0$), os sinais de p e de y são sempre iguais. Consequentemente, se $p > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo, conforme as figuras a seguir esclarecem.

FIGURA 10: PARÁBOLA DE VERTICE NA ORIGEM



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Este numero real $p \neq 0$ é conhecido como parâmetro da parábola.

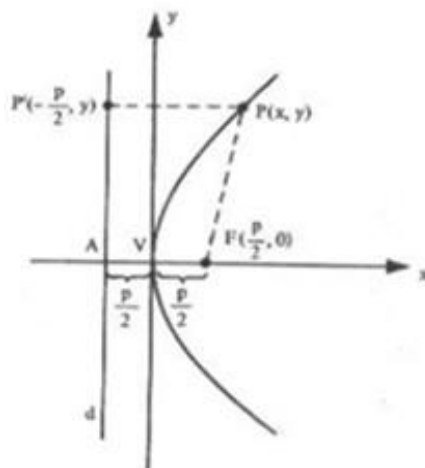
2º caso: O eixo da parábola é o eixo dos x

Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola (Fig. 11) de foco $F(\frac{p}{2}, 0)$,

obteremos, de forma análoga ao 1º caso, a equação reduzida:

$$y^2 = 2px$$

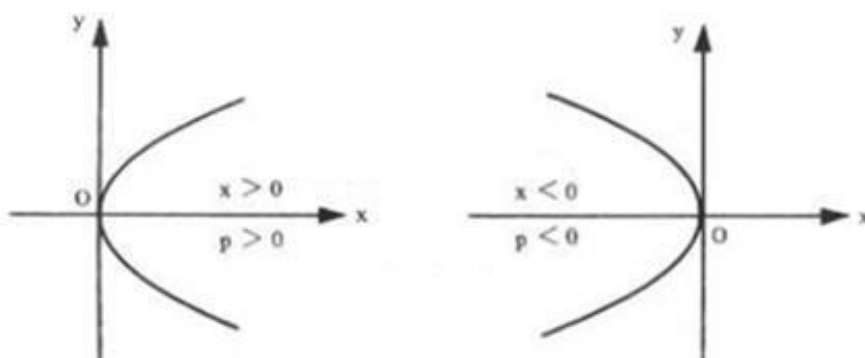
FIGURA 11: PARÁBOLA NO EIXO DOS X



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Conforme o sinal de p , teremos: se $p > 0$, a parábola tem concavidade voltada para a direita e, se $p < 0$, a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

FIGURA 12: PARÁBOLA DE VÉRTICE NA ORIGEM



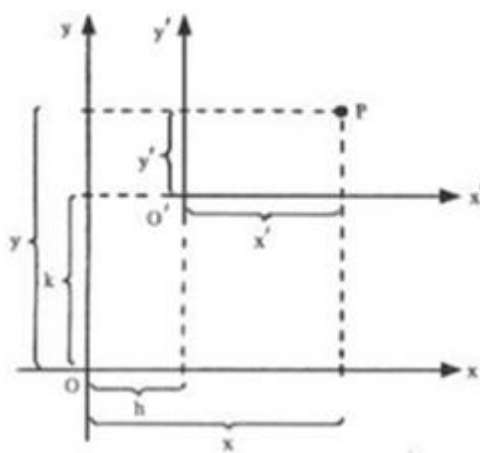
FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.2.4 TRANSIÇÃO DE EIXO

Consideramos no plano cartesiano xOy um ponto $O'(h,k)$, atribuídos. Vamos introduzir um novo sistema $x'O'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e os mesmos sentidos dos eixos Ox e Oy . Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma

translação de eixos.

FIGURA 13: TRANSIÇÃO DE EIXO



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são: x e y em relação ao sistema xOy , x' e y' em relação ao sistema $x'O'y'$. Pela figura 13, obtém-se:

$$x = x' + h \text{ e } y = y' + k$$

ou

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k$$

Que são as formulas de transição e que permite transformar coordenadas de um sistema para outro. A principal finalidade da transformação de coordenadas é modificar a forma de equações. Por exemplo, seja a parábola de equação

$$x'^2 = 4y'$$

referida ao sistema $x'O'y'$. Se tivermos $h = 3$ e $k = 2$, isto é, $O'(3,2)$, e sabendo que:

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k$$

Isto é:

$$x' = x - 3 \text{ e } y' = y - 2,$$

A equação desta parábola em relação ao sistema xOy é:

$$(x-3)^2 = 4(y-2)$$

ou:

$$x^2 - 6x + 9 = 4y - 8$$

ou:

$$x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$$

Reciprocamente, a equação:

$$x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$$

no sistema xOy tem equação

$$x'^2 = 4y'$$

no sistema $x'O'y'$. De fato:

$$x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$$

$$x' = x + 3$$

$$y' = y + 2$$

$$(x' + 3)^2 - 6(x' + 3) - 4(y' + 2) + 17 = 0$$

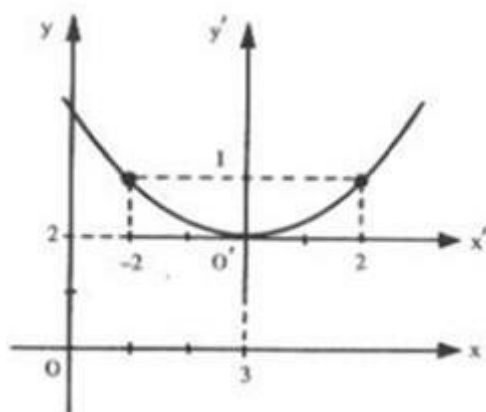
$$x'^2 + 6x' + 9 - 6x' - 18 - 4y' - 8 + 17 = 0$$

$$x'^2 - 4y' = 0$$

$$x'^2 = 4y'$$

Como se observa nesse caso, mediante uma adequada transição de eixo, a equação em x e y transforma-se numa equação em x' e y' bem mais simples, e ambas com o mesmo gráfico.

FIGURA 14: TRANSIÇÃO DE EIXO



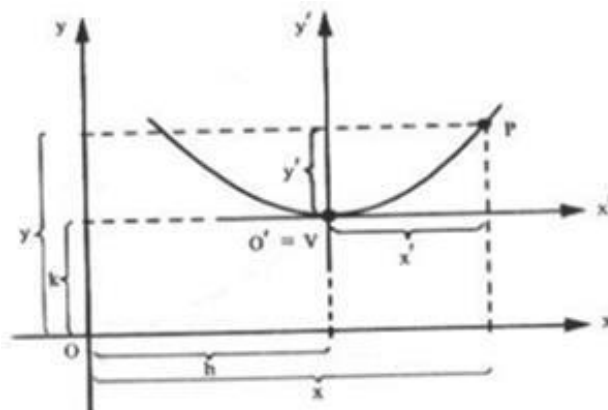
FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.2.5 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE FORA DA ORIGEM DO SISTEMA

1º Caso: O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos y

Seja uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y , sendo h e k coordenadas de V em relação ao sistema xOy .

FIGURA 15: PARÁBOLA SEM EIXO PARALELA AO EIXO DOS y



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Seja $P(x,y)$ um ponto qualquer desta parábola. Consideremos um novo sistema de $x'O'y'$ com a origem O' em V nas condições do que foi visto em na Fig.9. Sabe-se que a equação da parábola referida ao sistema $x'O'y'$ é

$$x'^2 = 2py'$$

mas:

$$x' = x - h \text{ e } y' = y - k,$$

e daí:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k)$$

Que é a forma padrão da equação de uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelo ao eixo dos y .

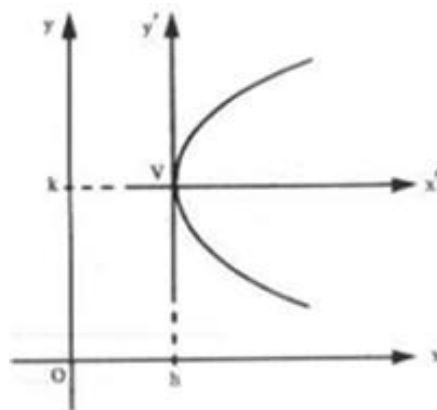
2º Caso: O eixo da parábola é paralelo ao eixo dos x

De modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Observemos que se $(h,k) = (0,0)$, voltamos a ter o caso particular de equação da parábola de vértice na origem do sistema.

