



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

RAYANE GOMES DE LIMA

**ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM APLICAÇÕES
EM CIRCUITOS ELÉTRICOS**

ANGICOS

2020

RAYANE GOMES DE LIMA

**ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM APLICAÇÕES
EM CIRCUITOS ELÉTRICOS**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador(a): Profa. Dra. Enai Taveira da Cunha

ANGICOS

2020

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

L732e Lima, Rayane Gomes de.
Estudo sobre equações diferenciais ordinárias
com aplicações em circuitos elétricos / Rayane
Gomes de Lima. - 2020.
64 f. : il.

Orientadora: Enai Taveira da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2020.

1. Equações diferenciais ordinárias. 2.
Circuitos elétricos. 3. Transformada de Laplace.
I. Cunha, Enai Taveira da, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

RAYANE GOMES DE LIMA

**ESTUDO SOBRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS COM
APLICAÇÕES EM CIRCUITOS ELÉTRICOS**

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-Árido como
requisito para obtenção do título de
Bacharel em Interdisciplinar em Ciência
e Tecnologia.

Defendida em: 09 / 12 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

ENAI TAVEIRA DA CUNHA:01301857440
Assinado de forma digital por ENAI
TAVEIRA DA CUNHA:01301857440
Dados: 2020.12.09 16:26:18 -03'00'

Profa. Dra. Enai Taveira da Cunha (UFERSA)
Presidente

JAKCNEY LUAN AZEVEDO DE SOUSA:08317282481
Assinado eletronicamente por JAKCNEY LUAN AZEVEDO DE SOUSA
CPF: 036404781000000000
Ocupação: 000000000000000000
Assinado em: 2020.12.09 16:26:18 -03'00'

Prof. Me. Jackney Luan Azevedo de Sousa (UFERSA)
Membro Examinador

Bruna Raíssa Gomes dos Santos Batista
Profa. Ma. Bruna Raíssa Gomes dos Santos Batista (IFRN)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre estar presente quando preciso e me amparar nos momentos mais difíceis.

A minha mãe, Maria Anunciada Dantas Gomes, e ao meu pai, Francisco Rubinaldo de Lima, que sempre me concederam carinho, forças e sobretudo esperança na caminhada até aqui.

Aos meus avós maternos e paternos por sempre apoiarem os meus sonhos e me fornecerem suporte emocional.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado, compartilhando dos momentos de alegria e de tristeza.

Sou grata a todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial a minha orientadora, Enai Taveira da Cunha, por toda atenção, cuidado, dedicação e empenho em me ajudar na construção desse trabalho, sou eternamente grata por tamanho conhecimento compartilhado e por acreditar no meu potencial.

Agradeço aos professores Jackney Luan de Azevedo Sousa e Bruna Raíssa Gomes dos Santos Batista, por aceitarem o convite de fazerem parte da banca examinadora do presente trabalho.

RESUMO

Ao descrever ou modelar sistemas físicos em termos matemáticos, utilizamos constantemente equações que envolvem derivadas, as equações mencionadas são chamadas de equações diferenciais. Neste intuito, o presente trabalho foi feito com o objetivo de motivar os alunos das diversas áreas da engenharia ao estudo de equações diferenciais, mostrando suas aplicações dentro da área de circuitos elétricos. Neste trabalho, através de pesquisa bibliográfica, foi feito um levantamento teórico a respeito de equações diferenciais, explicitando conceitos, propriedades, exemplos e resultados dentro de sua teoria. Além disso, foi feito um estudo dentro da teoria de circuitos elétricos, apresentando componentes, variáveis, tipos de circuitos elétricos e sua solução através de equações diferenciais. Por fim, apresentamos algumas aplicações das equações diferenciais em problemas que envolvem circuitos elétricos, mostrando suas soluções através de métodos usuais das equações diferenciais e de transformada de Laplace. Com isso, podemos concluir que o estudo de equações diferenciais é de suma importância dentro da área de circuitos elétricos, visto que é uma importante ferramenta matemática que possui aplicações vastas, tornando-se assim, relevante para um bom desempenho dentro dessa área da engenharia.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias. Circuitos elétricos. Transformada de Laplace.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Gráfico de $\cos(t)$, $t \geq 0$, quando multiplicada por $\mathcal{U}(t - 2\pi)$	35
Figura 2	–	Representação da corrente contínua e alternada respectivamente.....	39
Figura 3	–	Representação da tensão em um circuito elétrico.....	39
Figura 4	–	Representação de uma resistência R em um circuito elétrico.....	41
Figura 5	–	Representação de um capacitor em um circuito elétrico.....	42
Figura 6	–	Representação de um indutor em um circuito elétrico.....	42
Figura 7	–	Representação de um ramo em um circuito elétrico.....	43
Figura 8	–	Representação de um nó em um circuito elétrico.....	43
Figura 9	–	Representação de uma malha em um circuito elétrico.....	43
Figura 10	–	Representação de um circuito Resistor – Capacitor (RC).....	45
Figura 11	–	Representação de um circuito Resistor – Indutor (RL).....	45
Figura 12	–	Representação de um circuito Resistor – Capacitor – Indutor (RCL).....	46
Figura 13	–	Gráfico da função $g(t)$	62

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	9
2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	11
2.1 CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	11
2.1.1 Classificação quanto ao tipo	11
2.1.2 Classificação quanto a ordem.....	12
2.1.3 Classificação quanto a linearidade	12
2.2 SOLUÇÃO PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL	13
2.2.1 Problema de valor inicial.....	13
2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	14
2.3.1 Equações lineares de primeira ordem	14
2.3.2 Equações em que $pt = 0$	14
2.3.3 Solução geral: Fator integrante	15
2.3.4 Equações diferenciais separáveis	16
2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM	17
2.4.1 Existência de uma única solução.....	17
2.4.2 Princípio de Superposição	18
2.4.3 Dependência e independência linear.....	18
2.4.4 Wronskiano.....	19
2.4.5 Solução de Equações Homogêneas.....	20
2.4.6 Equação característica	20
2.4.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas.....	22
2.4.8 Solução Geral - Equações Não-Homogêneas	23
2.4.9 Método dos Coeficientes Indeterminados	23
3 TRANSFORMADA DE LAPLACE	26
3.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE..	27
3.2 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	27
3.2.1 Linearidade da Transformada de Laplace	27
3.2.2 Translação.....	28
3.2.3 Derivada de uma Transformada.....	28
3.2.4 Transformada de uma Derivada.....	28
3.3 TRANSFORMADA INVERSA	29
3.3.1 Frações parciais	30
3.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE E PVI.....	31
3.5 FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO	34
3.6 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC.....	36
4 CIRCUITOS ELÉTRICOS	38

4.1 VARIÁVEIS DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS	38
4.2 COMPONENTES DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS	40
4.2.1 Resistores	40
4.2.2 Capacitores	41
4.2.3 Indutores	42
4.4 CIRCUITO EM SÉRIE E PARALELO	44
4.5 TIPOS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS	44
4.5.1 Circuito RC	44
4.5.2 Circuito RL	45
4.5.3 Circuito RCL	46
5 METODOLOGIA	48
5.1 MATERIAIS E MÉTODOS	48
6 APLICAÇÕES	49
7 CONCLUSÃO	64
REFERÊNCIAS	65

1 INTRODUÇÃO

Para modelar sistemas físicos que descrevem a taxa de variação com que fenômenos acontecem, utilizamos equações que envolvem derivadas, as equações mencionadas são chamadas de equações diferenciais. O estudo de equações diferenciais se tornou relevante, pois, devido suas vastas aplicações, são consideradas uma importante ferramenta matemática dentro de diversas áreas da ciência. Podemos por exemplo, desenvolver e compreender problemas que envolvem o fluxo de corrente em um circuito elétrico, o aumento ou a diminuição de uma população e a dissipação de calor em objetos sólidos, além de diversos outros problemas das ciências exatas, biológicas e econômicas (BOYCE; DIPRIMA, 2006).

De acordo com Dullius, Veit e Araujo (2013), apesar das diversas áreas de aplicações das equações diferenciais, sejam elas nas ciências exatas, biológicas ou econômicas, muitos alunos se encontram desmotivados ou até mesmo temem o seu estudo, a maior dificuldade se encontra na interpretação dos problemas e na associação dos métodos de soluções a serem usados de acordo com o exercício proposto. Através deste trabalho, iremos modelar e solucionar problemas que envolvem circuitos elétricos com o auxílio de equações diferenciais, a fim de mostrar sua importância nessas aplicações e despertar um maior interesse dos alunos que pretendem cursar alguma engenharia. Na metodologia deste trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica na biblioteca virtual da UFERSA, utilizando referências indicadas pela orientadora deste trabalho, além da leitura de artigos e monografias, a fim de obter um aprofundamento nos assuntos aqui abordados.

Com esse objetivo, desenvolvemos na seção 2, um referencial teórico acerca de equações diferenciais, mostrando alguns métodos de solução, como o método do fator integrante, equação característica e coeficientes indeterminados. Na seção 3, foi definida a transformada de Laplace, mostrando suas propriedades e aplicação para obter a solução de uma equação diferencial. Na seção 4, apresentamos um referencial teórico acerca de circuitos elétricos, mostrando sua definição, as variáveis associadas e elementos que os compõe, além de mostrar os tipos mais usuais de circuitos. Por fim, em nossa seção 6, foram apresentadas algumas aplicações de equações diferenciais em problemas que envolvem circuitos elétricos, as mesmas foram retiradas da bibliografia de Bronson e Costa (2008), onde detalhamos as suas soluções com base nos métodos vistos nas seções 2 e 3.

A importância da análise de circuitos elétricos para a engenharia vem da necessidade de compreender melhor os fenômenos elétricos, aprimorar projetos ou mesmo criar algo novo,

visto que a sociedade está em constante revolução tecnológica e necessita cada vez mais do refinamento dos sistemas já existentes (NILSSON; RIEDEL, 2015).

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Para modelar o comportamento de sistemas físicos ou a taxa de variação com que fenômenos acontecem, utilizamos ferramentas matemáticas que envolvem equações diferenciais, elas são muito importantes nessas aplicações. Nessa seção, iremos abordar algumas definições e métodos que se mostram eficazes para encontrar uma solução para uma equação diferencial, além disso, iremos apresentar alguns exemplos retirados de Boyce e DiPrima (2006).

De acordo com Santos (2011), uma equação diferencial é aquela em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas dessas funções.

Exemplo 2.1: A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a seguinte equação diferencial

$$R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} = V$$

onde R é a resistência, C a capacitância e V a voltagem constante fornecida pela bateria.

Neste exemplo temos como variável dependente t , a função incógnita envolvida é $Q(t)$ e a derivada $\frac{dQ(t)}{dt}$ representa a variação da carga no capacitor com relação ao tempo t .

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao tipo, ordem e a linearidade.

2.1 CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1.1 Classificação quanto ao tipo

As equações diferenciais quanto ao tipo são classificadas em: ordinárias e parciais.

Definição 2.1 (Zill e Cullen, 2001): As equações diferenciais ordinárias (EDO) são aquelas que contém apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente.

Essas equações podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

em que y é função apenas de t e $y^{(n)}$ representa a derivada de n -ésima ordem presente na equação.

Exemplo 2.2: O modelo matemático de um objeto em queda livre descreve a seguinte equação diferencial ordinária

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$$

Tem-se aqui uma equação diferencial de primeira ordem onde m é a massa, g a gravidade, γ a resistência do ar, v a velocidade e a derivada $\frac{dv}{dt}$ representa a variação da velocidade de acordo com o tempo t .

Definição 2.2 (Zill e Cullen, 2001): As equações diferenciais parciais (EDP) são aquelas que envolvem derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.

Essas equações podem ser escritas na forma

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

em que u é a variável dependente e x e y são as variáveis independentes. As notações u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy} e u_{yy} representam as derivadas parciais presentes na equação.

Exemplo 2.3: A equação de calor descreve a seguinte equação diferencial parcial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

Considerando um problema de condução de calor em uma barra reta homogênea de comprimento L e espessura desprezível, teríamos que $u(x, t)$ representaria a temperatura da barra em um ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$ e α^2 seria a difusividade térmica.

