



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO - UFERSA**  
**CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS - CMPF**  
**CURSO DE BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**VICTOR VINÍCIUS RÊGO MIRANDA**

**FUNDAMENTOS BÁSICOS E RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE  
TERZAGHI PARA O ADENSAMENTO DE SOLOS**

**PAU DOS FERROS – RN**  
**2016**

**VICTOR VINÍCIUS RÊGO MIRANDA**

**FUNDAMENTOS BÁSICOS E RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE  
TERZAGHI PARA O ADENSAMENTO DE SOLOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido,  
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros, como  
requisito parcial para a obtenção do grau de  
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

**Orientador:** Prof. Me. Bruno Fontes de Sousa

**PAU DOS FERROS – RN  
2016**

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Rf      Rêgo Miranda, Victor Vinícius .  
         Fundamentos Básicos e Resolução da Equação  
diferencial de Terzaghi para o Adensamento de  
Solos / Victor Vinícius Rêgo Miranda. - 2016.  
         35 f. : il.

         Orientador: Bruno Fontes de Sousa.  
         Monografia (graduação) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Curso de , 2016.

         1. Grau de adensamento. 2. Mecânica dos solos.  
         3. Teoria de Terzaghi. I. Fontes de Sousa,  
         Bruno, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

**VICTOR VINÍCIUS RÊGO MIRANDA**

**FUNDAMENTOS BÁSICOS E RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE  
TERZAGHI PARA O ADENSAMENTO DE SOLOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal Rural do Semi-Árido,  
Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros, como requisito parcial para a obtenção do grau de  
Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Aprovado em: 10/11/2016

**BANCA EXAMINADORA**

Bruno Fontes de Sousa.

Prof. Me. Bruno Fontes de Sousa (UFERSA)

ORIENTADOR

José Daniel Jales Silva

Prof. Me. José Daniel Jales Silva (UFERSA)

EXAMINADOR

Leonardo Henrique Borges de Oliveira

Prof. Me. Leonardo Henrique Borges de Oliveira (UFERSA)

EXAMINADOR

## RESUMO

Esse trabalho visa apresentar as teorias matemáticas e as deduções para chegar à equação elaborada por Terzaghi para o adensamento de solos. Ao se elaborar um projeto de engenharia civil é necessário verificar se o solo de fundação possui propriedades suficientes para suportar a tensão que a construção causará sobre ele. Como o solo possui vazios que, eventualmente, podem estar preenchidos com água, é de suma importância a utilização da teoria do adensamento de solos feita por Terzaghi para estudar a dinâmica do fluxo de água e redução do índice de vazios que configura esse fenômeno. O adensamento de solos é um fenômeno que tem como consequência o recalque do solo e das estruturas que estão sobre ele, trazendo problemas como tensões não previstas, inclinação da estrutura, rachaduras, entre outros. O trabalho foi realizado com a ajuda de materiais elaborados como, artigos, livros, publicações, etc. Todas as teorias necessárias para o entendimento da teoria de adensamento de solos feita por Terzaghi foram mostradas e detalhadas, como, séries de Fourier, lei de Darcy, equação diferencial de fluxos tridimensionais e conceitos básicos de cálculo e de mecânica dos solos.

**Palavras-chave:** Grau de adensamento. Mecânica dos solos. Teoria de Terzaghi.

## **ABSTRACT**

This work aims to present the mathematical theories and the deductions to arrive at the equation elaborated by Terzaghi for the soil compacting. When elaborating a civil engineering project it is necessary to verify if the foundation soil has sufficient properties to withstand the tension that the construction will cause about it. As the soil has voids that may eventually be filled with water, it is extremely important to use Terzaghi's theory of soil densification to study the dynamics of water flow and reduce the void index that configures this phenomenon. Soil densification is a phenomenon that has the consequence of repressing the soil and the structures that are on it, bringing problems such as unplanned stresses, slope of the structure, cracks, among others. The work was done with the help of elaborate materials such as articles, books, publications, etc. All the theories necessary to understand Terzaghi's theory of soil densification were shown and detailed, such as Fourier series, Darcy's law, differential equation of three-dimensional flows, and basic concepts of soil mechanics and calculation.

**Keywords:** Degree of densification. Soil mechanics. Theory Terzaghi.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Esquema de comportamento das tensões no solo. ....                                            | 15 |
| Figura 2: Água percolando num permeâmetro. ....                                                         | 18 |
| Figura 3: Analogia mecânica do processo de adensamento feita por Terzaghi. ....                         | 19 |
| Figura 4: Elemento infinitesimal de solo. ....                                                          | 20 |
| Figura 5: As fases do solo separadas em volumes antes e depois de uma redução no índice de vazios. .... | 22 |
| Figura 6: Variação linear do índice de vazios com a tensão efetiva. ....                                | 24 |
| Figura 7: Fluxo através de um elemento de solo. ....                                                    | 26 |
| Figura 8: Esquema de relação entre os volumes dos sólidos e vazios. ....                                | 26 |

## SUMÁRIO

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>                                          | <b>8</b>  |
| 1.1 OBJETIVOS .....                                                 | 9         |
| 1.1.1 Objetivo geral .....                                          | 9         |
| 1.1.2 Objetivos específicos .....                                   | 9         |
| <b>2. METODOLOGIA DA PESQUISA .....</b>                             | <b>10</b> |
| <b>3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>                               | <b>11</b> |
| 3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO .....                              | 11        |
| 3.1.1 Conceito de limite .....                                      | 11        |
| 3.1.2 Derivadas .....                                               | 11        |
| 3.1.2.1 Regra da cadeia .....                                       | 12        |
| 3.1.3 Primitivas .....                                              | 12        |
| 3.1.4 Teorema fundamental do cálculo .....                          | 13        |
| 3.1.5 Séries de Fourier .....                                       | 13        |
| 3.1.5.1 Funções periódicas .....                                    | 13        |
| 3.1.5.2 Coeficientes de Fourier .....                               | 13        |
| 3.2 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA DOS SOLOS .....                | 14        |
| 3.2.1 Índice de vazios .....                                        | 14        |
| 3.2.2 Porosidade .....                                              | 14        |
| 3.2.3 Relação matemática do índice de vazios com a porosidade ..... | 14        |
| 3.2.4 Tensões nos solos .....                                       | 15        |
| 3.2.5 Tensões devido ao peso próprio .....                          | 16        |
| 3.2.6 Tensões efetivas .....                                        | 16        |
| 3.2.7 Permeabilidade .....                                          | 17        |
| 3.2.7.1 Lei de Darcy .....                                          | 17        |
| 3.2.8 Adensamento .....                                             | 19        |
| 3.2.9 Recalque .....                                                | 19        |
| 3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE FLUXOS TRIDIMENSIONAIS .....             | 20        |
| 3.4 CÁLCULO DOS RECALQUES PELA COMPRESSIBILIDADE EDOMÉTRICA .....   | 21        |
| 3.5 TEORIA DO ADENSAMENTO DE TERZAGHI .....                         | 23        |
| 3.5.1 Grau de adensamento .....                                     | 23        |
| 3.5.2 Coeficiente de compressibilidade .....                        | 25        |
| 3.5.3 Dedução da teoria .....                                       | 25        |



|                                      |           |
|--------------------------------------|-----------|
| <b>4. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b> | <b>33</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>             | <b>34</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

