

UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA DE ESTUDO SOBRE O NÚMERO DE EULER

Ben-Hur Félix Anastácio¹, Paulo César Linhares da Silva²

Resumo: O presente trabalho tem foco em uma abordagem metodológica sobre o estudo e surgimento do número de Euler. Tal abordagem baseia-se em demonstrações matemáticas que fazem uso de conceitos de sequências, séries e teoremas clássicos de um curso de cálculo diferencial e integral em nível de graduação. Também é dado enfoque em aplicações que utilizam o número de Euler. A linguagem Python, é utilizada como uma ferramenta metodológica de obtenção do número de Euler por meio de sequências numéricas e como forma de obter a clássica equação da catenária, descrita e apresentada neste trabalho.

Palavras-chave: Número de Euler, Linguagem Python, Equação Diferencial Ordinária.

1. INTRODUÇÃO

Os números irracionais se fazem presente no cotidiano de várias formas e até mesmo são utilizados de forma despercebida. Alguns são bem conhecidos como a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, conhecido como o número Pi, denotado por $\pi \cong 3,1415926$, ou também o número áureo, $\Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, ou proporção áurea, o qual pode ser encontrado em obras de arte, medições do corpo humano, edificações, sendo utilizado por arquitetos desde a antiguidade. No entanto, outro número irracional de grande importância chama a atenção na matemática e na engenharia que é o número de Euler, denotado por e o qual vale aproximadamente 2,71828. Este número é bastante utilizado em problemas de cálculo, e os estudantes de Ciências Exatas tomam conhecimento sobre o número de Euler quando estão trabalhando e resolvendo problemas com aplicações voltadas para matemática, física, engenharias e áreas afins.

Diante deste panorama, afirma-se que o número π está para a geometria assim como o número de Euler está para o cálculo. O objetivo principal deste trabalho é mostrar a relevância do número de Euler para as ciências exatas e ciências tecnológicas. Os estudos foram inicializados através de um levantamento histórico de como surgiu o número de Euler, e quem foi Leonhard Euler. Em seguida, são mostrados alguns resultados matemáticos para que seja possível fazer demonstrações, geométrica e analítica, para a obtenção deste número de Euler. Aqui é incluído a sua definição, mostrando que a sequência que possui o termo geral $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tem limite e quando o n tende ao infinito. É demonstrado também o número e como sendo uma série numérica. As demonstrações matemáticas servem de base para que seja possível validar as aplicações que serão apresentadas neste trabalho. Com isto, é possível mostrar a aplicabilidade e a importância deste número de Euler.

Podem-se citar diversas aplicações do número de Euler, essas aplicações se baseiam em problemas clássicos de engenharia e matemática. Por exemplo, no caso dos juros compostos, onde o e é utilizado na situação de empréstimo bancário contabilizando juros na maior frequência possível, $M_t = M_0 + e^{rt}$, assim como o uso da constante como base do logaritmo natural, $\ln$, e a identidade de Euler, $e^{\pi i} = -1$, que consiste em uma identidade matemática, isto é, uma igualdade que, para quaisquer valores das variáveis que nela apareçam, esta permanece sendo verdadeira.

No campo da economia e finanças com o intuito de maximizar o acúmulo de capital através dos juros, algum matemático ou comerciante utilizou a matemática financeira para ter lucros máximos em seus investimentos. Em tempos remotos, um tablete de argila encontrado e datado de meados do ano de 1700 A.C., possuía a questão de quanto tempo seria necessário para dobrar uma quantia de dinheiro, a 20% ao ano, e logo abaixo a resposta $3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3} = 3,7870$, que é aproximadamente 3 anos e 9 meses e 18 dias. Ao considerar que o escriba do tablete encontrado utilizou a fórmula dos juros compostos para capitalização, $C_t = C_0(1+r)^t$, e que para esse caso foram inseridos os dados como sendo $r = 20\%$, interpolando os valores de $(1,2)^3$ e $(1,2)^4$ em uma tabela de exponenciais existente da época e utilizando $C_t = 2C_0$, sendo C_0 um valor inicial qualquer, é observado que $2C_0 = C_0(1,2)^t$, e como o resultado independe de C_0 , tem-se que $2 = (1,2)^t$, para maiores detalhes consultar a referência [1].