FIGURA 16: PARÁBOLA PARALELA AO EIXO OS x



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.2.6 EQUAÇÃO DA PARÁBOLA NA FORMA EXPLÍCITA

Sabemos que a equação de uma parábola de vértice $V(h,k)$ e eixo paralelos ao eixo dos y tem a forma padrão:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k) \quad (I)$$

Por exemplo, para $V(2,1)$ e $P=\frac{1}{8}$, teríamos:

$$(x - 2)^2 = \frac{1}{4}(y + 1)$$

Com o objetivo de explicitar y nesta equação, faremos:

$$x^2 - 4x + 4 = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$

ou:

$$4x^2 - 16x + 16 = y + 1$$

donde:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

Uma equação na forma padrão (I) pode ser apresentada sob a forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

chamada forma explicitada a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo. Reciprocamente, dada uma equação na forma explícita, podemos sempre a conduzir a forma padrão (I). Consequentemente, o gráfico de

$$y = ax^2 + bx + c$$

com $a \neq 0$, é sempre uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y . Analisando os aspectos mais importante do gráfico da parábola da equação:

$$y = 4x^2 - 16x + 15$$

Inicialmente, transformaremos esta equação para a forma padrão (I):

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 16x &= y - 15 \\
 4(x^2 - 4x) &= y - 15 \\
 4(x^2 - 4x + 4) &= y - 15 + 4(4) \\
 4(x - 2)^2 &= y + 1 \\
 (x - 2)^2 &= \frac{1}{4}(y + 1)
 \end{aligned}$$

Logo, o vértice é:

$$V(2, -1)$$

e:

$$2p = \frac{1}{4} \therefore p = \frac{1}{8}$$

Para esboçar o gráfico, vamos calcular as interseções da parábola $y = 4x^2 - 16x + 15$ com os eixos coordenados. Fazemos $x = 0$, vem $y = 15$ e, portanto, $(0, 15)$ é o ponto onde a parábola corta o eixo dos y . Fazendo $y = 0$, vem

$$4x^2 - 16x + 15 = 0$$

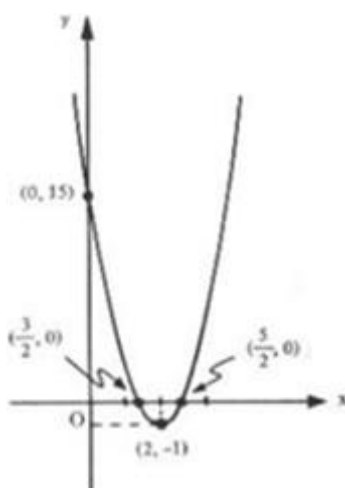
cujas raízes são $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$ e, portanto, $(\frac{3}{2}, 0)$ e $(\frac{5}{2}, 0)$ são os pontos onde a parábola corta o eixo dos x . O gráfico, o foco é:

$$F(2, -1 + \frac{1}{16}) \text{ ou } F(2, -\frac{15}{16})$$

e, portanto, tem equação:

$$y = -1 - \frac{1}{16} \text{ ou } y = -\frac{17}{16}$$

FIGURA 17: PARÁBOLA NA FORMA EXPLÍCITA



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Quando a equação da parábola estiver na forma explícita $y = ax^2 + bx + c$, a determinação do vértice $V(h, k)$ poderá ser feita com maior rapidez lembrando que $h = -\frac{b}{2a}$. Para o caso da equação $y = 4x^2 - 16x + 15$, teremos:

$$h = -\frac{-16}{2(4)} = 2$$

e a ordenada correspondente k será obtida substituindo $x = h$ por 2 nessa equação, isto é:

$$k = 4(2)^2 - 16(2) + 15 = -1$$

logo, o vértice é $V(2, -1)$.

Observação

Se a parábola tem eixo paralelo ao eixo dos x , sua equação na forma explícita é

$$x = ay^2 + by + c$$

correspondente à forma padrão:

$$(y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Um detalhe importante na comparação destas equações é que o sinal do coeficiente a é o mesmo de p , e, portanto, a concavidade da parábola fica declarada quando sua equação estiver na forma explícita. Por exemplo, o gráfico de

$$x = -3y^2 + 5y$$

é uma parábola de concavidade voltada para a esquerda porque o sinal de a é negativo.

2.3 ELIPSE

Elipse é o lugar dos pontos de um plano cuja soma das distancias a dois pontos fixos plano é constante. Considerando no plano dois pontos distintos, $F1$ e $F2$, tal que a distância $d(F1, F2) = 2c$, se. Seja um número real x tal que $2a > 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$d(P, F1) + d(P, F2) = 2a$$

Ou:

$$|\overrightarrow{PF1}| + |\overrightarrow{PF2}| = 2a$$

Dá-se o nome de elipse (Fig. 18)

FIGURA 18: ELIPSE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

A figura 18 sugere como se pode construir uma elipse no papel. Nos pontos F1 e F2 fixemos dois pontos e neles amarremos um fio não esticado. Tomemos um lápis e distendamos com sua ponta o fio, marcando o ponto P1. Então, a soma das distancias $d(P1, F1)$ e $d(P1, F2)$ é o comprimento do fio. Se o lápis deslizar sobre o papel, mantendo o fio sempre esticado, ficara traçada uma elipse de focos F1 e F2. A figura mostra outra posição P2 da ponta do lápis e, também para este ponto, a soma das distancias $d(P2, F1)$ e $d(P2, F2)$ é o comprimento do fio. Assim, para as infinitas posições da ponta do lápis, a soma das distancias a F1 e F2 é constante. A constante $2a$ anteriormente referida é o comprimento do fio.

Se mantivermos constante o comprimento do fio e variarmos as posições de F1 e F2, a forma da elipse irá variar. Assim, quanto mais próximo os focos estão entre si, tanto mais a forma da elipse se assemelha à da circunferência, e quando $F1 = F2$ obtém-se uma circunferência. Por outro lado, quanto mais afastados os focos estiverem entre si, mais “achatada” será a elipse.

2.3.1 ELEMENTOS

Considerando a figura 19, temos:

Focos: São os pontos F_1 e F_2 .

Distancia focal: é a distancia $2c$ entre os focos.

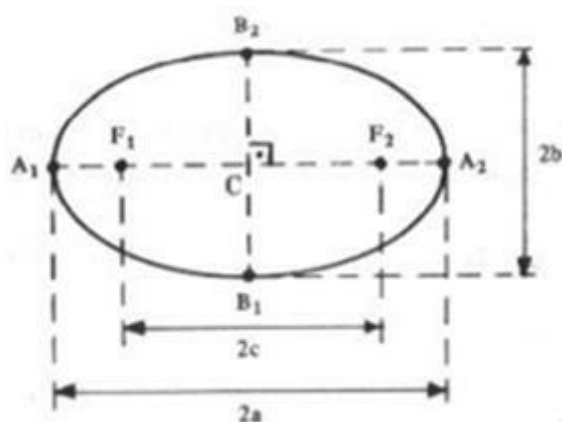
Centro; é o ponto médio C do segmento $F_1 F_2$.

Eixo maior: é o segmento $A_1 A_2$ de comprimento $2a$ (o segmento $A_1 A_2$ contém os focos e os seus extremos pertencem à elipse).

Eixo menor: é o segmento $B_1 B_2$ de comprimento $2b$ ($B_1 B_2 \perp A_1 A_2$ no seu ponto médio).

Vértices: são os pontos A_1 , A_2 , B_1 e B_2

FIGURA 19: ELEMENTOS DA ELIPSE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Excentricidade: é o número e dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

Tendo em vista que $c < a$, tem-se: $0 < e < 1$.

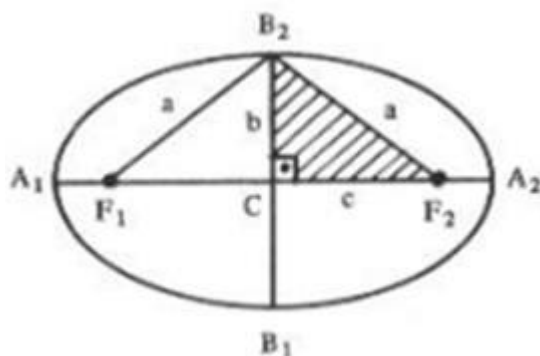
Observação

Em toda elipse vale a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Na verdade, esta igualdade é a relação de pitágoras no triângulo retângulo $B_2 C F_2$.

FIGURA 20: ELEMENTOS DA ELIPSE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.3.2 EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM DO SISTEMA

1º Caso: o eixo maior está sobre o eixo dos x

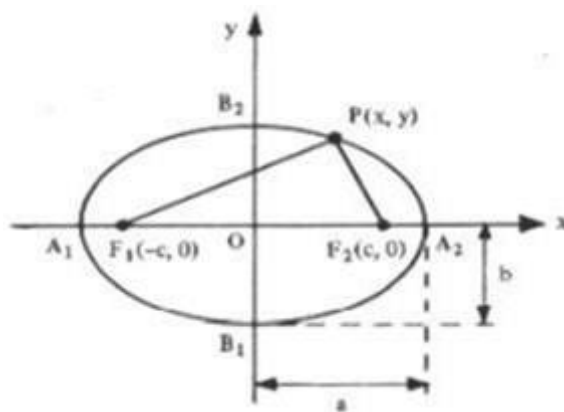
Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma elipse (Fig. 21) de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Por definição, tem-se:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

OU:

$$|\vec{F_1P}| + |\vec{F_2P}| = 2a$$

FIGURA 21: ELIPSE COM EIXO MAIOR NO EIXO DOS X



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

ou em coordenadas:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2}$$

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x^2 + y^2 + 2cx + c^2})^2 &= (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2})^2 \\
 x^2 + y^2 + 2cx + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} + x^2 + y^2 - 2cx + c^2 \\
 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} &= 4a^2 - 4cx \\
 a\sqrt{x^2 + y^2 - 2cx + c^2} &= a^2 - cx \\
 a^2(x^2 + y^2 - 2cx + c^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
 a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2cx + a^2c^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
 a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^2 - a^2c^2 \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

mas:

$$a^2 - c^2 = b^2$$

Logo:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

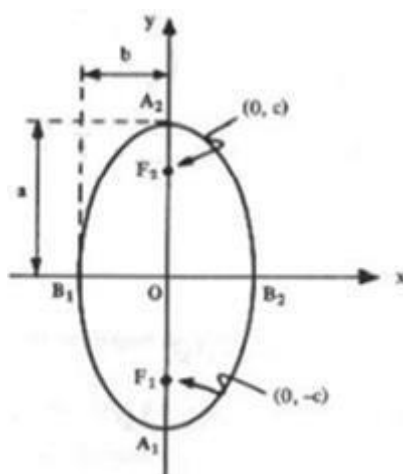
Que é equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x.

