



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

LUCAS MATHEUS DA SILVA LIMA

**ESTUDO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA ROTACIONAL COM MATERIAIS
REUTILIZADOS: DETERMINAÇÃO DE G E MOMENTO DE INÉRCIA EM
GEOMETRIAS COMPLEXAS**

PAU DOS FERROS-RN

2025

LUCAS MATHEUS DA SILVA LIMA

**ESTUDO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA ROTACIONAL COM MATERIAIS
REUTILIZADOS: DETERMINAÇÃO DE G E MOMENTO DE INÉRCIA EM
GEOMETRIAS COMPLEXAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus* Pau dos Ferros como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha,
Prof. Dr.

PAU DOS FERROS-RN

2025

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

L732e Lima, Lucas Matheus da Silva.
Estudo experimental da dinâmica rotacional com
materiais reutilizados: determinação de g e
momento de inércia em geometrias complexas /
Lucas Matheus da Silva Lima. - 2025.
47 f. : il.

Orientador: Sharon Dantas da Cunha.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de --Selecione um
Curso ou Programa--, 2025.

1. Pêndulo físico. 2. Aceleração da gravidade.
3. Momento de inércia. 4. Momento de inércia. 5.
Experimento de baixo custo. I. da Cunha, Sharon
Dantas, orient. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Pau dos Ferros
Bibliotecária: Erlanda Maria Lopes da Silva
CRB: 15/966

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

LUCAS MATHEUS DA SILVA LIMA

**ESTUDO EXPERIMENTAL DA DINÂMICA ROTACIONAL COM MATERIAIS
REUTILIZADOS: DETERMINAÇÃO DE G E MOMENTO DE INÉRCIA EM
GEOMETRIAS COMPLEXAS**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido *Campus* Pau dos Ferros como requisito para obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Defendida em: 19/12/25

BANCA EXAMINADORA

Sharon Dantas da Cunha, Prof. Dr. (UFERSA)
Presidente

Aline Mara Maia Bessa, Profa. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

Kytéria Sabina Lopes de Figueredo, Profa. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família, em especial à minha mãe, Maria Lucineide, uma mulher simples e guerreira que, mesmo diante das dificuldades e seguindo sozinha, jamais desistiu de me mostrar o caminho correto a seguir. Com força, dedicação e amor, encontrou meios para superar os obstáculos e me apoiar em cada etapa. Se hoje chego até aqui, é graças a ela. Sou imensamente grato por todo o esforço, carinho e amor incondicional que sempre me ofereceu.

Agradeço também aos meus amigos, que estiveram presentes ao longo dessa caminhada, demonstrando apoio, companheirismo e amizade, especialmente nos momentos mais difíceis. A jornada na UFERSA, por vezes, mostrou-se desafiadora, mas os momentos compartilhados tornaram esse percurso mais leve e significativo. Seja pela ajuda nos trabalhos, pelas conversas entre as aulas ou pela energia renovada nos intervalos com um café, cada momento foi fundamental. Meu sincero agradecimento a Allan Victor, Leudemberg Costa, Maria Jennifer, Mirna Fernandes, Samara Soares e Thiago Geovane.

Agradeço ainda aos amigos que me acompanham desde o ensino médio, cuja presença constante e apoio incondicional foram essenciais ao longo de toda essa trajetória. O companheirismo, as palavras de incentivo e o apoio nos momentos mais difíceis tornaram essa caminhada mais leve e significativa. Sou profundamente grato a Leandro Daniel e Lucas Emanuel por estarem ao meu lado em diferentes etapas da minha formação, contribuindo não apenas para minha trajetória acadêmica, mas também para meu crescimento pessoal.

Agradeço, de forma especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Sharon Dantas da Cunha. Sem sua orientação, apoio e dedicação, a realização deste trabalho não seria possível. Sua contribuição foi imprescindível ao longo de todo o processo, sendo, em muitos momentos, a luz necessária para indicar caminhos e soluções diante das dificuldades. Além de um excelente profissional, é uma pessoa admirável. Sou grato por ter aceitado me orientar em um momento tão importante da minha formação acadêmica.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha trajetória durante a graduação. Cada apoio, conselho e momento compartilhado foi único e permanece guardado com carinho em minha memória. Cada um de vocês foi um tijolo fundamental na construção da base que me permitiu chegar até aqui.

“O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano.”

Isaac Newton.

RESUMO

O presente trabalho investigou aplicações avançadas do pêndulo físico tanto na determinação da aceleração da gravidade local g e para a validação experimental da metodologia de cálculo do momento de inércia I de corpos rígidos. As medições de período de oscilação foram realizadas com um multicronômetro da marca Cidepe e todo o estudo foi desenvolvido sob a proposta de experimento de baixo custo, utilizando materiais reutilizados, como placas de suporte para bolo e uma barra cilíndrica de madeira artesanal. O estudo determinou a aceleração da gravidade utilizando a barra cilíndrica. Porém, o experimento apresentou dificuldades de alinhamento nos eixos de suspensão, provavelmente relacionadas ao material reutilizado, o que resultou em erros sistemáticos. Os dados obtidos foram comparados ao método de Kater e um método otimizado de massa variável. O método de massa variável demonstrou ser mais robusto, resultando em $g = 9,79 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$, com um erro relativo de apenas 0,1022%, e validação estatística conclusiva pelo teste t de Student com 95% de nível de confiança. Para o cálculo do momento de inércia utilizou-se a metodologia do pêndulo físico, após calcular em geometrias simples (placas circular e quadrada), o método foi aplicado a uma figura composta (círculo e retângulo). O momento de inércia experimental I_{exp} foi comparado com o valor teórico $I_{\text{teórico}}$, calculado pela superposição das inércias e aplicação do Teorema dos Eixos Paralelos. O Teste t de Student foi conclusivo, confirmando a precisão do método experimental e a validade do modelo analítico em geometrias complexas. O trabalho confirma a viabilidade do experimento de baixo custo para a obtenção de resultados de alta precisão em Dinâmica Rotacional, enfatizando a importância crítica da determinação precisa do Centro de Massa para a validação dos conceitos. Além disso, reforça-se que experimentos de baixo custo desempenham um papel essencial no ensino de Física, pois permitem que, mesmo em ambientes com recursos limitados, os estudantes tenham contato direto com os fenômenos físicos. O uso de materiais simples e reutilizados torna a prática experimental mais acessível, estimula a aprendizagem ativa e contribui para o desenvolvimento do pensamento científico.

Palavras-chave: pêndulo físico; aceleração da gravidade; momento de inércia; teorema dos eixos paralelos; experimento de baixo custo.

ABSTRACT

The present work investigated advanced applications of the physical pendulum both for determining the local gravitational acceleration g and for the experimental validation of the methodology used to calculate the moment of inertia I of rigid bodies. Oscillation period measurements were performed using a Cidepe-brand multicounter and the entire study was developed under a low-cost experimental proposal, employing reused materials such as cake support plates and a handcrafted cylindrical wooden rod. The gravitational acceleration was determined using the cylindrical rod; however, the experiment exhibited alignment difficulties in the suspension axes, likely associated with the reused materials, which resulted in systematic errors. The obtained data were compared with the Kater pendulum method and an optimized variable-mass method. The variable-mass method proved to be more robust, yielding $g = 9.79 \pm 0.04 \text{ m/s}^2$, with a relative error of only 0.1022%, and conclusive statistical validation using Student's t -test at a 95% confidence level. For the determination of the moment of inertia, the physical pendulum methodology was employed. After initial calculations for simple geometries (circular and square plates), the method was applied to a composite figure (circle and rectangle). The experimental moment of inertia I_{exp} was compared with the theoretical value $I_{\text{theoretical}}$, calculated by superposition of inertias and application of the Parallel Axis Theorem. Student's t -test results were conclusive, confirming the accuracy of the experimental method and the validity of the analytical model for complex geometries. This work confirms the feasibility of low-cost experiments for obtaining high-precision results in rotational dynamics, emphasizing the critical importance of accurate center-of-mass determination for the validation of physical concepts. Furthermore, it reinforces that low-cost experiments play an essential role in physics education, as they allow students to engage directly with physical phenomena even in resource-limited environments. The use of simple and reused materials enhances experimental accessibility, promotes active learning, and contributes to the development of scientific thinking.

Keywords: physical pendulum; gravitational acceleration; moment of inertia; parallel axis theorem; low-cost experiment.