Com base nesses fatos e explorando mais a equação da capitalização $C_t = C_0(1+r)^t$, considerando que na comunidade bancária é possível encontrar vários tipos de composições de juros, sendo eles anuais, semestrais, mensais, semanais e mesmo diários, podemos dividir a taxa anual (r) por n vezes ao ano. Assim multiplicando a

quantidade de tempo (t), em anos, por esse mesmo n , surge a seguinte equação:

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (1)$$

Aplicando essa equação (1) ao caso especial em que $r = 1$, $t = 1$ ano e o capital inicial, $C_0 = \text{R\$ } 1,00$, tem-se que:

$$C_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (2)$$

O número e pode ser observado em inúmeros outros momentos da história, como nos logaritmos de John Napier, que criou um sistema que facilitava o cálculo de senos na astronomia, o qual chamou de logaritmo, e que, embora Napier não tivesse conhecimento na época, é possível verificar-se que a base do seu sistema é $\frac{1}{e}$ [1]. Assim como é possível encontrar o número e em questões como a quadratura da hipérbole e o problema da catenária, que se trata de determinar a equação da curva de um fio flexível, de densidade uniforme, preso entre dois pontos e que se sustenta por seu próprio peso.

Porém, além de todos estes casos em que o número e se faz importante, ele só foi realmente percebido e começou a ter reconhecimento em uma obra publicada em 1748 por Leonhard Euler (1707-1783), um matemático nascido em Besel, Suíça, que iniciou seus estudos para seguir a carreira do pai como ministro religioso, passou a admirar a matemática e a fez sua principal ocupação. Tem uma das mais extensas produções científicas que se distribui por diversas áreas. *Introductio in analysin infinitorum* é a sua obra mais influente, publicada em 1748, o alicerce da moderna análise matemática, obra na qual ele resume suas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas, e também onde chama a atenção pela primeira vez para o papel do número e e da função e^x quando diz: “Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e que é 2,71828182845904523...”. Pode ter sido Euler também o primeiro a se referir ao e como um número irracional, o que só foi confirmado quando foi provado por Joseph Liouville (1809-1882) a existência de números transcendentos e só então Charles Hermite (1822-1901) conseguiu provar que e é um número transcendente [1].

2. DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, são feitas duas demonstrações clássicas de como é possível obter o número e . Uma demonstração é baseada na utilização de conceitos de sequências de números reais e a outra é baseada em uma argumentação geométrica e utilização de conceitos de cálculo diferencial.

2.1. O número e como o limite de uma sequência numérica

Uma sequência numérica é definida como uma função, cujo domínio é o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) e o contradomínio é o conjunto dos reais. Para cada índice n natural, associa-se um termo a_n pertencente aos reais, que são chamados de termos da sequência. Eles podem ser representados como uma lista ordenada $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, ou simplesmente por seu termo geral (a_n) e também pela fórmula do termo geral, por exemplo $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, [2]. Neste trabalho, é feito um estudo da sequência de termos geral a seguir:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (3)$$

Uma sequência (a_n) é classificada como limitada superiormente, se existe um número N tal que $a_n \leq N, \forall n \geq 1$ e é classificada como limitada inferiormente sempre que existir um número M tal que $M \leq a_n, \forall n \geq 1$. Se a sequência for limitada superior e inferiormente, ela é classificada como uma sequência limitada.

Exemplos de sequências clássicas presentes na matemática são a progressão aritmética e a progressão geométrica, mais conhecidas como PA e PG, respectivamente. Outro exemplo é a sequência de Fibonacci, em que $x_0 = x_1 = 1$ e $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, ou seja, a visualização dos primeiros termos dessa sequência é (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...).

As sequências também são classificadas como convergentes e divergentes. Utilizando a definição do limite de uma sequência, é possível definir a convergência de uma sequência [2].

Definição 1: Uma sequência (a_n) converge para um número L , real, se para todo número $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.

Dessa forma, se L não existe, dizemos que a sequência diverge, e se (a_n) converge para L , podemos dizer

que L é o limite da sequência e escrevemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \quad (4)$$

Uma série numérica é definida como sendo a soma dos termos de uma sequência (a_n) , e é denotada como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, em que a_n é denominado termo geral da série.