A palavra solo vem do latim *solum*, que significa “chão”. O solo é um sistema trifásico composto por partículas sólidas, água e ar. Ele é um dos materiais mais utilizados nas obras de engenharia civil. Sob o ponto de vista técnico é um material da crosta terrestre que serve de suporte para estruturas e tem importância em várias áreas. Na agricultura seu uso é basicamente como suporte e fonte de nutrientes das plantas. Na geologia ele é muito estudado como, por exemplo, a sua formação que se dá através do intemperismo e desintegração que a rocha sofre, suas classificações que caracterizam a origem do solo, agentes externos e suas propriedades físicas, mecânicas, químicas e biológicas.

Na engenharia civil, o solo é muito modelado para atender as necessidades das obras de várias maneiras como por perfuração, escavação, compactação, entre outros. Essas modificações que o solo sofre são para que não ocorram problemas futuros que poderão danificar as estruturas sobre ele, problemas como, recalques, rupturas, deslizamento de encostas, erosão dos solos, entre outros.

Na construção de estruturas é necessário um solo que suporte adequadamente o peso da estrutura sobre ele. É necessário aplicar os conhecimentos da mecânica dos solos para determinar a viabilidade ou não deste solo para a construção civil. Quando o solo está saturado, é necessário aplicar os conhecimentos da teoria de adensamento de solos de Terzaghi. Esta se utiliza de um bom embasamento matemático.

O processo de adensamento é um fenômeno típico de solos saturados de baixa permeabilidade, no qual devido às tensões geradas ocorre um fluxo de água de dentro para fora proporcionando uma redução no índice de vazios e consequentemente o recalque do solo e das estruturas sobre ele construídas.

A teoria do adensamento de solos feita por Terzaghi mostra o grau de adensamento ao longo de toda a profundidade, através da seguinte equação:

$$U_z = 1 - \sum_{M=0}^{\infty} \frac{2}{M} \operatorname{sen}\left(\frac{M \cdot z}{H}\right) e^{-M^2 T},$$

onde  $z$  é a profundidade do solo,  $H$  é a altura da face superior, ou inferior, ao seu centro de massa (ver página 29) e  $T$  é o fator tempo (ver página 32).

Mas que conceitos matemáticos devem ser utilizados para chegar a tal equação?

O solo é a primeira parte a ser analisada em um projeto de construção civil, pois ele deverá apresentar resistência suficiente para receber o peso da estrutura. Dessa forma, é

necessário saber qual o tipo do solo e em seguida aplicar os conhecimentos da mecânica dos solos para torná-lo adequado para a estrutura que será construída.

## 1.1 OBJETIVOS

Almeja-se que a pesquisa mostre como se dá a formulação matemática da teoria do adensamento de solo desenvolvida por Terzaghi.

### 1.1.1 Objetivos Gerais

- Estudar os fundamentos matemáticos da teoria de adensamento dos solos.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Demonstrar a formulação matemática da teoria de adensamento de solos desenvolvida por Terzaghi;
- Apresentar as teorias utilizadas para essa formulação matemática.

## 2. METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa é do tipo bibliográfica, ou seja, desenvolvida com a ajuda de materiais já elaborados. Segundo o autor:

A pesquisa bibliográfica é feita a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas, e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta. FONSECA (2002, p. 32).

Para Gil (2007, p. 44), os exemplos mais característicos desse tipo de pesquisa são sobre investigações, sobre ideologias ou aquelas que se propõem à análise das diversas posições acerca de um problema.

Dessa forma, foi realizada a busca dos principais assuntos sobre o tema apresentado, em artigos, livros, revistas e publicações, para adquirir o maior conhecimento possível para a realização do projeto. Após o estudo sobre o assunto, foi feita a elaboração do trabalho.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE CÁLCULO

Neste capítulo serão abordados todos os conceitos de cálculo necessários para o entendimento da dedução da teoria do adensamento de solo elaborada por Terzaghi.

##### 3.1.1 Conceito de limite

Diz-se que o *limite* de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é igual a  $L$ , e denota-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , quando  $f(x)$  se torna tão próximo de  $L$  quanto se queira, desde que se tome  $x$  suficientemente próximo, porém diferente, de  $a$ .

Outras notações para limite são:  $f(x) \rightarrow L$  quando  $x \rightarrow a$ , a qual se lê “ $f(x)$  tende a  $L$  quando  $x$  tende a  $a$ ”.

Além disso, tem-se a noção de *limites laterais*. Diz-se que o *limite* de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  *pela esquerda* é  $L$  quando  $f(x)$  se torna tão próximo de  $L$  quanto se queira, desde que se tome  $x$  suficientemente próximo de  $a$ , porém com  $x < a$ . De forma análoga, se define *limite lateral pela direita*, trocando  $x < a$  por  $x > a$ .

Mostra-se que o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  existe se, e somente se, os limites laterais de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  existem e são iguais. Neste caso, tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , onde  $L$  é o valor comum dos limites laterais de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$ .

##### 3.1.2 Derivadas

A *derivada* de uma função  $f(x)$  em um ponto  $x = a$  é a taxa de variação instantânea da função neste ponto ou a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Se a derivada de  $f(x)$  existe em todos os pontos do domínio de  $f$ , então dizemos que  $f$  é *derivável* e sua derivada é denotada por  $f'(x)$ . Outras notações tradicionais para derivada são:

$$y', \frac{dy}{dx}, D_x f, f_x, \text{ etc.}$$

A derivada de uma função potência se resolve da seguinte maneira: se  $n$  é uma constante em  $R$  (conjunto dos números reais) e  $f(x) = x^n$ , então sua derivada é,

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ ou } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

A regra da soma para derivadas é da seguinte maneira: se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis então,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

A regra da diferença é,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x).$$

A regra do produto é,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)].$$

A regra do quociente é,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}.$$

### 3.1.2.1 Regra da cadeia

Considere duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  deriváveis, tais que a imagem da função  $g(x)$  está contida no domínio da função  $f(x)$ , de forma que fica bem definida a função  $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ . Então a função  $f \circ g$  será derivável em  $x$  e, além disso, sua derivada será,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Combinando a regra da potência com a regra da cadeia, para  $n$  número real e  $u = f(x)$  derivável, tem-se

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}.$$

### 3.1.3 Primitivas

Uma função  $F$  é primitiva ou anti-derivada de  $f$  no intervalo  $I$ , se a sua derivada for igual a  $f(x)$  para todo  $x$  em  $I$ , ou seja,

$$F'(x) = f(x).$$

De uma forma mais geral a primitiva de  $f(x)$  será  $F(x) + C$ , no qual  $C$  é uma constante qualquer no conjunto dos números reais.