LISTA DE FIGURA

Figura 1 - Imagem da representação de um pêndulo simples.....	16
Figura 2 - Imagem da decomposição de forças em um pêndulo simples.....	17
Figura 3 - Imagem da decomposição de forças em um pêndulo físico	19
Figura 4 - Imagem do modelo do pêndulo de Kater	21
Figura 5 - Base ajustável para o pêndulo	24
Figura 6 - Pêndulo Invertido.	25
Figura 7 - Placas de teste posicionadas.....	26
Figura 8 - Multicronômetro na tela: Idioma/Language	27
Figura 9 - Multicronômetro na tela: Escolha a função	27
Figura 10 - Multicronômetro na tela de funções	28
Figura 11 - Comando média aritmética no Google Planilhas	29
Figura 12 - Comando desvio padrão no Google Planilhas	30
Figura 13 - Comando do erro padrão no Google Planilhas	30
Figura 14 - Período X NP. A figura é para a) $d_1 = 0,268$ e b) $d_2=0,194$	34
Figura 15 - Período X número de passagens.....	38
Figura 16 - Intersecção da área de interesse	40
Figura 17 - Detalhe do primeiro quadrante com a divisão das três regiões de integração	41
Figura 18 - Corpo de geometria complexa acoplado a base	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Lista de materiais	23
Tabela 2 - Valores de massas, posição de centro de massa, período para distância d_1 e d_2 , e seus erros padrões	36
Tabela 3 - Valores da aceleração da gravidade	36
Tabela 4 - Dimensões das figuras e distâncias ao centro de massa.....	39
Tabela 5 - Valores para cálculo do momento.....	42
Tabela 6 - Resultados do corpo	43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CIDEPE – Centro Industrial de Equipamentos de Ensino e Pesquisa

CM – Centro de Massa

DP – Desvio Padrão

ICM – Momento de Inércia em relação ao Centro de Massa

NP – Número de Passagens

LISTA DE SIMBOLOS

A – Área

$A_{\cap}$ – Área da interseção entre as figuras geométricas

C_1, C_2 – Constantes geométricas associadas às dimensões do sistema

d_1, d_2 – Distâncias medidas ao longo do pêndulo

D – Diâmetro

g – Aceleração da gravidade

h – Distância entre o eixo de suspensão e o centro de massa

I – Momento de inércia

i – Momento de área interseção

I_{CM} – Momento de inércia em relação ao centro de massa

$I_{\cap}$ – Momento de inércia da região de interseção

I_{PLACA} – Momento de inércia da placa composta

L_1, L_2 – Dimensões dos lados do retângulo

m – Massa adicionada

M – Massa total do sistema

p – Valor de significância estatística

R – Raio

r – Distância radial

T – Período de oscilação

T_1, T_2 – Períodos medidos para diferentes configurações do pêndulo

T_{m_1}, T_{m_2} – Períodos com massas adicionadas

T_{crit} – Valor crítico do teste t de Student

t – Estatístico do teste t de Student

x_{cm} – Posição do centro de massa

σ – Incerteza (erro padrão)

σ_T – Incerteza associada ao período

σ_h – Incerteza associada à distância

θ – Ângulo

$\theta_{c_1}, \theta_{c_2}$ – Ângulos críticos

π – Constante matemática pi

ε – erro relativo percentual

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA	16
2.1 Pendulo simples	16
2.2 Pêndulo físico	18
2.3 Momento de inércia	20
2.4 Pêndulo de Kater	20
3 METODOLOGIA	23
3.1 Procedimentos experimentais.....	23
3.2 Construção e caracterização dos pêndulos físicos	24
3.2.1 Eixo de rotação.....	24
3.2.2 Barra cilíndrica (pêndulo invertido)	25
3.2.3 Placas de teste	25
3.3 Aquisição de dados.....	26
3.4.1 Planilha eletrônica	28
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	33
4.1 Determinação da gravidade através do pêndulo invertido	33
4.1.1 Gravidade via pêndulo invertido (tipo Kater).....	33
4.1.2 Gravidade através do pêndulo invertido de massa variável	35
4.2 Momento de inércia de corpos rígidos	37
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
REFERÊNCIAS.....	46

1 INTRODUÇÃO

A determinação precisa da aceleração da gravidade local constitui um problema clássico da Física Experimental, com relevância histórica, científica e didática. Desde os primeiros estudos sobre movimentos oscilatórios, os pêndulos têm sido amplamente utilizados como instrumentos para investigar fenômenos dinâmicos e medir indiretamente constantes físicas fundamentais. Entre esses dispositivos, destaca-se o pêndulo físico, cujo comportamento oscilatório sob a ação da gravidade permite relacionar grandezas como período, comprimento e aceleração gravitacional (Halliday; Resnick; Walker, 2010).

O pêndulo simples representa um modelo introdutório eficaz para o estudo de oscilações e do movimento harmônico simples, sendo amplamente empregado em contextos educacionais devido à sua simplicidade conceitual e matemática. Entretanto, esse modelo baseia-se em idealizações rigorosas como a consideração de uma massa pontual, fio inextensível e ausência de forças dissipativas o que limita sua aplicabilidade em experimentos que exigem maior precisão (Barai, 2021; Arnold et al., 2020). Em situações reais, essas hipóteses não são plenamente atendidas, comprometendo a exatidão dos resultados obtidos para a aceleração da gravidade.

Como alternativa mais realista, o pêndulo físico considera um corpo rígido de dimensões finitas oscilando em torno de um eixo que não coincide com seu centro de massa. Esse modelo incorpora efeitos relacionados à distribuição de massa e ao momento de inércia do sistema, proporcionando descrições mais próximas da realidade experimental. Contudo, sua aplicação direta apresenta desafios práticos, sobretudo na determinação precisa do centro de massa e do momento de inércia, parâmetros essenciais para o cálculo da gravidade local (Halliday; Resnick; Walker, 2010).

Nesse contexto, o pêndulo de Kater também conhecido como pêndulo reversível surge como uma solução engenhosa para minimizar essas limitações. Proposto por Henry Kater no início do século XIX, esse dispositivo permite determinar a aceleração da gravidade a partir da igualdade dos períodos de oscilação em dois pontos distintos de suspensão, eliminando a necessidade de conhecer diretamente o centro de massa e o momento de inércia do sistema (Da Silveira, 2006). Além de sua relevância científica, o pêndulo de Kater apresenta elevado potencial didático, pois integra conceitos fundamentais da mecânica clássica, como dinâmica rotacional,

torque, momento de inércia e oscilações, especialmente quando associado a experimentos de baixo custo e instrumentos modernos de medição (3B Scientific, 2024)

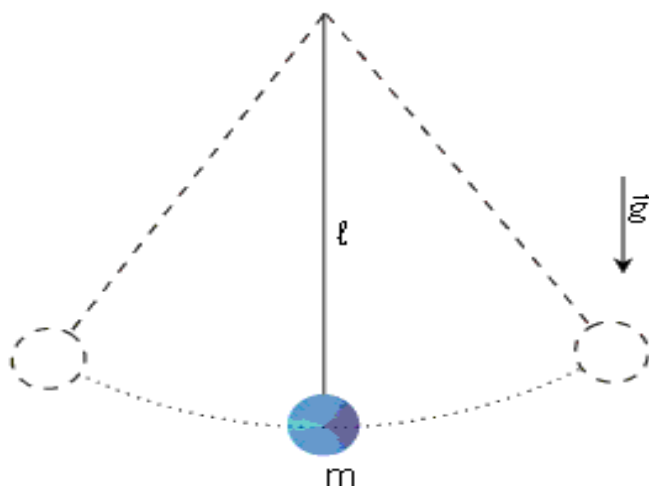
Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo geral aplicar e validar o modelo do pêndulo físico e seus princípios associados na determinação de parâmetros físicos fundamentais e na caracterização de corpos rígidos. Para alcançar esse propósito, estabelecem-se como objetivos específicos: (i) determinar a aceleração da gravidade local por meio do princípio do pêndulo de Kater, analisando as incertezas associadas pela propagação de erros; (ii) obter a aceleração da gravidade local por meio de um método experimental de massa variável, comparando os resultados com valores teóricos e realizando validação estatística pelo teste t de Student; (iii) validar o uso do pêndulo físico para determinar o momento de inércia de corpos rígidos de geometrias simples, como placas circulares e quadradas; e (iv) aplicar o método validado na caracterização do momento de inércia de um corpo rígido de geometria composta, utilizando o princípio da superposição de inércias. Com essa abordagem, o estudo busca não apenas obter valores precisos para a aceleração da gravidade local, mas também demonstrar a viabilidade do pêndulo físico como ferramenta experimental de baixo custo para o ensino de física e a pesquisa em Dinâmica Rotacional.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

2.1 Pêndulo simples

Os movimentos oscilatórios são um dos grandes marcos da física, movimentos que estão presentes em nosso cotidiano, seja com objetos que se movem com a ação do vento, como também em engenharias mais complexas (Barai, 2021). Segundo Halliday, Resnick e Walker (2010), o pêndulo é um corpo suspenso por um fio ou haste, fixo em um ponto, que oscila livremente sob a influência da gravidade, como pode ser visto na figura 1.

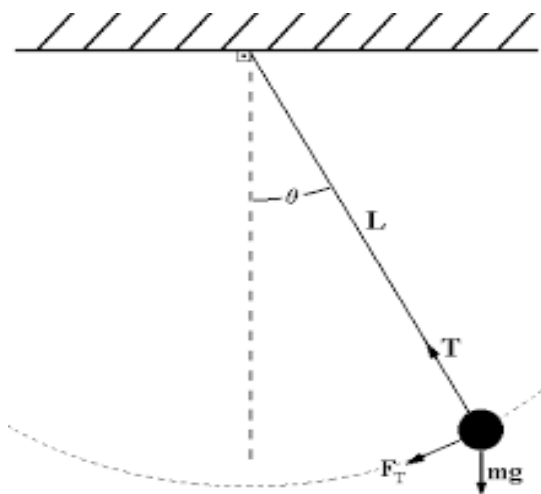
Figura 1 - Imagem da representação de um pêndulo simples



Fonte: Disponível em: (<https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalogo>)

De acordo com Arnold *et al.* (2020) no pêndulo simples, um modelo idealizado, é considerado que o corpo suspenso é pontual, um corpo que suas dimensões são desprezíveis em relação ao contexto do problema, e o fio cujo o corpo é preso deve possuir massa insignificante em comparação ao corpo, também deve ser considerado inflexível, e não é levado em consideração forças resistivas, como a resistência do ar (arrasto) e o atrito no ponto de pivô, é levado em consideração que o pêndulo simples sempre irá oscilar em pequenas amplitudes. A figura 2 mostra as forças presentes no pêndulo simples.