2º Caso: O eixo maior está sobre o eixo dos y

Com procedimento análogo ao 1º caso, obteremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 22: ELIPSE COM EIXO MAIOR NO EIXO DOS Y



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Observação

Tendo em vista que $a^2 - b^2 + c^2$, segue-se que:

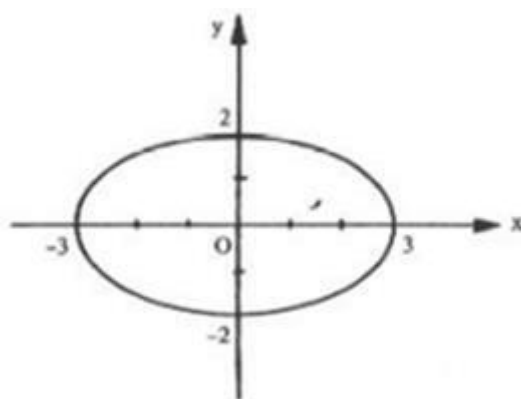
$a^2 > b^2$ e daí: $a > b$

Então, sempre o maior dos denominadores na equação reduzida representa o número a^2 , onde a é medida do semi-eixo maior. Ainda mais: se na equação da elipse o número a^2 é denominador de x^2 , a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo dos x .

Exemplo

A equação reduzida da elipse a baixo é:

FIGURA 23: ELIPSE DA EQUAÇÃO REDUZIDA



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

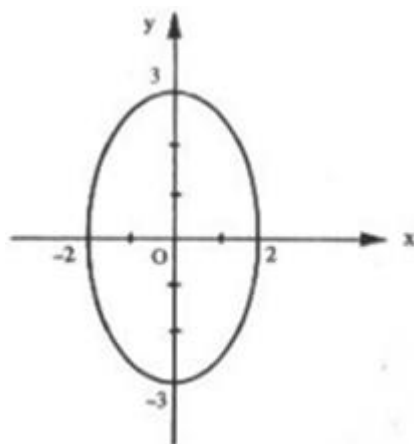
$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Ou:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

A elipse a baixo tem equação reduzida:

FIGURA 24: ELIPSE DA EQUAÇÃO REDUZIDA



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

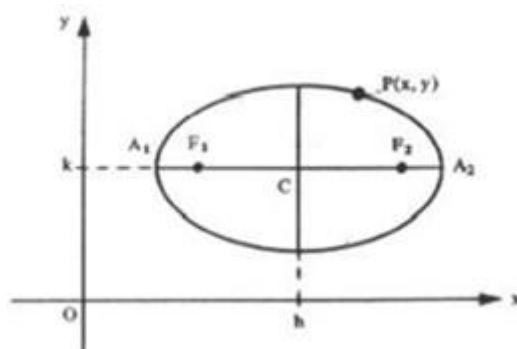
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

2.3.3 EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO FORA DA ORIGEM DO SISTEMA

1º Caso: o eixo maior é paralelo ao eixo dos x

Considerando uma elipse de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma fig.25

FIGURA 25: ELIPSE COM EIXO MAIOR PARALELO NO EIXO DOS X



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Em “Equação da parábola de vértice fora da origem do sistema” estudamos o caso da equação da parábola om vértice em (h,k) quando ocorre uma translação dos eixos. O caso presente da elipse é perfeitamente análogo aquele. Assim:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É a equação de uma elipse de centro (0,0) e eixo maior sobre o eixo dos x; quando o eixo maior for paralelo ao eixo dos x e o centro for C(h,k), a equação passa a ser

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

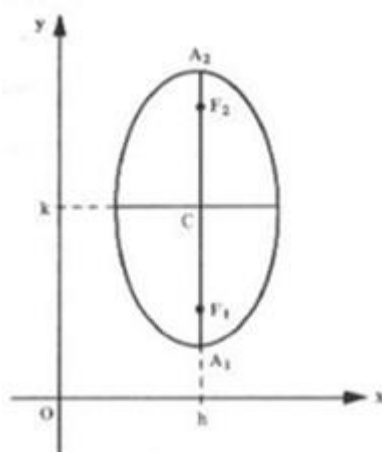
Este mesmo detalhe irá se repetir também no estudo da hipérbole a ser feito logo a seguir.

2º Caso: O eixo maior é paralelo ao eixo dos y

De forma análoga, temos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 26: ELIPSE COM EIXO MAIOR PARALELO NO EIXO DOS Y



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.4 HIPÉRBOLE

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distancias, em valor absoluto. A dois pontos fixos desse plano é constante. Consideremos no planos dois pontos distintos F1 e F2 tal que a distância $d(F1, F2) = 2c$. Seja um numero real a tal que $2a < 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

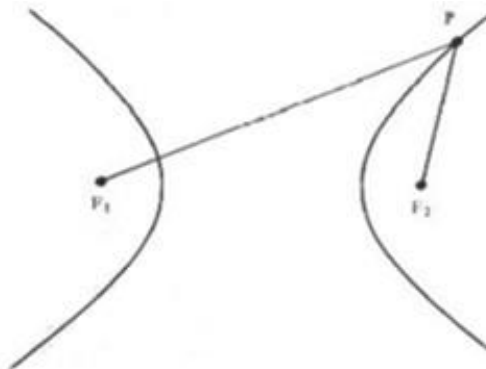
$$|d(P, F1) - d(P, F2)| = 2a \quad (I)$$

ou:

$$||\overrightarrow{PF1}| - |\overrightarrow{PF2}|| = 2a$$

dá-se o nome de hipérbole (Fig. 27).

FIGURA 27: HIPÉRBOLE



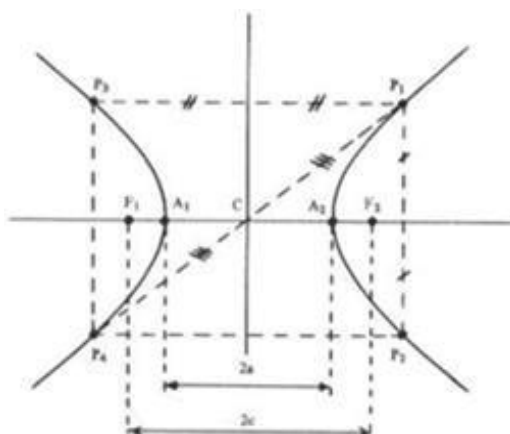
FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Como se vê, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação (I) um ponto P está na hipérbole se, e somente se:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

Quando P estiver no ramo da direita, a diferença é $+2a$ e, em caso contrário, será $-2a$. Consideremos a reta que passa por F_1 e F_2 e sejam A_1 e A_2 os pontos de interseção da hipérbole com esta reta. Consideremos outra reta perpendicular a esta passando pelo ponto médio C do segmento F_1F_2 (Fig. 28).

FIGURA 28: HIPÉRBOLE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

A hipérbole é uma curva simétrica em relação a estas duas retas, como

também em relação ao ponto. Se P_1 é um ponto da hipérbole, existem os pontos P_2 , P_3 e P_4 tais que: P_2 é o simétrico de P_1 em relação à reta horizontal, P_3 é o simétrico de P_1 em relação à reta vertical, P_4 é o simétrico de P_1 em relação ao ponto C . Ainda, pela simetria, conclui-se que:

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

e da própria definição, vem

$$d(A_1, A_2) = 2a$$

2.4.1 ELEMENTOS

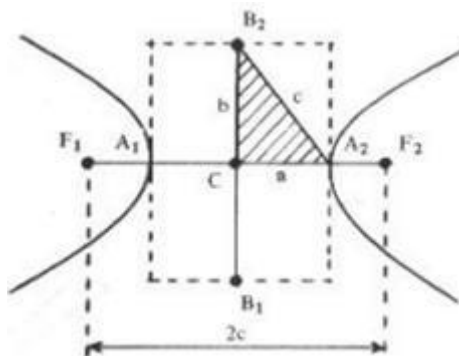
Considerando a figura 29, temos:

Focos: São os pontos F_1 e F_2 .

Distância focal: É a distância do centro ao foco.

Centro: É o ponto médio C do segmento F_1F_2 .

FIGURA 29: ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Vértices: São os pontos A_1 e A_2 .