Dessa forma, considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, então se define a soma parcial

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + \dots + a_k,$$

sendo esta uma sequência recursiva dada por $S_1 = a_1$ e $S_k = S_{k-1} + a_k$ para $k > 1$. Portanto, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

A seguir são demonstrados alguns teoremas essenciais para o estudo de sequências. As demonstrações dos Teoremas 1 e 2 foram adaptadas da referência [2].

Teorema 1: Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Demonstração: Como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, temos que, $\forall \varepsilon > 0$, existe $n_a \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_a$ tem-se $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$. Semelhante, se $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_c$, tem-se $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$. Considerando $N = \max\{n_a, n_c\}$, tem-se que $L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon \leq c_n \leq L + \varepsilon$, para $n > N$. Portanto $L - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq L + \varepsilon$. Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. ■

Uma sequência monótona, é toda sequência que satisfaça uma das condições a seguir:

1. $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Não-decrescente)
2. $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Não-crescente)
3. $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Crescente)
4. $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Decrescente)

Definindo supremo e ínfimo: sendo C um conjunto parcialmente ordenado e P um subconjunto de C .

Um elemento $K \in C$ é dito supremo de P o menor dos majorantes:

- $n \leq K$, para todo $n \in P$;
- $n \leq K' \Rightarrow n \leq K$.

Já um elemento $M \in C$ é dito ínfimo de P se for o maior dos minorantes:

- $M \leq n$, para todo $n \in P$;
- $M' \leq n \Rightarrow M' \leq M$.

Teorema 2: Toda sequência limitada e monótona é convergente.

Demonstração: Considerando (a_n) como sendo uma sequência não-decrescente e limitada, existe um $N = \sup\{a_n\}$, $\forall n \geq 1$, assim sendo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N - \varepsilon < a_{n_0} \leq N$. Dessa forma, como (a_n) é não-decrescente, para $n \geq n_0$, tem-se que $a_{n_0} \leq a_n$. Portanto, $N - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq N < N + \varepsilon$, logo $|a_n - N| < \varepsilon$. Consequentemente, por definição, (a_n) converge para N .

Analogamente, considerando uma sequência (a_n) como sendo não-crescente e limitada, existe um $M = \inf\{a_n\}$, $\forall n \geq 1$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M \leq a_{n_0} < M + \varepsilon$. Assim, para $n \geq n_0$, tem-se que, como (a_n) é não-crescente, $a_{n_0} \geq a_n$. Portanto, $M - \varepsilon < M \leq a_n \leq a_{n_0} < M + \varepsilon$. Consequentemente, $|a_n - M| < \varepsilon$, e logo, por definição, (a_n) converge para M . ■

Utilizando a sequência numérica cujo termo geral é a Equação (3), tem-se como objetivo mostrar que esta é convergente, e que o seu limite é definido pelo número de Euler, conforme Equação (5). A demonstração deste fato será feita a seguir com a utilização de alguns teoremas auxiliares.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (5)$$

Ao observar o comportamento da Equação (3) para valores crescentes de n , é possível obter o valor de e como é mostrado na Tabela 1. Os dados obtidos na Tabela 1 foram feitos utilizando-se a linguagem Python.

Tabela 1. Número de Euler obtido da Equação (3) usando o Código 1.

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
3	2,37037
4	2,44140
5	2,48831
10	2,58117
100	2,70467
1.000	2,71692
10.000	2,71814
100.000	2,71826
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

Código 1. Obtenção dos valores da Equação (3) para um n natural em Linguagem Python

```
import numpy as np

def Euler_TCC(n):

    return (1+1/n)**n

for i in range(1,10,1):
    print(Euler_TCC(i))
```

Lema 1: (Desigualdade entre médias) Sejam a e b dois números reais positivos então $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Demonstração: Considere o produto notável $(a - b)^2 \geq 0$, fazendo a expansão deste produto notável tem-se $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Somando $4ab$, obtém-se $a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$. Reagrupando o lado esquerdo da desigualdade, $(a + b)^2 \geq 4ab$, sendo a e b números positivos, é possível calcular a raiz quadrada e dividir a desigualdade por 2, obtendo dessa forma que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. ■

A generalização desta Lema pode ser conferida na referência [3].