### 3.1.4 Teorema fundamental do cálculo

PARTE 1: Se uma função  $f$  for contínua em um intervalo  $[a, b]$ , então a função  $F$  definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b$$

é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$  e  $F'(x) = f(x)$

PARTE 2: Se uma função  $f$  for contínua em um intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde  $F$  é qualquer *primitiva* de  $f$ , isto é, uma função tal que  $F' = f$ .

### 3.1.5 Séries de Fourier

Fourier teve a ideia de representar uma função periódica através de uma soma de várias senóides.

#### 3.1.5.1 Funções periódicas

Quando os valores de  $f(x)$  se repetem para períodos determinados de  $x$ , é obtido valores repetidos na função  $f$ . Tem-se como exemplo as funções  $\sin x$ ,  $\tan x$ , entre outros.

#### 3.1.5.2 Coeficientes de Fourier

Se uma função  $f(x)$  é expressa como

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

os seus coeficientes podem ser obtidos pelas expressões a seguir,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0,$$

onde  $n \in \mathbb{Z}$  (conjunto dos números inteiros).

## 3.2 CONCEITOS BÁSICOS SOBRE MECÂNICA DOS SOLOS

Nesse capítulo serão abordados todos os conceitos básicos sobre mecânica dos solos necessários para o entendimento de todo o processo da dedução da teoria do adensamento de solo feita por Terzaghi.

### 3.2.1 Índice de vazios

É a relação entre o volume de vazios e o volume dos sólidos, indicando a variação do volume do solo ao longo do tempo, sua expressão é a seguinte:

$$e = \frac{V_V}{V_S}$$

onde  $e$  é o índice de vazios,  $V_V$  é o volume dos vazios e  $V_S$  é o volume do solo.

O índice de vazios é uma grandeza adimensional, não pode ser calculado diretamente e pode ser calculado através de outros índices.

### 3.2.2 Porosidade

É a relação entre o volume de vazios e o volume total da amostra, ele é calculado pela expressão:

$$\eta = \frac{V_V}{V_T}$$

onde  $\eta$  é a porosidade e  $V_T$  o volume total.

A porosidade é expressa geralmente em porcentagem, e o seu intervalo de variação é, geralmente, entre 30% e 70%. Não pode ser determinado, apenas calculado.

### 3.2.3 Relação matemática do índice de vazios com a porosidade.

Utilizando a expressão da porosidade e dividindo, ambos os lados da equação, pelo volume dos sólidos teremos,

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{V_S} &= \frac{V_V}{V_T V_S} \\ \eta &= e \cdot \frac{V_S}{V_T} \end{aligned}$$



$$\eta = \frac{e}{V_T/V_S}$$

sabendo que

$$V_T = V_V + V_S$$

então,

$$\eta = \frac{e}{\frac{V_V + V_S}{V_S}}$$

portanto,

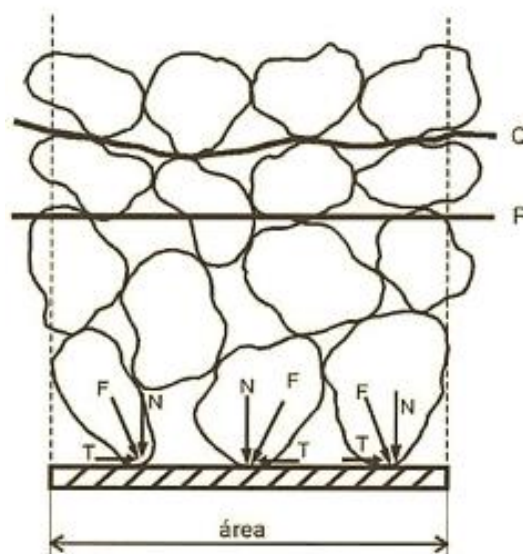
$$\eta = \frac{e}{e + 1}$$

Essa é a correlação matemática entre o índice de vazios e a porosidade.

### 3.2.4 Tensões nos solos

Segundo Pinto (2006), as tensões aplicadas em um solo são transmitidas de partículas a partículas ou suportadas pela água dos vazios. Como a forma de transmissão das tensões de partícula a partícula é muito complexa, no qual a transmissão ocorre apenas nos contatos entre os grãos, ou seja, áreas muito pequenas em relação à área total que está sendo aplicada a tensão, então, é considerado que foi colocado uma placa horizontal no interior do solo e os diversos grãos irão transmitir forças à placa, como mostra a Figura 1:

Figura 1: Esquema de comportamento das tensões no solo.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

Devido às inúmeras forças existentes, faz-se uso do conceito de tensões. *Tensão* é a força resultante sobre a área onde está sendo aplicada. A força resultante tem uma componente perpendicular à superfície, a qual será adotada para definir a *tensão normal*, e uma componente paralela à superfície, a qual será utilizada para definir a *tensão cisalhante*.

A tensão normal é dada pela fórmula

$$\sigma = \frac{\sum N}{A},$$

em que  $\sigma$  é a tensão normal,  $N$  é a força normal e  $A$  a área.

A tensão cisalhante é expressa por

$$\tau = \frac{\sum T}{A}$$

onde  $\tau$  é a tensão cisalhante e  $T$  a força tangencial.

Essas tensões raramente chegam a 1 MPa nos problemas de engenharia, já as que ocorrem entre os contatos reais das partículas podem chegar a 700 MPa.

### 3.2.5 Tensões devido ao peso próprio

Segundo Pinto (2006), as tensões devido ao peso têm valores que não podem ser desconsiderados. Numa superfície horizontal há atuação apenas da tensão normal, já que estatisticamente as componentes das forças tangenciais tendem a se contrapor, logo a resultante irá se anular. Então, para se obter a tensão devido ao próprio peso é utilizada a seguinte equação:

$$\sigma = \frac{\gamma_n \cdot V}{A} = \gamma_n \cdot z$$

onde  $\gamma_n$  é o peso específico natural do solo,  $V$  é o volume total da amostra,  $z$  é a profundidade.