Eixo real ou transverso: É o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

Eixo imaginário ou conjugado: É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$.

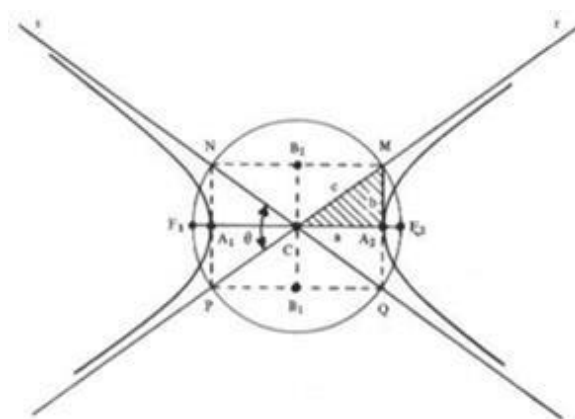
O valor de b é definido através da relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onde a , b e c são as medidas dos lados do triângulo retângulo B_2CA_2 . Vamos fazer ainda uma outra consideração em torno de a , b e c . Consideremos uma circunferência de raio c e cujo centro é o próprio centro C da hipérbole. Tomemos

um valor arbitrário para a e marquemos os pontos A_1 e A_2 , vértices da hipérbole. Por estes pontos tracemos cordas perpendiculares ao diâmetro F_1F_2 . As quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo $MNPQ$ inscrito nesta circunferência (fig.30). O retângulo assim construído tem dimensões $2a$ e $2b$ e a relação $c^2 = a^2 + b^2$ está novamente presente no triângulo retângulo hachurado na figura, com o eixo imaginário B_1B_2 bem caracterizado. As retas l e s , que contêm as diagonais do referido retângulo, chamam-se assíntotas da hipérbole.

FIGURA 30: ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

As assíntotas são retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez à medida que os pontos se afastam dos focos. Esta aproximação é “contínua” e “lenta” de forma que a tendência assíntotas constitui em excelente guia para traçar o esboço do gráfico. O ângulo θ assinalado na figura é chamado abertura da hipérbole. Chama-se excentricidade da hipérbole ao número e dado por:

$$e = \frac{c}{a}$$

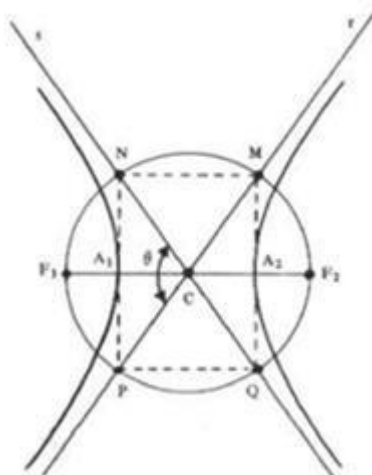
mas:

$$c > a \therefore e > 1.$$

A excentricidade da hipérbole está intimamente relacionada com sua abertura. De fato: voltemos outra vez à figura anterior onde a circunferência tem raio c . Mantendo o raio c da Figura 30 e tomando um valor para “ a ” menor de eu o anterior, o novo retângulo $MNPQ$ será mais “estrito” e, em consequência, a abertura θ será maior. Pra, diminuir o valor de “ a ” (mantendo c fixo) significa

aumentar o valor de $e = \frac{c}{a}$. Assim, quanto maior a excentricidade, maior será a abertura, ou seja, mais “abertos” estarão os ramos da hipérbole.

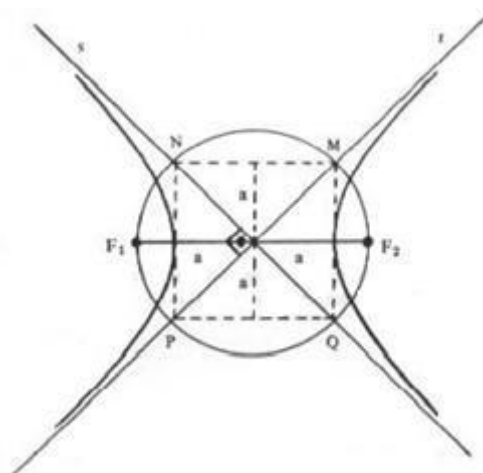
FIGURA 31: EXENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Quando $a = b$, o retângulo MNPQ se transforma num quadrado e as assíntotas serão perpendiculares ($\theta = 90^\circ$). A hipérbole, neste caso, é denominada “hipérbole equilátera”

FIGURA 32: EXENTRICIDADE DA HIPÉRBOLE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.4.2 EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM DO SISTEMA

1º Caso: O eixo real está sobre o eixo dos x.

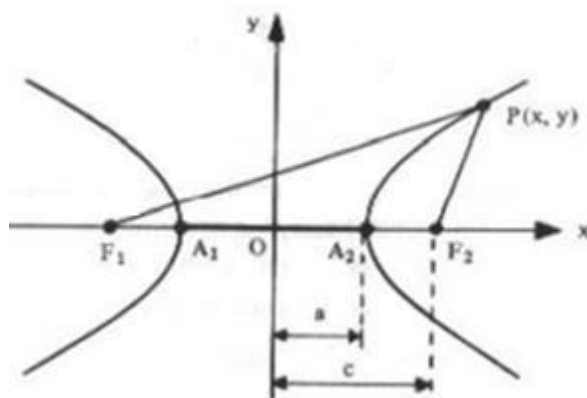
Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de uma hipérbole (Fig.32) de focos $F_1 (-c,0)$ e $F_2 (c, 0)$. Por definição, tem-se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou, em coordenadas:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a$$

FIGURA 33: HIPÉRBOLE COM O EIXO REAL SOBRE O EIXO DOS X



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Com procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegaremos à equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

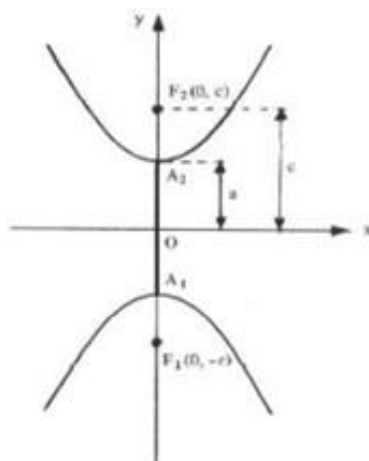
Que é a equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x.

2º Caso: O eixo real está sobre o eixo dos y.

Como já ocorreu com a parábola e a elipse, a equação desta hipérbole somente difere da anterior pela troca de posição das variáveis:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 34: HIPÉRBOLE COM O EIXO REAL SOBRE O EIXO DOS Y



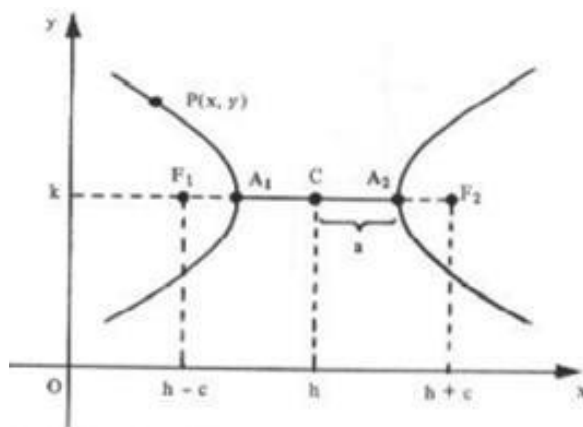
FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.4.3 EQUAÇÕES DA HIPÉRBOLE DE CENTRO FORA A ORIGEM DO SISTEMA

1º Caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos x

Consideremos uma hipérbole de centro $C(h, k)$ e seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da mesma.

FIGURA 35: HIPÉRBOLE COM O EIXO REAL PARALELO AO EIXO DOS X



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

O que comentamos em “Equação da elipse de centro fora da origem do sistema” para o caso de elipse também vale aqui. Assim:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É a equação de uma hipérbole de centro $C(0, 0)$ e eixo real sobre o eixo dos x; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos x e o centro é $C(h, k)$, sua equação passa a ser:

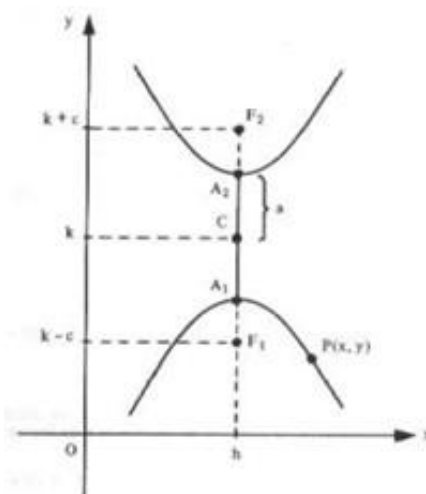
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

2º Caso: O eixo real é paralelo ao eixo dos y

De forma análoga, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 36: HIPÉRBOLE COM O EIXO REAL PARALELO AO EIXO DOS Y



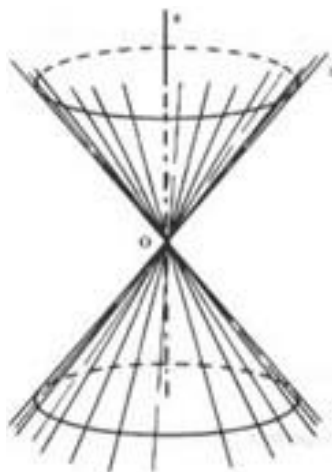
FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.5 SEÇÕES CONICAS

Como falamos na introdução desse trabalho, é possível definir as cônicas apresentadas anteriormente como secções de um plano com um cone duplo. A seguir, veremos como se dá esse processo.

