



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

PAULA LETHYCIA GOMES DANTAS

**PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADOS À ENGENHARIA
CIVIL: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

CARAÚBAS

2025

PAULA LETHYCIA GOMES DANTAS

**PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADOS À ENGENHARIA
CIVIL: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho

CARAÚBAS

2025

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

G192p Dantas, Paula Lethycia Gomes .
 Problemas de cálculo diferencial aplicados à
 engenharia civil: uma revisão bibliográfica /
 Paula Lethycia Gomes Dantas. - 2025.
 57 f. : il.

 Orientador: Antonival Lopes do Nascimento
 Filho.
 Monografia (graduação) - Universidade
 Federal Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
 Tecnologia, 2025.

 1. Cálculo diferencial. 2. Engenharia civil.
 3. Aplicações. 4. Conexão Teoria-prática. I.
 Nascimento Filho, Antonival Lopes do , orient.
 II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade com AACR2 e os dados
fornecidos pelo autor (a).
Biblioteca Campus Caraúbas
Bibliotecária: Sarah Freire Bezerra
CRB: 15/1052

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

PAULA LETHYCIA GOMES DANTAS

**PROBLEMAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL APLICADOS À ENGENHARIA
CIVIL: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Universidade Federal Rural do Semi-Árido
como requisito para obtenção do título de
Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e
Tecnologia.

Defendida em: 04 / 12 / 2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonival Lopes do Nascimento Filho (UFERSA)
Presidente

Prof. Dr. Fábio Arceu Ferreira (UFRN)
Membro Examinador

Prof^a. Dra. Dayane Santos de Lira (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela saúde, força e sabedoria concedidas ao longo desta caminhada, permitindo-me chegar até aqui e concluir mais essa etapa da minha vida acadêmica.

À minha família, expresso minha profunda gratidão pelo apoio constante, incentivo e compreensão em todos os momentos. Sem vocês, este percurso não teria sido possível.

Aos meus amigos, que estiveram presentes nos desafios e nas conquistas, oferecendo palavras de apoio e tornando a jornada mais leve.

Ao meu orientador, agradeço pela dedicação, orientação e disponibilidade. Sua paciência e acompanhamento constante contribuíram significativamente para o desenvolvimento deste trabalho e tornaram o processo mais tranquilo e enriquecedor.

À banca avaliadora, agradeço pelas contribuições valiosas e pelas considerações que ajudaram a aprimorar este trabalho, tornando-o mais completo e consistente.

RESUMO

Este trabalho tem como propósito fazer uma análise do material bibliográfico sugerido para a disciplina de Cálculo 1 no curso superior Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia, pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), campus Caraúbas - RN. Foram selecionados exercícios e exemplos que aproximam os conceitos teóricos do Cálculo Diferencial da Engenharia Civil. Ao longo do trabalho, foram resolvidos exercícios que envolvem cálculos de áreas, volumes, taxas de variação em tanques e análise de funções de custo em projetos de engenharia. Também foram elaboradas figuras e gráficos de funções com o auxílio do software GeoGebra e a utilização de unidades de medidas nacionais, possibilitando uma melhor compreensão e uma melhor didática dos temas abordados. Desse modo, o estudo enfatiza a importância de metodologias que relacionem teoria e prática, tornando o ensino do Cálculo mais dinâmico e motivador para os futuros estudantes de engenharia.

Palavras-chave: Cálculo Diferencial; Engenharia Civil; Aplicações; Conexão Teoria-prática.

ABSTRACT

This work aims to analyze the bibliographic material suggested for the Calculus 1 subject within the Interdisciplinary Science and Technology program at the Federal Rural University of the Semi-Arid (UFERSA), Caraúbas Campus, RN. Exercises and examples were selected to bridge theoretical concepts of Differential Calculus with Civil Engineering. Throughout the study, exercises involving the calculation of areas, volumes, rates of change in tanks, and the analysis of cost functions in engineering projects were solved. Figures and graphs of functions were also developed with the aid of GeoGebra software, using national units of measurement, to facilitate a better understanding and didactic approach to the covered topics. Thus, the study emphasizes the importance of methodologies that link theory and practice, making the teaching of Calculus more dynamic and motivating for future engineering students.

Keywords: Differential Calculus; Civil Engineering; Applications; Theory-practice connection.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Figura ilustrativa respectiva ao exemplo 4.1.....	17
Figura 2: Moldagem gráfica pelo GeoGebra.....	19
Figura 3: Polígono.....	21
Figura 4: Cor e opacidade.....	21
Figura 5: Parede.....	22
Figura 6: Letras na imagem.....	22
Figura 7: Eixo e grelhas.....	23
Figura 8: Caixa de texto.....	23
Figura 9: Figura pronta.....	24
Figura 10: Imagem aprimorada.....	24
Figura 11: Confeção do gráfico.....	25
Figura 12: Janela.....	25
Figura 13: Figura ilustrativa respectiva ao exemplo 4.2.....	26
Figura 14: Gráfico respectiva ao exemplo 4.2.....	29
Figura 15: Gráfico com função linear.....	32
Figura 16: Tanque cilíndrico.....	33
Figura 17: Cone circular invertido.....	35
Figura 18: Fábrica e estação de energia.....	37
Figura 19: Fábrica e estação de energia.....	38
Figura 20: Gráfico da derivada.....	40
Figura 21: Plataforma de petróleo e refinaria.....	41
Figura 22: Gráfico da função.....	44
Figura 23: Viga de madeira.....	45
Figura 24: Viga de madeira.....	45
Figura 25: Gráfico da função rigidez.....	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Fórmulas de derivação.....	50
Tabela 2: Conversão: Comprimento.....	51
Tabela 3: Cálculo Aplicado (Larson; 8. ed.).....	52
Tabela 4: Cálculo: Volume 1 (Stewart; 7. ed.).....	53
Tabela 5: Cálculo A (Flemming e Gonçalves; 6. ed.).....	54
Tabela 6: Um curso de Cálculo: Vol. 1 (Guidorizzi; 6. ed.).....	54
Tabela 7: Cálculo com Geometria Analítica: Vol. 1 (Simmons; 1. ed.).....	55

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 REFERENCIAL TEÓRICO.....	13
2.1 A conexão entre a teoria e a prática nos problemas de cálculo.....	13
2.2 Questões que influenciam o ensino de cálculo e a relação com a engenharia civil.	14
2.3 A importância do cálculo diferencial na formação do engenheiro civil.....	14
3 METODOLOGIA E OBJETIVOS.....	16
4 APLICAÇÕES.....	17
Exemplo 4.1: Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, 1. ed. Página 162, exemplo resolvido 2.....	17
4.1.1 Elaboração da figura e do gráfico no GeoGebra.....	21
Exemplo 4.2: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 21, questão 62.....	25
Exemplo 4.3: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 138, questão 46.....	29
Exemplo 4.4: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 223, questão 5.....	33
Exemplo 4.5: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 221, exemplo 3.....	34
Exemplo 4.6: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 234, questão 23.....	37
Exemplo 4.7: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 234, questão 24.....	41
Exemplo 4.8: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 225, questão 41.....	44
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	49
APÊNDICE A - TABELA DE DERIVAÇÕES.....	50
APÊNDICE B - TABELA DE CONVERSÃO.....	51
APÊNDICE C - TABELAS DE QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL.....	52
REFERÊNCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

O curso Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia tem sido a porta de entrada para diversos estudantes que desejam seguir carreira em Engenharia. Entretanto, ao longo da formação, muitos se deparam com obstáculos significativos nas disciplinas de Cálculo, em especial pela predominância de uma abordagem teórica e pela escassez de exemplos que permitam relacionar os conteúdos ao cotidiano profissional. Essa distância entre teoria e prática frequentemente resulta em desmotivação e pode até mesmo levar ao abandono do curso. “A abordagem prática em aula contribui para o desenvolvimento de argumentos científicos. Assim, concede aos educandos a aprendizagem com o seu próprio mundo e apresenta soluções adequadas para as situações difíceis” (Lunetta, 1991).

No âmbito da Engenharia Civil, o Cálculo Diferencial assume papel fundamental, pois oferece ferramentas indispensáveis para a análise estrutural, dimensionamento de projetos e compreensão de fenômenos físicos aplicados à área. Apesar disso, os livros e materiais didáticos utilizados frequentemente apresentam exercícios padronizados e repetitivos, muitas vezes desvinculados de situações reais, o que compromete o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa e a capacidade de aplicar os conceitos em problemas concretos. “A falta de exemplos práticos em relação à área de atuação acaba desmotivando os alunos a respeito da disciplina. [...] Com isso, para o discente acaba sendo um aprendizado mecânico, sem uma visualização nítida de sua utilidade e aplicação prática.” (LIMA; SILVA; ARAÚJO, 2022).

Sob essa perspectiva, o presente trabalho propõe uma revisão bibliográfica sobre problemas de Cálculo Diferencial aplicados à Engenharia Civil, enfatizando a importância de exercícios baseados em situações reais, apoiados em representações visuais e unidades de medida adequadas ao contexto brasileiro. A proposta busca contribuir para a construção de um aprendizado mais consistente, aproximando os conceitos matemáticos da realidade prática da profissão e evidenciando sua utilidade no exercício da futura carreira.

Portanto, pretende-se não apenas facilitar a compreensão dos conteúdos, mas também estimular maior interesse e engajamento dos estudantes, tornando o estudo do Cálculo Diferencial mais significativo e motivador dentro da formação em Engenharia. Além disso, espera-se que este trabalho ofereça contribuições para reflexões sobre metodologias de ensino que favoreçam a integração entre teoria e prática, permitindo ao discente perceber a matemática como uma ferramenta indispensável para a resolução de

problemas reais da Engenharia Civil. Desse modo, o estudo poderá servir de apoio tanto para estudantes em fase inicial de formação quanto para professores que buscam estratégias didáticas mais eficazes, contribuindo para a redução da evasão acadêmica e para a formação de profissionais mais preparados para enfrentar os desafios da área. Nesse contexto, serão analisados os livros sugeridos de Cálculo, como Stewart – Cálculo, Volume 1, Flemming – Cálculo A, Guidorizzi – Um Curso de Cálculo e Simmons – Cálculo com Geometria Analítica, destacando as suas contribuições teóricas. Além disso, incluir a obra Larson – Cálculo Aplicado como material complementar, pois ele oferece aplicações mais dinâmicas voltadas à realidade da Engenharia Civil.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O ingresso no curso de Ciência e Tecnologia marca o início da trajetória de muitos estudantes que almejam tornar-se engenheiros. No entanto, já nos primeiros semestres, eles frequentemente se deparam com obstáculos consideráveis nas disciplinas de Cálculo. Essa problemática ocorre algumas vezes em virtude de como o conteúdo é apresentado: uma abordagem muito teórica, com poucos exemplos que realmente conectem os conceitos ao dia a dia da profissão, sem uma conexão clara em meio as definições matemáticas ao cotidiano profissional. Tal distância entre conhecimento teórico adquirido e sua aplicabilidade prática pode ser um fator determinante na desmotivação do discente e, em casos mais extremos, pode contribuir até mesmo para o abandono do curso.

Dessa forma, a base teórica deste trabalho se estrutura em três tópicos fundamentais: A conexão entre a teoria e a prática nos problemas de cálculo; questões que influenciam o Ensino de Cálculo e sua relação com a Engenharia Civil; e a importância do cálculo diferencial na formação do engenheiro civil.

2.1 A conexão entre a teoria e a prática nos problemas de cálculo

O ensino de conteúdos teóricos, de modo geral, lida com a dificuldade em manter os alunos engajados. Especificamente no Cálculo, a ausência de exemplos práticos que demonstrem sua aplicabilidade na Engenharia Civil é um obstáculo significativo. A apresentação de conteúdos abordados de forma isolada, sem vínculo com a realidade profissional, compromete o processo de aprendizagem.