Este Lema pode ser generalizado para o caso de uma quantidade de n números reais não-negativos, conforme a seguir.

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Além disso, podemos observar que, quando $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, então

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Teorema 3: A Equação (3) converge para o número e , ou seja:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Demonstração: A demonstração deste teorema é uma adaptação da referência [4]. Aqui foi utilizado o Lema 1, que permite demonstrar que a Equação (3) é crescente e, após a demonstração, é utilizado também o Teorema 1 para verificação da convergência.

Para mostrar que (3) é limitada, deve-se mostrar que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}, \text{ com } m + 1 > n.$$

Com efeito, $\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) < 1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$. Observa-se pelo Lema 1 que,

$$\sqrt[m+n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+(m+1)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)}{m+n+1} = 1.$$

Portanto, $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{m+1} &< 1 \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1} &< 1 \\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}, \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Claramente, a Equação (3) é limitada, já que, tomando $m=1$, tem-se:

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A partir de (6), pode-se provar que a sequência a_n , apresentada em (3), é crescente. Como (6) é satisfeito para todo m e n natural, em particular vale:

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n(n+2)} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Desse modo,

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Sendo

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^n = \frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1},$$

tem-se que

$$\frac{(n+1)^{2n}}{n^n(n+2)^n} < \frac{n+2}{n+1}.$$

Por consequência,

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Logo,

$$a_n < a_{(n+1)}.$$

Assim sendo, pelo Teorema 2, a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em (3), é convergente, pois é crescente e limitada. Ou

seja, existe um número real que corresponde ao $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e sabendo disto, é possível demonstrar que esse limite é o número e , partindo da afirmativa que este por sua vez é igual a Série (7),

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (7)$$

ou seja, a Série (7) converge para o número e conforme a Equação (8)

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad (8)$$

Assim, aplicando a expressão de expansão do Binômio de Newton à Série (8), obtém-se

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

A sequência de operações realizadas em (9), para cada i em $\{1, \dots, n-1\}$, $1 - \frac{i}{n} < 1$, permite concluir que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Considerando agora um número qualquer k tal que $1 \leq k < n$, tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Portanto, quando $n \rightarrow \infty$,

$$e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} = s_k, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (11)$$

De (10) e (11) tem-se,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pelo Teorema 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq e.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e. \blacksquare$$

2.2. Demonstração geométrica para encontrar o valor do número e

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$.

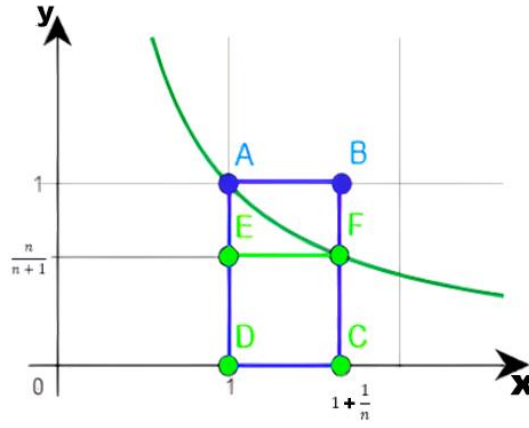


Figure 1. Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Autoria Própria.

Considere o ponto $x_0 = 1$ e o ponto $x_1 = 1 + \frac{1}{n}$, sendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, tomados no domínio da função e aplicando o Teorema do Confronto (Secção 2.1, Teorema 1) na Figura 1, tem-se:

$$A_{DEFC} \leq A_{curva} \leq A_{ABCD}$$

$$\frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{x} dx \leq 1 \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right)$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Multiplicando a desigualdade por n , obtém-se

$$\frac{n}{n+1} \leq n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{n}{n}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1.$$

Pelo Teorema do Confronto, observa-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1.$$

Como,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = 1.$$

Assim, pela continuidade da função logarítmica, obtém-se:

$$\ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = 1.$$

Por fim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \blacksquare$$

Nesta seção foram mostradas duas formas de se obter o número e . As técnicas feitas aqui são clássicas e estudadas durante o curso de graduação em ciência e tecnologia. Os resultados numéricos foram também obtidos por meio da programação em linguagem Python, com isto, reforça-se também o fato de que a utilização de programação na solução de problemas clássicos é bastante útil no aprendizado de assuntos estudados durante o curso.