Sejam duas retas e e r concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta e e façamos r girar 360° em torno de e mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta r gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O (Fig.37). A reta r é chamada geratriz da superfície cônica e a reta e , eixo da superfície. Chama-se seção cônica ao conjunto de pontos que foram a interseção de um plano com a superfície cônica.

FIGURA 37: SEÇÕES CÔNICAS



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Quando uma superfície cônica é seccionada por um plano π qualquer que não passa pelo vértice O , a seção cônica será:

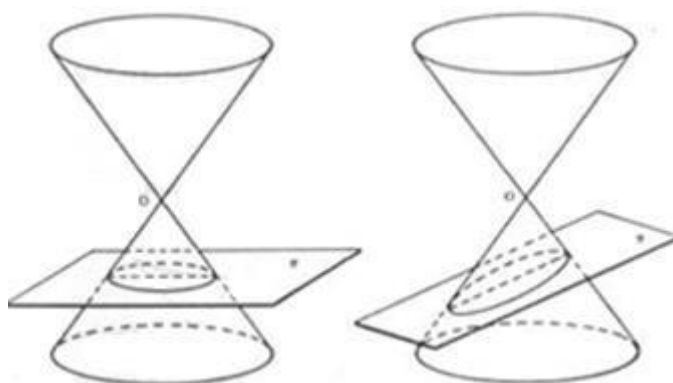
Uma circunferência se π for perpendicular ao eixo e da superfície (Fig.38);

Uma elipse se π for oblíquo ao eixo e, cortando apenas uma das folhas da superfície (Fig.38);

Uma parábola se π for paralelo a uma geratriz da superfície (Fig.39);

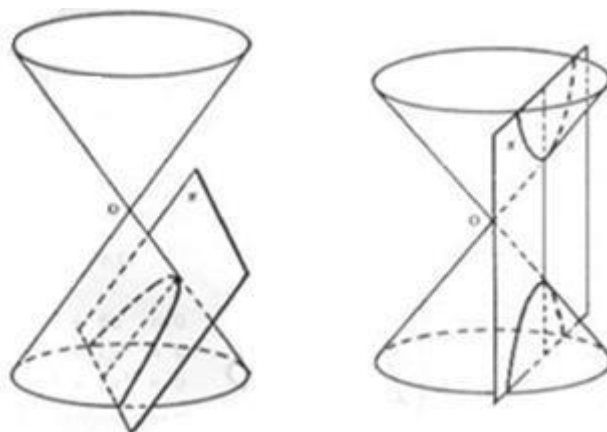
Uma hipérbole se π for paralelo ao eixo e (Fig.39).

FIGURA 38: SEÇÕES CÔNICAS (CIRCULO E ELIPSE)



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

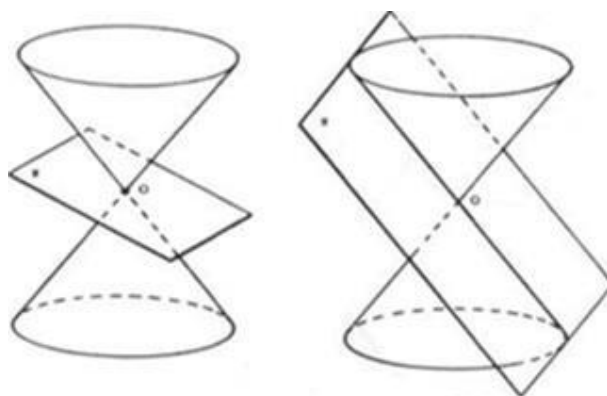
FIGURA 39: SEÇÕES CÔNICAS (PARÁBOLA E HIPÉRBOLE)



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

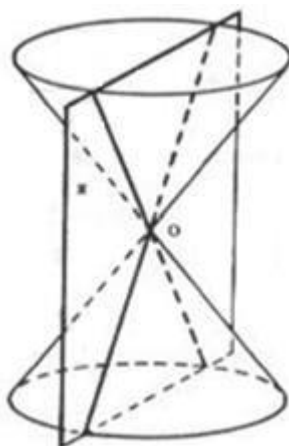
No caso de o plano π passar pelo vértice O , obtemos as cônicas degeneradas:
 Um ponto se π so tem o ponto O em comum com a superfície (Fig.40);
 Uma reta se π tangencia a superfície cônica (Fig.40);
 Duas retas se π forma com o eixo um ângulo menor do que este faz com a geratriz (Fig.41).

FIGURA 40: SEÇÕES CÔNICAS



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

FIGURA 41: SEÇÕES CÔNICAS



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

2.6 QUÁDRICAS

Para finalizar esse capítulo, apresentaremos uma revisão sobre o conceito de Quádricas. Como veremos mais adiante, são nessas superfícies que encontramos maior potencial de aplicação.

Inicialmente, considere a equação geral do 2º grau nas três variáveis x , y e z , a saber,

$$Ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0. \quad (1)$$

Note que se pelo menos um dos coeficientes a , b , c , d , e ou f for diferente de zero, a equação acima representa uma superfície quádrlica.

Se assim como nas secções cônicas, fizermos uma interseção dessa superfície com os planos coordenados ou com planos paralelos a estes, as curvas obtidas a partir disso serão as cônicas vistas acima. Por exemplo, a interseção entre a superfície quádrlica acima e o plano $z = 0$ resulta em

$$ax^2 + by^2 + 2dxy + mx + ny + q = 0,$$

que é uma cônica contida no plano $z = 0$, ou seja, no plano xOy .

Além disso, por meio de mudanças de coordenadas, podemos transformar a equação (1) nas seguintes formas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D \quad (2)$$

Ou:

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Rz &= 0 \\ Ax^2 + Ry + Cz^2 &= 0 \\ Rx + By^2 + Cz^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Onde a equação (2) representa uma quádrlica centrada e as esquações (3) representam quádrlicas não centradas.

A seguir, identificaremos e esboçaremos os gráficos de uma quádrlica a partir da sua equação. Dividiremos em dois grupos, as centradas e não centradas.

2.6.1 SUPERFÍCIES QUÁDRACAS CENTRADAS

Se nenhum dos coeficientes da equação (2) dor nulo, ela ode ser escrita sob uma das formas:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{B^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

Denominadas, qualquer delas, forma canônicas ou padrão de uma superfície quádrlica centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfície, conforme sejam três, dois ou um o número de coeficiente positivos dos termos 1 membro da equação. Se os referidos coeficientes forem todos negativos, não existe lugar geométrico.

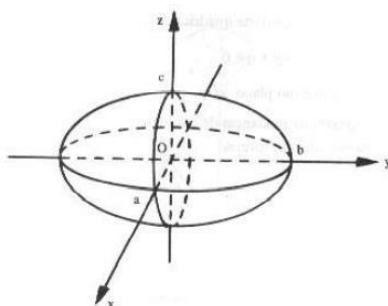
2.6.2 ELIPSÓIDE

O elipsoide é a superfície representada pela equação :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Em que todos os coeficientes dos termos do 1º membro equação (4) acima, são positivos, onde a, b e c são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide (Fig. 42).

FIGURA 1: ELIPSÓIDE



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

O traço do plano xOy é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$$

e os traços nos planos xOz e yOz são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0, \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, \text{ respectivamente.}$$

Se pelo menos dois dos valores a, b e c são iguais, o elipsóide é de revolução. Por exemplo, se $a = c$, o elipsóide é obtido girando a elipse

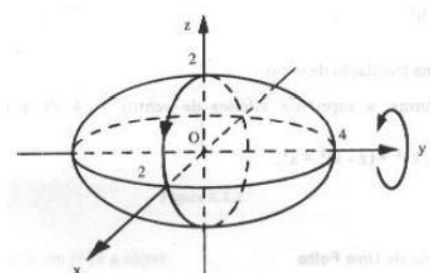
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$$

Do plano yOz em torno do eixo dos y. A figura 21 mostra o elipsóide de revolução:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Onde $a = c = 2$, que se obtém girando a elipse:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, x = 0 \text{ em torno do eixo dos y.}$$

FIGURA 2: ELIPSÓIDE**FONTE:** (STEINBRUCH, 1987.)

O traço do plano xOz é a circunferência:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, y = 0$$

No caso de $a = b = c$, a equação da elipse toma a forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

E representa uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio a .