Essa equação vale apenas para solos secos.

Quando o solo é constituído de variados grãos, como por exemplo, areia e pedregulho, a tensão normal é calculada por camada, ou seja, calcula-se a tensão na camada de areia e a tensão na camada de pedregulho, em seguida, é feito o somatório das tensões.

### 3.2.6 Tensões efetivas

De acordo com Pinto (2006), quando se tem um solo abaixo do nível da água, ou seja, um solo submerso, no qual a água no interior dos vazios estará sob uma pressão que depende

apenas da profundidade em relação ao nível da água, essa pressão pode ser encontrada pela seguinte equação:

$$u = z_w \cdot \gamma_w$$

onde  $u$  é a pressão da água,  $z_w$  é a profundidade com relação ao nível da água e  $\gamma_w$  é o peso específico da água.

Dessa forma, Terzaghi constatou que a tensão normal total em um plano qualquer deve ser considerada como a soma de duas parcelas, a primeira parcela é a tensão transmitida pelos contatos entre as partículas, denominada como tensão efetiva, a segunda parcela é a pressão da água, denomina pressão neutra ou poropressão. Assim, Terzaghi estabeleceu o Princípio das Tensões Efetivas, que é expresso em duas partes:

A primeira parte é para solos saturados,

$$\bar{\sigma} = \sigma - u$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão efetiva para solos saturados,  $\sigma$  é a tensão total e  $u$  a pressão neutra.

A segunda parte, “todos os efeitos mensuráveis oriundos da variação do estado de tensões tais como compressão, distorção e variação de resistência ao cisalhamento são devidas exclusivamente à variação do estado de tensões efetivas.” (Pinto, 2006, p. 98)

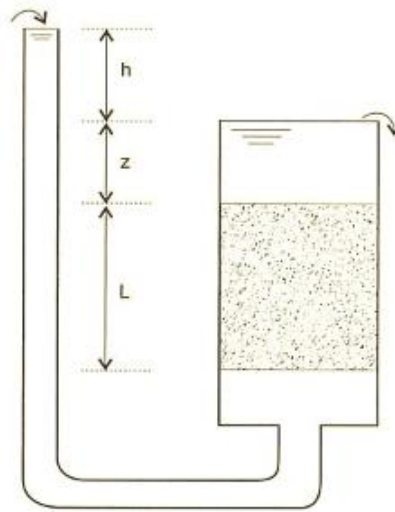
### 3.2.7 Permeabilidade

Segundo Caputo (1988), a permeabilidade é uma das propriedades do solo que permite o escoamento da água através dele, quantitativamente expresso pelo coeficiente de permeabilidade que é determinado através da lei de Darcy. O conhecimento a respeito dessa propriedade é de suma importância para a engenharia nas áreas de drenagem, rebaixamento do nível d'água, recalques, entre outros.

#### 3.2.7.1 Lei de Darcy

Segundo Miranda (2004), no ano de 1856, Henry Darcy trabalhava em meios granulares não consolidados e sugeriu que, para um fluxo horizontal de um fluido monofásico que está em uma amostra com meio poroso, com comprimento  $L$  e seção reta de área  $A$ , como mostra a Figura 2:

Figura 2: Água percolando num permeâmetro.



FONTE: adaptado de PINTO (2006).

Então sua vazão é dada por:

$$Q = -\frac{kA}{\mu} \frac{\Delta P}{L}$$

onde  $\Delta P$  é a diferença de pressão aplicada na amostra ( $h$ ),  $\mu$  é a viscosidade do fluido e  $k$  é a permeabilidade absoluta do meio poroso.

A mesma pode ser escrita em forma diferencial:

$$u = \frac{Q}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}$$

onde  $u$  é a velocidade superficial do fluxo e o sinal negativo quer dizer que a pressão diminui na direção do fluxo.

Dessa forma, é possível afirmar que para as duas equações a vazão é proporcional à permeabilidade, quando se tem geometria igual, diferença de pressão igual e condições do fluido iguais.

Uma simplificação para a Lei de Darcy, segundo Pinto (2006) é da forma:

$$Q = kiA,$$

onde  $i$  é dado por

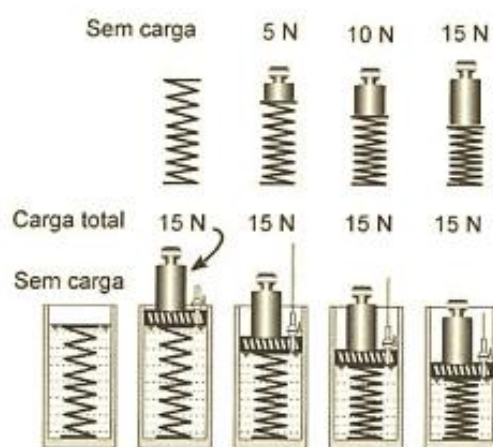
$$i = \frac{h}{L},$$

no qual  $i$  é o gradiente hidráulico e  $h$  a carga que se dissipa na percolação ou a variação de pressão.

### 3.2.8 Adensamento

O *adensamento* é um fenômeno que ocorre em solos saturados de baixa permeabilidade, no qual a água é expulsa ao longo do tempo devido às tensões que estão atuando sobre ele, ocorrendo uma redução no índice de vazios, ocasionando um recalque. A Figura 3 mostra uma analogia mecânica para o processo de adensamento.

Figura 3: Analogia mecânica do processo de adensamento feita por Terzaghi.



FONTE: Adaptado de PINTO (2006).

Segundo Pinto (2006), a analogia mecânica feita por Terzaghi explica muito bem como funciona esse fenômeno. Consiste em utilizar um pistão com uma mola acoplada e água no seu interior como mostra a Figura 3, no qual representaria o solo saturado, nesse mesmo pistão tem um orifício de dimensão pequena que representa a permeabilidade do solo. Inicialmente, é aplicada uma tensão constante que será suportada pela água que após alguns segundos sairá pelo orifício, num instante qualquer a mola estará deformada devido à saída da água, logo a carga total não estará mais sendo suportada apenas pela água mas pela mola também, o processo continua até que apenas a mola suporte a carga total.