2.1.2 Classificação quanto a ordem

A ordem de uma equação diferencial será determinada de acordo com a derivada de maior ordem presente na equação, logo, ela poderá ser de 1ª, 2ª, ..., ou de n -ésima ordem. Uma equação diferencial ordinária de ordem n pode ser escrita de acordo com a equação (2.1).

2.1.3 Classificação quanto a linearidade

Quanto a linearidade as equações diferenciais são classificadas em: lineares e não-lineares.

Quando lineares, apresentam uma função f com incógnitas e derivadas de forma linear na equação, ou seja, $y, y', \dots, y^n$. Uma equação diferencial linear geral de n -ésima ordem pode ser escrita da forma

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_n(t)y = g(t) \quad (2.2)$$

Observe que a equação (2.2) apresenta duas propriedades importantes que caracterizam as equações diferenciais lineares, são elas:

- A variável dependente y e todas suas derivadas são do primeiro grau, ou seja, a potência de cada termo que envolve y ou suas derivadas é 1.
- Todos os coeficientes dependem apenas da variável independente t .

As equações diferenciais que não se enquadram em (2.2) são ditas não-lineares.

2.2 SOLUÇÃO PARA UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A solução de uma equação diferencial é classificada em: particular ou geral. As definições a seguir foram baseadas em Santos (2011).

Definição 2.3: A solução particular de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tais que todas suas derivadas se encontram também definidas em I e satisfazem a equação nesse intervalo.

Definição 2.4: A solução geral de uma equação diferencial ordinária de ordem n em um intervalo I é uma família de soluções $y(t)$ no intervalo I , dependendo de n constantes arbitrárias que satisfazem a equação.

Deve-se ressaltar que o intervalo I dependendo do contexto pode ser aberto (a, b) , fechado $[a, b]$, ou mesmo infinito $(0, \infty)$.

2.2.1 Problema de valor inicial

O problema

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

sujeito as condições iniciais

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ y''(t_0) = y_2 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{(n-1)} \end{cases}$$

é chamado de problema de valor inicial (PVI), onde $t_0, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{(n-1)}$ são valores dados. A solução geral para o problema de valor inicial em um intervalo I é uma função que satisfaz a n condições que estão definidas neste intervalo, assim como suas derivadas também estão definidas neste intervalo e satisfazem as condições iniciais. As condições iniciais são utilizadas para determinar os valores das constantes da solução geral e assim, achamos uma solução particular. Os problemas de valor inicial estão presentes em diversas áreas da ciência, como por exemplo na física e na biologia, pois ao se modelar um sistema é comum resultar em um problema de valor inicial.

Na seção de aplicações, iremos apresentar alguns problemas envolvendo equações diferenciais de primeira e segunda ordem, portanto, na seção seguinte iremos nos aprofundar um pouco em cada uma delas e nos seus respectivos métodos de resolução.

2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

As equações diferenciais ordinárias de primeira ordem podem ser escritas na forma

$$F(t, y, y') = 0$$

A seguir, veremos um pouco sobre as equações lineares de primeira ordem, equações separáveis e seus respectivos métodos de solução.

2.3.1 Equações lineares de primeira ordem

As equações lineares de primeira ordem são equações que podem ser escritas como

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \quad (2.3)$$

2.3.2 Equações em que $p(t) = 0$

Quando temos $p(t) = 0$ a equação (2.3) pode ser escrita como

$$\frac{dy}{dt} = q(t). \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ser resolvida integrando em ambos os lados da seguinte forma

$$\int dy = \int q(t) dt.$$

Obtemos assim, a seguinte solução geral para a equação

$$y(t) = \int q(t) dt + C \quad (2.5)$$

onde C é uma constante.

2.3.3 Solução geral: Fator integrante

A seguir, apresentamos o método do fator integrante, ele é aplicável em equações diferenciais lineares de primeira ordem a fim de encontrar uma solução geral. Iremos considerar as equações semelhantes a (2.3), definiremos uma função $\mu(t)$ que ao multiplicar a equação por esta função iremos obter uma equação linear com $p(t) = 0$, que possui fácil resolução, como foi visto anteriormente. A função $\mu(t)$ é chamada de fator integrante.

Provaremos que $\mu(t)$ é um fator integrante da equação (2.3).

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

Observe que

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t) dt} \frac{d}{dt} \left(\int p(t) dt \right) = e^{\int p(t) dt} p(t) = \mu(t) p(t). \quad (2.6)$$

Ao multiplicar a equação (2.3) por $\mu(t)$ obteremos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \mu(t) p(t) y = \mu(t) q(t). \quad (2.7)$$

De acordo com a igualdade da equação (2.6), podemos reescrever (2.7) como

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt} y = \mu(t) q(t). \quad (2.8)$$

Note que o lado esquerdo da equação se trata da derivada de um produto, fazendo com que (2.8) seja reescrita da forma

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)q(t).$$

Integrando em ambos os lados com relação a t , obteremos

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C. \quad (2.9)$$

Dividindo (2.9) por $\mu(t)$, a solução geral será dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\int \mu(t)q(t)dt + C \right).$$

2.3.4 Equações diferenciais separáveis

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)}$$

é chamada separável ou que possui variáveis separáveis.

Note que uma equação separável, usando o quociente diferencial, pode ser escrita como

$$h(y) \frac{dy}{dt} = g(t). \quad (2.10)$$

Método de resolução

Suponha que $y = f(t)$ seja solução para a equação (2.10), então

$$h(f(t)) \frac{df(t)}{dt} = g(t)$$

Integrando em ambos os lados

$$\int h(f(t)) \frac{df(t)}{dt} dt = \int g(t) dt$$

Temos

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t)$$

Se $y = f(t) \rightarrow dy = f'(t)dt$, então

$$\int h(y) dy = \int g(t) dt + C \quad (2.11)$$

Onde C é uma constante arbitrária.

As aplicações para equações diferenciais de primeira ordem são vastas, envolvem problemas de crescimento e decaimento de uma substância (ou população), além de problemas que envolvem temperatura associados a lei do resfriamento de Newton, diluição, queda de corpos e circuitos elétricos que será o objetivo deste trabalho.

2.4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$F(t, y, y', y'') = 0, \quad (2.12)$$

onde F é alguma função dada.

A equação (2.12) é dita linear quando pode ser escrita da seguinte forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (2.13)$$

ou mesmo

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (2.14)$$

Note que as funções P , Q , R e G são funções especificadas da variável independente t , mas não são dependentes de y . Se a equação não for da forma (2.13) ou (2.14) ela é dita não-linear.

Se $g(t) = 0$ em (2.13), ou $G(t) = 0$ em (2.14) a equação é chamada de homogênea, caso contrário, a equação é chamada de não-homogênea.

2.4.1 Existência de uma única solução

Antes de considerarmos um problema devemos saber se a solução existe, quando existe e se a solução é única para o problema, pois ao se trabalhar com problemas físicos e saber que ele possui solução se evita de gastar esforço ao tentar resolvê-lo. Além disso, ao encontrar uma solução pode-se haver o interesse em continuar a procura por outras possíveis soluções ou pode-se ter a certeza de que não há outras soluções. O teorema a seguir demonstra condições para a existência e unicidade de uma solução.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade): Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0; \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

para $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ funções contínuas em um intervalo I contendo t_0 , então o problema de valor inicial possui uma única solução $y(t)$ neste intervalo.

A demonstração do teorema (2.1) pode ser encontrada em Santos (2011).

2.4.2 Princípio de Superposição

O princípio de superposição diz que se conhecemos duas ou mais soluções para uma equação linear homogênea, então a soma dessas soluções também forma uma solução.

Teorema 2.2 (Princípio de Superposição – Equações Homogêneas):

Sejam $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_k(t)$ soluções para uma equação linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . Então a combinação linear

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \cdots + C_ky_k(t)$$

em que $C_1, C_2, \dots, C_k$ são constantes arbitrárias, também forma uma solução para a equação.

Corolário 2.1:

(A) Um múltiplo $y = C_1y_1(t)$ de uma solução $y_1(t)$ para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução.

(B) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$.

A demonstração para o teorema (2.2) e o corolário (2.1) pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001).

2.4.3 Dependência e independência linear

Pode-se provar que um conjunto de soluções para uma equação diferencial linear homogênea é um espaço vetorial, visto isto, precisamos do estudo da linearidade para determinarmos soluções que sejam linearmente independentes que gerem este espaço.

Definição 2.5: Um conjunto de funções $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ são linearmente dependentes (L.D) em um intervalo I se existirem constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$ não nulas, tais que

$$C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + \cdots + C_ny_n(t) = 0 \quad (2.15)$$

para todo t pertencente a esse intervalo.

Definição 2.6: Um conjunto de funções $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ são linearmente independentes (L.I) em um intervalo I se elas não forem linearmente dependentes.

Logo, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo I se as únicas constantes para as quais a equação (2.15) é válida para todo t pertencente a esse intervalo forem nulas, ou seja, $C_1 = C_2 = \dots C_n = 0$.

Quando se trata de duas funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, se elas são linearmente dependentes em um intervalo, então existem constantes C_1 e C_2 não nulas, tais que

$$C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = 0$$

para todo t pertencente a este intervalo.

Vamos supor que $C_2 \neq 0$, teremos

$$y_2(t) = -\frac{C_1}{C_2} y_1(t).$$

Isto é, se duas funções são linearmente dependentes, então uma é múltipla da outra. Podemos concluir que quando nenhuma função é múltipla da outra serão assim linearmente independentes.

Exemplo 2.4 (Zill e Cullen, p.148): As funções $f_1(x) = \sin 2x$ e $f_2(x) = \sin x \cos x$ são linearmente dependentes no intervalo $(-\infty, \infty)$, pois

$$C_1 \sin 2x + C_2 \sin x \cos x = 0.$$

São satisfeitas para todo x real se $C_1 = 1/2$ e $C_2 = -1$.

2.4.4 Wronskiano

O teorema a seguir proporciona condições para a independência linear de n funções em um intervalo.

Teorema 2.3 (Critério para Independência linear de Funções): Suponha que $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ sejam diferenciáveis em pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I , então as funções $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ serão linearmente independentes no intervalo.

O determinante do teorema (2.3) é chamado de Wronskiano das funções, o mesmo é denotado por

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)).$$

Corolário 2.2: Se $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ possuem pelo menos $n - 1$ derivadas e são linearmente dependentes em I , então

$$W(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) = 0$$

para todo t presente no intervalo.

A demonstração do teorema (2.3) e corolário (2.2) pode ser encontrado no livro Zill e Cullen (2001).

2.4.5 Solução de Equações Homogêneas

Uma equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem pode ser escrita como

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t); g(t) = 0 \quad (2.16)$$

De acordo com Boyce e DiPrima (2006), um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem forma um espaço vetorial de dimensão n e que qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes forma uma base para esse espaço.

Teorema 2.4 (Existência de um Conjunto Fundamental): Existe um conjunto fundamental de soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea de n -ésima ordem em um intervalo I . A solução geral para a equação no intervalo é definida por

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t).$$

2.4.6 Equação característica

Ao procurar uma solução para uma equação diferencial linear de segunda ordem, o primeiro passo é encontrar a solução da equação homogênea, iremos propor um método eficaz para esta solução.

Iremos considerar a equação (2.14) nas quais as funções P , Q e R são constantes, nesse caso a equação torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.17)$$

onde a , b e c são constantes dadas.

Suponha que a equação (2.17) tenha uma solução do tipo $y = e^{rt}$, então $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$, assim a equação torna-se

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

ou mesmo

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0. \quad (2.18)$$

Visto que e^{rt} nunca se anula para qualquer valor real de t , então para que essa função exponencial satisfaça a equação diferencial (2.18), iremos escolher um r de tal forma que seja raiz da equação quadrática

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.19)$$

A equação (2.19) é chamada de equação característica, a mesma possui três casos a se considerar de acordo com o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Caso 1 (Raízes Reais Distintas): Se o discriminante for maior que zero, ou seja, $\Delta > 0$, então as raízes r_1 e r_2 da equação (2.19) são reais e distintas, logo, $y_1 = e^{r_1t}$ e $y_2 = e^{r_2t}$ são duas soluções linearmente independentes da equação (2.17).