Nesse âmbito, é de extrema importância o desenvolvimento de ferramentas inovadoras de ensino e metodologias, que busquem a interdisciplinaridade, para se explorar com os alunos as diversas esferas em que matemática no geral se aplica, almejando uma evolução significativa no ensino e na aprendizagem. Uma vez que, assim, o aluno consegue visualizar, a relevância do tema estudado, na vida acadêmica, na profissional e até mesmo em cenários corriqueiros do dia-a-dia (Araújo, 2022, p. 11).

Essa desconexão entre a teoria e a prática na Engenharia Civil pode atuar como um fator determinante na desmotivação e na dificuldade dos estudantes em compreender a aplicabilidade dos conhecimentos adquiridos. “Ao se alternar o conteúdo estudado em sala de aula com aplicações concretas, o aluno manifesta mais habilidade em assimilar o assunto, as aulas ficam mais estimulantes e proveitosas, o estudo fica com mais sentido” (Araújo, 2022, p. 11). Nesse sentido, a metodologia de ensino e o material didático

empregado assumem um papel fundamental. A ausência dessa ligação com o universo do aluno e com sua futura carreira profissional resulta, de maneira quase inevitável, na desmotivação e na consequente redução do rendimento acadêmico.

2.2 Questões que influenciam o ensino de cálculo e a relação com a engenharia civil

Nos livros analisados como, Stewart – Cálculo, Volume 1, Flemming – Cálculo A, Guidorizzi – Um Curso de Cálculo e Simmons – Cálculo com Geometria Analítica, percebe-se que algumas dessas obras apresentam exercícios repetitivos, com casos iguais ou muito semelhantes que apenas aparentam ser diferentes, sem oferecer uma variação no raciocínio, mudando apenas os valores numéricos ou usando formas geométricas semelhantes, como exemplo as questões de tanques e janelas retangulares. A falta de questões práticas relacionadas à Engenharia Civil nos livros indicados tem dificultado bastante a compreensão dos alunos, limitando a visualização de aplicações práticas dos conceitos matemáticos apresentados.

Como alternativa aos exercícios repetitivos, é importante buscar a utilização recursos visuais, como gráficos e figuras ilustrativas, que ajudam e auxiliam o aluno a interpretar o enunciado de uma maneira mais didática e interativa, possibilitando a visualização mais clara do problema a ser solucionado. Atuações mais dinâmicas e contextualizadas, ligadas à realidade da Engenharia Civil, favorecem a visualização concreta dos problemas e incentivam uma aprendizagem mais significativa.

A combinação da disponibilidade de objetos de aprendizagem para o Cálculo com uma metodologia adequada pode proporcionar práticas inovadoras, instigando o aluno a realizar conjecturas, fazer simulações e confrontar as hipóteses numa situação problema (Renote, 2016, p. 9).

2.3 A importância do cálculo diferencial na formação do engenheiro civil

Na Engenharia Civil, os Cálculos 1, 2, 3 e 4 configuram-se como um pilar fundamental para a compreensão de diversos fenômenos e para a solução de desafios práticos típicos da profissão.

O Cálculo Diferencial e Integral, faz parte de toda a vida acadêmica dos estudantes de engenharia, proporcionando-os a possibilidade de solucionar problemas na profissão escolhida, ou nas diversas áreas do conhecimento de uma forma mais assertiva. Como por exemplo, no cálculo de tração, compressão, cisalhamento, tensões e deformações (deformações em barras carregadas axialmente/barras sob a ação do próprio peso), cálculo de áreas, volumes, momentos de inércia, cargas e entre outros (Araújo, 2022, p. 1).

O Cálculo representa também uma base essencial, especialmente na formação do Engenheiro Civil, fornecendo ferramentas necessárias para análise, modelagem e solução de problemas reais da profissão. Sua aplicação se estende para diversas áreas, refletindo diretamente no trabalho do engenheiro.

Na Engenharia Civil, as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral podem ser encontradas em quase todas as vertentes como, por exemplo, na elaboração de projetos estruturais os quais garantem qualidade e eficiência da construção, em projetos hidráulicos, em taxas de variações de quantidades e de custos. Para as situações práticas de tração e compressão pode-se citar as que envolvem as treliças e as de cisalhamento, vigas de concreto armado (Araújo, 2022, p. 1).

Dessa forma, fica evidente que o conhecimento em Cálculo não se limita à teoria, mas é indispensável à prática profissional, permitindo que o futuro engenheiro aplique conceitos matemáticos de maneira eficaz na solução de problemas reais.

3 METODOLOGIA E OBJETIVOS

Este trabalho foi desenvolvido seguindo a metodologia de pesquisa de revisão bibliográfica de livros acadêmicos sugeridos, dentre os quais podemos destacar: J. Stewart (Cálculo, Volume 1, 7. ed.), D. Flemming (Cálculo A, 6. ed.), H. Guidorizzi (Um Curso de Cálculo, 6. ed.) e G. Simmons (Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.). A revisão teve como base a coleta de informações desses livros, mais especificamente, a identificação de exemplos e exercícios envolvendo Engenharia Civil, com a finalidade de desenvolver um aprendizado mais amplo a respeito das aplicações práticas dos exercícios. Também foi feito o uso do livro complementar R. Larson (Cálculo Aplicado, 8. ed.) que servirá para fornecer mais informações sobre as aplicações práticas no Cálculo para a Engenharia Civil.

O objetivo geral deste trabalho consiste em analisar o material bibliográfico sugerido para o ensino de Cálculo 1, com o intuito de selecionar e identificar possíveis carências existentes na forma como os exercícios são apresentados, a fim de propor estratégias que promovam um aprendizado mais significativo e motivador, contribuindo para o processo acadêmico e para a formação em Engenharia Civil. Nesse contexto, busca-se realizar uma análise dos exercícios presentes nas obras mais utilizadas, verificando sua relevância e variedade, além de propor a implementação de recursos visuais, como figuras, gráficos e unidades de medida brasileiras, com o intuito de tornar os exercícios mais claros e de fácil compreensão. Dessa forma, a metodologia e os objetivos deste trabalho se complementam, tendo como finalidade principal tornar o estudo do Cálculo 1 mais contextualizado, aproximando o conteúdo teórico da vivência profissional dos futuros engenheiros civis.

4 APLICAÇÕES

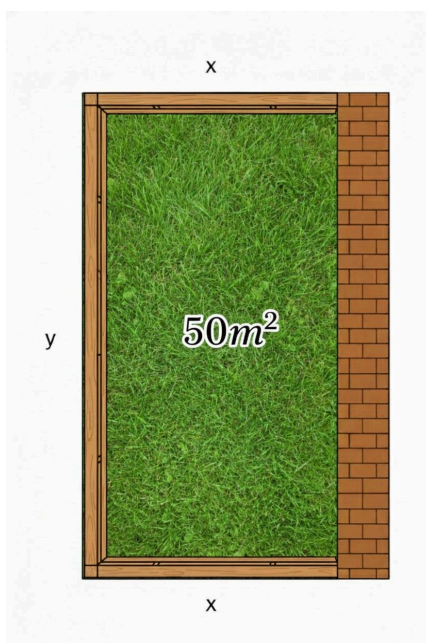
Com base nos diversos exercícios apresentados nas obras analisadas, há questões que não apenas consolidam o conteúdo teórico, mas também possibilitam a associação prática dos conceitos matemáticos. No entanto, algumas dessas obras ainda apresentam exercícios excessivamente padronizados e repetitivos. Diante disso, neste capítulo serão destacados alguns exemplos pontuais que se sobressaíram ao longo da análise realizada.

Exemplo 4.1: Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 1, 1. ed. Página 162, exemplo resolvido 2.

Um jardim retangular de 50 m^2 de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor comprimento?

Solução: O problema descreve a construção de uma cerca retangular em que um dos lados é protegido por uma parede de celeiro, dispensando a necessidade de fechamento com cerca nesse trecho. Assim, resta cercar apenas três lados: os dois lados perpendiculares à parede, de mesma medida, designados por x , e o lado paralelo à parede, denominado y . Uma representação geométrica dessa configuração pode ser observada na figura apresentada a seguir:

Figura 1: Figura ilustrativa respectiva ao exemplo 4.1.



Fonte: Autoria própria, com uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Sabe-se que a área do jardim é de 50 m². A equação que determina a área de um retângulo é dada por:

$$A_R = \text{Base} \times \text{Altura}$$

Substituindo as incógnitas x e y , temos:

$$A_R = x \cdot y$$

Aplicando ao nosso caso:

$$x \cdot y = 50$$

Com isso, pode-se formular a equação:

$$y = \frac{50}{x} \quad (1)$$

O comprimento da cerca a ser calculado é dado pela soma de três lados, sendo dois iguais, logo:

$$C = x + y + x$$

Dessa forma, será possível expressar a seguinte equação deste problema:

$$C = 2x + y$$

Por (1):

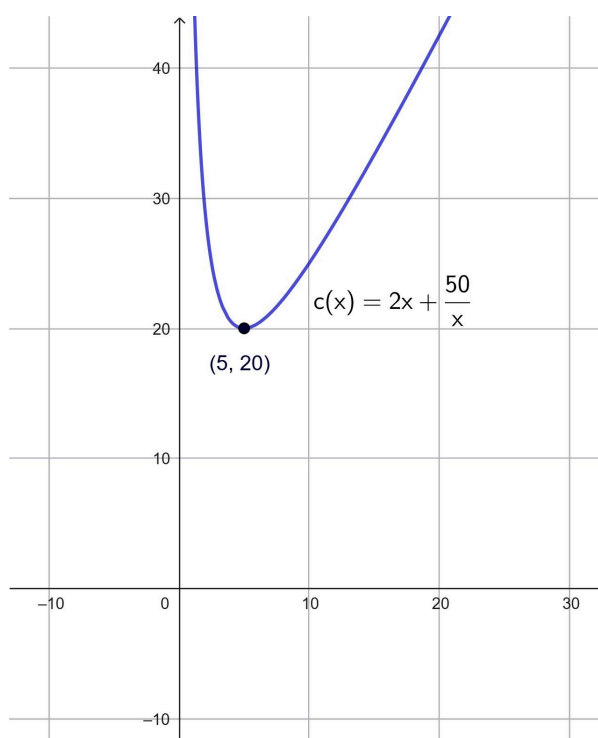
$$C = 2x + \frac{50}{x}$$

A função a ser minimizada passa a ser:

$$C(x) = 2x + \frac{50}{x}.$$

Como estratégia prévia ao desenvolvimento do cálculo do mínimo da função $C(x)$, a ferramenta <https://www.geogebra.org/classic> foi utilizada para a determinação gráfica de pontos críticos, otimizando a compreensão do processo de derivação de forma mais direta, como mostra a figura:

Figura 2: Moldagem gráfica pelo GeoGebra.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Com o ponto crítico sendo de mínimo, basta derivar a função $C(x)$ e igualar a zero:

$$C'(x) = 2 + \left(\frac{-50}{x^2}\right)$$

$$C'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

$$2 - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$- \frac{50}{x^2} = -2$$

$$-2x^2 = -50$$

$$2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm \sqrt{25}$$

$$x = \pm 5.$$

Desde que x representa um comprimento, ele não pode ser um valor negativo, logo:

$$x = 5 \text{ m.}$$

Com o valor de x encontrado, é possível fazer a substituição em (1):

$$y = \frac{50}{5}$$

$$y = 10 \text{ m.}$$

Sendo assim, as dimensões da cerca de menor comprimento serão de $x = 5 \text{ m}$ e $y = 10 \text{ m}$. Verifica-se que os valores obtidos satisfazem as condições estabelecidas, pois ao fazer a verificação através da equação da área, é encontrado exatamente o valor da área do retângulo.

A seguir, listamos algumas questões analisadas ao longo do estudo que se assemelham ao problema anteriormente discutido.