### 3.2.9 Recalque

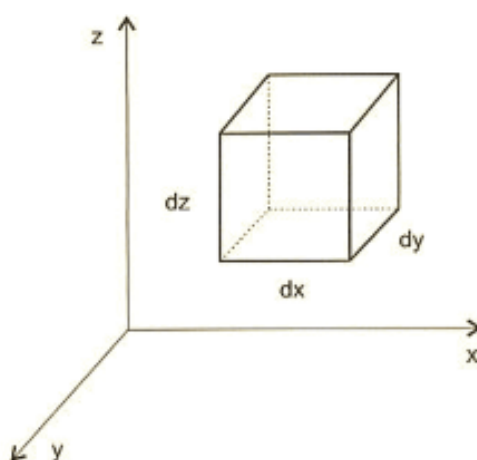
*Recalque* é o rebaixamento de uma estrutura em relação ao seu nível original e pode ser causado por vários fatores. É um fenômeno no qual há variação dos índices de vazios, e também pode ocorrer em apenas uma parte da edificação, ocasionando na inclinação do mesmo. Tem-se, como exemplo, a Torre de Pisa. Outros problemas decorrentes do recalque é o surgimento de uma variedade de esforços estruturais não previstos, rachaduras, trincas e até mesmo levando a ruína.

Na engenharia civil, usa-se este termo para estruturas que causam o adensamento do solo.

### 3.3 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE FLUXOS TRIDIMENSIONAIS

Segundo Pinto (2006), considerando um elemento de solo com dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , no qual há um fluxo tridimensional passando por ele e seja  $h$  uma carga total no seu centro, como mostra a Figura 4:

Figura 4: Elemento infinitesimal de solo.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

É possível calcular o seu fluxo tridimensional, decompondo ele nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em seguida considerando a somatória dos três. Também é necessário considerar que o coeficiente de permeabilidade é diferente nas três direções.

Lembrando que o gradiente hidráulico é definido pela relação:

$$i = \frac{h}{L}.$$

Tem-se que gradiente na direção  $x$  é,

$$i_x = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Como o gradiente varia na direção  $x$ , então

$$\frac{\partial(i_x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Logo, o gradiente hidráulico na face de entrada é dado por

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{-dx}{2} \right).$$

Aplicando a lei de Darcy, tem-se que a vazão nessa face de entrada é,

$$q_E = k_x \left[ \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{2} \right) \right] dydz$$

Da mesma forma para a vazão de saída tem-se:

$$q_S = k_x \left[ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \frac{dx}{2} \right) \right] dydz$$

A diferença das duas vazões será,

$$q_S - q_E = k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx dy dz$$

Da mesma forma para as outras direções serão,

$$q_S - q_E = k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dx dy dz$$

$$q_S - q_E = k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz$$

Como o fluxo de água que entra no elemento é o igual ao que sai no mesmo intervalo de tempo, então a soma da diferença de vazões em todas as direções será nula. Dessa forma,

$$\left( k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz = 0.$$

Se  $dx dy dz$  não for nulo e desconsiderando o fluxo na direção  $y$ , tem-se um fluxo bidimensional, logo,

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Para um solo isotrópico, tem-se  $k_x = k_z$ , então a equação fica da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Essa é a equação de Laplace, no qual quer dizer que as linhas equipotenciais são interceptadas perpendicularmente pelas linhas de fluxo.

### 3.4 CÁLCULO DOS RECALQUES PELA COMPRESSIBILIDADE EDOMÉTRICA

Para o cálculo dos recalques pela compressibilidade edométrica ou unidimensional, Pinto (2006, p. 189) diz o seguinte,

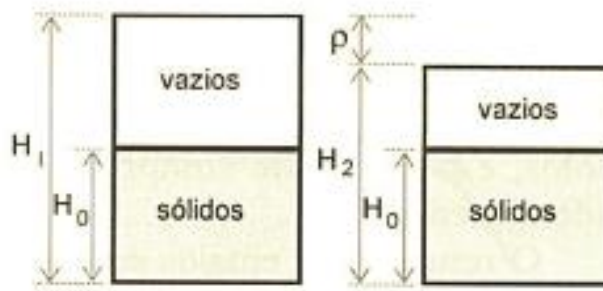
A previsão do recalque, neste caso, corresponde à aplicação de uma simples proporcionalidade: se um certo carregamento ( $\Delta\sigma_v$ ) provoca um determinado

recalque  $p$  no corpo de prova, este carregamento provocará na camada deformável do terreno um recalque tantas vezes maior quanto maior a espessura da camada. O recalque específico ou deformação, relação entre recalque e espessura da camada, é constante.

Dessa forma, tem-se que para um certo carregamento, um corpo de prova de uma determinada altura sofre um certo recalque, e logo em seguida, for pego uma camada maior desse corpo de prova, ou seja, uma altura maior, o recalque aumentará de forma proporcional à altura.

O cálculo de recalque é expresso pela variação do índice de vazios, considerando um solo de altura  $H_1$  e depois de um carregamento ficou com altura final  $H_2$ , logo seu índice de vazios diminuiu de  $e_1$  para  $e_2$ , permanecendo constante a altura equivalente às partículas sólidas ( $H_0$ ), como mostra a Figura 5:

Figura 5: As fases do solo separadas em volumes antes e depois de uma redução no índice de vazios.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

Então as alturas antes e depois do carregamento podem ser expressas como:

$$H_1 = H_0 \cdot (1 + e_1) \quad (1)$$

$$H_2 = H_0 \cdot (1 + e_2) \quad (2)$$

Isolando  $H_0$  na equação (1),

$$H_0 = \frac{H_1}{1 + e_1}$$

e substituindo o resultado na equação (2),

$$H_2 = H_1 \cdot \frac{1 + e_2}{1 + e_1}$$

Tem-se que o recalque ( $p$ ) é a diferença entre as alturas  $H_1$  e  $H_2$ , logo

$$p = H_1 \cdot \frac{1 + e_1 - 1 - e_2}{1 + e_1}$$

$$p = H_1 \cdot \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1}$$



A deformação é a relação do alongamento (recalque) com o comprimento inicial ( $H_1$ ), portanto a deformação será

$$\varepsilon = \frac{p}{H_1} = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1} \quad (3)$$

### 3.5 TEORIA DO ADENSAMENTO DE TERZAGHI

Terzaghi utilizou as seguintes hipóteses para a dedução de sua teoria:

- 1) O solo é totalmente saturado.
- 2) A compressão é unidimensional.
- 3) O fluxo d'água é unidimensional.
- 4) O solo é homogêneo.
- 5) As partículas sólidas e a água são praticamente incompressíveis perante a compressibilidade do solo.
- 6) O solo pode ser estudado como elementos infinitesimais, apesar de ser constituído de partículas e vazios.
- 7) O fluxo é governado pela Lei de Darcy.
- 8) As propriedades do solo não variam no processo de adensamento.
- 9) O índice de vazios varia linearmente com o aumento da tensão efetiva durante o processo de adensamento.