Figura 2 - Imagem da decomposição de forças em um pêndulo simples



Fonte: Disponível em <https://www.scielo.br/j/rbef/a/JsPkFsvQ6fJgGdrTfQCpfFf/>

A componente tangencial da força peso que pode ser dada por:

$$F_T = -mg \cdot \sin\theta \quad (1)$$

atuando como uma força restauradora direcionada a posição de equilíbrio do sistema. Aplicando a segunda lei de newton ao movimento tangencial ($F_T = ma_T$) e considerando a aceleração tangencial como $a_T = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Assim, obtém-se a equação do movimento (equação 2):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0 \quad (2)$$

para ângulos menores que aproximadamente 10° (ou 0.17 radianos) pode se aplicar a aproximação de $\sin\theta \approx \theta$, o que resulta na equação linearizada:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (3)$$

A equação 3 é a equação diferencial característica do movimento harmônico simples (MHS), onde a frequência angular do sistema é dada pela equação 4:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (4)$$

e assim o período de oscilação (T) é expresso pela equação 5:

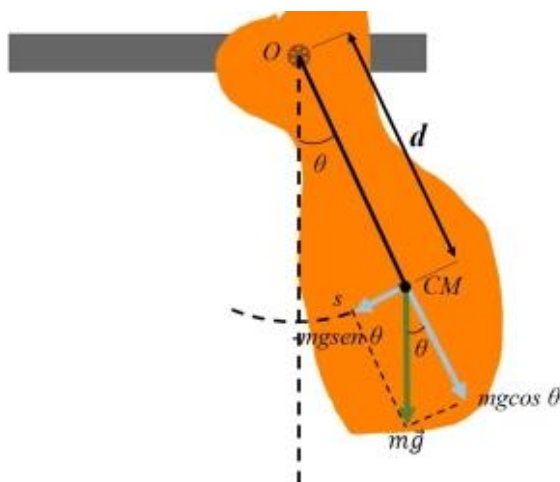
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5)$$

Onde L é o comprimento do fio e g a aceleração da gravidade. De acordo com Barai (2021), o pêndulo simples é um excelente modelo didático e introdutório aos conceitos básicos de oscilação; entretanto, suas idealizações e simplificações o tornam inviável em situações que exigem maior precisão. Weber, Heidemann e Martins (2023) destacam que, fora das idealizações de laboratório, em cenários reais onde a massa e as dimensões do corpo não são desprezíveis, o fio ou a haste podem falhar, e forças dissipativas estão presentes. Essas forças provocam perda gradual de energia no sistema, reduzindo a amplitude das oscilações ao longo do tempo e comprometendo a precisão do modelo comportamentos que o pêndulo simples não é capaz de prever.

2.2 Pêndulo físico

O pêndulo real, ou pêndulo físico comumente chamado, embora que para cenários didáticos ainda tenha de passar por idealizações, seu modelo mais realista, o torna menos idealizado que o pêndulo simples, o que conseqüentemente vem a deixá-lo mais preciso para o estudo de oscilações. Segundo Halliday, Resnick e Walker (2010) o modelo consiste em um corpo rígido que possui volume finito, e esse mesmo corpo consegue girar em torno de um eixo horizontal, eixo este que não passa em seu centro de massa, como pode ser visto na figura 3.

Figura 3 - Imagem da decomposição de forças em um pêndulo físico



Fonte: disponível em: <https://labanimation.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/10/oscilac3a7c3b5es-pc3aandulo-fc3adsico.pdf>

Segundo a Khan Academy (2025), torque é uma medida da força que pode causar rotação em torno de um eixo) restaurador em relação ao eixo de pequenos ângulos é dada pela equação 6:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{Mgh}{I}\theta \quad (6)$$

Comparando a equação 6 com a equação 3 (pêndulo simples), e levando em consideração que segundo Halliday, Resnick e Walker (2010) no pêndulo físico I é momento de inércia, h é distância do ponto de rotação ao centro de massa, g é a aceleração da gravidade local. Assim, o período do pêndulo físico é dado pela equação 7:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (7)$$

A determinação precisa do Centro de Massa (CM) é, portanto, fundamental para a aplicação desta equação, pois a distância h é o principal parâmetro geométrico que correlaciona as propriedades inerciais, I , e a dinâmica translacional relacionando a força restauradora, $mgsen\theta$. Assim, os erros na determinação do CM se propagam diretamente para os valores finais de I e g .

2.3 Momento de inércia

Os livros de física básica apresentam e mostram o cálculo do momento de inércia de corpos rígidos em relação ao CM, I_{cm} , ou seja, o cálculo considera que o centro de rotação está no CM, que difere da situação apresentada na seção anterior. Isso acontece porque no pêndulo físico, o torque restaurador surge a partir do CM, e não existe dinâmica rotacional se h for nulo.

Para relacionar I e I_{cm} É necessário aplicar o teorema de Steiner, também conhecido como Teorema dos eixos paralelos (TEP) (Halliday, Resnick e Walker, 2010). Este teorema permite calcular o momento de inércia de um corpo rígido em relação a qualquer eixo, a partir do momento de inércia em torno do CM e da distância entre os eixos, a equação 8:

$$I = I_{cm} + mh^2 \quad (8)$$

onde I_{cm} o momento de inércia em torno do centro de massa e I é momento de inércia de massa em relação ao eixo de rotação, distante h do CM.

O TEP desempenha um papel duplo crucial neste trabalho: Na Parte 1 dos resultados do pêndulo invertido e do pêndulo de massa variável, este teorema é reorganizado para permitir o cálculo experimental de I_{cm} (a propriedade intrínseca da barra) a partir de um conjunto de medições de T e h . A variação de massa permite isolar e determinar tanto I_{cm} quanto o valor da gravidade g . Na Parte 2 (Corpos Rígidos), o TEP é utilizado para obter o I_{cmEXP} a partir I_{EXP} , obtido a partir do período, e de H . O I_{cmEXP} será comparado com o valor teórico, calculado a partir da geometria e dimensões do corpo.

2.4 Pêndulo de Kater

Segundo Silveira (2006), durante quase dois séculos, o cálculo da gravidade, uma constante física fundamental que a busca por uma forma determinação precisa de seu valor tem sido um motor de avanço científico e tecnológico ao longo da história, ficou limitado pela dificuldade em determinar com precisão o centro de oscilação de

um pêndulo físico. Em 1817, o capitão e físico britânico Henry Kater propôs uma solução, o pêndulo de Kater(ou pêndulo reversível).

De acordo com a 3B Scientific (2024), o pêndulo de Kater, é uma variação do pêndulo físico, desenvolvido para que se possa determinar a aceleração da gravidade com base em medições de período de oscilações e na geometria do sistema, seu modelo consiste em uma barra rígida com dois pontos de suspensão próximos à extremidade e um corpo de massa ajustável que pode se movimentar ao longo da barra, como pode ser visto na figura 4.

Figura 4 - Imagem do modelo do pêndulo de Kater



Fonte: Disponível em (<https://shre.ink/xmRv>)

Diferenciando-se do pêndulo simples que assume a equação 5, para determinar o período em pequenas amplitudes, o pêndulo de Kater assume o mesmo conceito de comprimento reduzido do pêndulo físico. Assim, define-se o comprimento reduzido de um pêndulo físico dado pela equação 9:

$$L = \frac{I}{mh} \quad (9)$$

O pêndulo de Kater permite que ao ajustamos os pesos móveis até o período de oscilação em torno dos dois pontos de suspensão, denominados T_1 e T_2 , sejam iguais, isso permite que o comprimento reduzido L se torne igual a distância entre os

dois eixos, denominada d . Adotando esse caso, $L_1 = L_2 = d$ o período é dado pela equação 10:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} \quad (10)$$

A partir do experimento do pêndulo de Kater é possível obter a aceleração da gravidade, basta obter T_1 a partir de uma distância d_1 em CM (equação 11), e T_2 , em relação a d_2 (equação 12):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Md_1}{Mgd_1}} \quad (11)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_{cm} + Md_2}{Mgd_2}} \quad (12)$$

Considerando que o I_{cm} não é modificado, é possível obter g a partir dos períodos citados anteriormente, como pode ser visto na equação 13:

$$g = \frac{8\pi^2}{\frac{T_1^2 + T_2^2}{L_1 + L_2} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{L_1 - L_2}} \quad (13)$$

De acordo Halliday, Resnick e Walker (2010), o pêndulo de Kater é uma das representações mais efetivas da dinâmica rotacional para a determinação da gravidade, esse método elimina a necessidade de saber os valores de centro de massa e o momento de inércia do sistema de forma direta. A capacidade de igualar periodicamente ($T_1 = T_2$) anula uma grande parte dos erros sistemáticos ligados a distribuição de massa, o que tornou essa técnica um padrão da época em levantamentos geodésicos, até a década de 1930, quando métodos a laser começaram a suplantá-lo. Apesar de ser um método de alta precisão histórica, ele exige alinhamento e precisão nas distâncias, como serão descritos nos resultados. O estudo inicial do presente trabalho utiliza essa ideia como ponto de partida para assim obter várias estimativas de g usando um pêndulo de massa variável.