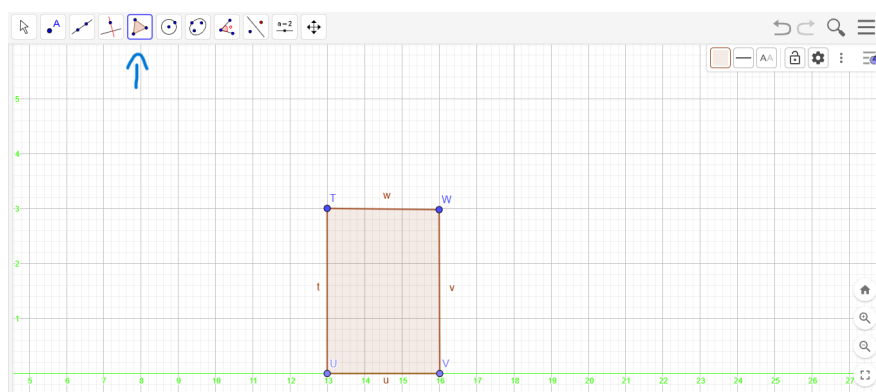
- Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed.; capítulo 3; exercícios da seção 3.4; página 223; questão 11.
- Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed.; capítulo 3; exercícios da seção 3.4; página 223; questão 12.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 4; exemplo 1 da seção 4.7; página 294.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 4; exercícios da seção 4.7; página 299; questão 11.
- Flemming - Cálculo A, 6. ed.; capítulo 5; exemplo 3 da seção 5.11; página 219 e 220.
- Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.; capítulo 1; exercício da seção 1.7; página 46; questão 14.

4.1.1 Elaboração da figura e do gráfico no GeoGebra

Com o intuito de tornar o processo mais compreensível, será descrito a seguir o passo a passo da construção da figura e do gráfico elaborados com o uso do GeoGebra. Essa apresentação busca evidenciar as etapas de desenvolvimento da atividade, permitindo acompanhar de maneira detalhada a aplicação prática da ferramenta.

Ao acessar o site <https://www.geogebra.org/classic>, como primeiro passo clicou-se na opção de polígono, para que a imagem ficasse com cor de fundo:

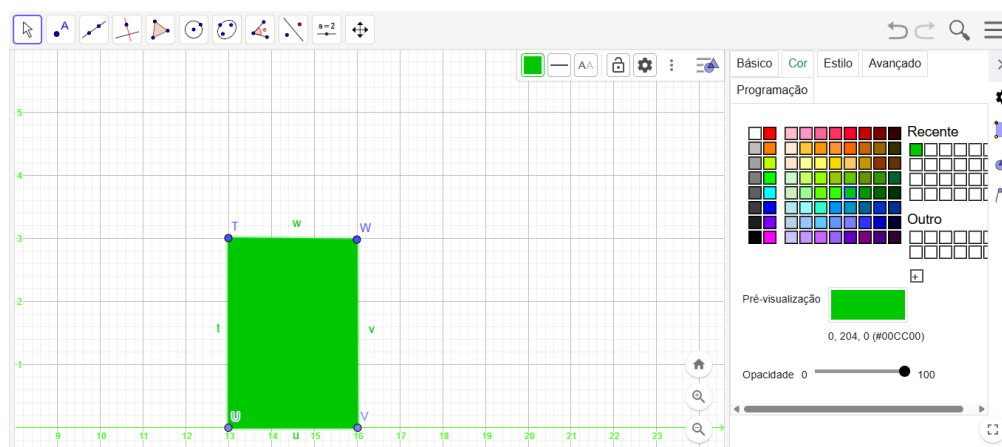
Figura 3: Polígono.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Em seguida, foi feita a alteração de cor e opacidade:

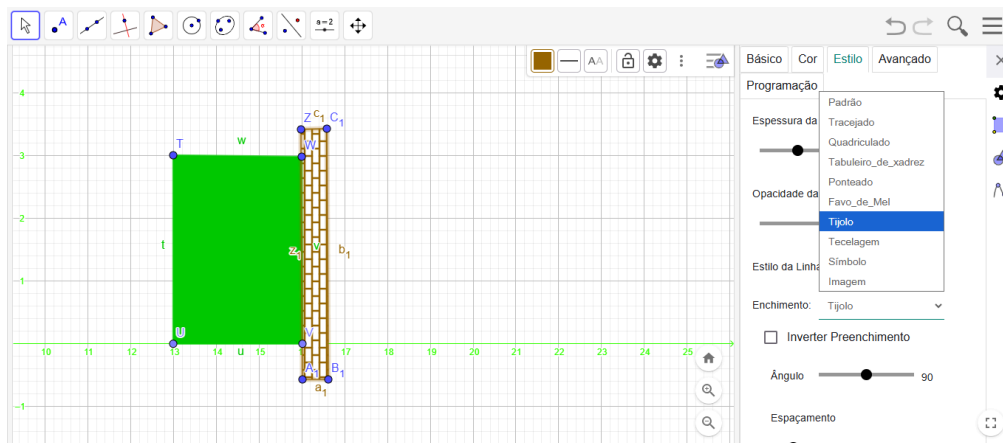
Figura 4: Cor e opacidade.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Para fazer a parte da parede foi utilizado o mesmo recurso do polígono e feitos os mesmos passos da alteração de cor. Para colocar a aparência de tijolo, clicou-se em estilo, enchimento e na opção tijolo, com ângulo de 90° :

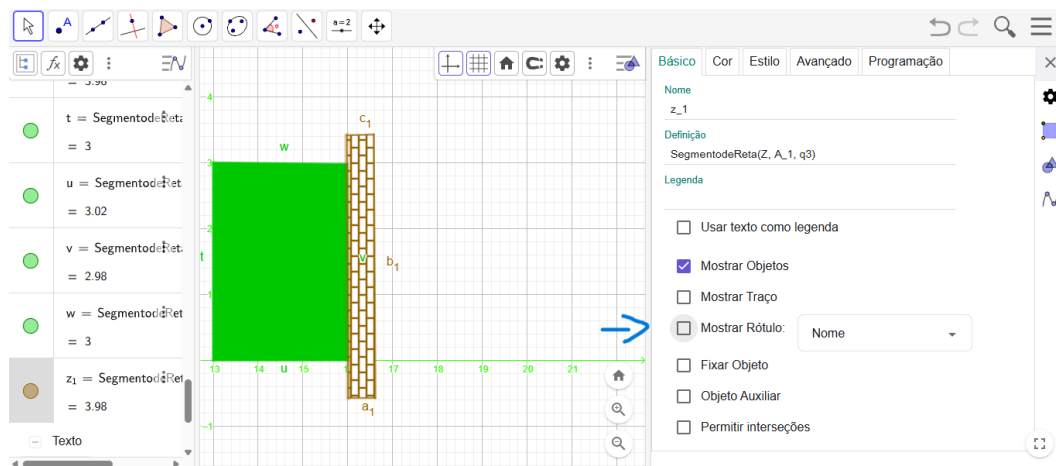
Figura 5: Parede.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

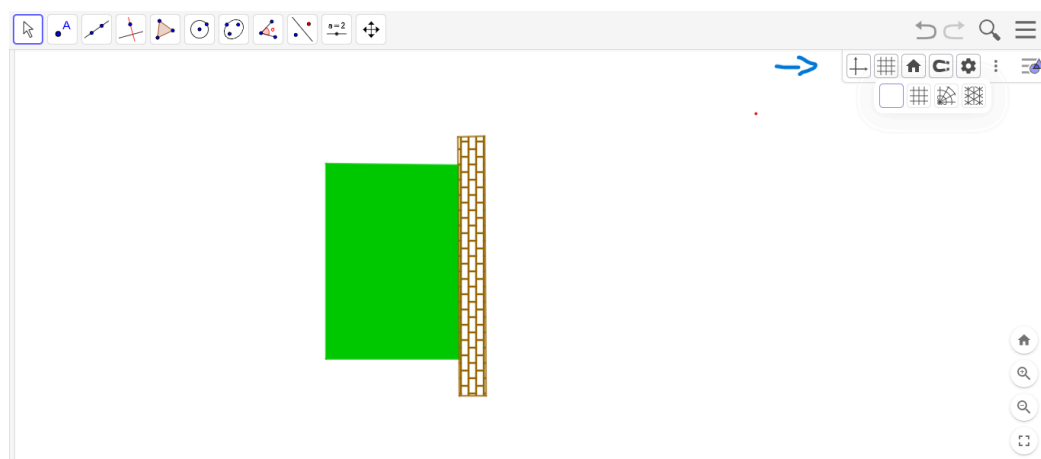
Para deixar a imagem limpa e sem letras, clica-se no canto esquerdo da tela, desativa as opções coloridas e desmarca a opção “mostrar rótulo”, como é mostrado na figura 6:

Figura 6: Letras na imagem.



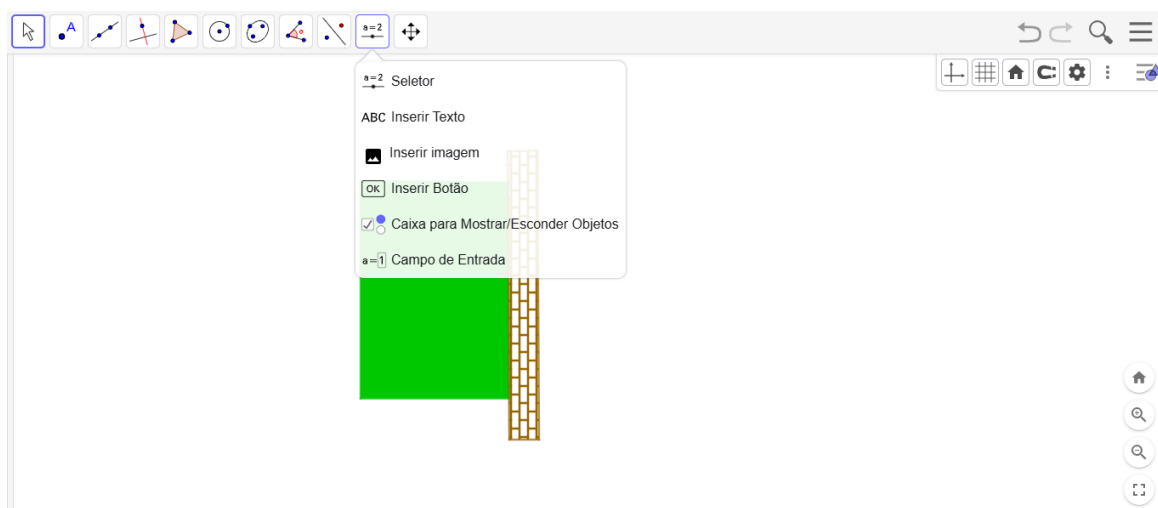
Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

No lado direito da tela, desativa as opções de eixo e grelhas:

Figura 7: Eixo e grelhas.

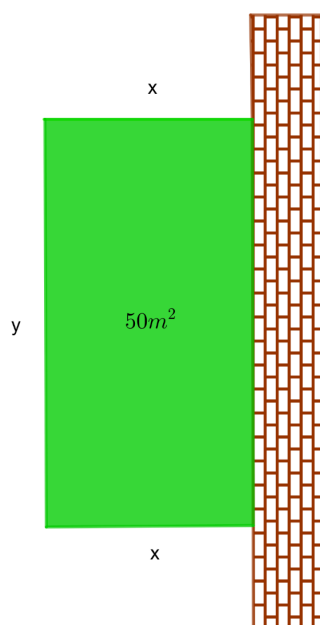
Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Para encerrar a parte da figura, foi adicionado a caixa de texto na parte superior da tela:

Figura 8: Caixa de texto.