Pelo teorema (2.2) de Superposição, podemos afirmar que a soma de y_1 com y_2 também será uma solução para equação (2.17), logo, a solução geral será dada por

$$y = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}$$

Caso 2 (Raízes Reais Iguais): Se o discriminante for igual a zero, ou seja, $\Delta = 0$, então $r_1 = r_2$, isto é, as raízes da equação (2.19) são reais e iguais. Denotaremos r como valor comum de r_1 e r_2 , como sabemos que

$$r = -\frac{b}{2a}$$

então, $2ar + b = 0$. Temos $y_1 = e^{rt}$ como solução da equação (2.17), iremos agora verificar que $y_2 = te^{rt}$ também é uma solução:

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rt} + r^2te^{rt}) + b(e^{rt} + rte^{rt}) + cte^{rt} \\ &= (2ar + b)e^{rt} + (ar^2 + br + c)te^{rt} \\ &= 0(e^{rt}) + 0(te^{rt}) = 0 \end{aligned}$$

Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação, então pelo teorema (2.2) de Superposição podemos afirmar que a solução geral da equação (2.17) será

$$y = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$$

Caso 3 (Raízes Complexas Conjugadas): Se o discriminante for menor que zero, ou seja, $\Delta < 0$, então as raízes r_1 e r_2 da equação (2.19) são complexas. Teremos

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \alpha - i\beta$$

onde α e β são números reais maiores que zero e $i^2 = -1$.

A solução geral é dada por

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}. \quad (2.20)$$

É preferível trabalhar com funções reais em vez de exponenciais complexas, dessa forma utilizaremos a equação de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

e reescreveremos a equação (2.20) da seguinte forma

$$y = e^{\alpha t} (C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t).$$

2.4.7 Equações Diferenciais de Segunda Ordem Não-Homogêneas

Qualquer função y_p , independente de parâmetros que satisfaça a seguinte equação diferencial não-homogênea

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t); g(t) \neq 0 \quad (2.21)$$

é chamada de solução particular da equação. Sejam y_1 e y_2 soluções para uma equação homogênea de n -ésima ordem (2.16) em um intervalo I e seja y_p uma solução particular para a equação não-homogênea (2.21) no mesmo intervalo. Então

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \dots + C_n y_n(t) + y_p(t)$$

também será uma solução para a equação (2.21) no intervalo para quaisquer constantes $C_1, C_2, \dots, C_n$.

2.4.8 Solução Geral - Equações Não-Homogêneas

Definição 2.7: Seja y_p uma solução para a equação não-homogênea de n -ésima ordem (2.21) em um intervalo I e seja a combinação linear

$$y_c = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) + \cdots + C_n y_n(t) \quad (2.22)$$

solução para a equação linear homogênea de n -ésima ordem (2.16) no intervalo. A solução geral para a equação não-homogênea no intervalo será dada por

$$y = y_c + y_p$$

A combinação linear (2.22) é chamada de função complementar da equação (2.21), em outras palavras, podemos definir a solução geral da equação não-homogênea como a soma da função complementar com uma solução particular.

2.4.9 Método dos Coeficientes Indeterminados

O método dos coeficientes indeterminados requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular y_p , mas com os coeficientes ainda não definidos. Esse método se restringe a equações da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (2.23)$$

em que a , b , e c são constantes e $g(t)$ pertence a uma classe de funções do tipo constantes, exponenciais, polinomiais, senos, cossenos, somas e produtos dessas funções.

Primeiramente, substituímos a hipótese escolhida y_p e suas respectivas derivadas na equação (2.23):

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = g(t) \quad (2.24)$$

e tentamos determinar os coeficientes A, B e C a fim de que a equação seja satisfeita.

Caso a hipótese escolhida obtenha êxito e encontremos uma solução para a equação diferencial, podemos usá-la como solução particular. Quando algum termo da solução particular y_p coincidir com algum termo da solução geral da EDO homogênea associada, a solução y_p deve ser modificada da seguinte forma:

$$y_p \cdot t^n$$

de modo que elimine a coincidência e satisfaça a equação (2.24).

A maior limitação do método é que ele se restringe a uma classe pequena de funções, são elas: constantes, exponenciais, polinomiais, senos e cossenos, porém, essas funções possuem uma propriedade notável que as derivadas de suas somas e produtos geram ainda somas e produtos de constantes, exponenciais, polinômios, senos e cossenos. Como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem de ser idêntico a $g(t)$, é admissível supor que y_p possui a mesma forma que $g(t)$.

A tabela seguinte mostra alguns exemplos específicos para $g(t)$ em (2.23) juntamente com sua forma correspondente de solução particular.

Tabela 1- Tentativas para y_p

$g(t)$	Forma de y_p
1. k (qualquer constante)	A
1. e^{at}	Ae^{at}
2. $\text{sen } at$	$A \cos at + B \text{sen } at$
3. $\cos at$	$A \cos at + B \text{sen } at$
4. $e^{at} \text{sen } \beta t$	$Ae^{at} \cos \beta t + Be^{at} \text{sen } \beta t$
5. $e^{at} \cos \beta t$	$Ae^{at} \cos \beta t + Be^{at} \text{sen } \beta t$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

A seguir, trabalharemos com um exemplo para demonstrar como se dá a aplicação do método dos coeficientes indeterminados na busca de uma solução para uma equação diferencial de segunda ordem não-homogênea.

Exemplo 2.5: Utilize o método dos coeficientes indeterminados e encontre uma solução particular para a equação, em seguida, demonstre a solução geral para a equação diferencial de segunda ordem associada.

$$y'' - 9y = \text{sen } t \quad (2.25)$$

Solução: A equação homogênea associada a (2.25) é

$$y'' - 9y = 0 \quad (2.26)$$

A equação característica é dada por $r^2 - 9 = 0$, cujas raízes são dadas por $r_1 = 3$ e $r_2 = -3$. A solução da equação (2.26) é dada por

$$y_c = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$$

Com $g(t) = \text{sent}$ vemos na entrada 3 da tabela 1 que devemos escolher a seguinte tentativa para a solução

$$y_p = A \cos t + B \sin t$$

Derivando y_p duas vezes com relação a t , obtemos

$$y_p' = -A \sin t + B \cos t$$

$$y_p'' = -A \cos t - B \sin t$$

Substituindo em (2.25) teremos,

$$y_p'' - 9y_p = \cos t(-A - 9A) + \sin t(-B - 9B) = \sin t$$

Obtemos o seguinte sistema

$$-10A = 0$$

$$-10B = 1$$

Que possui como solução $A = 0$ e $B = -\frac{1}{10}$. Logo, teremos como solução particular

$$y_p = -\frac{1}{10} \sin t$$

A solução geral da equação (2.25) será dada por

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{10} \sin t$$

As aplicações de equações diferenciais de segunda ordem estão presentes nas diversas áreas da engenharia, na civil com problemas envolvendo vigas, na elétrica com circuitos elétricos, na mecânica com vibrações mecânicas e química com problemas de densidade. Devido a essa grandeza de aplicações que se torna tão relevante seu estudo.

3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Nesta seção estudaremos a definição e as propriedades de uma integral conhecida como Transformada de Laplace, ela é útil na resolução de equações diferenciais, em particular, as lineares com coeficientes constantes pois suas soluções são baseadas na função exponencial, ela também é eficaz na resolução de alguns tipos de problemas de valor inicial, pois é possível a utilização de funções contínuas e contínuas por partes.

A importância da aplicação da transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais com a ação de funções contínuas por partes é relevante, pois os métodos casuais de resolução de equações diferenciais vistos nas seções anteriores apenas são eficientes quando tratamos de funções contínuas. Na seção (3.5) deste trabalho, será abordado um pouco sobre uma função contínua por partes conhecida como Função Degrau Unitário.

Definição 3.1 (Transformada de Laplace): Seja $f(t)$ uma função definida para $t \geq 0$, sua transformada de Laplace será definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.1)$$

para todos os valores de s para as quais a integral imprópria converge, onde a função e^{-st} é chamada de núcleo da transformada.

Convém representar a função original por uma letra minúscula e sua variável por t , já a transformada de Laplace é representada pela letra correspondente em maiúsculo e a sua variável por s .

Exemplo 3.1: Calcule a transformada de Laplace da função f , dados $f(t) = 5$ para $t \geq 0$.

Solução:

Aplicando a definição, teremos

$$F(s) = \mathcal{L}\{5\} = \int_0^{\infty} 5e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 5e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{5e^{-st}}{s} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-5e^{-sb} + 5}{s} = \frac{5}{s}$$

desde que $s > 0$. Em outras palavras, para $\mathcal{L}\{5\}$ existir tem-se que $s > 0$, logo, o expoente $-sb$ é negativo e $e^{-st} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$. Quando $s < 0$ a integral imprópria diverge, logo a transformada não existe.

3.1 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

A integral que define a transformada de Laplace (3.1) nem sempre irá convergir, ou seja, a transformada de uma função nem sempre existirá. Algumas condições devem ser consideradas para que a transformada exista, são elas: a função $f(t)$ deverá ser contínua por partes no intervalo limitado de $[0, \infty)$ e a função $f(t)$ é de ordem exponencial para $t > T$.

De acordo com Zill e Cullen (2001) uma função $f(t)$ é contínua por partes em $[0, \infty)$ se, em qualquer intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, há apenas um número finito de descontinuidades e em toda descontinuidade existem os limites laterais.

Definição 3.2 (Ordem Exponencial): Uma função $f(t)$ é dita de ordem exponencial, se existirem números c , $M > 0$ e $T > 0$ tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Quando $f(t)$ é uma função crescente, a condição acima diz simplesmente que o gráfico de $f(t)$ no intervalo (T, ∞) não cresce mais rapidamente que o gráfico da função exponencial Me^{ct} , onde c é uma constante positiva.

Teorema 3.1 (Condições Suficientes de Existência): Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial para $t > T$, então, sua transformada de Laplace existe para todos $s > c$.

O teorema (3.1) pode ser demonstrado em Zill e Cullen (2001).

3.2 PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

As propriedades que serão abordadas a seguir são necessárias para a resolução de equações diferenciais, elas possibilitam uma maneira prática de utilizar a transformada de Laplace sem a necessidade de usar sua definição.

3.2.1 Linearidade da Transformada de Laplace

A linearidade é a propriedade mais utilizada na resolução de equações diferenciais por transformada de Laplace, visto que essa propriedade define a transformada como um operador linear, ela possui uma grande importância, sendo indispensável.

Teorema 3.2 (Linearidade): Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, então, para duas constantes arbitrárias C_1 e C_2 teremos

$$\mathcal{L}\{C_1 f(t) + C_2 g(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{g(t)\} = C_1 F(s) + C_2 G(s)$$

3.2.2 Translação

Esta propriedade indica um deslocamento no eixo s , é possível conhecer a transformada de Laplace de múltiplos exponenciais de uma função $f(t)$ desde que tenhamos conhecimento de sua transformada.

Teorema 3.3 (Translação na Transformada de Laplace). Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então para qualquer constante a é possível definir

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

3.2.3 Derivada de uma Transformada

Esta propriedade é utilizada para múltiplos polinômios de uma função $f(t)$, sendo bastante útil e prática desde que tenhamos o conhecimento de sua transformada e da derivada do polinômio em questão.

Teorema 3.4 (Derivada de uma Transformada): Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então, para qualquer inteiro positivo n é possível definir

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [F(s)].$$

3.2.4 Transformada de uma Derivada

Ao resolver alguns tipos de equações diferenciais, calcular a transformada de Laplace se torna muito útil, em alguns casos é necessário calcular as transformadas das derivadas. Com isso, iremos definir a fórmula geral a partir da derivada primeira de $f(t)$. Seja $f'(t)$ contínua para $t \geq 0$, podemos reescrever a equação (3.1) como

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt \quad (3.2)$$

a integração por partes proporciona

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ \mathcal{L}\{f'(t)\} &= -f(0) + s \mathcal{L}\{f(t)\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (3.3)$$

desde que $e^{-st}f(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Analogamente, para a segunda derivada teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= e^{-st} f'(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\} \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Os resultados de (3.3) e (3.4) são casos especiais do teorema a seguir, ele fornece a transformada de Laplace da n -ésima derivada de $f(t)$.