3 METODOLOGIA

Para o desenvolvimento deste trabalho, realizou-se uma revisão bibliográfica com o objetivo de construir a base teórica necessária para a execução das atividades experimentais em laboratório. A partir do estudo dos conceitos de pêndulo físico e das teorias associadas ao pêndulo de Kater, tornou-se possível desenvolver um sistema experimental de baixo custo fundamentado nesses princípios, possibilitando a determinação da aceleração da gravidade local g e a validação experimental da metodologia de cálculo do momento de inércia I de corpos rígidos.

3.1 Procedimentos experimentais

Tabela 1 - Lista de materiais

Barra cilíndrica de madeira, comprimento aproximado de 62 cm
Placas reutilizadas de bolo/torta, em formatos circular, quadrado e composto
Rebite de alumínio, utilizado como eixo de rotação
Massas metálicas de 10 g e 20 g
Multicronômetro da marca Cidepe, equipado com fotocélulas ópticas
Suporte universal metálico
Barra de madeira retangular, foi fixada no suporte para usar como base ajustável.

Fonte: Autoria própria (2025)

No experimento, foram utilizados objetos de baixo custo, priorizando materiais de fácil acesso e métodos simples de execução. Nesse contexto, a reutilização de placas de bolo/torta do projeto contribuiu de forma significativa, tanto para a redução de custos quanto para a viabilidade prática da montagem experimental. Com o uso de um suporte universal e uma barra de madeira, foi possível construir uma base ajustável e de baixo custo para o pêndulo, conforme ilustrado na figura 5, permitindo a variação e o ajuste de sua altura. Essa configuração facilitou a manutenção da estabilidade do sistema, contribuindo para a redução de erros nas medições.

Figura 5 - Base ajustável para o pêndulo



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Para a fixação do eixo de suspensão do pêndulo, utilizou-se um rebite de alumínio, escolhido por ser um material leve, resistente e de baixo custo. O rebite foi empregado de forma a garantir a firmeza do eixo, mantendo o alinhamento adequado durante as oscilações e assegurando a repetibilidade das medições, além de contribuir para a estabilidade mecânica do sistema experimental.

3.2 Construção e caracterização dos pêndulos físicos

3.2.1 Eixo de rotação

O eixo de rotação foi montado em uma base ajustável e de baixo custo, conforme ilustrado na Figura 5, permitindo o ajuste da altura do sistema e garantindo sua estabilidade durante o experimento. Essa configuração possibilitou que o eixo de suspensão se mantivesse alinhado, reduzindo interferências externas e contribuindo para a obtenção de dados mais confiáveis.

Para a fixação do eixo de suspensão, utilizou-se um rebite de alumínio, selecionado por apresentar baixo custo, boa resistência mecânica e reduzida massa. O uso do rebite proporcionou uma fixação firme do eixo, minimizando deslocamentos laterais e prevenindo oscilações fora do plano principal de movimento, o que reduziu a ocorrência de oscilações tridimensionais indesejadas (oscilação 3D).

3.2.2 Barra cilíndrica (pêndulo invertido)

Na construção do pêndulo de Kater, utilizou-se da barra cilíndrica de aproximadamente 62 cm de comprimento, que atuou como corpo rígido, na qual foram realizados furos ao longo de toda a sua extensão, então foram definidos dois pontos de suspensão distintos, cujas distâncias em relação ao centro de massa da barra são representadas por d_1 e d_2 , respectivamente, 26,8 cm e 19,4 cm.

Figura 6 - Pêndulo Invertido.



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Para determinar o centro de massa (CM) da barra nua foi utilizado o método de equilíbrio estático, posicionando a barra sobre um ponto de apoio até que fosse atingida a condição de equilíbrio. Posteriormente, massas móveis foram acopladas à barra em diferentes posições, possibilitando a variação do centro de massa do conjunto. Com isso, foram obtidos diferentes valores para a distância h entre o eixo de suspensão e o centro de massa, bem como para a massa total M .

3.2.3 Placas de teste

As placas de teste utilizadas no experimento foram confeccionadas a partir de materiais de fácil acesso e baixo custo, a reutilização de placas de bolo/torta. Inicialmente, foram medidas as dimensões geométricas de cada placa, utilizando de uma trena, e a verificação das suas massas individuais, utilizando de uma balança, de modo a caracterizar as placas simples. O mesmo processo foi realizado na placa

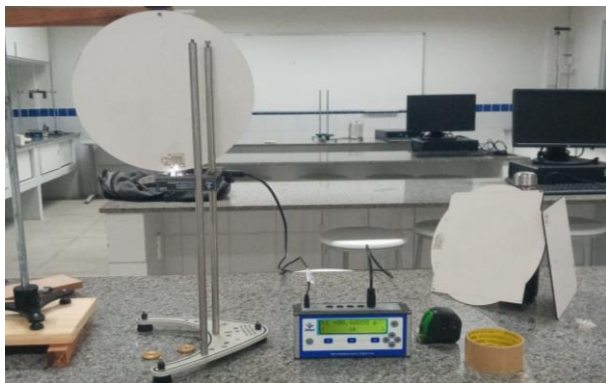
de forma composta. Para determinação do centro de massa (CM) na placa circular se utilizou de simetria, que faz com que o centro de massa, seja o ponto geométrico central do círculo, ou seja, o ponto exato onde o diâmetro o divide em duas metades iguais.

Para a placa de formato retangular bastou encontrar o ponto onde as duas diagonais se cruzam, o que equivale a localizar a metade da base (largura) e a metade da altura. Para determinar o centro de massa (CM) na placa de forma complexa, primeiro ela foi dividida em formas geométricas simples, então, foi calculado o centro de massa e a área (ou massa) de cada parte, com esses valores foi utilizado a fórmula da média ponderada:

$$X_{CM} = \frac{\sum m_i \times X_i}{\sum m_i} \quad Y_{CM} = \frac{\sum m_i \times Y_i}{\sum m_i} \quad (14), (15)$$

Onde m_i é a massa (ou área) e (X_i, Y_i) é a posição do centro de cada parte, somando tudo e dividindo pela massa (ou área) total.

Figura 7 - Placas de teste posicionadas



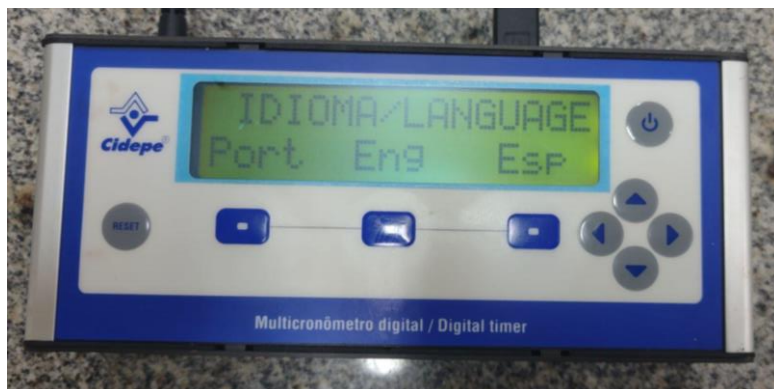
Fonte: Arquivo pessoal (2025)

3.3 Aquisição de dados

A aquisição de dados foi realizada por meio de um multicronômetro, equipamento amplamente utilizado em atividades didático-experimentais de Física para medições temporais com maior precisão. O primeiro passo consiste na

configuração do multicronômetro. Em sua tela inicial, é possível selecionar o idioma desejado para a utilização do equipamento, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8 - Multicronômetro na tela: Idioma/Language



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Após a seleção do idioma, o multicronômetro apresenta sua segunda tela, na qual é possível escolher a função desejada. Caso haja dúvidas quanto ao uso do equipamento, essa tela também disponibiliza a opção de ajuda, conforme pode ser observado na Figura 9.

Figura 9 - Multicronômetro na tela: Escolha a função



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Após a seleção da opção Função, o multicronômetro apresenta as diferentes possibilidades de operação. Para a realização do experimento, foi selecionada a Função 4, destinada a medições de pêndulos e movimentos harmônicos simples.

Figura 10 - Multicronômetro na tela de funções



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Com o equipamento configurado, o pêndulo foi deslocado de sua posição de equilíbrio por um pequeno ângulo, de modo a garantir que o movimento permanecesse no regime de movimento harmônico simples. Em seguida, o pêndulo foi liberado sem velocidade inicial significativa. O multicronômetro foi acionado no instante da primeira passagem do pêndulo pela fotocélula, iniciando automaticamente a contagem do tempo.

Esse procedimento de coleta foi repetido 10 vezes para cada configuração do pêndulo, totalizando 10 ciclos de 10 oscilações cada. A partir dos valores obtidos, foram calculados a média aritmética e o desvio padrão, permitindo uma análise estatística mais confiável dos resultados.