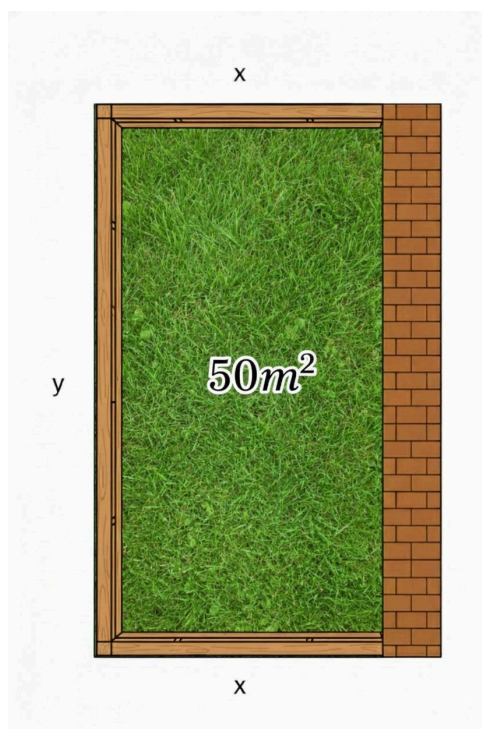
Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Como último passo, clica-se nas três linhas ao lado da lupa e exportar a imagem.

Figura 9: Figura pronta.

Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

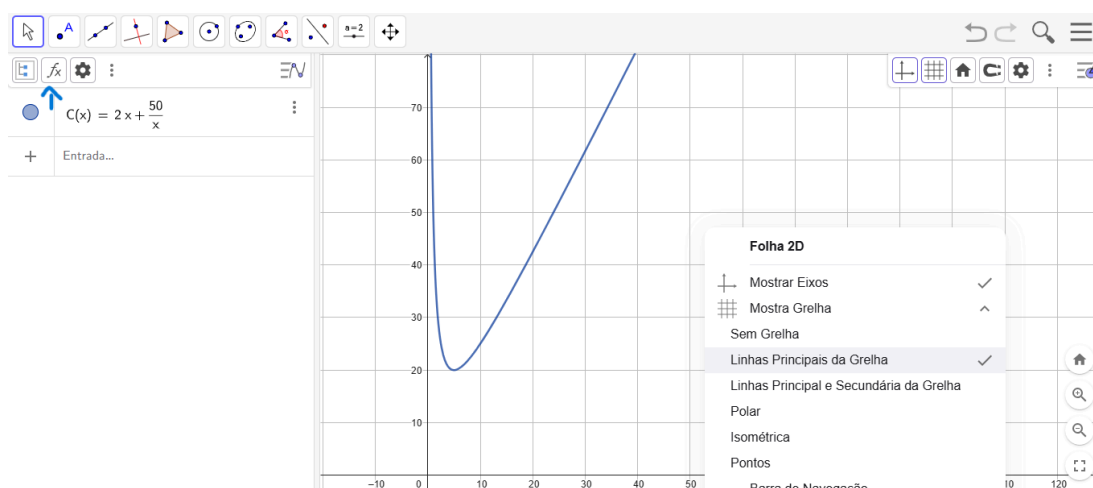
A partir dessa imagem utilizou-se o site <https://gemini.google.com/app> para melhorar esteticamente a figura. Resultando:

Figura 10: Imagem aprimorada.

Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Para a confecção do gráfico, na parte superior da tela, é utilizada a opção de função para o dimensionamento. Em seguida, clicando com o botão direito do mouse, foi adicionado “linhas principais de grelha”, para deixar o fundo gráfico mais limpo.

Figura 11: Confecção do gráfico.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Exemplo 4.2: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 21, questão 62.

Uma janela normanda tem o formato de um retângulo em cima do qual se coloca um semicírculo. Se o perímetro da janela for de 10 m, expresse a área A da janela como uma função de sua largura x .

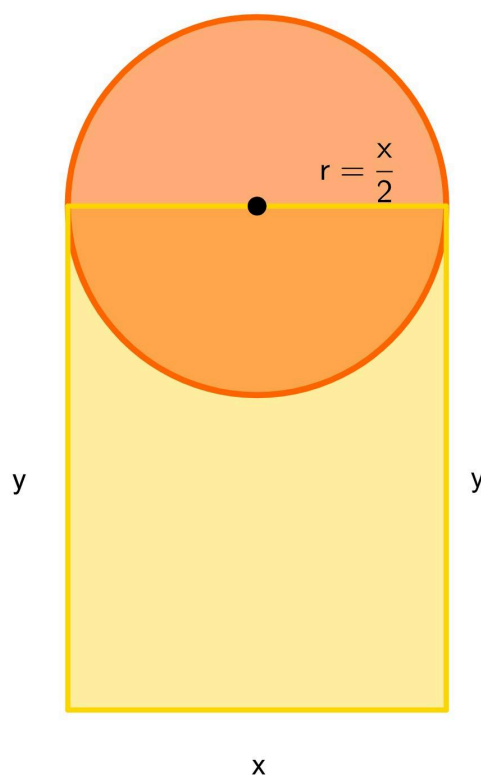
Figura 12: Janela.



Fonte: Stewart volume 1, 7. ed. (2025).

Solução: A janela é composta por um retângulo de largura x e altura y . Se a largura da janela em questão é x , o diâmetro do semicírculo também será x , e nesse caso o raio é dado da seguinte forma:

Figura 13: Figura ilustrativa respectiva ao exemplo 4.2.



Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Logo:

$$r = \frac{d}{2}$$

Substituindo:

$$r = \frac{x}{2}$$

O cálculo do comprimento da circunferência é dado por $2\pi r$, logo, o comprimento do arco semicircular C é dado por:

$$C = \frac{\pi x}{2}$$

O perímetro externo P da janela corresponde à soma da base do retângulo x , das duas laterais de tamanho y e do arco semicircular. Dessa forma:

$$P = x + y + y + \frac{\pi x}{2}$$

O perímetro é dado na questão com o valor de 10 m:

$$10 = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$$

Desenvolvendo a equação:

$$\begin{aligned} 20 &= 2x + 4y + \pi x \\ -4y &= (2 + \pi)x - 20 \\ -y &= \left(\frac{2+\pi}{4}\right)x - 5 \\ -y &= \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}x - 5 \\ y &= 5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x. \end{aligned}$$

A área total da janela é dada pela soma da área do retângulo com a área do semicírculo. Logo, a área do retângulo:

$$A_R = x \cdot y$$

Substituindo y na equação:

$$\begin{aligned} A_R &= x \cdot \left(5 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x\right) \\ A_R &= 5x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x^2. \end{aligned}$$

A fórmula para calcular a área de um semicírculo é:

$$A_S = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$A_S = \frac{\pi(\frac{x}{2})^2}{2}$$

$$A_S = \frac{\pi x^2}{8}.$$

Logo, a soma da área total será:

$$A_T = A_R + A_S$$

$$A_T = 5x - (\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4})x^2 + \frac{\pi x^2}{8}$$

$$A_T = (\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})x^2 + 5x$$

$$A_T = (\frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{8} - \frac{4}{8})x^2 + 5x$$

$$A_T = (\frac{-4-\pi}{8})x^2 + 5x$$

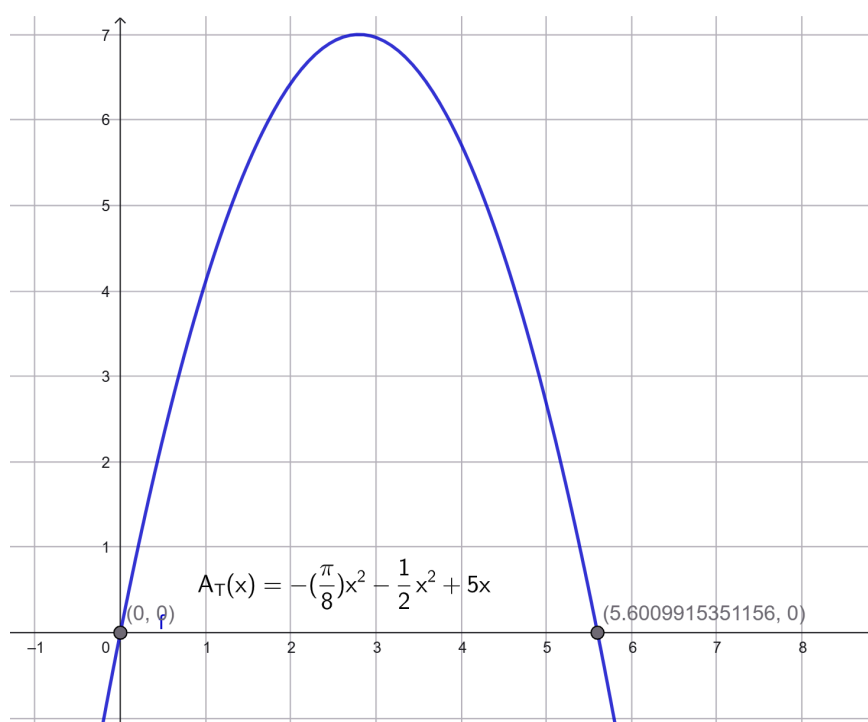
$$A_T = -\frac{\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 5x.$$

A área da janela expressa como uma função de sua largura x será

$$A_T = -\frac{\pi}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 5x.$$

O gráfico da função área pode ser observado na figura 14 abaixo.

Note que a função é positiva para valores de x entre 0 e 5. Não há risco de termos a função área sendo negativa em nosso caso, visto que o perímetro é limitado, medindo 10 m. A medida x precisa assumir valores menores que 5, pois, se x for 5 por exemplo, teríamos o comprimento do arco semicircular medindo mais do que 7, que quando somado ao valor de x já superaria o perímetro.

Figura 14: Gráfico respectiva ao exemplo 4.2.

Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

A seguir, listamos algumas questões analisadas ao longo do estudo que se assemelham ao problema anteriormente discutido.

- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 3; exercícios de revisão; página 240; questão 105.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 4; exercícios da seção 4.7; página 300; questão 32.
- Flemming - Cálculo A, 6. ed.; capítulo 5; exercícios da seção 5.12; página 225; questão 16.
- Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.; capítulo 4; exercício da seção 4.3; página 169; questão 19.
- Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.; capítulo 4; página 208; questão 58.

Exemplo 4.3: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 138, questão 46.

Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

$$V(t) = 100\,000 \cdot \left(1 - \frac{1}{60}t\right)^2 \quad 0 \leq t \leq 60$$

Encontre a taxa pela qual a água está escoando para fora do tanque (a taxa instantânea da variação de V em relação a t) como uma função de t . Quais são suas unidades? Para os instantes $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ e 60 minutos, encontre a taxa do escoamento e a quantidade de água restante no tanque. Resuma o que você achou em uma ou duas sentenças. Em que instante a taxa do escoamento é a máxima? E a mínima?

Solução: A taxa instantânea de variação do volume é a derivada de V em relação a t . Derivando a função e aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} V'(t) &= 100000 \cdot 2\left(1 - \frac{1}{60}t\right) \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)' \\ V'(t) &= 200000 \cdot \left(1 - \frac{1}{60}t\right) \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \\ V'(t) &= \left(200000 - \frac{10000}{3}t\right) \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \\ V'(t) &= \frac{500}{9}t - \frac{10000}{3} \text{ L/min.} \end{aligned}$$

Para $V'(0)$, temos:

$$V'(0) = \frac{500}{9} \cdot 0 - \frac{10000}{3} \approx -3333,33 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 0$ é de $|V'(0)| \approx 3333,33 \text{ L/min.}$

Como a função $V(t)$ é decrescente no intervalo, é esperado que $V'(t)$ assuma valores negativos. Porém, para a análise do fenômeno natural em questão, considera-se a taxa de escoamento como sendo $|V'(0)|$. Nesse caso, pode-se dizer que o volume está “caindo” a uma taxa de 3333,33 (aproximadamente) L/min no instante $t = 0$.