Teorema 3.5 (Transformada de uma Derivada): Se $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas em $[0, \infty)$, de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)} F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

onde $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

A tabela a seguir mostra a Transformada de Laplace de algumas funções elementares, a demonstração para essas transformadas pode ser obtida através de sua definição presente na equação (3.1).

Tabela 2 - Transformada de algumas funções elementares

1.	$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$
2.	$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{(n+1)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
3.	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$
4.	$\mathcal{L}\{\sen kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$
5.	$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

3.3 TRANSFORMADA INVERSA

Na seção precedente, estávamos interessados em encontrar a transformada de uma função, ou seja, transformar uma função $f(t)$ em outra função $F(s)$ por meio da integral.

Agora, faremos o processo inverso, dada uma função transformada $F(s)$, buscaremos encontrar uma função $f(t)$ cuja transformada de Laplace seja igual a $F(s)$. Podemos dizer que $f(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $F(s)$, denotamos da seguinte forma

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

A tabela a seguir mostra algumas transformadas inversas de funções, ela é análoga a tabela 2, fornecendo praticidade na resolução de problemas envolvendo a transformada de Laplace inversa.

Tabela 3 - Transformada inversa de algumas funções elementares

1.	$1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
2.	$t^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{(n+1)}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$
3.	$e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$
4.	$\text{sen} kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$
5.	$\text{cos} kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$

Fonte: (ZILL; CULLEN, 2001)

A transformada de Laplace inversa tem a propriedade de linearidade em comum com a transformada de Laplace, isso também a torna um operador linear, o seguinte teorema pode afirmar isso.

Teorema 3.6 (Linearidade da Transformada de Laplace Inversa): Se a transformada inversa de duas funções $F(s)$ e $G(s)$ existem, então, para quaisquer constantes C_1 e C_2 ,

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1 F(s) + C_2 G(s)\} = C_1 \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

3.3.1 Frações parciais

O uso de frações parciais é muito importante para encontrar a transformada de Laplace inversa, o método consiste em transformar uma função do tipo $a(t)/b(t)$ onde $a(t)$ e $b(t)$ são polinômios em t , em uma soma de outras funções de tal modo que o denominador de cada nova fração seja um polinômio do primeiro grau ou um polinômio quadrático, elevados a uma potência arbitrária.

A seguir faremos uma revisão dos três casos mais frequentes de frações parciais para facilitar a resolução de problemas envolvendo transformada inversa de Laplace.

Caso 1 (Fatores Lineares Distintos)

Neste caso, iremos considerar uma transformada do tipo

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - \alpha)(s - \beta)}$$

podemos reescrever como

$$F(s) = \frac{A}{(s - \alpha)} + \frac{B}{(s - \beta)}$$

onde A e B serão constantes encontradas no problema proposto.

Caso 2 (Fator Linear Repetido)

Vamos trabalhar com uma transformada da seguinte forma

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - \alpha)^2}$$

podemos reescrever como

$$F(s) = \frac{C}{(s - \alpha)^2} + \frac{D}{(s - \alpha)}$$

onde C e D serão constantes encontradas no problema em questão.

Caso 3 (Fator Quadrático Irreduzível)

Iremos trabalhar com uma transformada do tipo

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s - \alpha)(a\alpha^2 + b\alpha + c)}$$

podemos reescrever como

$$F(s) = \frac{E}{(s - \alpha)} + \frac{Fs + G}{(a\alpha^2 + b\alpha + c)}$$

onde E , F e G serão constantes encontradas no problema proposto.

3.4 TRANSFORMADA DE LAPLACE E PVI

A transformada de Laplace é útil para problemas lineares de valor inicial com coeficientes constantes, pois este tipo de equação diferencial pode ser reduzida em uma equação

algébrica que envolve as condições iniciais, facilitando assim, a sua resolução. Iremos considerar o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} a_{(n)}y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g(t) \\ y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

em que a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ e $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial, obtemos

$$\mathcal{L}\{a_{(n)}y^{(n)} + a_{(n-1)}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (3.5)$$

Aplicando a propriedade de linearidade, podemos reescrever (3.5) como

$$a_{(n)}\mathcal{L}\{y^{(n)}\} + a_{(n-1)}\mathcal{L}\{y^{(n-1)}\} + \dots + a_1\mathcal{L}\{y'\} + a_0\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}. \quad (3.6)$$

Pelo teorema (3.5), a equação (3.6) torna-se

$$\begin{aligned} a_{(n)}[s^{(n)}Y(s) - s^{(n-1)}y(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)] \\ + a_{(n-1)}[s^{(n-1)}Y(s) - s^{(n-2)}y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] + \dots + a_0Y(s) = G(s). \end{aligned}$$

Ao colocar $Y(s)$ em evidência, obtemos

$$\begin{aligned} [a_{(n)}s^{(n)} + a_{(n-1)}s^{(n-1)} + \dots + a_0]Y(s) \\ = a_{(n)}[s^{(n-1)}y_0 + \dots + y_0^{(n-1)}] + a_{(n-1)}[s^{(n-2)}y_0 + \dots + y_0^{(n-2)}] + \dots G(s). \end{aligned}$$

Explicitando $Y(s)$, encontramos $y(t)$ através da transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

A seguir, demonstraremos a resolução de um problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace.

Exemplo 3.2: Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y'' + 4y = t \\ y(0) = 0; y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}. \quad (3.7)$$

Utilizando o teorema (3.5) juntamente com a entrada (2) da tabela 2 e aplicando as condições iniciais, teremos, respectivamente, as seguintes transformadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1!}{s^{(1+1)!}} = \frac{1}{s^2}.$$

Substituindo os valores em (3.7), obtemos

$$s^2Y(s) + 4sY(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Explicitando $Y(s)$, teremos

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4s)}.$$

Como vimos anteriormente, o método de frações parciais é útil quando procuramos a transformada de Laplace inversa de uma função, por isso, utilizaremos o método a seguir, obtendo assim

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4s)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s^2 + 4s}. \quad (3.8)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $s^2(s^2 + 4s)$, teremos

$$1 = A(s^2 + 4s) + B(s^2)$$

$$1 = As^2 + 4As + Bs^2$$

$$1 = s^2(A + B) + s(4A).$$

Igualando os coeficientes das potências de s , implica no seguinte sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 4A = 1 \end{cases}$$

cuja solução é dada por $A = \frac{1}{4}$ e $B = -\frac{1}{4}$. Substituindo os valores obtidos na equação (3.8), teremos

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4s)} = \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s^2 + 4s}.$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, implica

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + 4s)}\right\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 4}\right\}. \quad (3.9)$$

Reescrevendo (3.9), teremos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + 4s)}\right\} = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}.$$

Utilizando a entrada (2) e (4) da tabela 2, obtemos

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{4}t$$

e

$$-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} = -\frac{1}{8}\text{sen}2t.$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2 + 4s)}\right\} = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\text{sen}2t.$$

Portanto, a solução do problema pode ser dada por

$$y(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\text{sen}2t.$$

3.5 FUNÇÃO DEGRAU UNITÁRIO

Algumas das aplicações mais elementares da transformada de Laplace ocorrem na solução de equações diferenciais lineares que envolvem funções descontínuas ou de impulso. Na engenharia, por exemplo, encontramos problemas que envolvem funções que expressam uma força externa agindo sobre um sistema mecânico ou uma voltagem impressa em um circuito que pode ser desligada por um período de tempo. Nesta seção iremos abordar algumas propriedades adicionais da transformada de Laplace que serão úteis na solução de tais problemas. Para tratar de funções com saltos é conveniente definir uma função especial chamada de função degrau unitário, ou função de Heaviside.

Definição 3.3 (Função Degrau Unitário): A função $\mathcal{U}(t - a)$ pode ser definida por

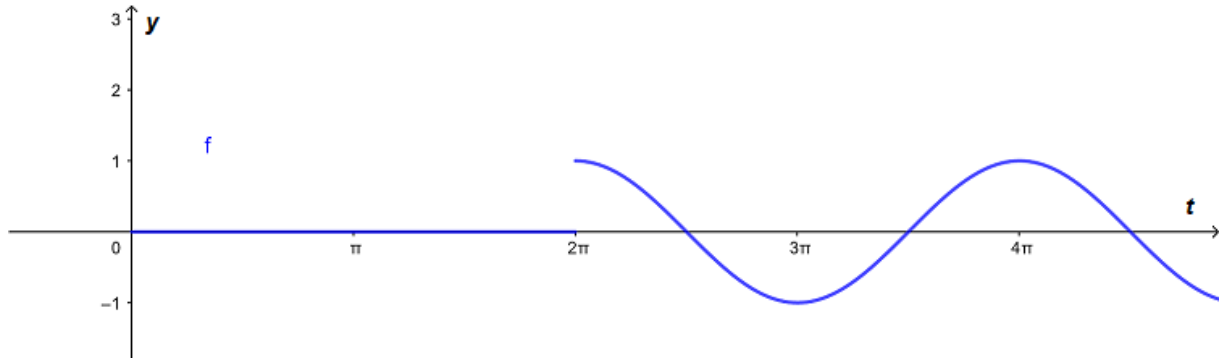
$$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

Definimos $\mathcal{U}(t - a)$ apenas para t maior ou igual a zero, isso é suficiente para o estudo da transformada de Laplace. Em um sentido mais abrangente, $\mathcal{U}(t - a) = 0$ para $t < a$.

Quando multiplicada por uma outra função definida para $t \geq 0$, a função degrau unitário elimina uma porção do gráfico da função, podemos perceber isso na figura 1.

$$f(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t - 2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \cos(t), & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Figura 1 - Gráfico de $\cos(t)$, $t \geq 0$, quando multiplicada por $\mathcal{U}(t - 2\pi)$



Fonte: Autoria própria (2020)

A função degrau unitário pode ser usada para escrever funções definidas por partes em uma forma compacta, observe a seguinte função definida por partes:

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a. \end{cases} \quad (3.10)$$

Podemos escrever (3.10) como

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t - a) + h(t)\mathcal{U}(t - a)$$

Analogamente, uma função da forma

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ h(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b. \end{cases}$$

Pode ser escrita como

$$f(t) = h(t)[\mathcal{U}(t - a) - \mathcal{U}(t - b)]$$

Vimos pelo Teorema 3.3 que ao multiplicar a função $f(t)$ por uma exponencial iremos obter uma translação da transformada $F(s)$. A seguir, veremos que, quando $F(s)$ é multiplicada por uma função exponencial apropriada, a transformada inversa desse produto é a função transladada.

Teorema 3.7 (Segundo Teorema de Translação): Se a for uma constante positiva, então podemos definir

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\mathcal{U}(t - a)\} = e^{-as}F(s),$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

A prova para o Teorema 3.7 pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001).

Exemplo 3.3 (Zill e Cullen (2001), p.377): Calcule

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3\mathcal{U}(t-2)\}.$$

Solução: Como $a = 2$, segue-se do Teorema 3.7 que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-2)^3\mathcal{U}(t-2)\} &= e^{-2s}\mathcal{L}\{t^3\} \\ &= e^{-2s}\frac{3!}{s^4} \\ &= \frac{6}{s^4}e^{-2s}\end{aligned}$$

A transformada de Laplace da função degrau unitário pode ser obtida através da Definição 3.1 ou do Teorema 3.7. Fazendo $f(t) = 1$ no Teorema 3.7, então $f(t-a) = 1$, $F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, logo

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Forma inversa do Teorema 3.7

A forma inversa do Teorema 3.7 pode ser definida como

$$f(t-a)\mathcal{U}(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\},$$

em que $a > 0$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

3.6 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Impulso Unitário

Algumas aplicações exigem que tratemos os fenômenos de natureza impulsiva, por exemplo, forças eletromotrizes no caso de circuitos elétricos, forças externas em sistemas mecânicos ou forças de módulo grande que agem por um curto período de tempo. A função

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a, \end{cases}$$

para $a > 0$ e $t_0 > 0$, pode servir como um modelo matemático para representar tais forças. Para um pequeno valor de a , $\delta_a(t - t_0)$ é essencialmente uma função constante de grande amplitude que age por um pequeno intervalo de tempo. A função $\delta_a(t - t_0)$ pode ser chamada de impulso unitário, apresentando a seguinte propriedade:

$$\int_0^{\infty} \delta_a(t - t_0) dt = 1$$

É conveniente trabalhar com um outro tipo de impulso unitário, uma “função” que se aproxima de $\delta_a(t - t_0)$ e que é definida pelo limite

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0). \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) não pode ser considerada uma função, porém, apresenta duas propriedades que devem ser consideradas:

$$(I) \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (II) \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

A expressão $\delta(t - t_0)$ é chamada de função delta de Dirac.