Como a construção do pêndulo foi realizada de forma manual, com foco no baixo custo, ocorreram algumas imprecisões na confecção da haste. Em particular, os furos não ficaram perfeitamente alinhados, o que, mesmo com o uso do rebite para a fixação na base, resultou em um desalinhamento do pêndulo. Essa condição influenciou a obtenção dos dados experimentais, contribuindo para o aumento das incertezas nas medições.

3.4 Tratamento e análise de dados

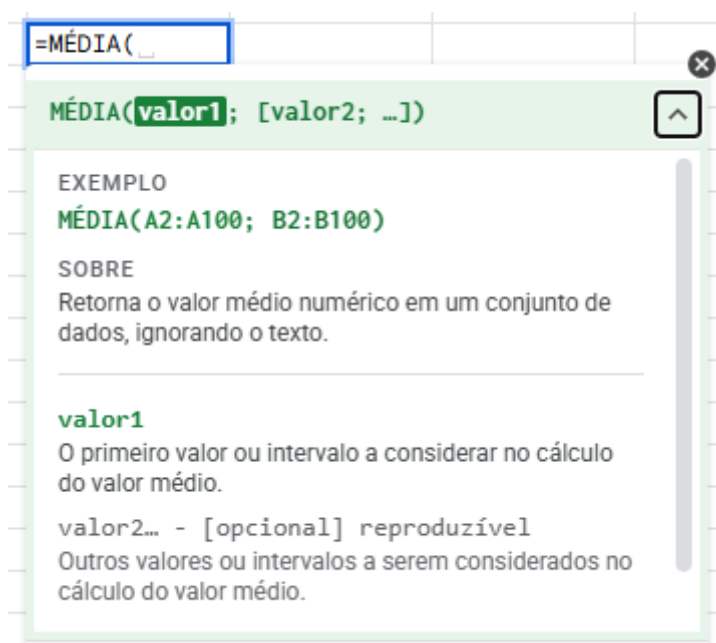
3.4.1 Planilha eletrônica

Para a análise dos dados, utilizou-se o Google Planilhas que, segundo Carilli *et al.* (2023) é uma ferramenta de planilha eletrônica baseada em ambiente web, desenvolvida pela Google, que permite a organização, o processamento e a análise

de dados de forma prática e acessível. Por operar de maneira online, possibilita o armazenamento seguro das informações, bem como o acesso remoto aos dados, dispensando a necessidade de instalação de softwares específicos.

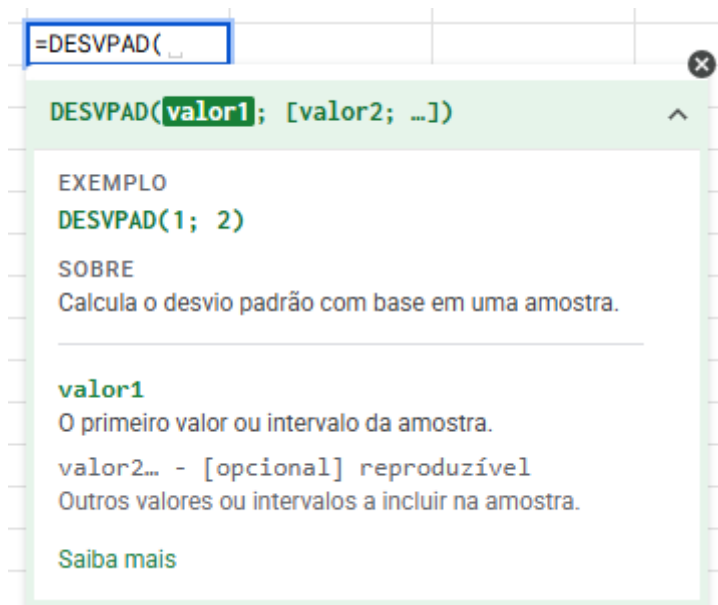
Os dados experimentais foram inseridos na planilha e, em seguida, aplicaram-se as funções estatísticas necessárias, como as observadas nas figuras 11, 12 e 13, o cálculo da média aritmética, do desvio padrão e do erro padrão, de forma rápida e eficiente, o que otimizou a análise dos dados.

Figura 11 - Comando média aritmética no Google Planilhas



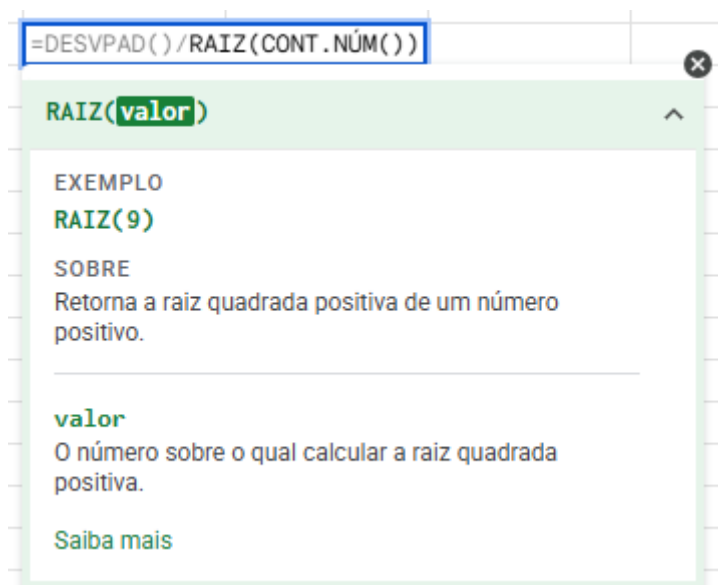
Fonte: Autoria própria (2025)

Figura 12 - Comando desvio padrão no Google Planilhas



Fonte: Autoria própria (2025)

Figura 13 - Comando do erro padrão no Google Planilhas



Fonte: Autoria própria (2025)

3.4.2 Propagação de erros

Utilizando da técnica de propagação de erros para determinar a incerteza associada ao momento de inércia I , considerando que as incertezas das grandezas experimentais, seriam o período de oscilação T e as distâncias medidas

instrumentalmente, no caso do pêndulo físico podemos expressar o momento de inércia em relação ao eixo de suspensão pela equação 16:

$$I = \frac{MghT^2}{4\pi^2} - Mh^2 \quad (16)$$

Em que M é a massa total do sistema, g a aceleração da gravidade local, h a distância entre o eixo de suspensão e o centro de massa do sistema, e T é o período de oscilação

Considerando que I depende das variáveis T e h , a propagação do erro pode ser obtida pela equação 17:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial h} \Delta h\right)^2} \quad (17)$$

temos ΔT como a incerteza associada à medição do período, e Δh a incerteza instrumental na medição das distâncias. Realizando o cálculo das derivadas parciais de I obtém as equações 18 e 19:

$$\frac{\partial I}{\partial T} = \frac{Mgh}{2\pi^2} T \quad (18)$$

$$\frac{\partial I}{\partial h} = \frac{MgT^2}{4\pi^2} - 2Mh \quad (19)$$

Realizando a substituição das derivadas na expressão geral da propagação de erros obtemos a equação 20:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{Mgh}{2\pi^2} T \Delta T\right)^2 + \left[\left(\frac{MgT^2}{4\pi^2} - 2Mh\right) \Delta h\right]^2} \quad (20)$$

Dessa forma, a incerteza associada ao momento de inércia I incorpora tanto a contribuição do erro na determinação do período de oscilação quanto a incerteza instrumental associada à medição das distâncias, permitindo uma estimativa quantitativa da confiabilidade do valor obtido experimentalmente.

3.4.3 Teste T de Student

Para a verificação da concordância estatística entre os valores experimentais obtidos foi realizado o Teste t de Student, em que se foi adotado um nível de confiança de 95% ($\alpha = 0,05$), utilizando do Google Planilhas para realizar a análise. Inicialmente, o valor do estatístico t foi calculado na planilha eletrônica a partir da diferença entre os valores médios analisados, normalizada pelo erro padrão associado, conforme a equação 21:

$$t = \frac{|x - \mu|}{\Delta x} \quad (21)$$

em que x é média experimental, Δx é o erro padrão, e μ é a média conhecida. O valor crítico t_{crit} foi determinado no Google Planilhas utilizando a função INV.T.BC(), considerando o número adequado de graus de liberdade e o nível de significância de 5%. Para comparações diretas entre dois conjuntos de dados, empregou-se a função T.TEST(), que retorna o valor de p associado ao teste t de Student. A validação estatística foi realizada comparando-se o valor calculado de T com o valor crítico t_{crit} . Quando a condição $t < t_{crit}$ é verdadeira, os resultados são considerados estatisticamente concordantes ao nível de 95% de confiança.

De forma equivalente, ao utilizar a função T.TEST(), a concordância foi confirmada quando o valor de p retornado pela planilha foi maior que 0,05 ($p > 0,05$), com o uso das planilhas pode se assegurar uma análise estatística confiável e coerente.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Determinação da gravidade através do pêndulo invertido

Esta subseção trata dos resultados do pêndulo invertido construído com uma barra cilíndrica de madeira. Inicialmente será utilizado o pêndulo invertido para obter a gravidade local com a expressão do pêndulo de Kater. Na sequência será apresentado adicionado massas ao pêndulo invertido, e será apresentado calculado uma expressão o cálculo da aceleração da gravidade do pêndulo de massa variável, e seu valor médio será comparado ao valor teórico.