Para $V'(10)$, temos:

$$V'(10) = \frac{500}{9} \cdot 10 - \frac{10000}{3} \approx -2777,78 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 10$ é de $|V'(10)| \approx 2777,78 \text{ L/min.}$

Para $V'(20)$, temos:

$$V'(20) = \frac{500}{9} \cdot 20 - \frac{10000}{3} \approx -2222,22 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 20$ é de $|V'(20)| \approx 2222,22 \text{ L/min.}$

Para $V'(30)$, temos:

$$V'(30) = \frac{500}{9} \cdot 30 - \frac{10000}{3} \approx -1666,66 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 30$ é de $|V'(30)| \approx 1666,66 \text{ L/min.}$

Para $V'(40)$, temos:

$$V'(40) = \frac{500}{9} \cdot 40 - \frac{10000}{3} \approx -1111,11 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 40$ é de $|V'(40)| \approx 1111,11 \text{ L/min.}$

Para $V'(50)$, temos:

$$V'(50) = \frac{500}{9} \cdot 50 - \frac{10000}{3} \approx -555,55 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 50$ é de $|V'(50)| \approx 555,55 \text{ L/min.}$

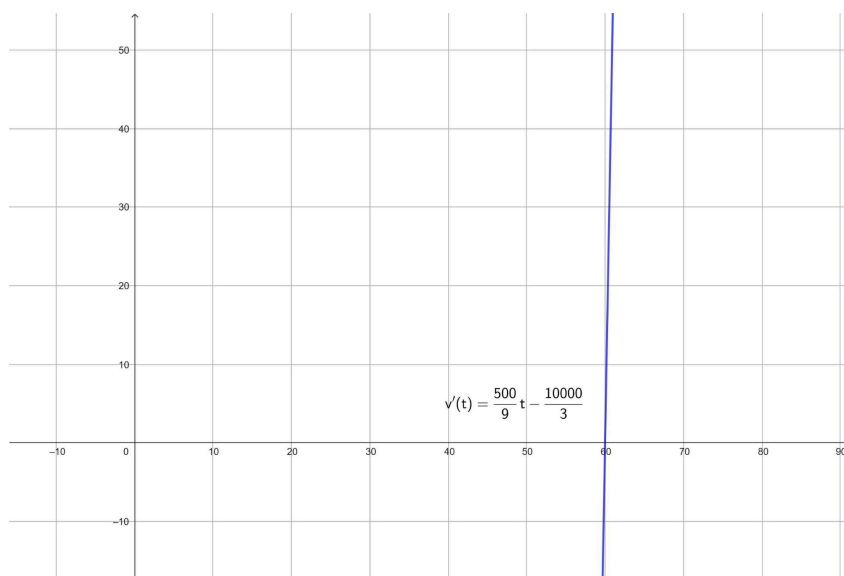
Para $V'(60)$, temos:

$$V'(60) = \frac{500}{9} \cdot 60 - \frac{10000}{3} = 0 \text{ L/min.}$$

Podemos interpretar que a taxa de escoamento em $t = 60$ é de $|V'(60)| = 0 \text{ L/min.}$

A função $V'(t)$ é linear, como mostra o gráfico a seguir, ela atinge máximo e mínimo nos extremos. Isto é, o escoamento é máximo em $|V'(0)| \approx 3333,33 \text{ L/min}$ e mínimo em $|V'(60)| = 0 \text{ L/min}$, ou seja, nos instantes $t = 0$ e $t = 60$ respectivamente.

Figura 15: Gráfico com função linear.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Sobre a questão, conclui-se que, o fluxo de água vai diminuindo de forma linear, tornando-se cada vez mais lento. Quando o instante é $t = 0$, a vazão é elevada, mas, ao longo do tempo, ela diminui até parar completamente, momento em que atinge seu instante $t = 60$.

A seguir, listamos algumas questões analisadas ao longo do estudo que se assemelham ao problema anteriormente discutido.

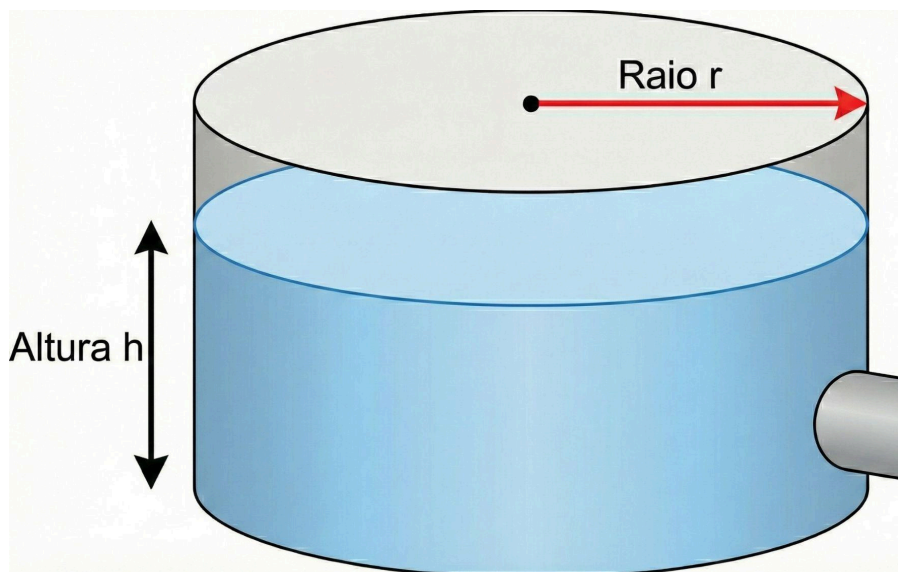
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 3; exercícios da seção 3.7; página 211; questão 18.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 5; exercícios da seção 5.4; página 367; questão 64.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 5; exercícios da seção 5.4; página 367; questão 68.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 5; exercícios da seção 5.5; página 375; questão 81.

Exemplo 4.4: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 223, questão 5.

Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m³/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?

Solução: No enunciado fala-se sobre um tanque cilíndrico, onde a base tem formato circular com raio de 5 m. Como mostra a figura 15:

Figura 16: Tanque cilíndrico.



Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Logo, a área da base será dada pela seguinte equação:

$$A_c = \pi r^2$$

Como o tanque está sendo preenchido com água, o volume da parte cheia de água V varia em função do tempo t , e pode ser expresso em termos da altura de água $h(t)$, por meio da seguinte equação:

$$V(t) = \pi r^2 \cdot h(t)$$

Fazendo a substituição do valor do raio:

$$\begin{aligned} V(t) &= \pi(5)^2 \cdot h(t) \\ V(t) &= 25\pi \cdot h(t) \\ h(t) &= \frac{V(t)}{25\pi}. \end{aligned} \tag{1}$$

De acordo com o enunciado, o tanque está sendo abastecido a uma taxa de $3 \text{ m}^3/\text{min}$, assim:

$$V'(t) = 3 \text{ m}^3/\text{min}$$

Na questão é dada taxa de variação, logo, de acordo com o livro Stewart (Cálculo, Volume 1, capítulo 4, seção 4.9), ao usar o método das primitivas, é possível determinar a função original a partir de sua derivada:

$$V(t) = 3t + C$$

onde C é uma constante.

Substituindo em (1):

$$h(t) = \frac{3t+C}{25\pi} \text{ m}.$$

Uma vez que o problema fala sobre taxa de variação da altura da água em relação ao tempo, aplica-se a derivada, a fim de determinar a relação entre a variação da altura e o tempo, ou seja:

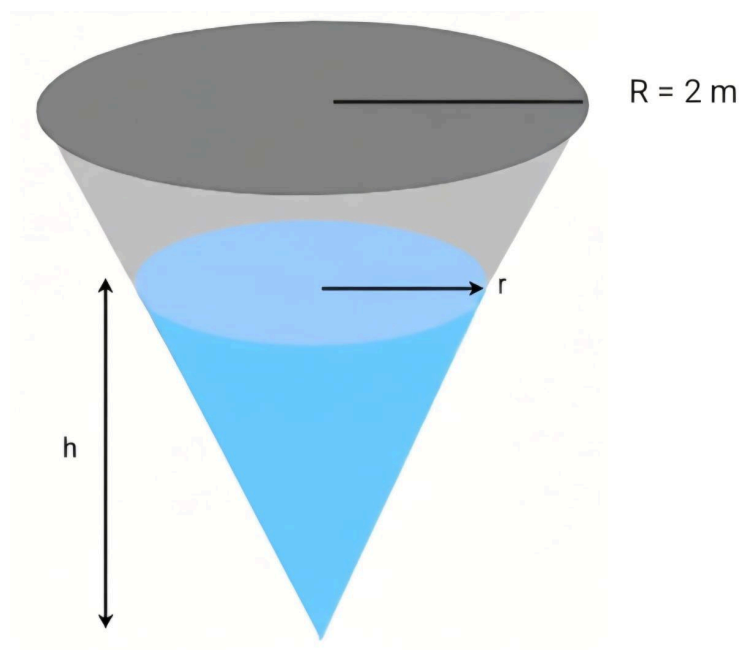
$$h'(t) = \frac{3}{25\pi} \text{ m/min}.$$

Existem questões semelhantes à resolvida anteriormente, porém em formato cônico. Como uma das questões selecionadas de tanque foi no formato cônico, optou-se por colocar no exemplo adiante.

Exemplo 4.5: Stewart - Cálculo: volume 1, 7. ed. Página 221, exemplo 3.

Um tanque de água possui o formato de um cone circular invertido, com base de raio de 2 m e altura igual a 4 m. Se a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de $2 \text{ m}^3 / \text{min}$, encontre a taxa na qual o nível de água está aumentando quando a água estiver a 3 m de profundidade.

Solução: Para a resolução do exercício, estabelece-se a relação entre o volume de água no tanque e a altura em função do tempo. Considerando as dimensões geométricas do cone e a taxa de entrada de água, para determinar a taxa de variação do nível da água.

Figura 17: Cone circular invertido.

Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Para encontrar a taxa de variação do nível da água, é necessário, como primeiro passo, analisar o volume do cone. A fórmula para calcular o volume do cone preenchido por água é dada pela seguinte equação:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

É possível visualizar a presença de duas incógnitas na equação, sendo elas r e h . Para prosseguir com o desenvolvimento da questão, vamos tentar expressar a equação do volume em termos de apenas uma dessas incógnitas. Ao observar a figura 16, nota-se que, a partir de um corte transversal vertical, pode-se visualizar dois triângulos, um maior (referente ao tanque) e um menor (onde a altura da água está localizada), com ambos sendo semelhantes. Dessa forma, chamando de r o raio menor (metade do lado do triângulo menor), de R o raio maior (metade do lado do triângulo maior), de h a altura do triângulo menor e de H a altura do triângulo maior, é possível fazer a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\frac{r}{h} &= \frac{R}{H} \\ \frac{r}{h} &= \frac{2}{4} \\ \frac{r}{h} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$2r = h$$

$$r = \frac{h}{2}.$$

Como está tudo em função de h , basta substituir na equação do volume, dessa forma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h$$

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot h^3.$$

No enunciado fala-se que a água está sendo bombeada para o tanque a uma taxa de $2 \text{ m}^3/\text{min}$, logo:

$$\frac{dV}{dt} = 2 \text{ m}^3/\text{min}$$

Note que, a altura h depende do tempo. Assim:

$$V(t) = \frac{\pi}{12} \cdot (h(t))^3$$

Derivando:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot (h(t))^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2} \cdot \frac{dV}{dt}.$$

Agora, pelo enunciado, pode-se substituir h por 3:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2} \cdot 2$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{9\pi}$$

$$\frac{dh}{dt} \simeq 0,28 \text{ m/min}.$$

O valor encontrado para a taxa de variação é reduzido porque o tanque possui formato de cone invertido. Assim, conforme o nível da água aumenta, é necessário um volume maior de água para que a altura se eleve, o que faz com que o nível suba de forma

mais lenta. Além disso, como o tanque está sendo preenchido, ou seja, seu volume está aumentando, a taxa apresenta valor positivo.

A seguir, listamos algumas questões analisadas ao longo do estudo que se assemelham ao problema anteriormente discutido.