Consideremos um plano paralelo ao plano xOz, isto é, um plano da forma $z = k$. Substituindo z por k na equação da elipse vem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

Se $|k| < c$, $1 - \frac{k^2}{c^2} > 0$, e, portanto, o traço no plano $z = k$ é uma elipse. Se $|k| = c$, os planos $z = c$ e $z = -c$ tangenciam o elipsóide nos pontos $(0, 0, c)$ e $(0, 0, -c)$. Se $|k| > c$, $1 - \frac{k^2}{c^2} < 0$ e, conseqüentemente não existe gráfico.

Considerações análogas podem ser feitas relativamente aos planos paralelos aos planos xOz e yOz. Se o centro do elipsóide é o ponto (h, k, l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, a equação da elipse assume a forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Obtida através de translação de eixos.

Da mesma forma, a superfície esférica de centro (h, k, l) e raio a , tem equação:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = a^2.$$

2.6.3 HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA

Se na equação das superfícies de quadricas centradas que é:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dois coeficientes dos termos 1º membro são positivos e um é negativo, a equação representa um hiperboloide de uma folha. A equação

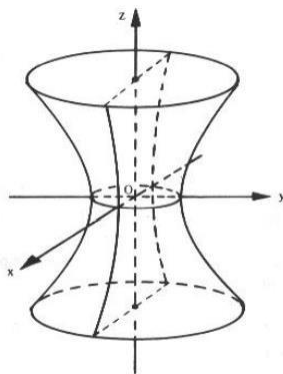
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

É uma forma canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo dos z (Fig.8.2.2). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ e } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

E representa um hiperboloide de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox , respectivamente.

FIGURA 3: HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

O traço no plano xOy em equação da hipérbole de uma folha é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z=0$$

E os traços nos planos xOz e yOz são as hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$$

E

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$$

respectivamente.

Um traço no plano $z=k$ é uma elipse que aumenta de tamanho a medida que o plano se afasta do plano xOy . Os traços nos planos $x=k$ $y=k$ são hipérboles. Se a equação acima tivermos $a=b$, o hiperboloide é a revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo imaginário, no caso, o eixo xOy é a circunferência

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, z = 0$$

Ou:

$$x^2 + y^2 = a^2, z = 0$$

2.6.4 HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS

Se a equação da superfície quádrlica que é:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Um coeficiente dos termos 1º membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um hiperboloide de duas folhas. A equação

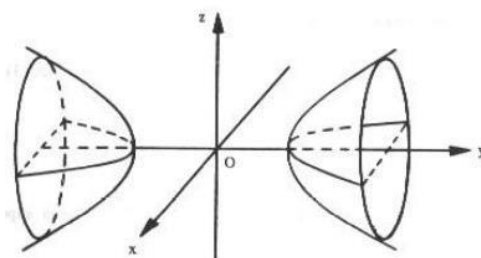
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

É uma forma canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo dos y (Fig. 35). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ e } -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

E representa hipérbole de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

FIGURA 4: HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHAS



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Os tracos nos planos xOy e yOz na equação da hipérbole de duas folhas são, respectivamente, as hipérbolés:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, z = 0$$

e:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0$$

O plano xOz não intercepta a superfície, nem qualquer plano $y = k$, onde $|k| < b$. Se $|k| > b$, o traço no plano $y=k$ é a elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, y = k$$

Os traços nos planos $x=k$ e $z=k$ são hipérbole. Se na equação da hipérbole de duas folhas tivermos $a=c$, o hiperboloide é de revolução, gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de seu eixo real. O traço no plano $y = k, |k| > b$, é a circunferência:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1, y = k$$

Ou;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{k^2}{b^2} - 1, y = k$$

2.6.5 SUPERFICIE QUÁDRICA NÃO CENTRADA

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1 membro das equações (3) for nulo, elas podem ser escritas sob uma das formas:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz; \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by; \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

Denominadas, qualquer delas, forma canônicas ou padrão de uma superfície quádrlica não centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfície, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

2.6.6 PARABOLOIDE ELIPTICO

Se nas equações de superfície quadrcas não centradas que é:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz; \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by; \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

coeficientes dos termos de segundo grau tiveram sinais iguais, a equação representa um parabolóide elíptico. A equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{B^2} = cz$$

É uma forma cônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo z. (Fig.46). As outras duas formas cônicas são:

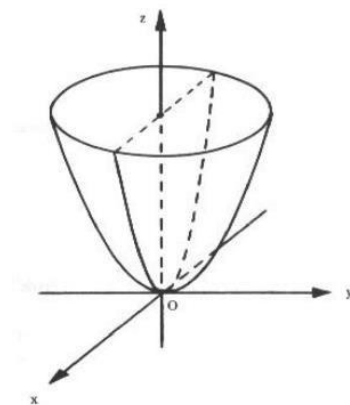
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by \text{ e } \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

E representa um parabolóide elíptico ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente. O traço no plano xOy na equação do parabolóide elíptico é a origem (0, 0, 0) e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas

$$\frac{x^2}{a^2} = cz, y = 0 \text{ e } \frac{y^2}{B^2} = cz, x = 0,$$

respectivamente.

FIGURA 46: PARABOLOIDE ELÍPTICO



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

Se $c > 0$, a superfície situa-se inteiramente acima do plano xOy e, para $c < 0$, a superfície está inteiramente abaixo deste plano. Assim, o sinal de c coincide com o de z , pois caso contrário não haveria lugar geométrico. Um traço no plano $z = k$, $k > 0$ (Fig.11), é uma elipse que aumenta de tamanho a medida que o plano se afasta do plano xOy. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas. Se na

equação do parabolóide elíptico tivermos $a = b$, o parabolóide é a revolução e pode ser gerado pela notação da parábola:

$$\frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$$

Em torno do eixo dos z . Neste caso, o traço no plano $z = k$ é uma circunferência.

2.6.7 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Se na equação das superfícies quádricas não centrada que é:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz; \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by; \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um parabolóide hiperbólico. A equação

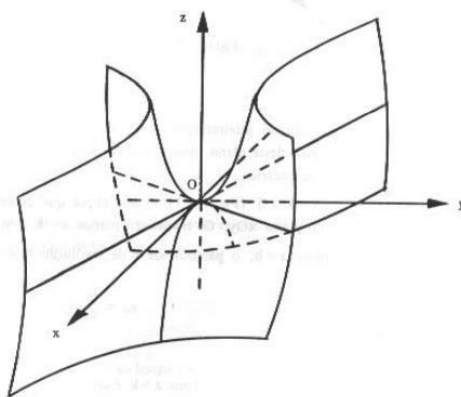
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

É uma forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z (Fig.12). As outras formas canônicas são:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by \text{ e } \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

E representam paraboloides hiperbólicos situados ao longo dos eixos Oy e Ox , respectivamente.

FIGURA 47: PARABOLOIDE HIPERBÓLICO



FONTE: (STEINBRUCH, 1987.)

A figura 47 mostra um esboço de um parabolóide hiperbólico descrito pela equação acima, onde $c > 0$. O traço em parabolóide hiperbólico no plano xOy é o par de retas:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0, z = 0,$$

Isto é: $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 0, z=0$ e $\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = 0, z=0$ e os traços nos planos xOz e yOz são as parábolas:

$$-\frac{x^2}{a^2} = cz, y = 0 \text{ e } \frac{y^2}{b^2} = cz, x = 0$$

Que tem o eixo dos z como eixo de simetria e concavidade para baixo e para cima, respectivamente. O traço no plano $z = k$ é uma hipérbole cujo o eixo real é paralelo ao eixo dos y se $k > 0$ e paralelo ao eixo dos x se $k < 0$. Os traços nos planos $x = k$ e $y = k$ são parábolas.

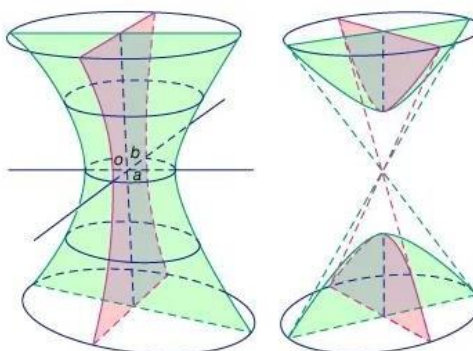
3. APLICAÇÕES DAS CÔNICAS

Nesse capítulo, apresentaremos algumas aplicações das cônicas e quádricas, tendo conhecimento do conteúdo estudado e suas respectivas equações. Saber onde aplicar os conceitos vistos em sala de aula, pode motivar os alunos e facilitar, assim, o aprendizado. Esse capítulo se propõe a apresentar algumas aplicações das cônicas e quádricas que vimos no capítulo anterior.

3.1 TORRES DE REFRIGERAÇÃO

As torres de refrigeração de usinas nucleares, tem o formato de um hiperboloide de uma folha, sólido que pode ser obtido pela rotação de uma hipérbole. Isso ocorre porque um hiperbolóide é uma superfície duplamente regradada, ou seja, para cada um de seus pontos, duas linhas diferentes cruzam a superfície. Desta forma, a torre pode ser construída com vigas de aço retas, minimizando os ventos cruzados e mantendo a integridade estrutural, usando o mínimo de materiais de construção. Ou seja com as torres construídas assim diminui o custo e sua estrutura não apresenta nenhuma alteração mesmo cumprindo todas as necessidades de forma fácil.