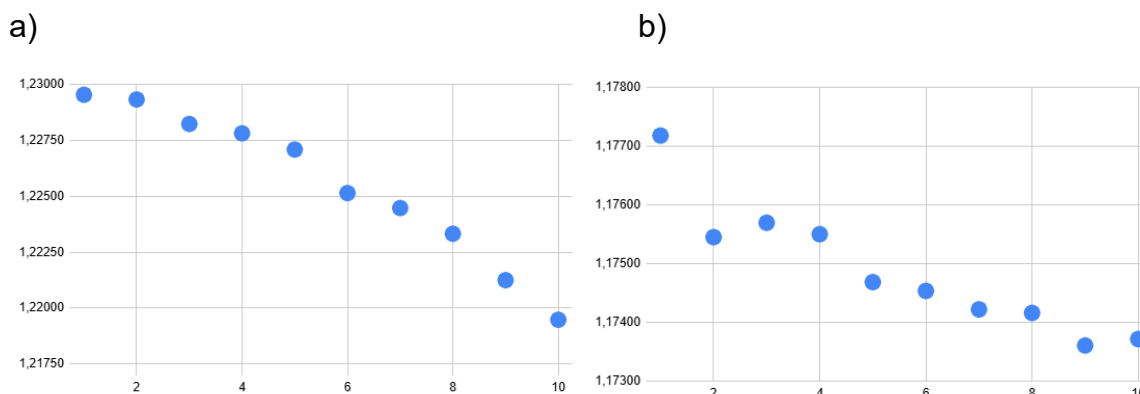
4.1.1 Gravidade via pêndulo invertido (tipo Kater)

O pêndulo de Kater é uma boa alternativa para obter a aceleração da gravidade. A ideia deste trabalho foi construir um pêndulo invertido para obter a aceleração da gravidade a partir da expressão do pêndulo de Kater.

Na tabela 1 foi apresentada as dimensões do pêndulo invertido. O período foi obtido com o multicronômetro da CIDEPE, e o equipamento fornece o período de 10 oscilações, como descrito na seção de materiais e métodos. Devido aos furos não estarem perpendiculares a barra foi observada uma certa em alinhar a base, e por isso, que em algumas medições foi observado uma dissipação de energia, mesmo colocando lubrificação no eixo de rotação.

Foram feitas 10 séries de medida para cada furo, e cada série obteve 10 valores de período correspondente a cada passagem (NP). Nesta etapa foi observado variações na terceira casa decimais, como pode ser visto na figura 14 que mostra o período médio para cada passagem do obstáculo pelo sensor.

Figura 14 - Período X NP. A figura é para a) $d_1 = 0,268$ e b) $d_2 = 0,194$.



Fonte: Autoria própria (2025)

Observando essa dissipação de energia, foi considerado até a quarta passagem ($NP=4$), e foram usados 40 valores de período para o ajuste. O valor de $T_1 = 1,1760 \pm 0,004$ s e $T_2 = 1,2287 \pm 0,0002$ s. A partir das medições realizadas com o pêndulo de Kater, obteve-se para a aceleração da gravidade o valor O valor obtido para a gravidade foi $g = 9,90 \pm 0,02$ m/s², com erro relativo percentual de 1,23%, em relação ao valor de referência adotado para a região, considerando o valor de $g = 9,78$ m/s². Apesar da boa proximidade entre os valores, a aplicação do teste t de Student com nível de confiança de 95% mostrou-se inconclusiva, indicando que, estatisticamente, não é possível afirmar se o valor experimental difere ou não do valor de referência. Esse resultado sugere que a variabilidade das medidas ainda exerce influência significativa sobre a precisão final.

Durante as séries de coleta, observou-se que pequenas inclinações da base experimental provocavam variações perceptíveis no período em função do número de passagens (NP). Esse comportamento reforça a sensibilidade do método às condições de alinhamento, tornando essencial o nivelamento cuidadoso da estrutura para minimizar erros sistemáticos. Além disso, a massa dos obstáculos utilizados para a detecção do período inferior a 1g foi considerada desprezível, assim como a hipótese de que o centro de massa do pêndulo se encontra exatamente em seu ponto médio. Embora essas aproximações sejam comuns, elas podem introduzir pequenas discrepâncias quando se busca alta precisão.

4.1.2 Gravidade através do pêndulo invertido de massa variável

Devido a aceleração da gravidade obtida na seção anterior não ter sido conclusiva pelo teste T de Student, uma estratégia utilizada foi colocar discos de 10 g a 20 g no pêndulo invertido. Os discos estarão em uma distância $d=d_1+d_2$. Para um pêndulo de massa de M e discos de massa m, o período T_{m1} ao adicionar cada massa é dado pela equação 22, para:

$$T_{m1} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{m1}}{gx_{cm}}} \quad (22)$$

Onde x_{cm} é dado pela expressão 23, e I_{m1} , pela expressão 24.

$$x_{cm} = \frac{Md_1 + m(d_1 + d_2)}{M + m} \quad (23)$$

$$I_{cm} = I_{cm} + Md_1^2 + m(d_1 + d_2)^2 \quad (24)$$

Substituindo a expressão 23 e 24 na 22, e isolando I_{cm} , obtém-se a expressão 25:

$$I_{cm} = \frac{T_{m1}^2}{4\pi^2} gx_{cm}(M + m) - Md_1^2 - m(d_1 + d_2)^2 \quad (25)$$

isolando I_{cm} na expressão 11, obtém-se expressão 26:

$$I_{cm} = \frac{T_{m1}^2}{4\pi^2} Mgd_1 - Md_1^2 \quad (26)$$

Igualando as expressões 25 e 26, obtém-se a aceleração da gravidade em função do período T_1 , sem a massa, e com a massa, T_{m1} , obtém-se a expressão 27:

$$g = \frac{4\pi^2 m(d_1 + d_2)^2}{(T_{m1}^2 - T_1^2)Md_1 + T_{m1}^2 m(d_1 + d_2)} \quad (27)$$

De maneira análoga, pode ser obtida a expressão considerando o período T_{m2} , como pode ser visto na equação 28:

$$g = \frac{4\pi^2 m(d_1 + d_2)^2}{(T_{m2}^2 - T_1^2) M d_1 + T_{m2}^2 m(d_1 + d_2)} \quad (28)$$

A tabela 2 mostra os valores de massa adicionada a barra, centro de massa, e dos valores obtidos para o período T_{m1} e T_{m2} e os respectivos erros padrão, que foram calculados pelo método da propagação de erros.

Tabela 2 - Valores de massas, posição de centro de massa, período para distância d_1 e d_2 , e seus erros padrões

m(g)	$x_{cm}(m)$	$\overline{T_{m1}}$	$\Delta \overline{T_{m1}}$	m(g)	$x_{cm}(m)$	$\overline{T_{m2}}$	$\Delta \overline{T_{m2}}$
0	0,194	1,1760	0,0004	0	0,268	1,2287	0,0002
10,1	0,235	1,2354	0,0005	10,1	0,298	1,2628	0,0002
20,2	0,265	1,2646	0,0008	20,2	0,319	1,2827	0,0004
30,3	0,288	1,2838	0,0001	30,3	0,336	1,2958	0,0001
40,4	0,306	1,2968	0,0007	40,4	0,349	1,3065	0,0007

Fonte: Autoria própria (2025)

Utilizando os valores da tabela 2 nas expressões 27 e 28, obtém os valores de g , e na última linha, o valor médio de g , como podemos observar na tabela 3.

Tabela 3 - Valores da aceleração da gravidade

9,77	0,02
9,83	0,02
9,82	0,005
9,82	0,02
9,699	0,004
9,798	0,006
9,79	0,003
9,77	0,01
$\bar{g} = 9,79 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$	

Fonte: Autoria própria (2025)

Fazendo um Teste T de Student com um nível de confiança de 95% considerando $g = 9,78 \text{ m/s}^2$, a hipótese nula foi satisfeita, ou seja, válida a expressão desenvolvida e o método de massa variável como uma técnica estatisticamente confiável para a determinação de g com este aparato, mesmo com as dificuldades geométricas iniciais.

4.2 Momento de inércia de corpos rígidos

Como se calcula o momento de inércia de um corpo composto de duas ou mais formas geométricas? Esta subseção mostra uma técnica para o cálculo teórico do momento de inércia pela técnica da superposição e o resultado é confrontado com o valor experimental. Para isso, a subseção inicia com a validação do método experimental utilizado com corpos simples (placas circulares e quadrado), na sequência será apresentado o cálculo do momento de inércia da placa composta, e por último, o valor do momento de inércia teórico será validado com o momento de inércia experimental.

4.2.1 Avaliação em corpos simples (placas circular e quadrada)

Segundo Halliday, Resnick e Walker (2010), o cálculo do momento de inércia em relação centro de massa de placas circulares de diâmetro D , e retângulo de lado L_1 e L_2 (equação 30) são bem conhecidos na literatura.