A hipótese (8) não é perfeitamente aceitável, já que as propriedades do solo variam quando sofre adensamento, como exemplo a permeabilidade diminui de acordo com a redução do índice de vazios.

A hipótese (9) também não é perfeitamente aceitável, pois o índice de vazios não varia linearmente com o aumento da tensão efetiva, essa hipótese foi proposta para permitir a solução matemática do problema, já que sem ela a solução é muito complexa.

#### 3.5.1 Grau de adensamento

De acordo com Pinto (2006), o grau de adensamento é a relação entre a deformação ( $\varepsilon$ ) que ocorre em um elemento, numa determinada posição, caracterizada pela profundidade, num determinado tempo com a deformação desse elemento depois do adensamento ( $\varepsilon_f$ ):

$$U_z = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}$$

onde  $U_z$  é o grau de adensamento.

Utilizando a equação (3), tem-se que a deformação final devida ao acréscimo de tensão será:

$$\varepsilon_f = \frac{e_1 - e_2}{1 + e_1}$$

e num instante  $t$  qualquer, o índice de vazios será  $e$ , e a deformação ocorrida até esse instante será:

$$\varepsilon = \frac{e_1 - e}{1 + e_1}$$

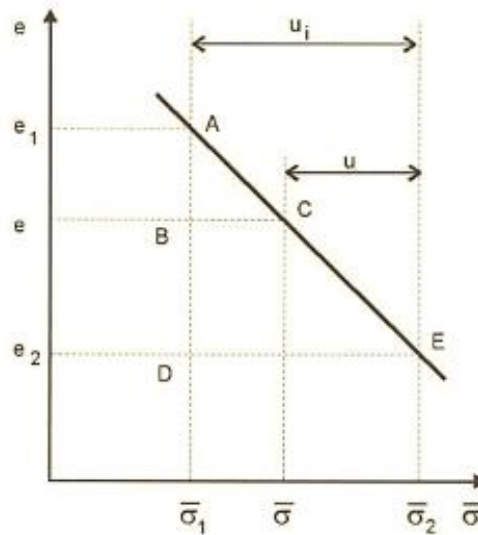
Dessa forma, tem-se o grau de adensamento,

$$U_z = \frac{e_1 - e}{e_1 - e_2}$$

Logo o grau de adensamento é a relação entre a variação do índice de vazios até um determinado tempo com a variação total do índice de vazios devido ao carregamento.

Considerando agora a hipótese que o índice de vazios varia linearmente com as tensões efetivas, como na Figura 6:

Figura 6: Variação linear do índice de vazios com a tensão efetiva.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

Por semelhança dos triângulos ABC e ADE é possível obter a seguinte relação:

$$U_z = \frac{e_1 - e}{e_1 - e_2} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1}$$

Dessa forma, o grau de adensamento é equivalente ao grau de acréscimo de tensão efetiva.

É possível expressar o grau de adensamento em função das pressões neutras, observando a Figura 6, tem-se,

$$\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1 = u_i$$

No instante  $t$ ,

$$\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma} = u$$

Logo,

$$u_i - u = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_1$$

Então o grau de adensamento ficará,

$$U_z = \frac{u_i - u}{u_i}$$

Dessa forma o grau de adensamento é igual ao grau de dissipação da pressão neutra.

### 3.5.2 Coeficiente de compressibilidade

De acordo com Pinto (2006), admitindo-se a variação linear entre as tensões efetivas e os índices de vazios, é possível definir a inclinação da reta como um coeficiente indicador da compressibilidade do solo ( $a_v$ ), definido por:

$$a_v = \frac{e_1 - e_2}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1} = -\frac{e_2 - e_1}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1} = -\frac{de}{d\bar{\sigma}}$$

Como a variação de tensão efetiva corresponde a uma variação de pressão neutra de igual valor, mas sentido contrário, então,

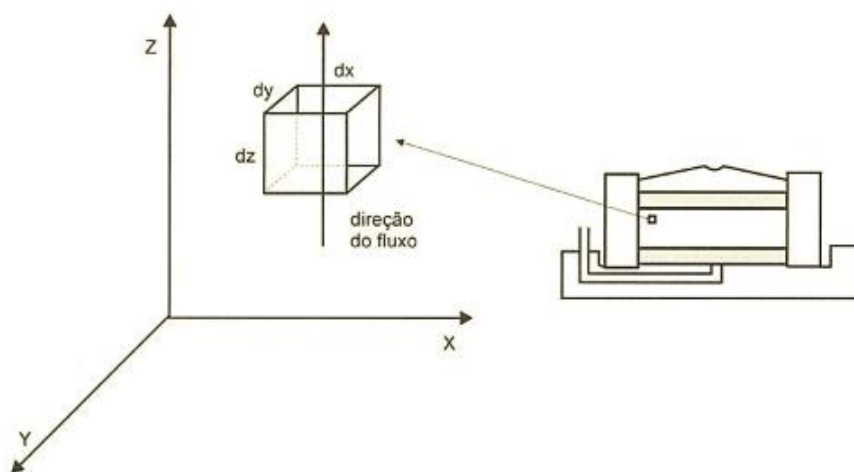
$$a_v = \frac{de}{du}$$

### 3.5.3 Dedução da teoria

Segundo Pinto (2006) essa teoria determina para qualquer instante e qualquer posição da camada que está sofrendo adensamento, o seu grau de adensamento, ou seja, as deformações, os índice de vazios, as tensões efetivas e as pressões neutras.

Considerando um elemento de solo que está sofrendo adensamento como mostra a Figura 7:

Figura 7: Fluxo através de um elemento de solo.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

Lembrando que a equação do fluxo tridimensional para um solo saturado, sem a variação do índice de vazios, é dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left( k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dx dy dz = 0.$$

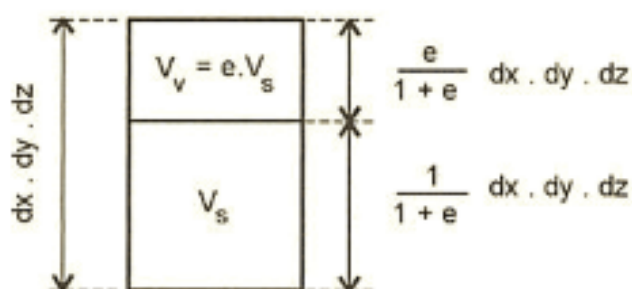
De acordo com a Figura 7, é possível perceber que o fluxo só ocorre na direção vertical e a quantidade de água que sai é maior do que a que entra, ou seja, a variação do volume não será nula, então,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz. \quad (4)$$

A *variação de volume do solo* é a variação de seus índices de vazios, já que foi considerando que as partículas sólidas e a água são praticamente incompressíveis perante a estrutura sólida.