É possível obter a transformada de Laplace da função delta de Dirac supondo que

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}\{\delta_a(t - t_0)\}.$$

Teorema 3.8 (Transformada da Função Delta de Dirac): Para $t_0 > 0$, podemos definir

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}.$$

A prova para o Teorema 3.8 pode ser encontrada em Zill e Cullen (2001).

De acordo com Zill e Cullen (2001) e a teoria moderna de funções generalizadas, a equação (3.11) não é aceitável como definição para $\delta(t - t_0)$ e também não se fala de uma função em que o valor é ∞ ou zero. É suficiente dizer que a função delta de Dirac é definida em termos de seu efeito ou de sua ação em outras funções. Podemos definir assim, a função como:

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

4 CIRCUITOS ELÉTRICOS

De acordo com Svoboda e Dorf (2016), circuito elétrico é uma interconexão de componentes elétricos de modo a formar um percurso fechado pelo o qual pode circular uma corrente. Os engenheiros utilizam os circuitos elétricos para resolver diversos problemas que são importantes para nossa sociedade, como por exemplo:

1. Geração, transmissão e consumo de energia.
2. Codificação, decodificação, armazenamento, recuperação, transmissão e processamento da informação.

Ao longo desta seção, o termo “circuito” será utilizado para referir-se a um circuito elétrico.

Estudar circuitos é valioso para os alunos que estão se especializando nas diversas ciências físicas, pois são um excelente modelo para o estudo dos sistemas de energia em geral e também por envolver matemática aplicada, física e topologia.

O principal objetivo deste trabalho é motivar o estudo de equações diferenciais através de sua aplicação em circuitos elétricos. Nesta seção, apresentamos um referencial teórico acerca de circuitos elétricos, a fim de conhecer um pouco mais sobre essa área de aplicação das equações diferenciais.

4.1 VARIÁVEIS DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

Carga

Carga é a propriedade intrínseca da matéria responsável pelos fenômenos elétricos, a sua quantidade pode ser expressa em termos da carga de um elétron, que é igual a $-1,602 \times 10^{-19}$ coulombs: -1 coulomb (-1 C) é a carga de $6,24 \times 10^{18}$ elétrons.

Corrente

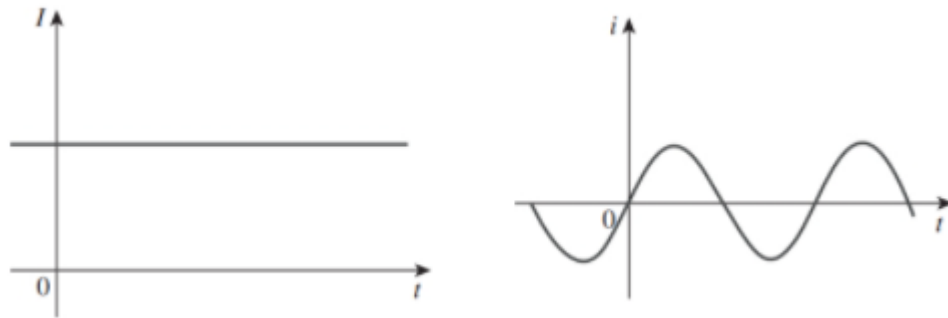
A corrente que passa por uma determinada área é definida por a quantidade de carga q , em coulombs, que passa por unidade de tempo t . A corrente pode ser expressa da seguinte forma:

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

A unidade de corrente é o ampère (A); um ampère corresponde a 1 coulomb/segundo.

Se a corrente não muda com o tempo e permanece constante, a corrente é chamada de corrente contínua (CC). Quando a corrente varia com o tempo seguindo uma forma de onda senoidal, pode ser chamada de corrente alternada (CA).

Figura 2 – Representação da corrente contínua e alternada respectivamente



Fonte: Alexander e Sadiku (2013)

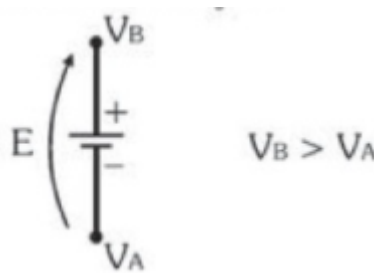
Tensão Elétrica

A diferença de potencial entre dois pontos é chamada de tensão elétrica e pode ser simbolizada por pelas letras V , U ou E , cuja a unidade de medida é o volt (V). Matematicamente podemos escrever:

$$V = U = E = V_B - V_A.$$

Em um circuito elétrico, indica-se uma tensão por uma seta voltada para o ponto de maior potencial.

Figura 3 – Representação da tensão em um circuito elétrico



Fonte: Markus (2011)

De acordo com Svoboda e Dorf (2016), a tensão entre os terminais de um componente é o trabalho (energia) necessário para transportar uma unidade de carga elétrica do terminal – para o terminal +.

A tensão entre os terminais de um componente pode ser dada por

$$v = \frac{dw}{dq}$$

em que v é a tensão, w é a energia (ou trabalho) e q é a carga. É importante considerar que uma carga de 1 coulomb gasta uma energia de 1 joule para percorrer uma diferença de potencial de 1 volt.

Potência e Energia

É de suma importância conhecer a potência e energia fornecidas a um componente. O termo potência é utilizado para indicar a quantidade de trabalho (conversão de energia) que pode ser realizado em um determinado período de tempo, para ser mais claro, podemos considerar que a potência como a velocidade com que um trabalho é executado.

Temos a energia convertida medida em joules (J) e o tempo em segundos (s), a potência é medida em joules/segundo (J/s). A unidade elétrica de medida de potência é o watt (W). Temos que $1 \text{ watt } (W) = 1 \text{ joule/segundo } (J/s)$.

Em termos de equação, podemos definir a potência como:

$$p = \frac{dw}{dt}$$

em que p é a potência em watts, w é a energia em joules e t é o tempo em segundos. Quando associamos a potência à uma corrente em um componente, podemos obter o seguinte resultado:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v \cdot i. \quad (4.1)$$

Pela equação (4.1) podemos perceber que a potência é dada pelo produto da tensão entre os terminais de um componente pela corrente que o atravessa.

4.2 COMPONENTES DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

São vários os componentes de um circuito elétrico, porém, nesta seção definiremos três deles, são eles: resistores, capacitores e indutores.

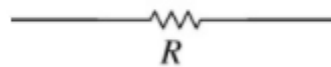
4.2.1 Resistores

A resistência é a característica elétrica dos materiais, que representa a oposição à passagem da corrente elétrica. Essa oposição à condução da corrente elétrica é provocada,

principalmente, pela dificuldade de os elétrons livres se movimentarem pela estrutura atômica dos materiais. A resistência elétrica é representada pela letra R , sua unidade de medida é o ohm (Ω). Um componente que possui uma resistência R é chamado de resistor, eles são utilizados em vários equipamentos do nosso cotidiano como, por exemplo, em chuveiros, secadores de cabelo, ferro de passar, lâmpadas, etc.

O símbolo mais utilizado para representar uma resistência em um circuito elétrico é representado na figura 4.

Figura 4 – Representação de uma resistência R em um circuito elétrico



Fonte: Zill e Cullen (2001)

1ª Lei de Ohm

Uma resistência transforma a energia elétrica fornecida por uma fonte de alimentação, provocando queda de potencial no circuito quando uma corrente passa por ela. A relação entre tensão, corrente e resistência é denominada primeira lei de Ohm, cuja expressão matemática é:

$$V = RI.$$

4.2.2 Capacitores

Capacitor é um elemento passivo projetado para armazenar energia em seu campo elétrico, ele é formado por duas placas condutoras separadas por um isolante (ou dielétrico). As aplicações de capacitores são inúmeras em eletrônica, comunicações, computadores e sistemas de potência. Diz-se que o capacitor armazena a carga elétrica e essa quantidade de carga armazenada, representada por q , é diretamente proporcional à tensão aplicada V de modo que

$$q = CV.$$

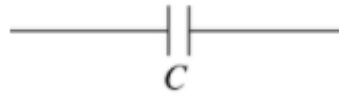
Onde C é a capacitância do capacitor e a sua unidade é o farad (F).

Capacitância

A capacitância é a razão entre a carga depositada em uma placa de um capacitor e a diferença de potencial entre as duas placas, medidas em farads (F).

Nos circuitos elétricos, a simbolização para um capacitor é representada na figura 5.

Figura 5 - Representação de um capacitor em um circuito elétrico



Fonte: Zill e Cullen (2001)

4.2.3 Indutores

Indutor é um elemento passivo projetado para armazenar energia em seu campo magnético. Os indutores têm inúmeras aplicações em eletrônica e sistemas de potência, e são usados em fontes de tensão, transformadores, rádios, etc.

Ao passar uma corrente através de um indutor, nota-se que a tensão nele é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente. Podemos escrever a seguinte equação para a queda de tensão em um indutor

$$V = L \frac{di}{dt}$$

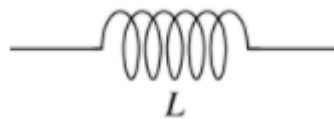
onde L é a indutância do indutor.

Indutância

A indutância é a propriedade segundo a qual um indutor se opõe à mudança do fluxo de corrente através dele, medida em henrys (H).

Nos circuitos elétricos, a simbolização para um indutor pode ser representada na figura 6.

Figura 6 - Representação de um indutor em um circuito elétrico



Fonte: Zill e Cullen (2001)

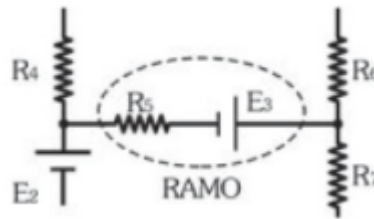
4.3 ELEMENTOS DOS CIRCUITOS ELÉTRICOS

As definições a seguir foram baseadas no livro Markus (2011).

Ramo

O ramo é qualquer parte de um circuito elétrico composto por um ou mais dispositivos ligados em série.

Figura 7 - Representação de um ramo em um circuito elétrico

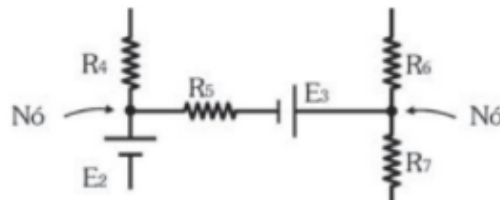


Fonte: Markus (2011)

Nó

Nó é qualquer ponto de um circuito elétrico no qual há a conexão de três ou mais ramos.

Figura 8 - Representação de um nó em um circuito elétrico

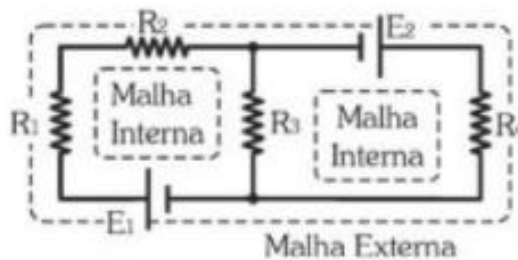


Fonte: Markus (2011)

Malha

Malha é qualquer parte de um circuito elétrico cujos ramos formam um caminho fechado para a corrente circular.