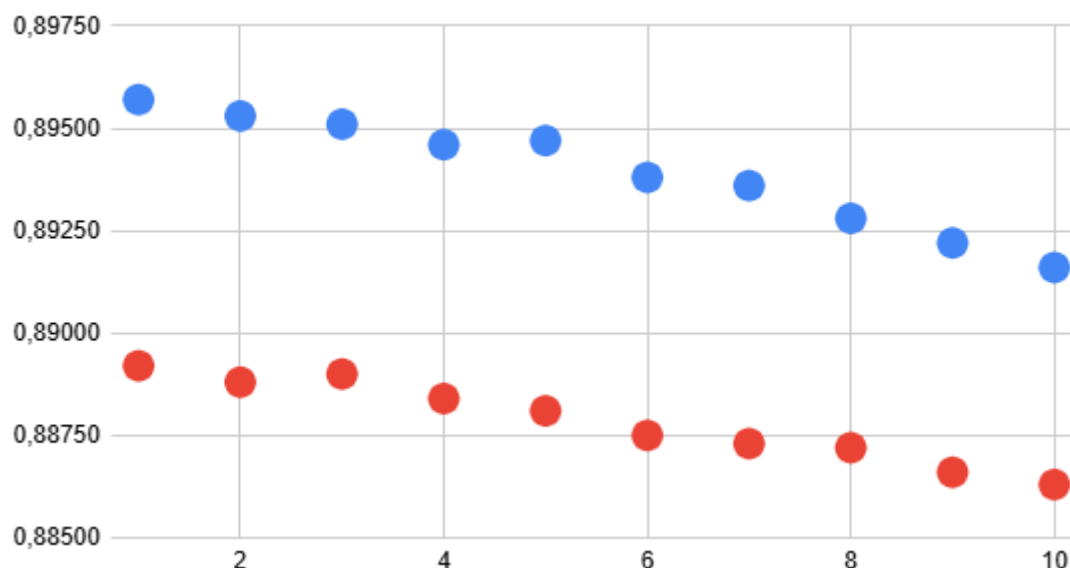
$$I_{\text{circulo}} = \frac{1}{8}MD^2 \quad (29)$$

$$I_{\text{retangulo}} = \frac{1}{12}M(L_1^2 + L_2^2) \quad (30)$$

Para o estudo da placa composta foi proposto um experimento para se obter o período de oscilação, e a partir desta grandeza, o momento de inércia das placas distantes h em relação ao centro de massa. Como comentado antes, a relação entre o momento de inércia de centro de massa, I_{CM} , e o momento do corpo é através do teorema dos eixos paralelos (equação 8). Para a obtenção do momento de inércia

através do período foram obtidas 4 séries com 10 períodos cada. A figura 15 mostra o período versus o número de passagem pelo sensor

Figura 15 - Período X número de passagens



Fonte: Autoria própria (2025)

Para o cálculo do período médio foi considerado as 40 medidas, apesar de existir uma pequena dissipação de energia. Os resultados são apresentados na tabela 4, que mostra as dimensões e a distância do centro de massa, o período médio e erro padrão, o momento de inércia dividido pela massa, o erro relativo percentual, o t do teste t de Student, e o $t_{\text{crítico}}$.

Tabela 4 - Dimensões das figuras e distâncias ao centro de massa

Disco		Retângulo	
D(m)	0,2200	L(m)	0,27000
h(m)	0,1435	h(m)	0,12500
$\bar{T}(s)$	0,8939	$\bar{T}(s)$	0,88780
$\Delta\bar{T}(s)$	0,0002	$\Delta\bar{T}(s)$	0,0002
$\overline{I_{EXPERIMENTAL}}/massa (m^2)$	0,0284	$\overline{I_{EXPERIMENTAL}}/massa(m^2)$	0,0244
$\Delta\overline{I_{EXPERIMENTAL}}/massa (m^2)$	0,0002	$\Delta\overline{I_{EXPERIMENTAL}}/massa(m^2)$	0,0002
$\overline{I_{teórico}}/massa (m^2)$	0,02866	$\overline{I_{teórico}}/massa (m^2)$	0,02474
Erro relativo e percentual	0,907	Erro relativo e percentual	1,37
T	1,3	T	1,7
t _{CRÍTICO}	2,02269	t _{CRÍTICO}	2,02269

Fonte: Autoria própria (2025)

Em ambas as placas (circular e retangular), a hipótese nula foi satisfeita confirmando a confiabilidade da obtenção de dados com o pêndulo físico.

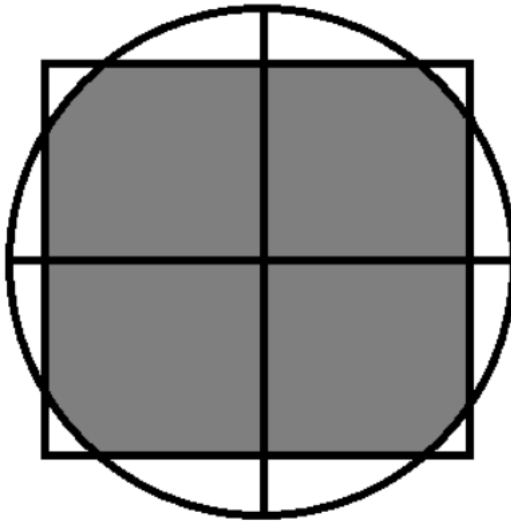
4.2.2 Cálculo teórico, obtenção experimental e validação da placa composta.

A placa composta apresentada na figura 7 é composta de círculo, de raio R, e de um retângulo, de lados L₁ e L₂. O momento de inércia da placa composta é dado pela equação 31:

$$I_{PLACA} = I_{CÍRCULO} + I_{RETÂNGULO} - I_{\cap} \quad (31)$$

Os momentos de inércia do círculo e retângulo são obtidos pela equação 30 e 31, respectivamente. Assim, para o cálculo teórico do momento de inércia é necessário determinar as interseções entre um círculo e um retângulo. A figura 16 mostra a interseção da região de interesse.

Figura 16 - Intersecção da área de interesse



Fonte: Autoria própria (2025)

O cálculo do momento de inércia é dado pela equação 32:

$$I_{\cap} = \frac{m_{\cap}}{A_{\cap}} \iint_{INTERSEÇÃO} r^2 dA \quad (32)$$

para encontrar a região da intersecção será utilizado uma metodologia de ângulos críticos, definindo limites baseados nas dimensões do retângulo. Para isso é necessário estabelecer os limites do retângulo $-\frac{L_1}{2} \leq x \leq \frac{L_1}{2}$ e $-\frac{L_2}{2} \leq y \leq \frac{L_2}{2}$, logo $x^2 + y^2 \leq R^2$. Em coordenadas polares, define-se $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, e o raio máximo da intersecção é dado pela equação 33:

$$r_{max}(\theta) = \min \left(R, \frac{L_1/2}{\cos(\theta)}, \frac{L_2/2}{\sin(\theta)} \right) \quad (33)$$

é interesse destacar a simetria do corpo, por isso, o cálculo será feito em apenas um quadrante, como mostrado na figura 17:

Figura 17 - Detalhe do primeiro quadrante com a divisão das três regiões de integração



Fonte: Autoria própria (2025)

Dividindo a figura 17 em regiões:

Região Amarela: $0 \leq \theta \leq \theta_{c1}$, $r_{max} = \frac{C_1 R}{\cos \theta}$

Região Verde: $\theta_{c1} \leq \theta \leq 90^\circ - \theta_{c2}$, $r_{max} = R$

Região Azul: $90^\circ - \theta_{c2} \leq \theta \leq 90^\circ$, $r_{max} = \frac{C_2 R}{\sin \theta}$

Em que $C_1 = \frac{L_1}{2R}$ e $C_2 = \frac{L_2}{2R}$, e os ângulos críticos $\theta_{c1} = \arccos(C_1)$ e $\theta_{c2} = \arccos(C_2)$

e trabalhando a integral em polares, e fazendo o cálculo em um quadrante:

$$I_\Omega = 4 \frac{m_\Omega}{A_\Omega} \iint_{1^\circ \text{ quadrante}} r^2 (r dr d\theta) = 4 \frac{m_\Omega}{A_\Omega} \int_{\text{REGIÕES}} \left[\frac{r_{max}(\theta)^4}{4} \right] d\theta \quad (34)$$

$$I_\Omega = 4 \frac{m_\Omega R^4}{4A_\Omega} \left(\int_0^{\theta_{c1}} C_1^4 \sec^4 \theta d\theta + \int_{\theta_{c1}}^{90^\circ - \theta_{c2}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2} - \theta_{c2}}^{\frac{\pi}{2}} C_2^4 \csc^4 \theta d\theta \right) \quad (35)$$

A expressão final para I_Ω é dada pela equação 36:

$$= \frac{m_\Omega R^4}{4A_\Omega} \left[C_1^4 \left[\tan \theta_{c1} + \frac{1}{3} \tan^3 \theta_{c1} \right] + C_1^4 \left[\tan \theta_{c2} + \frac{1}{3} \tan^3 \theta_{c2} \right] + \frac{\pi}{2} - \theta_{c1} - \theta_{c2} \right] \quad (36)$$

Para o cálculo da área A_Ω usando os mesmos limites de integração do cálculo do momento de inércia:

$$A_{\cap} = 4 \iint_{1^{\circ}\text{quadrante}} (r dr d\theta) = 4 \int_{REGI\tilde{O}ES} \left[\frac{r_{\max}(\theta)^2}{2} \right] d\theta \quad (37)$$

↓

$$= 2R^2 \left[C_1^2 \tan\theta_{c1} + C_2^2 \tan\theta_{c2} + \frac{\pi}{2} - \theta_{c1} - \theta_{c2} \right] \quad (38)$$

Devido ao não conhecimento da massa de interseção, será utilizado o momento de inércia de área, $i=l/m$. A tabela 5 resume os valores pertinentes para o cálculo do momento de inércia de área.