A Figura 8 mostra a relação entre o volume dos sólidos e o volume dos vazios.

Figura 8: Esquema de relação entre os volumes dos sólidos e vazios.



Fonte: Adaptado de PINTO (2006).

O *índice de vazios* é a relação do volume de vazios com o volume dos sólidos:

$$e = \frac{V_V}{V_S}.$$

Adicionando a expressão

$$V_S - V_S$$

no segundo termo da equação acima, tem-se,

$$e = \frac{V_V + V_S - V_S}{V_S}$$

$$e = \frac{V_T - V_S}{V_S}$$

$$e = \frac{V_T}{V_S} - 1$$

$$e + 1 = \frac{V_T}{V_S}$$

$$V_S = \frac{V_T}{1 + e}$$

Substituindo  $V_T$  por  $dx dy dz$ , tem-se a relação volume dos sólidos com o índice de vazios,

$$V_S = \frac{1}{1 + e} \cdot dx dy dz$$

Lembrando-se da correlação matemática entre o índice de vazios e a porosidade,

$$\eta = \frac{e}{e + 1}$$

Sabendo que a porosidade é a relação entre o volume de vazios e o volume total, tem-se,

$$V_V = \frac{e}{1 + e} \cdot V_T$$

Substituindo  $V_T$  por  $dx dy dz$ , tem-se a relação volume de vazios com o índice de vazios,

$$V_V = \frac{e}{1 + e} \cdot dx dy dz$$

Como o volume total é a soma do volume de vazios com o volume dos sólidos,

$$V_T = \frac{1}{1 + e} \cdot dx dy dz + \frac{e}{1 + e} \cdot dx dy dz$$

Logo,

$$V_T = \frac{1 + e}{1 + e} \cdot dx dy dz$$

Como no adensamento é o volume de vazios que irá sofrer variação com o tempo, então se tem a seguinte expressão:

$$\frac{\partial V_V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e}{1+e} \cdot dx dy dz \right),$$

em que a expressão  $\frac{dx dy dz}{1+e}$  não varia, já que ela é o volume do sólido. Portanto,

$$\frac{\partial V_V}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \frac{dx dy dz}{1+e}$$

Igualando essa expressão com a equação (4) é obtido à seguinte formula:

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \frac{dx dy dz}{1+e}$$

Simplificando os fatores em comum,

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\partial e}{\partial t} \cdot \frac{1}{1+e} \quad (5)$$

Lembrando que o coeficiente de compressibilidade é,

$$a_v = \frac{de}{du}$$

E a pressão da água é dada por,

$$u = z \cdot \gamma$$

No qual  $z$  é a profundidade, logo será a carga  $h$ . Então,

$$u = h \cdot \gamma$$

Agora substituindo o coeficiente de compressibilidade e a pressão da água na equação (5), é obtido

$$\frac{k}{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_v \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{1}{1+e}$$

portanto,

$$\frac{k(1+e)}{a_v \cdot \gamma} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Essa é a equação diferencial do adensamento.

O coeficiente do primeiro membro é denominado coeficiente de adensamento ( $c_v$ ), apresenta características de permeabilidade, porosidade, e compressibilidade. O que leva ele a ser uma constante do solo, segundo a hipótese (8), então,

$$c_v = \frac{k(1+e)}{a_v \cdot \gamma}$$

Logo a equação diferencial do adensamento será,

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (6)$$

Essa equação indica a variação da pressão ao longo da profundidade, através do tempo. Como já foi visto, a variação da pressão neutra é a indicação da variação das deformações.

A equação (6), segundo CAPUTO (1988), se refere à analogia termodinâmica do adensamento, no estudo da transmissão do calor através de uma placa de material isótropo, de espessura  $2H$  (pois a distância das faces até o centro equivale a  $H$ , logo sua espessura é de  $2H$ ) e temperatura uniforme, com faces laterais isoladas e colocadas rapidamente num meio de temperatura mais baixa. Dessa forma, fazem-se as seguintes relações, o excesso de pressão hidrostática corresponde à temperatura, o coeficiente de permeabilidade ao coeficiente de condutibilidade térmica, o coeficiente de adensamento ao coeficiente de propagação da temperatura.

Para a resolução da equação (6) é necessário atender as condições de contorno, que são:

1ª) Para  $z = 0$  tem-se  $u = 0$ .

2ª) Para  $z = 2H$  tem-se  $u = 0$ .

3ª) Para  $t_0 = 0$  tem-se  $u = p_0$ .

Como  $u$  depende da profundidade e do tempo, tem-se

$$u = f(z)\varphi(t) \quad (7)$$

derivando  $u$  com relação a  $z$  duas vezes e com relação a  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(z)\varphi(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(z)\varphi'(t)$$

substituindo as derivadas na equação (6),

$$c_V f''(z)\varphi(t) = f(z)\varphi'(t)$$

$$\frac{f''(z)}{f(z)} = \frac{\varphi'(t)}{c_V \varphi(t)}$$

Elas deverão ter um valor constante de  $-A^2$ , então

$$f''(z) = -A^2 f(z) \quad (8)$$

$$\varphi'(t) = -A^2 c_V \varphi(t) \quad (9)$$

Essas duas equações são diferenciais ordinárias, lineares, com coeficientes constantes e homogêneas, respectivamente, de 2ª e 1ª ordem.

A equação característica de (8),

$$s^2 = -A^2$$

$$s = \pm Ai$$

onde  $i$  é o símbolo da unidade imaginária.

A integral geral será,

$$f(z) = C_1 e^{Aiz} + C_2 e^{-Aiz}$$

onde  $e$  é a exponencial.

Usando a relação matemática

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

é possível escrever a integral geral da seguinte forma:

$$f(z) = C_1(\cos Az + i \sin Az) + C_2(\cos Az - i \sin Az)$$

$$f(z) = (C_1 + C_2) \cos Az + i(C_1 - C_2) \sin Az$$

considerando  $C_1 + C_2 = C_3$  e  $i(C_1 - C_2) = C_4$ , tem-se

$$f(z) = C_3 \cos Az + C_4 \sin Az$$

onde  $C_3$  e  $C_4$  são constantes arbitrárias.