3. APLICAÇÃO

O número de Euler aparece em muitas aplicações de matemática, principalmente aqueles que envolvem cálculo diferencial em que utilizam funções hiperbólicas. Essas funções são definidas com combinação linear de funções exponenciais. As funções hiperbólicas podem ser comparadas com as funções trigonométricas, isto em termos de aplicabilidade. Essas funções recebem este nome, pois são geradas a partir da hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = 1$. Um exemplo de aplicação dessas funções seria o estudo da catenária. A catenária é uma curva bastante estudada no meio científico. Na engenharia elétrica esta curva é estudada para projetar a altura de fios elétricos e bolas de sinalização em rodovias, conforme a figura a seguir.



Figure 2. Fio suspenso representado pela equação da catenária. Fonte: Wikipédia.

O estudo da catenária baseia-se no cálculo da tensão em um cabo suspenso pelas extremidades. Para a realização deste estudo, faz-se necessário definir as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Veja a seguir.

3.1 Funções hiperbólicas

A representação para as funções seno hiperbólico na variável de x (**sinh** x) e cosseno hiperbólico na variável x (**cosh** x) [5], são:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (12)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (13)$$

A partir de (12) e (13), pode-se demonstrar a identidade fundamental da geometria hiperbólica (14) que é oriunda da parametrização da hipérbole $X^2 - Y^2 = 1$, com $X = \cosh x$ e $Y = \sinh x$, como se segue

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1, \quad (14)$$

já que,

$$\begin{aligned} (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

3.2 Equação da Catenária

Catenária é o nome que se dá a curva formada por um cabo flexível suspenso apenas pelas extremidades e estando sujeita apenas ao próprio peso. Esta curva está presente no designe de alguns arcos arquitetônicos e pode ser observada na fiação elétrica suspensa entre os postes nas ruas como citado anteriormente. A descrição matemática da equação da catenária é feita pela utilização da função cosseno hiperbólico como a seguir.

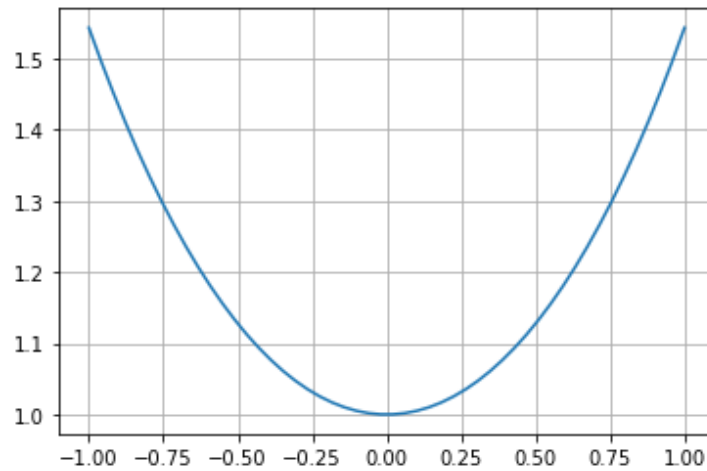


Figure 3. Equação da catenária $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, para $a = 1$ obtida pelo Código 2. Autoria Própria.

Código 2. Para gerar o gráfico da catenária em Linguagem Python.

```
import numpy as np          # Importação dos pacotes s numpy e matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
a=1

def f(x): # Definição da função f
    return a*0.5*(np.exp(x/a)+np.exp(-x/a))
valor=f(0)
print (valor)

x=np.linspace(-1,1) # Compreenssão em listas para os valores de x e y
y=[f(i) for i in x]
print(y)

plt.plot(x,y) #Plotando o gráfico de f
plt.grid()
plt.show()
```

O parâmetro a é dado por $a = \frac{T_0}{p}$, sendo T_0 a componente horizontal da tensão e p é o peso por unidade de comprimento, conforme a figura a seguir:

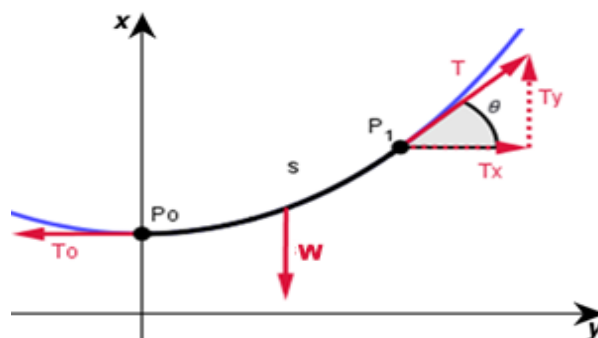


Figure 4. Forças atuantes no fio suspenso. Autoria Própria.

Para a obtenção da equação da catenária, inicialmente, é feita a análise da existência de duas condições: a primeira é que o cabo deve ser flexível, a segunda é imposição das condições de equilíbrio [6].

Considere a função comprimento de arco s entre o ponto mais baixo da curva $P_0(0, y_0)$ e o ponto $P_1(x, y)$. Sabe-se que em P_0 atua a força de tensão T_0 , que possui coordenada $(-T_0, 0)$. Em P_1 atua uma tensão T tangente à curva, que é decomposta em vetores $(T_x, T_y) = (T \cos \theta, T \sin \theta)$. Além destas forças, há a atuação da força peso na direção y , definida por $W = (0, -ps)$ no qual p é a densidade do cabo.

Considerando a condição de equilíbrio, em x tem-se:

$$T \cos \theta + (-T_0) = 0 \Rightarrow T \cos \theta = T_0 \quad (15)$$

Em y tem-se:

$$T \sin \theta + (-ps) = 0 \Rightarrow T \sin \theta = ps \quad (16)$$

Ao dividir (16) por (15), obtém-se,

$$\tan \theta = \frac{ps}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ps}{T_0}$$

E sendo $a = \frac{T_0}{p}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a} s. \quad (17)$$

A solução da Equação (17) depende da variável de comprimento s . Para simplificar a solução da Equação (17) faz-se necessário expressar s como função das variáveis $(x, y(x))$. Para isso, calcula-se a derivada de segunda ordem em relação à x na Equação (17) das funções y e s , o que gera a seguinte equação.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{ds}{dx}. \quad (18)$$

Definição 2: O comprimento de arco $s(a, c)$ da função $y = f(x)$ com $a \leq x \leq c$ é dado por:

$$s(a, c) = \int_a^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (19)$$

Em que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Para maiores detalhes sobre esta definição ver a referência [7].

Deste modo aplicando a função s definida de P_0 até P tem-se:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (20)$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (21)$$

Substituindo (21) em (18) tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (22)$$

A Equação (22) é uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem. Para resolver este tipo de equação usa-se o método da redução de ordem. Deste modo, utiliza-se a substituição de variáveis a seguir:

$$\frac{dy}{dx} = z(x), \quad (23)$$

derivando obtém-se,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}. \quad (24)$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1+z^2}. \quad (25)$$

Integrando a Equação (25) pelo método da separação de variáveis obtém-se:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{a} \int dx. \quad (26)$$

A integral pode ser resolvida pelo método da substituição trigonométrica $z = \operatorname{tg} \theta$ e $\frac{dz}{d\theta} = \sec^2 \theta$. Aplicando estas substituições em (26) tem-se:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{1+\sec^2 \theta}} d\theta = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C. \quad (27)$$

Realizando as devidas substituições em (27), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ln |z + \sqrt{1+z^2}| &= \frac{x}{a} + C \\ z + \sqrt{1+z^2} &= \pm e^{\frac{x}{a}} \\ (\sqrt{1+z^2})^2 &= (e^{\frac{x}{a}} - z)^2 \Rightarrow 1+z^2 = e^{\frac{2x}{a}} - 2ze^{\frac{x}{a}} + z^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Após as devidas substituições e impondo as condições iniciais obtém-se uma equação do segundo grau cuja forma é:

$$e^{\frac{2x}{a}} - 2ze^{\frac{x}{a}} - 1 = 0. \quad (29)$$

A Equação (29) pode ser resolvida usando-se a substituição $y = e^{\frac{x}{a}}$, o que resulta na equação do segundo grau

$$y^2 - 2zy - 1 = 0,$$

cujas soluções são

$$y = z \pm \sqrt{1+z^2}. \quad (30)$$

Por fim, como, de (28),

$$\begin{cases} z + \sqrt{1+z^2} = e^{\frac{x}{a}} \\ z + \sqrt{1+z^2} = -e^{-\frac{x}{a}} \end{cases} \quad (31)$$

portanto,

$$z = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} \quad (32)$$

e, de (23)