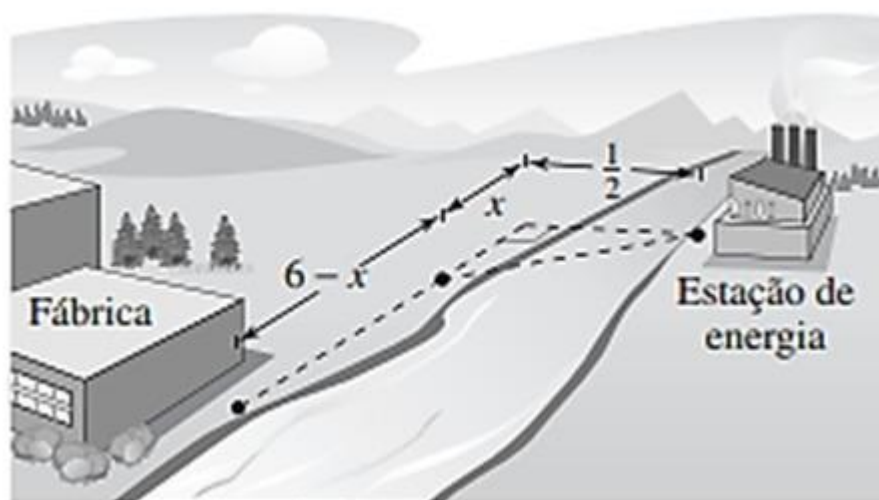
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 3; exercícios da seção 3.9; página 224; questão 23.

A partir das próximas questões, este trabalho vai incluir as medidas já convertidas para as unidades usadas no Brasil. Os problemas em questão são mostrados com seus valores de referência, mantendo a organização original e acrescentando, à frente, os valores adaptados a um sistema métrico mais usual em nosso país. Assim, o material torna-se mais claro e adequado ao contexto de estudo.

Exemplo 4.6: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 234, questão 23.

Uma estação de energia fica ao lado de um rio que tem 0,5 milha (804,5 m) de largura e uma fábrica fica 6 milhas (9654 m) adiante, do outro lado do rio (veja a figura). O custo para instalar fios de energia sobre a terra é de \$ 18 por pé (0,3048 m) e de \$ 25 por pé (0,3048 m) para instalar fios sob a água. Escreva uma função do custo para instalar os fios de energia da estação até a fábrica. Use uma ferramenta gráfica para traçar o gráfico da sua função. Estime o valor de x que minimiza o custo. Explique seus resultados.

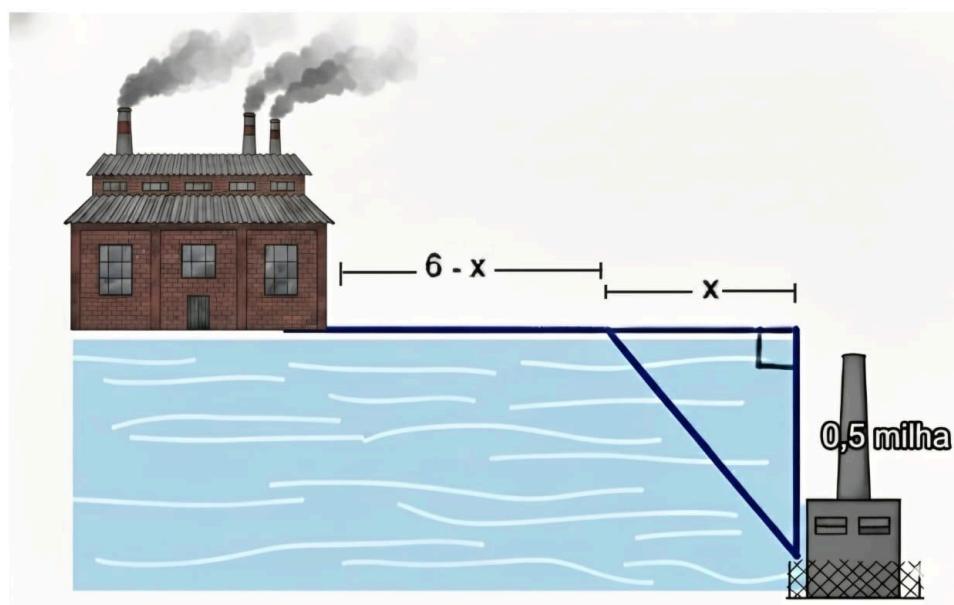
Figura 18: Fábrica e estação de energia.



Fonte: Cálculo aplicado, 8. ed. (2025).

Solução: Como primeiro passo, foi elaborada uma figura para melhor entendimento da questão.

Figura 19: Fábrica e estação de energia.



Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Observando a imagem, é possível identificar alguns aspectos importantes. Primeiramente, vamos em busca de um ponto P localizado na margem do rio, esse ponto nos fornecerá o custo mínimo. Chame de x a distância entre a margem do rio imediatamente a frente da estação de energia e o ponto P . A distância entre o ponto P e a fábrica correspondente a $6 - x$, pois leva-se em consideração que a fábrica fica localizada 6 milhas adiante. Além disso, a largura do rio, ou seja, a distância entre a fábrica e a estação de energia, é de 0,5 milha. Se traçarmos uma linha ligando o ponto a estação de energia, essa linha representará uma distância D , que pode ser entendida como a hipotenusa de um triângulo retângulo. Nesse triângulo, serão analisadas as distâncias pela terra e pela água. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras, podemos expressar D da seguinte forma:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$D = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Para a distância pela água, temos:

$$D_{\text{água}} = \sqrt{x^2 + 0,5^2}$$

$$D_{\text{água}} = \sqrt{x^2 + 0,25}$$

Para a distância pela terra, temos:

$$D_{\text{terra}} = 6 - x$$

O valor do custo é fornecido em unidades monetárias por pé, é necessário converter as distâncias de milhas para pés, lembrando que 1 milha equivale a 5280 pés. Dessa forma, podemos expressar a função do custo total $C(x)$, em unidades monetárias. Logo, o custo total é dado por:

$$C(x) = C_{\text{terra}} + C_{\text{água}}$$

Substituindo os valores:

$$C(x) = (18 \cdot (5280) \cdot (6 - x)) + (25 \cdot (5280) \cdot (\sqrt{x^2 + 0,25}))$$

$$C(x) = (570240 - 95040 x) + (132000 \cdot \sqrt{x^2 + 0,25})$$

Derivando $C(x)$ em relação a x :

$$C'(x) = -95040 + 132000 \cdot \frac{1}{2} (x^2 + 0,25)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$C'(x) = -95040 + 132000 \cdot \frac{1}{(x^2 + 0,25)^{\frac{1}{2}}} x$$

$$C'(x) = -95040 + \frac{132000}{\sqrt{x^2 + 0,25}} x.$$

Igualando a equação a 0 para estimar o valor de x que minimiza o custo, temos:

$$-95040 + \frac{132000}{\sqrt{x^2 + 0,25}} x = 0$$

$$\frac{132000}{\sqrt{x^2 + 0,25}} x = 95040$$

$$132000 x = 95040 \cdot \sqrt{x^2 + 0,25}$$

$$x = \frac{95040}{132000} \cdot \sqrt{x^2 + 0,25}$$

$$x = 0,72 \cdot \sqrt{x^2 + 0,25}$$

$$x^2 = 0,72^2 \cdot (x^2 + 0,25)$$

$$x^2 = 0,5184 \cdot (x^2 + 0,25)$$

$$x^2 = 0,5184 x^2 + 0,1296$$

$$x^2 - 0,5184 x^2 = 0,1296$$

$$0,4816 x^2 = 0,1296$$

$$x^2 = \frac{0,1296}{0,4816}$$

$$x = \sqrt{\frac{0,1296}{0,4816}}$$

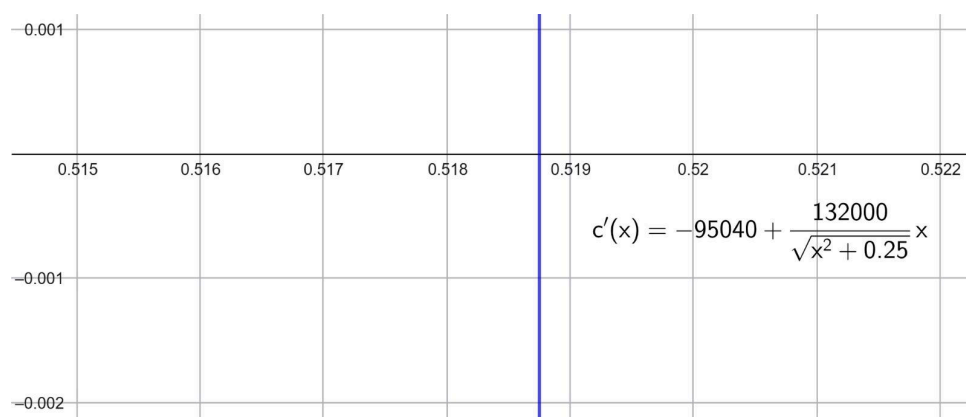
$$x = 0,5187513759 \text{ milhas}$$

$$x = 834,6709639 \text{ m.}$$

O valor de x que irá minimizar os custos será de 834,6709639 metros.

Para observar que o valor de x obtido corresponde a um mínimo, aplicou-se a função numa vizinhança de x . Avaliando valores próximos de 0,5177513759 milhas (menor) e de 0,5197513759 milhas (maior) observou-se que ambos resultam em custos superiores. Isso reforça que o valor encontrado para x de fato minimiza o custo total.

Figura 20: Gráfico da derivada.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

A seguir, listamos algumas questões analisadas ao longo do estudo que se assemelham ao problema anteriormente discutido.

- Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed.; capítulo 1; exercícios da seção 1.4; página 76; questão 68.
- Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed.; capítulo 3; exercícios de revisão; página 267; questão 50.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 4; exercícios da seção 4.7; página 300; questão 13.
- Stewart - Volume 1, 7. ed.; capítulo 4; exercícios da seção 4.7; página 301; questão 49.

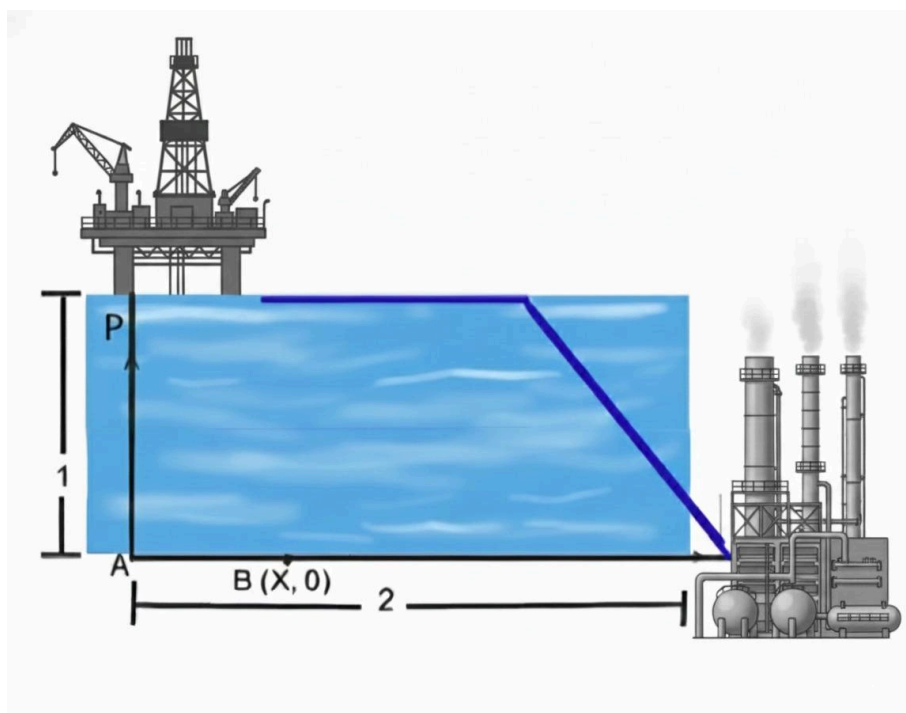
- Flemming - Cálculo A, 6. ed.; capítulo 5; exemplo 2 da seção 5.11; página 219.
- Guidorizzi - Um curso de Cálculo, 6. ed.; capítulo 9; exercício da seção 9.6; página 562; questão 20.
- Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.; capítulo 4; exercício da seção 4.3; página 169 questão 10.
- Simmons - Cálculo com Geometria Analítica, 1. ed.; capítulo 4; página 210; questão 80.