Figura 9 - Representação de uma malha em um circuito elétrico



Fonte: Markus (2011)

Lei de Kirchhoff para Tensões – Lei das Malhas

Ao se adotar um sentido arbitrário de corrente para a análise de uma malha, e considerar as tensões que elevam o potencial do circuito como positivas e as tensões que causam queda de potencial como negativas, a lei de Kirchhoff para tensões pode ser enunciada da seguinte forma:

"A soma algébrica das tensões em uma malha é zero."

Ou

"A soma das tensões que elevam o potencial do circuito é igual à soma das tensões que causam a queda de potencial."

A compreensão e a análise de um circuito dependem das duas leis básicas da eletricidade que são a lei de Kirchhoff para correntes e a lei de Kirchhoff para tensões, porém, nesse estudo nos limitamos apenas a segunda lei, visto que em nossas aplicações será necessário apenas o conhecimento sobre a mesma. Para um estudo mais aprofundado sobre as leis da eletricidade, pode ser consultada a bibliografia de Markus (2011).

4.4 CIRCUITO EM SÉRIE E PARALELO

De acordo com Boylestad (2012), um dos conceitos mais importantes a serem lembrados ao analisar circuitos em série e ao definir elementos que estejam em série é que a corrente sempre será a mesma em todos os pontos do circuito. Portanto, em qualquer configuração, se dois elementos estão em série, a corrente tem de ser a mesma. Porém, se a corrente é a mesma para dois elementos adjacentes, os elementos podem ou não estar em série.

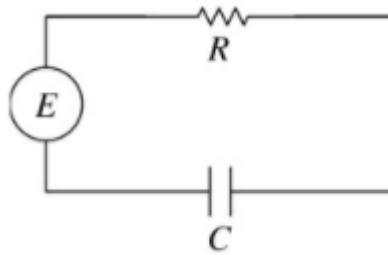
Já para os circuitos em paralelo, dois elementos, ramos ou resistores estão em paralelo se tiverem dois pontos em comum. Uma propriedade importante para esse tipo de circuito é que a tensão sempre é a mesma através de elementos em paralelo. Portanto, se dois elementos estão em paralelo, a tensão através deles deve ser a mesma. Porém, se a tensão através de dois elementos vizinhos é a mesma, os dois elementos podem ou não estar em paralelo.

4.5 TIPOS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

4.5.1 Circuito RC

Encontramos frequentemente o uso de resistores e capacitores em um mesmo circuito elétrico, quando isso ocorre estamos tratando de um circuito RC. Observe a figura 10, quando a chave do circuito é fechada, imediatamente uma corrente flui. Os elétrons fluem do terminal negativo da fonte $E(t)$ através do resistor R e ficam acumulados na placa superior do capacitor C . A mesma quantidade de elétrons fluirá da placa inferior do capacitor deixando-a mais negativa. A carga nas placas do capacitor vai aumentando enquanto houver corrente elétrica no circuito. Este processo ocorrerá até que diferença de potencial entre as placas do capacitor fique igual a $E(t)$.

Figura 10 – Representação de um circuito Resistor – Capacitor (RC)



Fonte: Zill e Cullen (2001)

A queda de potencial em um capacitor com capacitância C é dada por $q(t)/C$, em que q é a carga no capacitor. Então, para o circuito em série mostrado na figura 10, a segunda lei de Kirchhoff nos dá:

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (4.2)$$

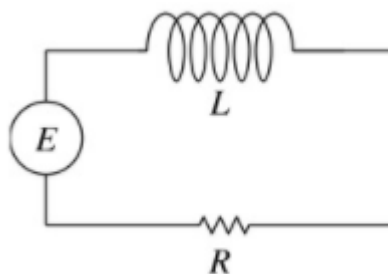
Como a corrente i e a carga q estão relacionadas por $i = dq/dt$, logo, a equação (4.2) pode ser reescrita como:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \quad (4.3)$$

4.5.2 Circuito RL

Quando temos um circuito elétrico composto por um resistor e um indutor, estamos tratando de um circuito RL. Considerando o circuito da figura 11, quando a chave do circuito é fechada, a fonte $E(t)$ alimenta o circuito com uma corrente I , até a bobina ficar carregada e sua tensão ser praticamente nula. O indutor quando percorrido por uma corrente elétrica produz um campo magnético, este campo cria um fluxo magnético dentro da bobina (Φ).

Figura 11 – Representação de um circuito Resistor – Indutor (RL)



Fonte: Zill e Cullen (2001)

Em um circuito em série contendo apenas um resistor e um indutor, a segunda lei de Kirchhoff diz que a soma da queda de tensão no indutor ($L(di/dt)$) e da queda de tensão no

resistor (iR) é igual à voltagem $E(t)$ no circuito. Podemos obter a seguinte equação diferencial linear para a corrente $i(t)$:

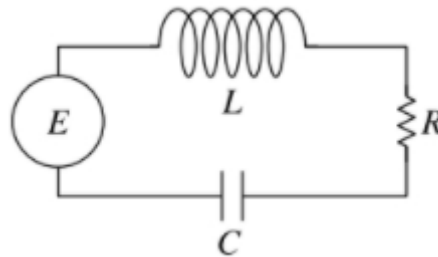
$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t). \quad (4.4)$$

onde L e R são constantes conhecidas como a indutância e a resistência, respectivamente. A corrente é na maioria das vezes chamada de resposta do sistema.

4.5.3 Circuito RCL

Um circuito que contém um resistor, um capacitor e um indutor conectados em série ou paralelo, são chamados de circuitos RCL (conhecidos também por circuito ressonante ou aceitador). De acordo com Nilsson e Riedel (2015), os circuitos RCL são chamados de circuitos de segunda ordem, pois qualquer tensão ou corrente neles podem ser descritas por uma equação diferencial de segunda ordem.

Figura 12 – Representação de um circuito Resistor – Capacitor – Indutor (RCL)



Fonte: Zill e Cullen (2001)

Se $i(t)$ denota a corrente em um circuito elétrico RCL, então a queda de tensão através do indutor, resistor e capacitor é igual a:

- No indutor: $V = L \frac{di}{dt}$
- No resistor: $V = iR$
- No capacitor: $V = \frac{1}{C} q$

Pela segunda lei de Kirchoff, a soma dessas voltagens é igual à voltagem $E(t)$ impressa no circuito, ou seja,

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (4.5)$$

Como a carga $q(t)$ no capacitor está relacionada com a corrente $i(t)$ por $i = dq/dt$, e então a equação (4.5) torna-se a equação diferencial linear de segunda ordem

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (4.6)$$

As nomenclaturas utilizadas para a análise de circuitos elétricos são semelhantes a nomenclatura empregada para descrever um sistema massa – mola.

Se $E(t) = 0$, as vibrações elétricas do circuito são ditas livres. Como a equação auxiliar para a equação (4.3) é $Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0$, haverá três modos de solução quando $R \neq 0$, dependendo do valor do discriminante $R^2 - 4L/C$. Dizemos assim que o circuito é

- Superamortecido se $R^2 - 4L/C > 0$;
- Criticamente amortecido se $R^2 - 4L/C = 0$;
- Subamortecido se $R^2 - 4L/C < 0$;

De acordo com Zill e Cullen (2001), em todos esses casos, a solução geral para a equação (4.6) contém o fator $e^{-Rt/2L}$, portanto a carga $q(t) \rightarrow 0$ quando o tempo $t \rightarrow \infty$. No caso subamortecido, quando $q(0) = q_0$, a carga no capacitor irá oscilar quando ele decrescer; ou seja, o capacitor é carregado e descarregado quando $t \rightarrow 0$. Quando $E(t) = 0$ e $R = 0$, dizemos que o circuito é não-amortecido, e as vibrações elétricas não se aproximam de zero quando t aumenta de maneira ilimitada; a resposta do circuito é chamada de harmônica simples.

5 METODOLOGIA

Na construção deste trabalho, foi feita uma pesquisa bibliográfica do tipo exploratória. Por se tratar de um trabalho revisional, para a coleta de dados, foram feitas consultas a livros através da biblioteca virtual da UFERSA e da Pearson e pesquisas à artigos e monografias através do Google Acadêmico, a fim de obter um maior aprofundamento no tema escolhido para esta monografia.

5.1 MATERIAIS E MÉTODOS

Foi feito um levantamento teórico, utilizando as seguintes palavras chaves para a delimitação do tema trabalhado: equações diferenciais; transformada de Laplace; circuitos elétricos. Além disso, com o intuito de mostrar a aplicação de equações diferenciais dentro do estudo de circuitos elétricos, foram selecionados problemas das bibliografias Bronson e Costa (2008) e Boyce e DiPrima (2017), envolvendo circuitos elétricos, onde, apresentamos a solução dos mesmos através de métodos de resolução de equações diferenciais e transformada de Laplace.

6 APLICAÇÕES

Nesta seção abordaremos alguns problemas envolvendo circuitos elétricos, mostrando a sua resolução através da aplicação de equações diferenciais e da transformada de Laplace. Serão utilizados os resultados obtidos nas seções anteriores a fim de solucionar os diversos tipos de problemas envolvendo circuitos elétricos abordados neste trabalho. Iremos expor problemas retirados da bibliografia de Bronson e Costa (2008) e Boyce e DiPrima (2017).

Problema 1 (Bronson e Costa, p.79): Um circuito RL tem uma *fem* de 5 volts, uma resistência de 50 ohms, uma indutância de 1 henry e não tem corrente inicial. Determine a corrente no circuito no instante de tempo t .

Solução: Neste caso, $E = 5V$, $R = 50\Omega$, e $L = 1H$; logo, a equação (4.4) pode ser escrita como

$$\frac{di}{dt} + 50i = 5. \quad (6.1)$$

Esta equação é linear de 1ª ordem, que tem como método de solução o do fator integrante.

Temos $\mu(t) = e^{\int 50dt} \rightarrow \mu(t) = e^{50t}$.

Multiplicando a equação (6.1) por $\mu(t)$ obtemos,

$$e^{50t} \cdot \frac{di}{dt} + e^{50t} \cdot 50i = 5 \cdot e^{50t}.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(i \cdot e^{50t}) = 5 \cdot e^{50t}.$$

Integrando em relação a t ,

$$i \cdot e^{50t} = \int 5 \cdot e^{50t} dt.$$

Portanto,

$$i \cdot e^{50t} = 5 \cdot \frac{e^{50t}}{50} + C.$$

Logo,

$$i(t) = \frac{1}{10} + C e^{-50t}. \quad (6.2)$$

Em $t = 0$, temos $i = 0$, logo, aplicando as condições iniciais, obtemos

$$0 = \frac{1}{10} + C e^{-50 \cdot 0} \rightarrow C = -\frac{1}{10}.$$

Aplicando o valor de C em (6.2), teremos

$$i(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-50t}.$$

Resolveremos agora o mesmo problema proposto por transformada de Laplace. Temos que o problema de valor inicial é dado por

$$\begin{cases} i' + 50i = 5 \\ i(0) = 0 \end{cases}.$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{i'\} + 50\mathcal{L}\{i\} = \mathcal{L}\{5\}. \quad (6.3)$$

Pela equação (3.3) podemos escrever (6.3) como,

$$sI(s) - i(0) + 50I(s) = \frac{5}{s}.$$

Substituindo as condições iniciais,

$$sI(s) - 0 + 50I(s) = \frac{5}{s}.$$

Explicitando $I(s)$, obtemos

$$I(s) = \frac{5}{s(s + 50)}. \quad (6.4)$$

Aplicando a transformada inversa, $i(t)$ é dado por,

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s(s + 50)}\right\}.$$

Para calcular a inversa de $I(s)$, utilizaremos o método das frações parciais:

$$\frac{5}{s(s + 50)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s + 50)}. \quad (6.5)$$

Multiplicando ambos os lados por $s(s + 50)$ implica,

$$5 = A(s + 50) + Bs.$$

Para $s = 0$, temos

$$5 = A(0 + 50) + B \cdot 0 \rightarrow A = \frac{1}{10}.$$

Para $s = -50$, temos

$$5 = A(-50 + 50) + B \cdot (-50) \rightarrow B = -\frac{1}{10}$$

Substituindo os valores de A e B em (6.5), obtemos

$$\frac{5}{s(s + 50)} = \frac{1/10}{s} - \frac{1/10}{(s + 50)}.$$

Logo,

$$i(t) = \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + 50} \right\}.$$

Utilizando as entradas 1 e 3 da tabela 3, a solução $i(t)$ é expressa como

$$i(t) = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} e^{-50t}.$$

Problema 2 (Bronson e Costa, p.80): Um circuito RC tem uma *fem* (em volts) de $400\cos 2t$, uma resistência de 100 ohms, e uma capacitância de 10^{-2} farad. Inicialmente, não existe carga no capacitor. Determine a corrente no circuito no instante de tempo t .