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \Rightarrow y = \int z(x) dx \quad (33)$$

assim, a equação da catenária é obtida substituindo (32) em (33):

$$y = \int \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx \quad (34)$$

cujas soluções são a Equação (35),

$$y = \int \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx \Rightarrow y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C. \blacksquare \quad (35)$$

A constante C pode ser zero sendo obtida por meio dos valores de $y(x)$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em muitas aplicações em ciência e tecnologia que são oriundas de resultados de matemática encontra-se a presença do número de Euler. O cálculo diferencial que utiliza funções hiperbólicas é um exemplo disso, o estudo e feitura de construções arquitetônicas, as pesquisas em finanças no estudo de juros compostos, no desenvolvimento e pesquisa da geometria hiperbólica, nas pesquisas em engenharia elétrica ou física com o estudo da catenária são exemplos de áreas que necessitam da utilização do número de Euler. Destaca-se também na engenharia elétrica o uso de funções hiperbólicas e funções complexas são de fundamental importância para o estudo de circuitos elétricos em corrente alternada. A metodologia empregada neste trabalho é uma das formas de abordagem, ensino e estudo do número de Euler. Neste trabalho, buscou-se formar a base teórica sobre o assunto e em seguida criar resultados e aplicações para a utilização desta teoria. A utilização aqui de uma linguagem de programação Python nos mostra meios de se estudar conceitos teóricos de matemática com grande aplicação em áreas afins à matemática.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. **História do número e: Gênese e aplicações**. 2013. Disponível em: <<http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913/12528>>. Acesso em: 27 mar. 2020.
- [2] MASSAGO, S. **Sequências e Séries**. 2014. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula17.pdf>>. Acesso em: 06 abr. 2020.
- [3] FONTE, A. C. da. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**. 2013. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=27761>. Acesso em: 03 jun. 2020.
- [4] FIGUEIRA, R. F. **O Número de Euler**. João Pessoa. 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9402/2/arquivototal.pdf>>. acesso em: 19/01/2020
- [5] FREITAS, M. do B. C. S. S. B. **As Funções Hiperbólicas e suas Aplicações**. 2015. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/7640/2/arquivototal.pdf>>. Acesso em: 03 jun. 2020.
- [6] A CATENÁRIA. [S. l.], 2004. Disponível em: <<https://www.ime.usp.br/~martha/mat111-2004/catenaria.pdf>>. Acesso em: 20 jun. 2020.
- [7] KILHIAN, K. **Como calcular o comprimento de um arco de curva**. [S. l.], 9 out. 2011. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2011/10/como-calculer-o-comprimento-de-um.html>>. Acesso em: 20 jun. 2020.
- [8] PINHEIRO, F. L. dos R. **A Fórmula de Euler**. 2016. Disponível em: <<https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/A-F%C3%93RMULA-DE-EULER.pdf>>. Acesso em: 01 abr. 2020.
- [9] FERRARI, A. **Aplicação do Número “e” e do Logaritmo Natural em Fenômenos da Natureza**. Juiz de Fora. 2013. Disponível em: <<https://repositorio.ufjf.br/jspui/bitstream/ufjf/2365/1/andersonferrari.pdf>>. Acesso em: 28/01/2020.
- [10] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- [11] KILHIAN, K. **Demonstração da Identidade de Euler**. 2010. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2010/07/demonstracao-da-identidade-de-euler.html>>. Acesso em: 03 abr. 2020.
- [12] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6.ed. rev. ampl. São Paulo: Pearson, 2006.
- [13] FLEMMING, D. M. **Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 2007.
- [14] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3.ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.