Tabela 5 - Valores para cálculo do momento.

D(m)	0,269
L_1 (m)	0,236
L_2 (m)	0,22
θ_{c1} (rad.)	0,50054
θ_{c2} (rad.)	0,61314
C_1	0,8773234201
C_2	0,8178438662
$A(m^2)$	0,0487988535
$i_{\text{área de interseção}}(m^2)$	0,007914893474

Fonte: Autoria própria (2025)

A obtenção do período do corpo de geometria composta utilizou-se o multicronômetro, e a mesma estratégia para a obtenção dos corpos de geometria simples. Para a métrica obtida por meio dos sensores ópticos, foi fixado um arame na extremidade do corpo, alinhado a sua diagonal, de modo a garantir a interrupção precisa do feixe de luz durante as oscilações

Figura 18 - Corpo de geometria complexa acoplado a base



Fonte: Arquivo pessoal (2025)

Também foram realizados quatro ciclos de 10 oscilações, possibilitando o cálculo de uma média e erro padrão. Também será considerado o momento de inércia de área. A tabela 6 resume os resultados desta subseção onde foi feito calculado o erro relativo percentual e o teste t de Student

Tabela 6 - Resultados do corpo

$\bar{T}$	0,92520
σ	0,0003
$I_{EXPERIMENTAL}$	0,0322
$\varepsilon_{MOMENTO DE INERCIA}$	0,0002
$I_{TEÓRICO}$	0,0323
$\varepsilon (\%)$	0,3095975232
t	0,5
$t_{critico}$	2,02269

Fonte: Autoria própria (2025)

Como apresentado na tabela 6, o teste t de Student foi conclusivo ($t < t_{critico}$) e valida o método experimental do pêndulo físico e, crucialmente, o modelo analítico de superposição de inércias para a caracterização de corpos de formatos complexos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho cumpriu plenamente seus objetivos ao validar o uso do pêndulo físico para a determinação da aceleração da gravidade e para a caracterização inercial de corpos rígidos. Os resultados obtidos demonstram que é possível realizar experimentos de alta precisão em Dinâmica Rotacional utilizando materiais de baixo custo e reaproveitados, desde que acompanhados de uma metodologia cuidadosa e de uma análise estatística consistente. Essa constatação reforça o potencial de democratização do ensino experimental de Física, especialmente em contextos educacionais com recursos limitados.

A determinação da gravidade local evidenciou diferenças importantes entre os métodos empregados. O método da massa variável forneceu um valor robusto, o método de massa variável obteve um $g_{\text{exp}} = 9,79 \pm 0,04 \text{ m/s}^2$ e constituiu uma alternativa robusta e validado estatisticamente e pouco sensível às imperfeições geométricas do aparato. Em contraste, o pêndulo tipo Kater apresentou limitações significativas, com resultados inconclusivos dentro do nível de confiança adotado. Essa comparação não apenas orienta escolhas experimentais futuras, mas também ilustra para estudantes a relevância de compreender as condições de aplicabilidade de cada método e o impacto dos erros sistemáticos.

No campo da Dinâmica Rotacional, o trabalho confirmou a validade da superposição de momentos de inércia e do Teorema dos Eixos Paralelos, inclusive para geometrias compostas e não triviais. A determinação bem-sucedida do momento de inércia da placa composta mostrou que técnicas matemáticas mais sofisticadas podem ser aplicadas com sucesso em experimentos acessíveis, ampliando o repertório de atividades práticas possíveis em cursos de Física.

Entretanto, o estudo também evidenciou desafios inerentes ao uso de materiais simples. A falta de alinhamento perpendicular dos furos na barra cilíndrica foi identificada como a principal fonte de erro sistemático, comprometendo a precisão do pêndulo de Kater.

Esse resultado destaca a importância do controle geométrico do aparato, mesmo quando se busca baixo custo. Como perspectiva futura, recomenda-se a construção de um novo pêndulo cilíndrico com alinhamento rigoroso dos furos, mantendo a proposta de acessibilidade, mas com maior atenção à qualidade mecânica. A continuidade da exploração de materiais de baixo custo, aliada a um

cuidado maior com a geometria e a calibração, pode ampliar ainda mais o potencial didático do experimento. Em síntese, este trabalho oferece uma contribuição significativa para o ensino de Física Experimental ao mostrar que a precisão não depende exclusivamente de equipamentos sofisticados, mas de uma combinação entre metodologia, análise estatística e criatividade na construção do aparato. Ao evidenciar que conceitos avançados de Dinâmica Rotacional podem ser explorados com materiais simples, o estudo abre caminho para práticas pedagógicas mais inclusivas, investigativas e alinhadas ao espírito da experimentação científica.

REFERÊNCIAS

- 3B SCIENTIFIC. **Pêndulo Reversível de Kater: Manual de Experimento UE1050221**. Hamburg: 3B Scientific GmbH, 2024. Disponível em: https://www.3bscientific.com/PhysicsExperiments/UE1050221_PT.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.
- 3B SCIENTIFIC GMBH. **Manual do Produto 1018466**. 3B Scientific, [s.d.]. Disponível em: https://www.3bscientific.com/product-manual/1018466_PT.pdf. Acesso em: 4 jul. 2025.
- ARNOLD, F. J. *et al.* Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Campinas, v. 42, e20200121, 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/JsPkFsvQ6fJgGdrTfQCpfFf/>. Acesso em: 3 jul. 2025.
- BARAI, Paramita. **Experimento 2: Pêndulo Físico**. Laboratório de Física I – IAG/USP, 2021. Disponível em: http://www.astro.iag.usp.br/~barai/TEACHING/2021-LFI/Experimento2_Pendulo_Fisico.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.
- CARILLI, Cecília Soares Ferreira *et al.* Funcionalidades Acadêmicas e Científicas do Google. **Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences**, v. 5, n. 3, p. 677-693, 2023
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Volume 2 – Oscilações e Ondas, Termodinâmica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- HARVARD NATURAL SCIENCES LECTURE DEMONSTRATIONS. **Reversible (Kater's) Pendulum**. Harvard University, [s.d.]. Disponível em: <https://sciencedemonstrations.fas.harvard.edu/presentations/reversible-katers-pendulum>. Acesso em: 4 jul. 2025.
- HEIDEMANN, L. A.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. Â. Atividades experimentais com enfoque no processo de modelagem científica: uma alternativa para a ressignificação das aulas de laboratório em cursos de graduação em física. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 1, mar. 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/NBQcLKwDcmzphrmRVdQ6nQG/>. Acesso em: 3 jul. 2025.
- KHAN ACADEMY. **Torque**. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/science/physics/torque-angular-momentum/torque-tutorial/a/torque>. Acesso em: 3 jul. 2025.
- LABANIMATION. **Oscilações – pêndulo físico**. [S. l.]: Lab Animation, 2015. Disponível em: <https://labanimation.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/10/oscilac3a7c3b5es-pc3aandulo-fc3adsico.pdf>. Acesso em: 22 jul. 2025.

SILVEIRA, Fernando Lang da. **Determinando a aceleração gravitacional**. Porto Alegre: Instituto de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA – UEL. Pêndulo simples. *In*: **Física Aplicada à Engenharia II**. Londrina: UEL, [s.d.]. Disponível em: http://www.uel.br/pessoal/renatoikeoka/pages/arquivos/Fisica%20Aplicada%20a%20Engenharia%20II/Pendulo_simples.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA. **Roteiro de experimento: Pêndulo físico**. Salvador: Departamento de Física – UFBA, [s.d.]. Disponível em: https://www.fis.ufba.br/sites/fis.ufba.br/files/roteiro_-_pendulo_fisico.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA – UFJF. **Lab II – Aula 1: Pêndulo simples**. Departamento de Física, UFJF, 2016. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fisica/files/2010/03/LabII-Aula1-pêndulo_simples_2016.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE – UFS. **Instrumentação para o Ensino de Física IV: Aula 2 – Pêndulo simples, de torção e físico**. Departamento de Física; CESAD, [s.d.]. Disponível em: https://cesad.ufs.br/ORBI/public/uploadCatalogo/15081815102012Intrumentacao_para_o_Ensino_de_Fisica_IV_Aula_2.pdf. Acesso em: 3 jul. 2025.

WEBER, Rodrigo; HEIDEMANN, Leonardo Albuquerque; MARTINS, Jorge Simões de Sá. Caos determinístico: uma abordagem com o software Insight Maker focada em discussões sobre determinismo e previsibilidade. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 45, p. e20230028, 2023. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbef/a/XC4ynXFDhN5KZfDZnNjKprz/>. Acesso em: 3 jul. 2025.