Exemplo 4.7: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 234, questão 24.

Uma plataforma de petróleo em alto-mar fica a 1 milha (1609 m) da costa. A refinaria de petróleo fica 2 milhas (3218 m) adiante na costa. Instalar tubulações no mar é duas vezes mais custoso do que fazê-lo em terra. Determine o caminho mais econômico da plataforma até a refinaria de petróleo.

Solução: Inicialmente, foi elaborada uma figura com o objetivo de tornar a situação apresentada mais clara e compreensível.

Figura 21: Plataforma de petróleo e refinaria.



Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

Considere que o ponto A denota a menor distância entre a plataforma P e a costa, e que o ponto A está na origem do sistema cartesiano. Denote por R a posição da refinaria.

Desse modo, temos as coordenadas:

- $A (0, 0)$;
- $P (0, 1)$;
- $R (2, 0)$.

Chame de $B (x, 0)$ o ponto sobre o eixo x a ser calculado, de modo a minimizar os custos.

Aplicando pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} d(P, B)^2 &= d(P, A)^2 + d(A, B)^2 \\ d(P, B)^2 &= 1 + x^2 \\ d(P, B) &= \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(R, B) &= d(R, A) - d(A, B) \\ d(R, B) &= 2 - x \end{aligned}$$

Chame de K a constante custo para construir uma milha de tubulação sobre a terra. Dessa forma, o custo total é dado por:

$$\begin{aligned} C &= C_{terra} + C_{água} \\ C &= Kd(R, B) + 2K \cdot d(P, B) \\ C &= K[(2 - x) + 2(\sqrt{1 + x^2})] \end{aligned}$$

Logo, C é uma função de x , ou seja, precisamos minimizar:

$$C(x) = K[(2 - x) + 2(\sqrt{1 + x^2})]$$

Isso significa calcular x , onde:

$$C'(x) = 0$$

Derivando e igualando a 0 temos:

$$C'(x) = K[(-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)]$$

$$C'(x) = K \left[-1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$$

$$K \left[-1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \right] = 0$$

$$-1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

$$2x = \sqrt{1+x^2}$$

$$(2x)^2 = (\sqrt{1+x^2})^2$$

$$4x^2 = 1 + x^2$$

$$-x^2 + 4x^2 = 1$$

$$3x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = 0,5773502692 \text{ milhas.}$$

$$x = 928,9565831 \text{ m.}$$

Para $d(P, B) = \sqrt{1+x^2}$:

$$d(P, B) = \sqrt{1 + 0,5773502692^2}$$

$$d(P, B) = 1,154700538 \text{ milhas}$$

$$d(P, B) = 1857,913166 \text{ m.}$$

Para $d(R, B) = 2 - x$:

$$d(R, B) = 2 - 0,5773502692$$

$$d(R, B) = 1,422649731 \text{ milhas}$$

$$d(R, B) = 2289,043417 \text{ m.}$$

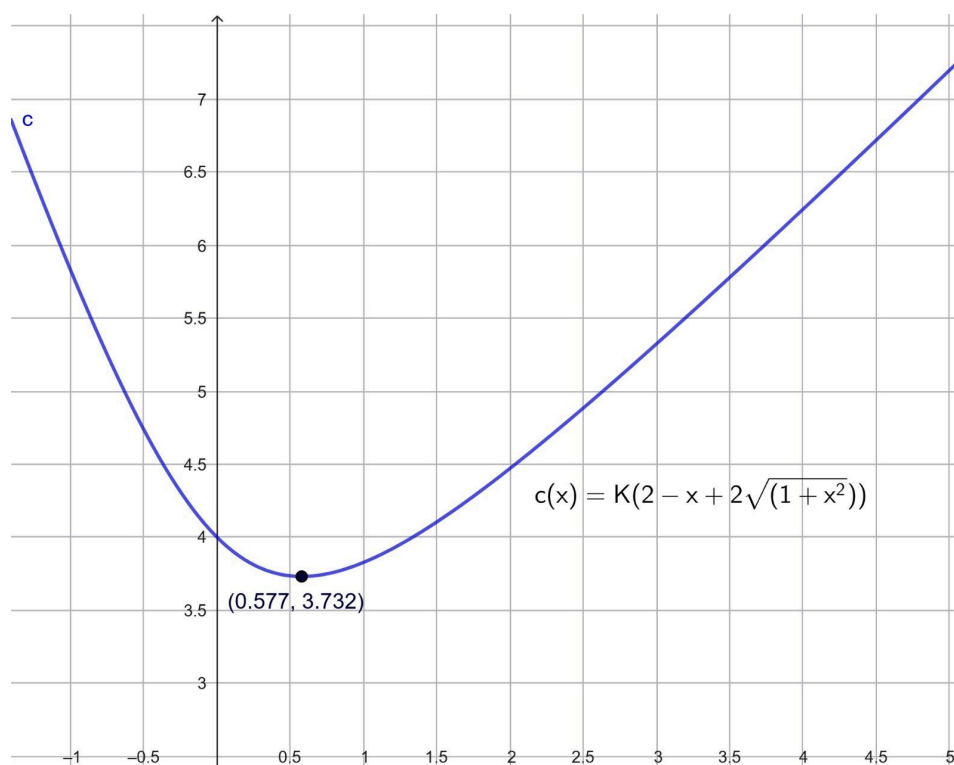
Custo total:

$$C = K [(2 - x) + 2(\sqrt{1+x^2})]$$

$$C = K [(2289,043417) + 2(1857,913166)]$$

$$C = 6004,869749 K.$$

A configuração que minimiza o custo total se dá onde 1857,913166 m é construído pela água e 2289,043417 m é construído por terra.

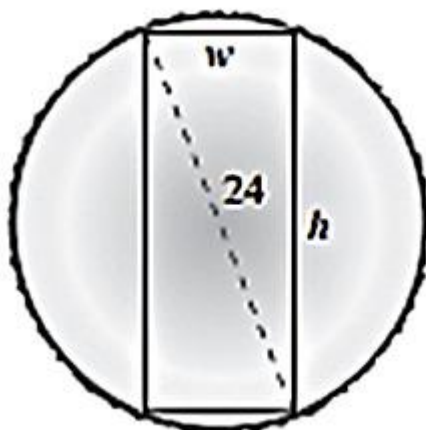
Figura 22: Gráfico da função.

Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Existem questões semelhantes à resolvida anteriormente, como no exemplo selecionado 4.6 selecionado; por isso, optou-se por incluí-las na questão anterior.

Exemplo 4.8: Larson - Cálculo Aplicado, 8. ed. Página 225, questão 41.

Uma viga de madeira tem um corte transversal de altura h e largura w (veja a figura). A rigidez S da viga é diretamente proporcional à sua largura e ao quadrado de sua altura. Quais são as dimensões da viga mais rígida que pode ser feita a partir de um tronco com 24 polegadas (60,96 cm) de diâmetro? (Sugestão: $S = kh^2w$, em que $k > 0$ é a constante de proporcionalidade.)

Figura 23: Viga de madeira.

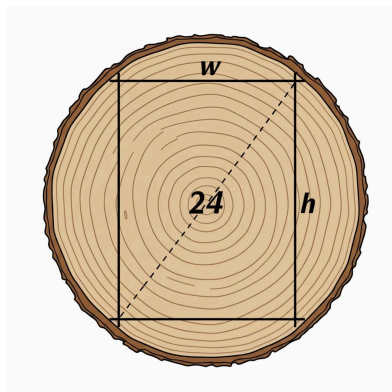
Fonte: Obra Cálculo Aplicado, 8. ed. (2025).

Solução: O problema fala sobre uma viga de madeira cuja seção transversal tem formato retangular, com altura h e uma largura w . Essa seção está inscrita em um tronco circular com 24 polegadas de diâmetro. Sabe-se que a rigidez S da viga é diretamente proporcional à largura e ao quadrado da altura, sendo expressa por:

$$S = kh^2w$$

Onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade.

O retângulo está inscrito num círculo de diâmetro de 24 polegadas, sua diagonal corresponde ao diâmetro do círculo. Assim, pode-se dizer que o diâmetro será a hipotenusa de um triângulo retângulo. Dessa forma, ao aplicar o teorema de pitágoras, tem-se:

Figura 24: Viga de madeira.

Fonte: Autoria própria, com o uso do Google Gemini e do software Geogebra (2025).

$$\begin{aligned}
 24^2 &= w^2 + h^2 \\
 w^2 + h^2 &= 24^2 \\
 w^2 + h^2 &= 576
 \end{aligned}$$

Expressando em termos de h :

$$\begin{aligned}
 w^2 &= 576 - h^2 \\
 w &= \sqrt{576 - h^2}
 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na expressão da rigidez:

$$S = kh^2 \cdot \sqrt{576 - h^2}$$

Encontrando o ponto de máxima rigidez, deriva-se $S(h)$ em relação a h e iguala a zero.

$$\begin{aligned}
 S(h) &= kh^2 \cdot \sqrt{576 - h^2} \\
 S'(h) &= (kh^2)' \cdot (\sqrt{576 - h^2}) + (kh^2) \cdot (\sqrt{576 - h^2})' \\
 S'(h) &= 2kh \cdot (\sqrt{576 - h^2}) + (kh^2) \cdot \frac{1}{2} (576 - h^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2h) \\
 S'(h) &= 2kh \cdot (\sqrt{576 - h^2}) + (kh^2) \cdot \frac{-h}{\sqrt{576 - h^2}} \\
 S'(h) &= 2kh \cdot (\sqrt{576 - h^2}) - \frac{kh^3}{\sqrt{576 - h^2}}.
 \end{aligned}$$

Maximizando:

$$\begin{aligned}
 2kh \cdot (\sqrt{576 - h^2}) - \frac{kh^3}{\sqrt{576 - h^2}} &= 0 \\
 k(2h \cdot \sqrt{576 - h^2} - \frac{h^3}{\sqrt{576 - h^2}}) &= 0 \\
 k(\frac{2h \cdot (576 - h^2) - h^3}{\sqrt{576 - h^2}}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Temos um produto dando zero, porém, como $k \neq 0$, logo:

$$(\frac{2h \cdot (576 - h^2) - h^3}{\sqrt{576 - h^2}}) = 0$$

Desde que $\sqrt{576 - h^2} = w \neq 0$, temos:

$$2h \cdot (576 - h^2) - h^3 = 0$$

$$h \cdot (2 \cdot (576 - h^2) - h^2) = 0$$

Temos um produto dando zero, porém, como $h \neq 0$, temos:

$$2 \cdot (576 - h^2) - h^2 = 0$$

$$1152 - 2h^2 - h^2 = 0$$

$$3h^2 = 1152$$

$$h^2 = \frac{1152}{3}$$

$$h^2 = 384$$

$$h = \sqrt{384}$$

$$h = 8\sqrt{6} \text{ polegadas}$$

$$h = 19,59591794 \text{ polegadas.}$$

$$h = 49,77363157 \text{ cm.}$$

Para w :

$$w = \sqrt{576 - h^2}$$

$$w = \sqrt{192}$$

$$w = 8\sqrt{3} \text{ polegadas}$$

$$w = 13,85640646 \text{ polegadas.}$$

$$w = 35,19527241 \text{ cm.}$$

A viga mais rígida é a que a altura é 49,77363157 cm e a largura é 35,19527241 cm. Essas proporções garantem o equilíbrio ideal entre altura e largura para maximizar a resistência estrutural da viga.