Solução: Primeiro, determinamos a carga q e em seguida utilizamos a definição de $i = \frac{dq}{dt}$, para obter a corrente. Neste caso, temos $E = (400\cos 2t)V$, $R = 100\Omega$ e $C = 10^{-2}F$; logo, a equação (4.3) pode ser escrita como,

$$\frac{dq}{dt} + q = 4\cos 2t. \quad (6.6)$$

Essa equação é linear de 1ª ordem e tem como método de solução o fator integrante.

Temos $\mu(t) = e^{\int 1 dt} \rightarrow \mu(t) = e^t$.

Multiplicando a equação (6.6) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^t \cdot \frac{dq}{dt} + e^t \cdot q = e^t \cdot 4\cos 2t.$$

Então,

$$\frac{d}{dt}(q \cdot e^t) = e^t \cdot 4\cos 2t$$

Integrando em relação a t ,

$$q \cdot e^t = \int e^t \cdot 4\cos 2t dt. \quad (6.7)$$

Para a primeira integração por partes, obtemos

$$\int e^t \cdot 4\cos 2t dt = \cos 2t \cdot e^t + \int 2e^t \cdot \sin 2t.$$

Para a segunda integração por partes, obtemos

$$\int e^t \cdot 4\cos 2t dt = \frac{8}{5} e^t \cdot \sin 2t + \frac{4}{5} e^t \cdot \cos 2t + C. \quad (6.8)$$

Substituindo (6.8) em (6.7), temos

$$q \cdot e^t = \frac{8}{5} e^t \cdot \sin 2t + \frac{4}{5} e^t \cdot \cos 2t + C.$$

Logo,

$$q(t) = \frac{8}{5} \sin 2t + \frac{4}{5} \cos 2t + C e^{-t}. \quad (6.9)$$

Em $t = 0$, temos $q = 0$, logo,

$$0 = \frac{8}{5} \sin (2 \cdot 0) + \frac{4}{5} \cos (2 \cdot 0) + C e^{-(0)} \rightarrow C = -\frac{4}{5}.$$

Aplicando o valor de C na equação (6.9), temos

$$q(t) = \frac{8}{5} \sin 2t + \frac{4}{5} \cos 2t - \frac{4}{5} e^{-t}.$$

Para encontrar a corrente utilizamos a definição $i = \frac{dq}{dt}$, obtendo assim

$$i(t) = \frac{16}{5} \cos 2t - \frac{8}{5} \sin 2t + \frac{4}{5} e^{-t}.$$

Resolveremos agora o mesmo problema proposto por transformada de Laplace. Temos que o problema de valor inicial é dado por

$$\begin{cases} q' + q = 4\cos 2t \\ q(0) = 0 \end{cases}.$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{q'\} + \mathcal{L}\{q\} = 4\mathcal{L}\{\cos 2t\}. \quad (6.10)$$

Pela equação (3.3) podemos escrever (6.10) como,

$$sQ(s) - q(0) + Q(s) = \frac{4s}{s^2 + 4}.$$

Substituindo as condições iniciais,

$$sQ(s) - 0 + Q(s) = \frac{4s}{s^2 + 4}.$$

Explicitando $Q(s)$, obtemos

$$Q(s) = \frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}. \quad (6.11)$$

Aplicando a transformada inversa, $q(t)$ é dado por,

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)}\right\}.$$

Para calcular a inversa de $Q(s)$, utilizaremos o método das frações parciais:

$$\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{(s^2+4)}. \quad (6.12)$$

Multiplicando ambos os lados por $(s+1)(s^2+4)$ implica,

$$4s = A(s^2+4) + (Bs+C)(s+1). \quad (6.13)$$

Para $s = -1$, temos

$$4(-1) = A((-1)^2+4) + (B(-1)+C)((-1)+1) \rightarrow A = -\frac{4}{5}.$$

Aplicando a propriedade distributiva na equação (6.13), obtemos

$$4s = As^2 + 4A + Bs^2 + Bs + Cs + C.$$

Igualando os coeficientes das potências de s , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C = 4 \\ 4A + C = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é dada por $B = -A = \frac{4}{5}$, $C = \frac{16}{5}$.

Substituindo os valores de A , B e C em (6.12), obtemos

$$\frac{4s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{-4/5}{(s+1)} + \frac{4/5s + 16/5}{(s^2+4)}$$

Logo,

$$q(t) = -\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}. \quad (6.14)$$

Reescrevendo a equação (6.14), temos

$$q(t) = -\frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{4}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{8}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}.$$

Utilizando as entradas 3, 4 e 5 da tabela 3, a solução $q(t)$ é expressa como

$$q(t) = -\frac{4}{5}e^{-t} + \frac{4}{5}\cos 2t + \frac{8}{5}\sin 2t.$$

Para obter a corrente, basta derivar uma vez a expressão $q(t)$, temos assim

$$i(t) = \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{8}{5}\sin 2t + \frac{16}{5}\cos 2t.$$

Problema 3 (Bronson e Costa, p.136): Um circuito RCL conectado em série tem $R = 180$ ohms, $C = \frac{1}{280}$ farad, $L = 20$ henries e uma tensão aplicada $E(t) = 10\sin t$ volts. Admitindo que não exista carga inicial no capacitor, mas exista uma corrente inicial de 1 ampère em $t = 0$ quando a tensão é aplicada inicialmente, determine a carga subsequente no capacitor.

Solução: Substituindo as quantidades dadas na equação (4.6), obtemos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 9\frac{dq}{dt} + 14q = \frac{1}{2}\sin t. \quad (6.15)$$

Podemos reescrever a equação (6.15) como

$$q'' + 9q' + 14q = \frac{1}{2}\sin t. \quad (6.16)$$

A equação (6.16) é linear de 2ª ordem não-homogênea com seus coeficientes constantes. Utilizaremos o método dos coeficientes indeterminados para encontrar sua solução. Primeiramente determinaremos a equação complementar e posteriormente a equação particular associada a equação (6.16). A solução geral será dada pela soma da equação complementar com a equação particular.

Temos que a equação homogênea associada a (6.16) é

$$q'' + 9q' + 14q = 0. \quad (6.17)$$

A equação característica associada a (6.17) é

$$r^2 + 9r + 14 = 0. \quad (6.18)$$

O discriminante da equação (6.18) é dado por

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 \rightarrow \Delta = 25.$$

As raízes associadas a (6.18) são $r' = -2$ e $r'' = -7$.

Logo, a equação complementar é dada por

$$q_c(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-7t}. \quad (6.19)$$

Agora, vamos supor uma solução particular para a equação (6.16),

$$q_p(t) = A \cos t + B \sin t. \quad (6.20)$$

Devemos ter derivando,

$$q'_p(t) = -A \sin t + B \cos t.$$

$$q''_p(t) = -A \cos t - B \sin t.$$

Substituindo na equação (6.16),

$$-A \cos t - B \sin t + 9(-A \sin t + B \cos t) + 14(A \cos t + B \sin t) = \frac{1}{2} \sin t.$$

$$-A \cos t - B \sin t - 9A \sin t + 9B \cos t + 14A \cos t + 14B \sin t = \frac{1}{2} \sin t.$$

$$(13A + 9B) \cos t + (-9A + 13B) \sin t = \frac{1}{2} \sin t.$$

Teremos,

$$\begin{cases} 13A + 9B = 0 \\ -9A + 13B = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Obtendo do sistema as soluções $A = -\frac{9}{500}$ e $B = \frac{13}{500}$.

Substituindo os valores de A e B na equação (6.20) temos,

$$q_p(t) = -\frac{9}{500}cost + \frac{13}{500}sent. \quad (6.21)$$

A solução geral será dada pela soma de (6.19) com (6.21), obtendo assim,

$$q(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t} - \frac{9}{500}cost + \frac{13}{500}sent \quad (6.22)$$

Aplicando as condições iniciais $q(0) = 0$ e $q'(0) = 1$, obtemos $C_1 = \frac{110}{500}$ e $C_2 = -\frac{101}{500}$. Logo,

$$q(t) = \frac{1}{500} (110e^{-2t} - 101e^{-7t} - 9cost + 13sent).$$

Resolveremos agora o mesmo problema proposto por transformada de Laplace. Temos que o problema de valor inicial é dado por

$$\begin{cases} q'' + 9q' + 14q = \frac{1}{2}sent. \\ q(0) = 0; \quad q'(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{q''\} + 9\mathcal{L}\{q'\} + 14\mathcal{L}\{q\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{sent\}. \quad (6.23)$$

Utilizando as equações (3.3) e (3.4), podemos escrever (6.23) como

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 9(sQ(s) - q(0)) + 14Q(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Aplicando as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2Q(s) - s \cdot 0 - 1 + 9(sQ(s) - 0) + 14Q(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}. \\ \rightarrow s^2Q(s) + 9sQ(s) + 14Q(s) &= \frac{s^2 + 3/2}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Explicitando $Q(s)$,

$$Q(s) = \frac{s^2 + 3/2}{(s^2 + 1)(s^2 + 9s + 14)} \quad (6.24)$$

Podemos reescrever (6.24) como

$$Q(s) = \frac{s^2 + 3/2}{(s^2 + 1)(s + 2)(s + 7)}.$$

Aplicando a transformada inversa, $q(t)$ é dado por,

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 3/2}{(s^2 + 1)(s + 2)(s + 7)}\right\}.$$

Para calcular a inversa de $Q(s)$, utilizaremos o método das frações parciais:

$$\frac{s^2 + 3/2}{(s^2 + 1)(s + 2)(s + 7)} = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{C}{(s + 2)} + \frac{D}{(s + 7)} \quad (6.25)$$

Multiplicando ambos os lados por $(s^2 + 1)(s + 2)(s + 7)$ teremos,

$$s^2 + \frac{3}{2} = (As + B)(s + 2)(s + 7) + C(s^2 + 1)(s + 7) + D(s^2 + 1)(s + 2). \quad (6.26)$$

Para $s = -2$, temos

$$\begin{aligned} (-2)^2 + \frac{3}{2} &= (A((-2) + B)((-2) + 2)((-2) + 7) + C((-2)^2 + 1)((-2) + 7) \\ &\quad + D((-2)^2 + 1)((-2) + 2). \\ &\rightarrow C = \frac{11}{50}. \end{aligned}$$

Para $s = -7$, temos

$$\begin{aligned} (-7)^2 + \frac{3}{2} &= (A((-7) + B)((-7) + 2)((-7) + 7) + C((-7)^2 + 1)((-7) + 7) \\ &\quad + D((-7)^2 + 1)((-7) + 2). \\ &\rightarrow D = -\frac{101}{500}. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva em (6.26) obtemos,

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{3}{2} &= As^3 + 9As^2 + 14As + Bs^2 + 9Bs + 14B + Cs^3 + 7Cs^2 + Cs + 7C + Ds^3 \\ &\quad + 2Ds^2 + Ds + 2D. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes das potências de s , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ 9A + B + 7C + 2D = 1 \\ 14A + 9B + C + D = 0. \\ 14B + 7C + 2D = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Aplicando os valores de C e de D no sistema, obteremos $A = -\frac{9}{500}$ e $B = \frac{13}{500}$.