FIGURA 48: HIPERBOLOIDES



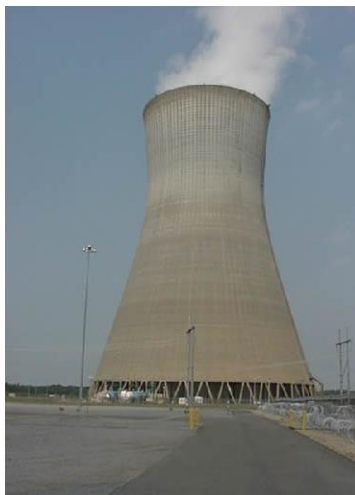
FONTE: (ENCYCLOPEDIA BRITANIA, 2006)

A estrutura em forma hiperbólica é muito eficiente e pode ser utilizada para muitas aplicações. As cascas hiperbólicas são estruturas finas que são

esteticamente agradáveis devido à sua curvatura e possuem resistência estrutural suficiente para várias cargas simétricas. Alguns estudos foram feitos em 2002 para demonstrar que essa é a forma mais econômica para essas ações assimétricas, esses estudos foram feitos por (Nasir, Thambiratnam, Butler e Austin). Com as edificações feitas nesse formato garante assim a qualidade da estrutura, apresenta uma boa circulação do ar, melhora a estabilidade e sua resistência. Esse formato não é só utilizado em torres de refrigeração, assim como também para torres de tv, usinas nucleares, reservatórios de água e em projetos industriais.

As mesmas vem ganhando grande importância na engenharia civil. Devido a essa geometria, as torres de refrigeração resistem às forças aplicadas através da ação de membranas. Elas tem mais de 150 metros de altura e 60 metros de diâmetro de base, a espessura das suas paredes é de aproximadamente de 25 centímetros, na maioria das cascas dessas torres. O interesse por esses projetos é por conta do tamanho das torres e ao aumento da demanda de projetos, também devido a vários colapsos de várias torres em diversos países da Europa. Mas também existem algumas imperfeições nesses projetos, pois se houver alguma mudança inesperada no projeto pode alterar significativamente o comportamento estrutural da mesma, isto é podem alterar a resposta estática, a resposta das vibrações livres e forçadas, e o comportamento referente a flambagem e pós-flambagem, que seria à flexão e a pós flexão. Pois pode acontecer de que a forma construída não fique igual a projetada e aí acontece algumas mudanças.

FIGURA 49: TORRE DE REFRIGERAÇÃO

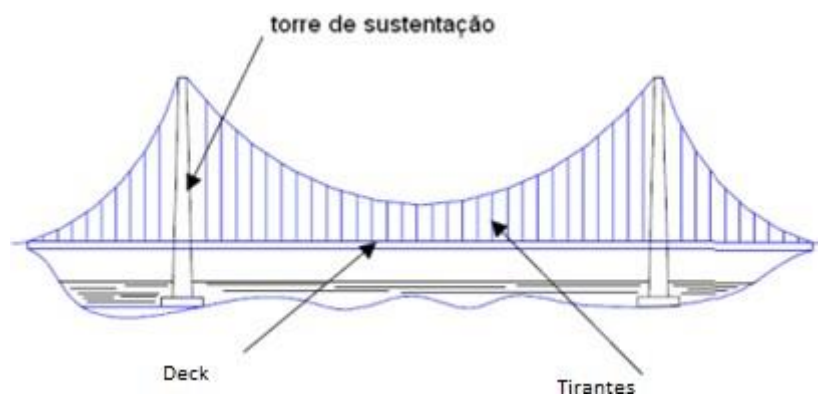


FONTE: (PARQUE DA CIÊNCIA, 2013)

3.2 PONTES SUSPENSAS

As pontes suspensas tem o formato de parábola e são elas as pontes de maiores vãos. Nelas, o deck contínuo é sustentado por vários cabos metálicos estaiados que se conectam a dois cabos maiores, que por sua vez se conectam à torre de sustentação, o deck é uma superfície lisa capaz de suportar peso. O cabo comprime a torre de sustentação, transmitindo a força de compressão para a fundação. Em uma ponte suspensa, os tirantes são espaçados uniformemente, de modo que a carga da ponte é distribuída uniformemente pelos cabos, que formam uma parábola. Tirantes são peças estruturais compostas por um ou mais elementos, que tem por função resistir a esforços, forças ou tensões de tração, ou torção, aplicáveis a uma região resistente.

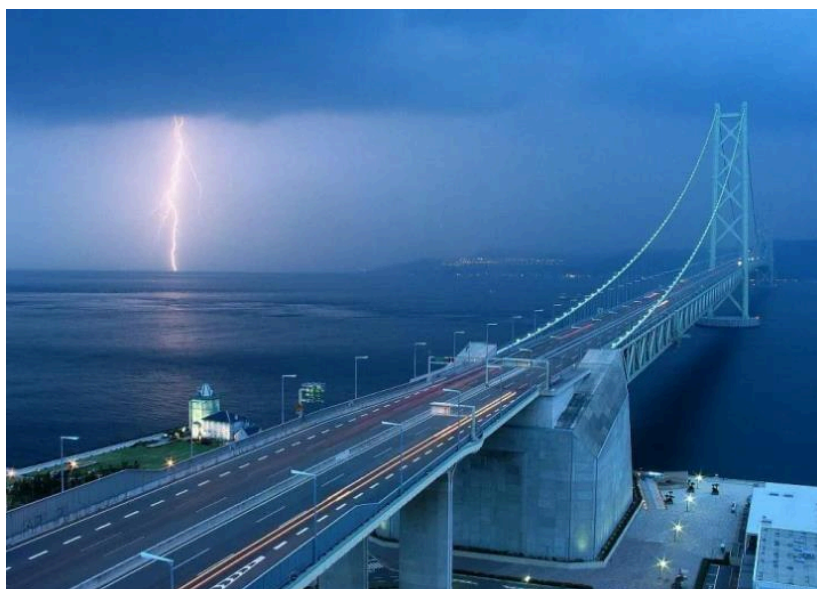
FIGURA 50: PONTE SUSPENSA



FONTE: (MACHADO)

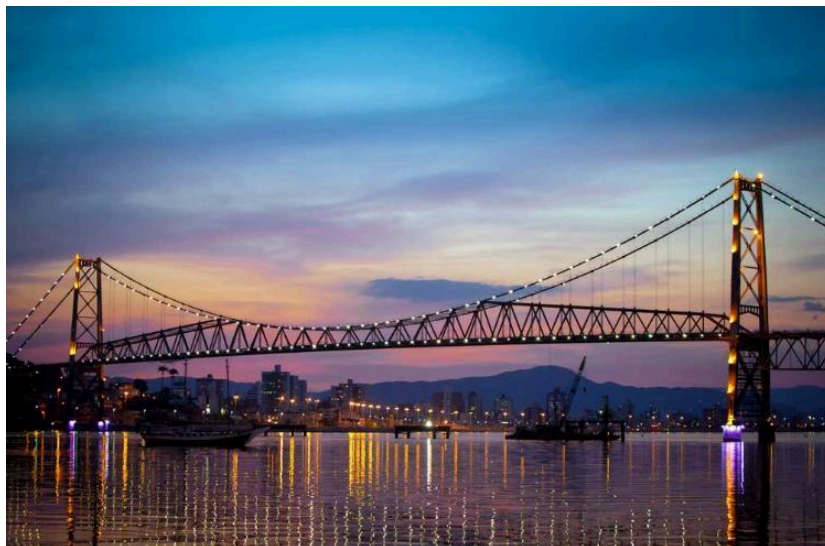
A maior ponte suspensa é a de Akashi Kaikyo no Japão com 3922 metros de comprimento e o de 1991 metros de vão central, a mesma liga as cidades de Kobe e Awaji Island. Também podemos observar essa aplicação da engenharia no Brasil na podendo de Hercilio Luiz, em Santa Catarina, a mesma tem seu projeto feito pelo engenheiro Robinson Steinmann. Ela ate ganhou o nome do seu idealizador Helicioluz, mas inicialmente era conhecida como ponte da independência pois é a primeira ponte a ligar a ilha ao continente.

FIGURA 51: PONTE SUSPENSA DE AKASHI KAIKYO



FONTE: (DE PEDRA E CAL)

IGURA 52: PONTE SUSPENSA DE HERCÍLIO LUZ



FONTE: (VOCÊ VIAJANDO, 2016)

Quando o cabo é submetido a uma carga uniformemente distribuída ao longo de seu vão, o perfil utilizado é o perfil da catenária que é diferente da parábola. A catenária é uma curva plana que representa a forma de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, pesado, suspenso por suas extremidades a partir de dois pontos fixos, e submetido exclusivamente à força da gravidade.

Essa carga se manifesta quando uma carga uniforme é aplicada ao cabo. Normalmente, este é o perfil usado quando o cabo é afetado apenas pelo seu próprio peso. Quando o cabo tem de suportar uma estrutura constante e uniforme ao longo de todo o eixo longitudinal, deixa de apresentar um perfil catenário e passa a assumir um perfil parabólico. Esta alteração de perfil é normalmente provocada pelas cargas permanentes contidas na estrutura suportada pelos cabos, levando assim ao fato de no caso de estruturas como pontes suspensas, este ser o perfil que será assumido.