Aplicando os valores obtidos na função rigidez temos:

$$S(19,59591794) = 851,3376129363 \text{ polegadas cúbicas.}$$

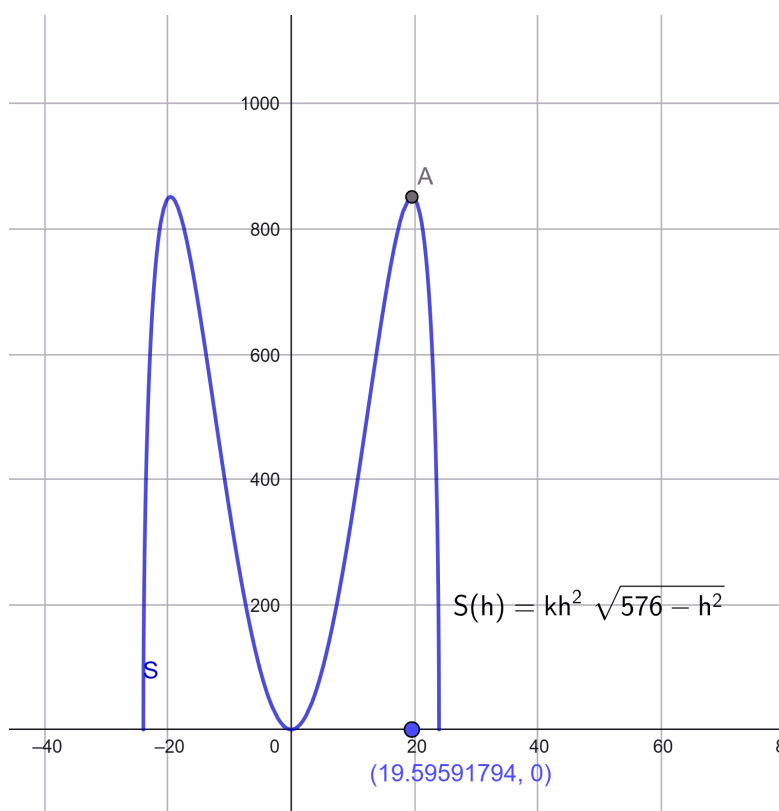
Vamos aplicar valores na vizinhança do h encontrado na função rigidez:

$$S(20) = 849,055946331 \text{ polegadas cúbicas.}$$

$$S(19) = 846,927850528 \text{ polegadas cúbicas.}$$

Podemos ver o gráfico da função rigidez a seguir:

Figura 25: Gráfico da função rigidez.



Fonte: Autoria própria, com o uso do software Geogebra (2025).

Nesse exemplo, não foi encontrado questões semelhantes dentre as que foram selecionadas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo analisar as referências bibliográficas recomendadas para a disciplina de Cálculo 1 no Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), campus Caraúbas-RN. Buscou-se identificar exercícios e exemplos que contemplem aplicações diretas na Engenharia Civil. A temática justifica-se mediante estudos, citados no referencial teórico, que indicam que as dificuldades discentes decorrem não apenas da complexidade inerente aos cálculos, mas substancialmente da dissociação entre a teoria matemática e a aplicabilidade prática dos problemas.

Além do levantamento bibliográfico, o estudo promove a aproximação entre o Cálculo Diferencial e a Engenharia Civil por meio da resolução de exercícios, elaboração de representações gráficas e análise detalhada de funções. Evidencia-se, de forma aplicada, o emprego da derivação de problemas envolvendo áreas, volumes, taxas de variação e custos. A utilização de recursos visuais e de ferramentas computacionais, como o software GeoGebra, demonstrou-se essencial para a validação de resultados e para uma interpretação mais assertiva das questões propostas.

Nesse contexto, o uso de figuras, a padronização pelo Sistema Internacional de Unidades (SI) e as representações gráficas contribuíram para a clareza na interpretação das resoluções, favorecendo a compreensão inicial da problemática, a percepção das grandezas envolvidas e a correta aplicação dos métodos de derivação. Com essa abordagem, disponibilizam-se aos discentes do curso de Ciência e Tecnologia exemplos contextualizados com as práticas da Engenharia Civil, fortalecendo a integração dos conteúdos matemáticos. Dessa forma, o trabalho não apenas sistematiza conceitos fundamentais do Cálculo sob uma perspectiva aplicada, mas também se consolida como material de apoio didático relevante para estudos futuros, servindo de referência para a compreensão da matemática de forma contextualizada e alinhada às demandas reais da Engenharia.

APÊNDICE A - TABELA DE DERIVAÇÕES

Com o objetivo de tornar o desenvolvimento dos cálculos mais claro, foi incluída no Apêndice A, inspirada em tabelas presentes no livro do Stewart, uma tabela que apresenta as principais regras de derivação utilizadas nas resoluções. Essa tabela serve como material de apoio, reunindo as expressões mais comuns aplicadas na análise dos problemas desenvolvidos.

Tabela 1: Fórmulas de derivação.

Fórmula	
1	$d/dx (c) = 0$ (Constante)
2	$d/dx [cf(x)] = cf'(x)$ (Multiplicação por Constante)
3	$d/dx [f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$ (Soma)
4	$d/dx [f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$ (Subtração)
5	$d/dx [f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ (Regra do Produto)
6	$d/dx [f(x)/g(x)] = (g(x)f'(x) - f(x)g'(x)) / [g(x)]^2$ (Regra do Quociente)
7	$d/dx f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ (Regra da Cadeia)
8	$d/dx (x^n) = nx^{n-1}$ (Regra da Potência)
9	$d/dx (e^x) = e^x$
10	$d/dx (a^x) = a^x \ln a$
11	$d/dx (\ln x) = 1/x$
12	$d/dx (\log_a x) = 1 / (x \ln a)$
13	$d/dx (\sin x) = \cos x$
14	$d/dx (\cos x) = -\sin x$
15	$d/dx (\tan x) = \sec^2 x$
16	$d/dx (\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotg x$
17	$d/dx (\sec x) = \sec x \cdot \tg x$
18	$d/dx (\cotg x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas leGoogle (2025).

APÊNDICE B - TABELA DE CONVERSÃO

Tabela 2: Conversão: Comprimento.

Unidade	Centímetro (cm)	Metro (metros)	Quilômetro (km)	Polegadas	Pés	Milhas
1 centímetro	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3,28 \cdot 10^{-2}$	$6,214 \cdot 10^{-6}$
1 metro	100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$
1 quilômetro	10^5	1000	1	$3,937 \cdot 10^4$	3281	0,6214
1 polegada	2,54	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$
1 pé	30,48	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$
1 milha	$1,609 \cdot 10^5$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^4$	5280	1

Fonte: Fundamentos de Física 9ª Edição Vol 1 (2025).

APÊNDICE C - TABELAS DE QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL

De acordo com a análise dos livros selecionados, segue abaixo as tabelas com as questões com aplicações na Engenharia Civil.

Tabela 3: Cálculo Aplicado (Larson; 8. ed.).

QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL			
Livro	Questão	Nº da questão	Página
Cálculo Aplicado	Dimensão de construções	25	40
	Custo	68	76
	Velocidade e aceleração	44	167
	Variação de área	Exemplo 2	175
	Nível da água	99	189
	Área máxima	11	223
	Área	12	223
	Área máxima	16	224
	Área máxima	39	225
	Força da viga	41	225
	Custo mínimo	23	234
	Custo mínimo	24	234
	Comprimento	48	267
	Custo mínimo	50	267
	Análise de uma catenária	Exemplo 4	288
	Topografia	33	426
	Topografia	34	426
	Comprimento do arco	49	427
	Utilização de madeira	51	427

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas Google (2025).

Tabela 4: Cálculo: Volume 1 (Stewart; 7. ed.).

QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL			
Livro	Questão	Nº da questão	Página
Stewart volume 1	Janela retangular	62	21
	Tanque cilíndrico	46	138
	Montanha russa	Projeto aplicado	166
	Tanque	18	211
	Tanque em formato de cone	Exemplo 3	221
	Tanque cilíndrico	5	223
	Taxa	23	224
	Altura	26	224
	Área da janela	105	240
	Curva de deflexão	59	287
	Área	Exemplo 1	294
	Área	11	299
	Custo mínimo	13	300
	Janela retangular	32	300
	Custo mínimo	49	301
	Tanque escoando	64	367
	Tanque	68	367
	Ruptura do tanque	81	375
	Área da piscina	44	387
	Piscina circular	20	408
	Pirâmide	30	408
	Elevador	28	414
	Tanque parabolóide	29	414
	Comprimento	30	468
	Área	28	500

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas Google (2025).

Tabela 5: Cálculo A (Flemming e Gonçalves; 6. ed.).

QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL			
Livro	Questão	Nº da questão	Página
Cálculo A	Área do terreno	35	178
	Usina de britagem	11	192
	custo mínimo	Exemplo 2	219
	Área mínimo	Exemplo 3	220
	Metragem de cano mínima	7	224
	Janela retangular	16	225
	Poço de petróleo	11	291
	Tanque cilíndrico	Exemplo 1	394
	Tanque em forma de cone	Exemplo 2	395
	Tanque cilíndrico	20	408
	Força	23	409
	Força	24	409
	Força	31	409

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas Google (2025).

Tabela 6: Um curso de Cálculo: Vol. 1 (Guidorizzi; 6. ed.).

QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL			
Livro	Questão	Nº da questão	Página
Um curso de cálculo	Reservatório	18	429
	Velocidade	14	445
	Custo mínimo	20	562

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas Google (2025).

Tabela 7: Cálculo com Geometria Analítica: Vol. 1 (Simmons; 1. ed).

QUESTÕES COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL			
Livro	Questão	Nº da questão	Página
Cálculo com Geometria Analítica	Maior área	14	46
	Objeto em queda livre	Exemplo 1	87
	Comprimento	Exemplo 2	162
	Área mínima	7	168
	Custo mínimo	10	169
	Janela retangular	19	169
	Custo mínimo	27	170
	Comprimento	28	170
	Refinaria e reservatório de petróleo	22	181
	Janela retangular	58	208
	Maior área	60	208
	Cerca	61	208
	Custo mínimo	80	210
	Taxa	101	213
	Altura	103	213
	Taxa	105	214
	Força	Exemplo 1	331
	Força	Exemplo 2	331
	Força total	5	332
	Força total	6	332
	Força total	7	332
	Força total	8	332
	Força	13	333
	Força	14	333
	Reservatório cilíndrico	Exemplo 3	336
	Reservatório esférico	21	342
	Força	62	348
	Força	64	348
	Altura	65	348
	Túnel	Exemplo 2	453

Fonte: Autoria própria, com o uso da ferramenta Planilhas Google (2025).

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, Amanda Alves. **Aplicações do cálculo diferencial e integral na Engenharia Civil**. 2022. 54 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/9036>. Acesso em: 3 set. 2025.

FERREIRA, Mykaella Leticia; VIANA, Rafaelle Nazário. **Levantamento dos fatores que podem influenciar no processo de aprendizagem do aluno no ensino de Ciências em escolas públicas do município de Jarú-RO**. Disponível em: https://scholar.google.com/scholar?scilib=1&hl=pt-BR&as_sdt=0,5#d=gs_qabs&t=1752512587025&u=%23p%3DleAE4KO1V8AJ>. Acesso em: 14 de jul. de 2025.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2006.

GEOGEBRA. **GeoGebra Classic: software de matemática dinâmica**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic>. Acesso em: 16 dez. 2025.

GOOGLE. **Gemini: assistente de inteligência artificial**. Disponível em: <https://gemini.google.com>> Acesso em: 16 dez. 2025.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo: Volume 1**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física: mecânica**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 1.

LARSON, Ron. **Cálculo aplicado**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

LIMA, Cícero L. de; SILVA, Ismael S. da; ARAÚJO, João P. de. **Aplicações do cálculo diferencial e integral na Engenharia Civil**. [S. l.], 2022. Disponível em: <https://www.scribd.com/document/748940843/APLICACOES-DO-CALCULO-DIFERENCIAL-E-INTEGRAL-NA>. Acesso em: 3 set. 2025.

LUNETTA, Vincent N. **The School Science Laboratory: Historical Perspectives and Contexts for Contemporary Teaching**. *Science Education*, v. 75, n. 3, p. 249-262, 1991.

SILVA, Alexsandro et al. **A importância da prática no ensino de Ciências**. *Revista*

Científica Eletrônica de Ciências Sociais Aplicadas, v. 2, n. 1, p. 45-52, 2009.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica: Volume 1**. 1. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

STEWART, James. **Cálculo: Volume 1**. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.