Substituindo os valores de A , B , C e D em (6.25) obtemos

$$\frac{s^2 + 3/2}{(s^2 + 1)(s + 2)(s + 7)} = \frac{-\frac{9}{500}s + \frac{13}{500}}{(s^2 + 1)} + \frac{\frac{11}{50}}{(s + 2)} - \frac{\frac{101}{500}}{(s + 7)}$$

Logo,

$$q(t) = -\frac{9}{500}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + \frac{13}{500}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} + \frac{11}{50}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} - \frac{101}{500}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 7}\right\}.$$

Utilizando as entradas 1, 3, 4 e 5 da tabela 3, a solução $q(t)$ é expressa como

$$q(t) = -\frac{9}{500}\cos t + \frac{13}{500}\sin t + \frac{11}{50}e^{-2t} - \frac{101}{500}e^{-7t}.$$

Problema 4 (Bronson e Costa, p.143): Um circuito RCL conectado em série com $R = 6$ ohms, $C = 0,02$ farad e $L = 0,1$ henry tem uma tensão aplicada $E(t) = 6$ volts. Admitindo que não haja corrente inicial nem carga inicial em $t = 0$ quando a tensão é inicialmente aplicada, determine a carga subsequente no capacitor e a corrente no circuito.

Solução: Substituindo os valores dados na equação (4.6), obtemos

$$0,1 \frac{d^2 q}{dt^2} + 6 \frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,02} q = 6 \quad (6.27)$$

Podemos reescrever a equação (6.27) como

$$q'' + 60q' + 500q = 60 \quad (6.28)$$

A equação (6.28) é linear de 2ª ordem não-homogênea com seus coeficientes constantes. Utilizaremos o método dos coeficientes indeterminados para encontrar sua solução. Primeiramente determinaremos a equação complementar e posteriormente a equação particular associada a equação (6.28). A solução geral será dada pela soma da equação complementar com a equação particular.

Temos que a equação homogênea associada a (6.28) é

$$q'' + 60q' + 500q = 0. \quad (6.29)$$

A equação característica associada a (6.29) é

$$r^2 + 60r + 500 = 0. \quad (6.30)$$

O discriminante da equação (6.30) é dado por

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow \Delta = 60^2 - 4 \cdot 1 \cdot 500 \rightarrow \Delta = 1600.$$

As raízes associadas a (6.30) são $r' = -50$ e $r'' = -10$.

Logo, a equação complementar é dada por

$$q_c(t) = C_1 e^{-50t} + C_2 e^{-10t}. \quad (6.31)$$

Agora, vamos supor uma solução particular para a equação (6.31),

$$q_p(t) = A. \quad (6.32)$$

Devemos ter derivando,

$$q'_p(t) = 0.$$

$$q''_p(t) = 0.$$

Substituindo na equação (6.28),

$$0 + 60 \cdot 0 + 500 \cdot A = 60$$

$$\rightarrow A = \frac{3}{25}$$

Substituindo o valor de A na equação (6.32), teremos

$$q_p(t) = \frac{3}{25}. \quad (6.33)$$

A solução geral será dada pela soma de (6.31) com (6.33), obtendo assim,

$$q(t) = C_1 e^{-50t} + C_2 e^{-10t} + \frac{3}{25} \quad (6.34)$$

Aplicando as condições iniciais $q(0) = 0$ e $q'(0) = 0$, obtemos $C_1 = \frac{3}{100}$ e $C_2 = -\frac{3}{20}$. Logo,

$$q(t) = \frac{3}{100} e^{-50t} - \frac{3}{20} e^{-10t} + \frac{3}{25}$$

Para encontrar a corrente basta usar a definição de que $i(t) = \frac{dq}{dt}$, obtemos assim

$$i(t) = -\frac{3}{2}e^{-50t} + \frac{3}{2}e^{-10t}$$

Resolveremos agora o mesmo problema proposto por transformada de Laplace. Temos que o problema de valor inicial é dado por

$$\begin{cases} q'' + 60q' + 500q = 60 \\ q(0) = 0; \quad q'(0) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação diferencial e utilizando a propriedade de linearidade, temos

$$\mathcal{L}\{q''\} + 60\mathcal{L}\{q'\} + 500\mathcal{L}\{q\} = \mathcal{L}\{60\}. \quad (6.35)$$

Utilizando as equações (3.3) e (3.4), podemos escrever (6.35) como

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 60(sQ(s) - q(0)) + 500Q(s) = \frac{60}{s}.$$

Aplicando as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2Q(s) - s \cdot 0 - 0 + 60(sQ(s) - 0) + 500Q(s) &= \frac{60}{s}. \\ \rightarrow s^2Q(s) + 60sQ(s) + 500Q(s) &= \frac{60}{s}. \end{aligned}$$

Explicitando $Q(s)$,

$$Q(s) = \frac{60}{s(s^2 + 60s + 500)}. \quad (6.36)$$

Podemos reescrever (6.36) como

$$Q(s) = \frac{60}{s(s + 50)(s + 10)}.$$

Aplicando a transformada inversa, $q(t)$ é dado por,

$$q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Q(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60}{s(s + 50)(s + 10)}\right\}.$$

Para calcular a inversa de $Q(s)$, utilizaremos o método das frações parciais:

$$\frac{60}{s(s+50)(s+10)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+50)} + \frac{C}{(s+10)} \quad (6.37)$$

Multiplicando ambos os lados por $s(s+50)(s+10)$ teremos,

$$60 = A(s+50)(s+10) + Bs(s+10) + Cs(s+50)$$

Para $s = 0$, temos

$$60 = A(0+50)(0+10) + B \cdot 0(0+10) + C \cdot 0(0+50)$$

$$\rightarrow A = \frac{3}{25}.$$

Para $s = -50$, temos

$$60 = A(-50+50)(-50+10) + B(-50)(-50+10) + C(-50)(-50+50)$$

$$\rightarrow B = \frac{3}{100}.$$

Para $s = -10$, temos

$$60 = A(-10+50)(-10+10) + B(-10)(-10+10) + C(-10)(-10+50)$$

$$\rightarrow C = -\frac{3}{20}.$$

Substituindo os valores de A , B e C em (6.37) obtemos

$$\frac{60}{s(s+50)(s+10)} = \frac{3/25}{s} + \frac{3/100}{(s+50)} - \frac{3/20}{(s+10)}$$

Logo,

$$q(t) = \frac{3}{25} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{100} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+50}\right\} - \frac{3}{20} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+10}\right\}$$

Utilizando as entradas 1 e 3 da tabela 3, a solução $q(t)$ é expressa como

$$q(t) = \frac{3}{25} + \frac{3}{100} e^{-50t} - \frac{3}{20} e^{-10t}.$$

A corrente será expressa pela definição $i(t) = \frac{dq}{dt}$, logo

$$i(t) = -\frac{3}{2} e^{-50t} + \frac{3}{2} e^{-10t}.$$

Problema 5 (Boyce e DiPrima (2017), p.282): Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + y' + 2y = g(t) \quad (6.38)$$

em que

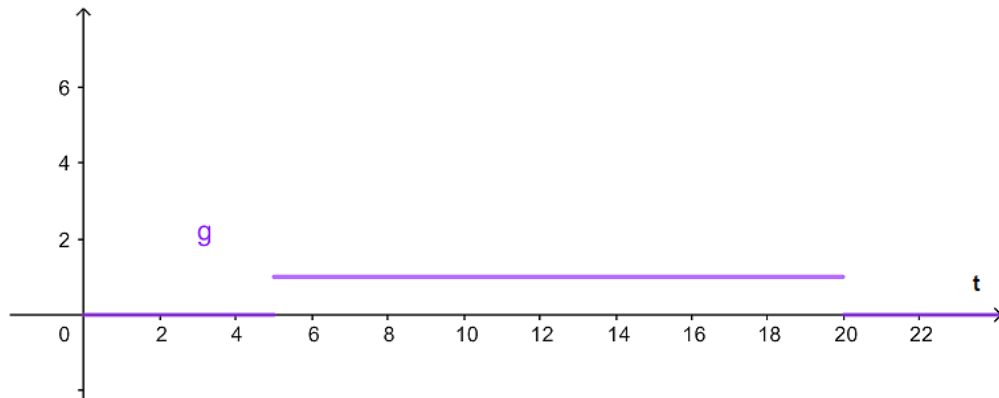
$$g(t) = \mathcal{U}_5(t) - \mathcal{U}_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & 0 \leq t < 5 \text{ e } t \geq 20. \end{cases}$$

Suponha que as condições iniciais são

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (6.39)$$

Esse problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples em que a voltagem é um pulso unitário para $5 \leq t < 20$. A função $g(t)$ pode ser representada pelo gráfico a seguir:

Figura 13 – Gráfico da função $g(t)$



Fonte: Autoria própria (2020)

Solução: De acordo com as equações (3.3) e (3.4), juntamente com o teorema (3.7), obteremos a seguinte transformada de Laplace para a equação (6.38)

$$\begin{aligned} 2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \mathcal{L}\{\mathcal{U}_5(t)\} - \mathcal{L}\{\mathcal{U}_{20}(t)\} \\ &= \frac{(e^{-5s} - e^{-20s})}{s}. \end{aligned}$$

Usando as condições iniciais (6.39) e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \quad (6.40)$$

Para encontrar $y = \varnothing(t)$, é conveniente escrever (6.40) da forma

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s),$$

em que

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)} \quad (6.41)$$

Então, se $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, teremos

$$y = \emptyset(t) = \mathcal{U}_5(t)h(t - 5) - \mathcal{U}_{20}(t)h(t - 20). \quad (6.42)$$

Na equação (6.42), para escrever a transformada inversa de $e^{-5s}H(s)$ e $e^{-20s}H(s)$ foi utilizado a forma inversa do teorema (3.7), visto nas seções anteriores.

Para determinar $h(t)$, utilizaremos a expansão em frações parciais de (6.41), obtendo assim:

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{2s^2 + s + 2}.$$

Determinando os coeficientes, encontramos $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/2}{s} - \frac{s + 1/2}{2s^2 + s + 2} = \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(s + 1/4) + 1/4}{(s + 1/4)^2 + 15/16} \\ &= \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left[\frac{(s + 1/4)}{(s + 1/4)^2 + (\sqrt{15}/4)^2} + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}/4}{(s + 1/4)^2 + (\sqrt{15}/4)^2} \right] \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, juntamente com a propriedade de linearidade, obteremos

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(s + \frac{1}{4}\right)}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}\right\}.$$

Logo, de acordo com as entradas 1, 4 e 5 da tabela 3, teremos,

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{t}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) e^{-\frac{t}{4}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) \right].$$

7 CONCLUSÃO

O presente trabalho, foi desenvolvido a fim de despertar uma maior motivação de alunos no estudo de equações diferenciais. Foi exposto um referencial teórico sobre equações diferenciais, onde abordamos importantes definições e métodos de soluções, como o método do fator integrante, coeficientes indeterminados e a transformada de Laplace. Ainda assim, mostramos a importância de também considerar os fenômenos de natureza impulsiva, neste âmbito, enunciamos a função degrau unitário e a função delta de Dirac. No referencial teórico sobre circuitos elétricos, foi apresentado a teoria sobre o que é um circuito, sua importância para sistemas elétricos, quais componentes o compõe e quais os tipos de circuito mais utilizados. Por fim, buscando uma maior aplicabilidade, selecionamos alguns problemas, onde, apresentamos a resolução dos mesmos através de métodos de resolução de equações diferenciais e transformada de Laplace. Com isso, mostramos a importância das equações diferenciais dentro do estudo de circuitos elétricos e sua significância dentro da resolução de problemas nessa área.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de Circuitos Elétricos**. 5 ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à Análise de Circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.
- BRONSON, Richard; COSTA, Gabriel. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008.
- DULLIUS, Maria Madalena; VEIT, Eliane Angela; ARAUJO, Ives Solano. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 207-228, 2013.
- MARKUS, Otávio. **Circuitos Elétricos: corrente contínua e corrente alternada - teoria e exercícios**. 9. ed. São Paulo: Érica, 2011.
- NILSSON, James W.; RIEDEL, Susan A. **Circuitos Elétricos**. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.
- SANTOS, Reginaldo J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.
- SVOBODA, James A.; DORF, Richard C. **Introdução aos Circuitos Elétricos**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**, vol. 1. 3 ed. São Paulo: Makron Books, 2001.