Em sistemas estruturais suportados por cabos, eles podem ter a função de transmitir forças axiais e laterais. Um bom exemplo de cabo que é submetido apenas à transmissão de força axial é o tirante presente na suspensão de uma ponte estaiada ou suspensa. Neste caso, a transferência de força é semelhante à diagonal tensionada de uma treliça, na qual existem apenas forças axiais. O cabo principal de uma ponte suspensa seria um exemplo ideal de cabo que transmite forças de cisalhamento, forças exercidas nos tirantes. A transmissão de esforços ou forças, cortantes nesta estrutura tem um comportamento

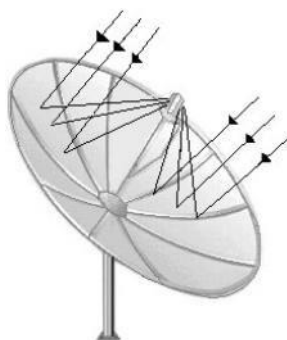
semelhante ao de uma viga simplesmente apoiada.

3.3 ANTENA PARABÓLICA

As antenas parabólicas tem uma superfície de formato parabólico, as mesmas apesar de não refletirem luz, são espelhos pois refletem os sinais de ondas de rádio frequência. Essas ondas tem comprimento maior que a da luz, com valores de aproximadamente 0,3 metros. Para esses comprimentos de onda, quase todas as superfícies são espelhos, mesmo que estejam cheias de buracos, como uma malha de arame. Se as ondas eletromagnéticas emitidas pelos satélites atingem a antena do satélite, esses raios são refletidos em um ponto chamado de foco parabólico, onde um dispositivo receptor converte as ondas eletromagnéticas no sinal recebido pela TV.

Estas aplicações nos permitem ver mais do que está ao nosso redor, porque as antenas parabólicas são hoje objetos comuns no nosso cotidiano, existente, na maioria das casas. A mesma utiliza um meio de transmissão por satélites, mas poucas pessoas sabem como essas ondas são capturadas e dificilmente relacionam isso com disciplinas vista na matemática ou na física. Assim como as pontes e as torres, também serve para nos mostrar isso, não que sejam algo comum de se ver, mas é algo que ninguém consegue relaciona-las com algum conceito matemático, até que o mesmo seja apresentado diretamente.

FIGURA 53: ANTENA PARABÓLICA



FONTE: (MACHADO)

Acontece que as antenas parabólicas capturam as ondas eletromagnéticas enviadas por satélites que orbitam a Terra. Essa captura de sinal ocorre porque a parábola tem a propriedade de refletir o conjunto de raios recebidos para um único ponto (o ponto focal da parábola). É neste ponto que o receptor de onda se posiciona, ele envia o sinal recebido para o conversor, que o decodifica e envia essa informação para o receptor de TV. Veja que não podemos fazer a antena exatamente na base da parábola giratória, pois onde escolhemos o receptor criará uma espécie de sombra em outro lugar da parábola, o que fará com que alguns raios não atinjam a parábola diretamente. Para resolver esse problema foi tratar a antena como um lado do parabolóide, e mantendo o receptor focado, conseguimos fazer o sinal passar por toda a superfície da antena, ou seja para melhor obtenção dos raios é utilizado o parabolóide no lugar da parábola e com isso conseguimos obter todos os raios.

3.4 TEMPLO EXPIATÓRIO DA SAGRADA FAMÍLIA

A nave principal da Sagrada Família tem um telhado formado por grandes janelas em forma de hiperbolóides de uma folha, a entrada de luz através de aberturas elípticas, com adição de parabolóides hiperbólicos, a base da nave tem colunas em forma de elipses. A princípio, Gaudí pensou em usar parabolóides hiperbólicos em vez de hiperbolóides, mas achou que eles tinham melhores qualidades reflexivas, pois refletiam a luz para dentro de qualquer ponto e tinham vantagens acústicas e de iluminação, combinando a luz do sol com a vela. Os arquitetos usam materiais opacos quando os reflexos não são desejados. Além disso, um hiperbolóide de uma folha contém todas as seções cônicas como pontos de interseção, assim como um cone.

FIGURA 54:TEMPLO EXPIATÓRIO DA SAGRADA FAMÍLIA



FONTE: (UNICAMP)

Para alcançar uma altura de cúpula mais alta sem o uso de arcos e contrafortes, Gaudí usou arcos parabólicos. Além das técnicas de modelagem de teleféricos utilizadas na cripta da Colônia Güell, a estrutura foi calculada graficamente. Para a torre do sino, Gaudí usou um grande parabolóide hiperbólico em um plano octogonal, o centro de gravidade está localizado dentro da torre do sino e, exceto para as maiores torres, não há colunas intermediárias. Paraboloides hiperbólicos também foram utilizados na base do pináculo da fachada da Natividade e na tampa da sacristia.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com a revisão bibliográfica feita acima e com as aplicações apresentadas, podemos concluir que a geometria estuda no curso de Geometria Analítica está presente ao nosso redor, quer seja pela suas formas, que podem ser visualmente agradáveis, quer seja por suas boas propriedades, que podem ser usadas na construção de certas estruturas.

Fazer uma contextualização do que é visto em sala de aula com o que pode ser visto fora dela no nosso dia a dia, pode ser fundamental para justificar aquele assunto proposto pelo professor e, assim, chamar a atenção do aluno, fazendo com que ele preste mais atenção e, conseqüentemente, aprenda mais. Além disso, o curso de Engenharia Civil é dos cursos de maior demanda em nosso campus. Inserir elementos dessa engenharia em uma disciplina de primeiro semestre, como o caso de Geometria Analítica, não só garante a contextualização, mas proporciona uma experiência completa ao aluno, com teoria e prática.

Portanto, diante do que foi apresentado, consideramos ter atingido o nosso objetivo com o trabalho. Como planejado, fizemos uma revisão bibliográfica de cônicas e quádras, passando pelo seu contexto histórico, por suas definições, equações e chegando, finalmente, nas suas aplicações, criando, assim, um material de apoio para alunos ingressantes no curso de Ciência e Tecnologia.

5. REFERENCIAS

Azero arquitetura. Gigante da engenharia: ponte akashi kaikyô. Disponível em: <https://azeroarquitetura.wordpress.com/2015/08/27/gigante-da-engenharia-ponte-akashi-kaikyô>. Acesso em: 16 de abril de 2022

Boulos, p. & camargo, i. Geometria analítica – um tratamento vetorial. 3a. Ed. São paulo: prentice hall, 2005.

Campos, pablo kristian trindade, prates, patricia gomes. Avaliação teórica do comportamento estrutural de pontes suspensas por cabos de aço. Revista científica multidisciplinar núcleo do conhecimento. Ano 04, ed. 03, vol. 02, pp. 133-147. Março de 2019. Issn: 2448-0959.

Cabezón, eduardo sáenz de. ¿por qué las antenas parabólicas son parabólicas? Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=yj-cttc6asm>>. Acesso em: 28 fev. 2020.

Delhipages. Hyperboloid | matemática. Disponível em: <https://delhipages.live/pt/ciencia/matematica/hyperboloid>. Acesso em: 15 jun. 2022.

De pedra e cal. Ponte suspensa de messina: um "assombro". Disponível em: <http://depedraecal.blogspot.com>. Acesso em: 16 de abril de 2022.

Ev 28i introdução à história da matemática / howard eves; tradução hygino h. Domingues. 5a ed. - campinas, sp: editora da unicamp, 2011.

Isaias, vizotto et al. Análise estrutural de torres de resfriamento hiperbólicas solicitadas por carregamento assimétrico. Disponível em: <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewfile/3127/3055>. Acesso em: 30 maio 2022.

Machado, mirtes tamy gomes. Parábolas: as curvas preciosas. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/673-4.pdf>. Acesso em: 16 de abril de 2022.

Mdig. 50 prédios muito estranhos. Disponível em: <https://www.mdig.com.br/?itemid=3922>. Acesso em: 31 mai. 2022.

Parque da ciência. Cônicas: noções intuitivas e aplicações. Disponível em: <http://parquedaciencia.blogspot.com/2013/04/conicas-nocoos-intuitivas-e-aplicacoes.html>. Acesso em: 16 de abril de 2022.

Steinbruch, alfredo; winterle, paulo. Geometria analítica. São paulo: makron books editora, 1987

Stringfixer. Representações paramétricas. Disponível em: <https://stringfixer.com/pt/hyperboloid>. Acesso em: 30 maio 2022.

Unicamp. Historicamente falando. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~apmat/ellipse-na-arquitetura/>. Acesso em: 15 jun. 2022

Você viajando. Ponte hercílio luz: florianópolis. Disponível em: <http://www.voceviajando.com.br/foto-do-dia/2016/12/ponte-hercilio-luz-florianopolis>. Acesso em: 16 de abril de 2022