A equação característica de (9),

$$s = -A^2 c_V$$

A integral geral será,

$$\varphi(t) = C_5 e^{-A^2 c_V t}$$

onde  $C_5$  é uma constante arbitrária

Substituindo os valores de  $f(z)$  e  $\varphi(t)$  na equação (7), tem-se:

$$u = (C_3 \cos Az + C_4 \sin Az) C_5 e^{-A^2 c_V t}$$

considerando  $C_3 C_5 = C_6$  e  $C_4 C_5 = C_7$  e substituindo,

$$u = (C_6 \cos Az + C_7 \sin Az) e^{-A^2 c_V t}$$

onde  $C_6$  e  $C_7$  são constantes arbitrárias que devem ser determinadas de acordo com as condições limites.

Pela primeira condição limite ( $z = 0, u = 0$ ) tem-se,

$$C_6 = 0$$

então,

$$u = C_7 (\sin Az) e^{-A^2 c_V t}$$

Pela segunda condição limite ( $z = 2H, u = 0$ ) tem-se,

$$\sin 2AH = 0$$

logo,

$$2AH = n\pi$$



$$A = n \frac{\pi}{2H}$$

onde  $n$  é um número inteiro.

Dessa forma,

$$u = C_7 \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_V t} \quad (10)$$

Como  $C_7$  é uma constante arbitrária e  $n$  pode assumir qualquer valor inteiro, então podemos escrever

$$C_7 = \sum_1^{\infty} b_n,$$

onde os termos  $b_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , precisam ser determinados. Substituindo na expressão (10), a função  $u$  passa a ser descrita pela seguinte série:

$$u = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_V t}. \quad (11)$$

Pela terceira condição limite ( $t_0 = 0$ ,  $u = p_0$ ) tem-se:

$$p_0 = \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H}$$

que é um caso de série de Fourier, em senos, no qual os coeficientes podem ser facilmente expressos pela equação:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0;$$

logo,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{H} \int_0^{2H} p_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} dz \\ b_n &= \frac{2p_0}{n\pi} \left( -\cos \frac{n\pi \cdot 2H}{2H} \right) - \frac{2p_0}{n\pi} \left( -\cos \frac{n\pi \cdot 0}{2H} \right) \\ b_n &= \frac{2p_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

substituindo em (11),

$$u = \sum_1^{\infty} \frac{2p_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \left( \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} \right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{4H^2} c_V t}$$

fazendo:

$$\frac{c_V t}{H^2} = T$$

onde  $T$  é o fator tempo e é adimensional, no qual correlaciona os tempos de recalque às características do solo, através do  $c_v$ , e às condições de drenagem do solo, através do  $H$ . Então,

$$u = \sum_1^{\infty} \frac{2p_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \left( \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{2H} \right) e^{-\frac{1}{4}n^2\pi^2 T}$$

Na expressão  $1 - \cos n\pi$ , quando  $n$  é par, ela tende a zero e quando  $n$  é ímpar, ela tende para 2, logo

$$n = 2N + 1$$

com  $N$  variando de 0 a  $\infty$ .

Substituindo, tem-se

$$u = \frac{4p_0}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{1}{2N + 1} \left( \operatorname{sen} \frac{(2N + 1)\pi z}{2H} \right) e^{-\frac{1}{4}(2N+1)^2\pi^2 T}$$

Considerando,

$$M = \frac{(2N + 1)\pi}{2}$$

e substituindo,

$$u = \sum_0^{\infty} \frac{2p_0}{M} \left( \operatorname{sen} \frac{Mz}{H} \right) e^{-M^2 T}$$

O grau de adensamento  $U_z$ , na profundidade  $z$  e num tempo  $t$ , é definido pela relação:

$$U_z = \frac{p_0 - u}{p_0} = \left( 1 - \frac{u}{p_0} \right).$$

Como

$$\frac{u}{p_0} = \sum_0^{\infty} \frac{2}{M} \left( \operatorname{sen} \frac{Mz}{H} \right) e^{-M^2 T}$$

então,

$$U_z = 1 - \sum_0^{\infty} \frac{2}{M} \left( \operatorname{sen} \frac{Mz}{H} \right) e^{-M^2 T}$$

Essa é a equação do grau de adensamento ao longo da profundidade, já que a pressão neutra não se dissipa uniformemente ao longo de toda a profundidade, o que leva ao desenvolvimento de deformações. E quanto mais próximo um elemento fica das faces de drenagem, mais rápido as pressões neutras se dissipam.

#### **4. CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O solo é um material muito utilizado na área da engenharia civil e pelo motivo de ser o local que a estrutura será construída, é necessário observá-lo, analisá-lo e corrigir os possíveis defeitos que o mesmo apresentará, logo existem diversas soluções para os mais variados problemas.

Um dos problemas é quando o solo possui muitos vazios preenchidos por água e ao ser submetido forças sobre ele, que no caso seria os pesos das construções e máquinas que irão passar por cima, esse solo passa a sofrer uma variação no volume total, já que a água começará a sair após a aplicação das forças, ocasionando o recalque que danifica as estruturas, formando rachaduras, inclinações, tensões não previstas nos elementos estruturais.

Como solução do problema há a teoria do adensamento feita por Terzaghi, que mostra o grau de adensamento do solo, fazendo possível tornar o solo resistente para suportar a estrutura que vai ser construída.

Esse trabalho trouxe todas as teorias básicas para entender a dedução matemática do grau de adensamento feito por Terzaghi, mostrando todo o conhecimento necessário para um bom entendimento dessa teoria.

## REFERÊNCIAS

- CAPUTO, H. P. **Mecânica dos solos e suas aplicações**. 6. ed. vol. 1. Rio de Janeiro: editora LTC, 1988.
- CAVALCANTE, E. H. **Mecânica dos solos II**. Sergipe: Editora da UFSE, 2006.
- DOMINONI, C. M. B. **Análise de estabilidade e compressibilidade de um aterro sobre solo mole no porto de Suape, região metropolitana do Recife**. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2011.
- FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas (Coleção Matemática Universitária)**. IMPA, 2012.
- GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- LIMA, E. L. **Análise Real volume 1. Funções de uma variável (Coleção Matemática Universitária)**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- MADEMANN, V. L. Q. **Sequências de funções: convergências pontual e uniforme**. Florianópolis: Editora da UFSC 2007.
- MIRANDA, H. C. B. de. **Interpretação conjunta de dados de gpr e medidas de permeabilidade sobre um análogo de reservatório siliciclástico falhado na bacia de tucano, NE. do brasil**. Rio Grande do Norte: Editora da UFRN, 2004.
- PINTO, C. de S. **Curso básico de mecânica dos solos**. 3. ed. São Paulo: Oficina de textos, 2006.
- RODRIGUES, N. L. **Comparação entre os ensaios de adensamento realizados em equipamento convencional e em equipamento de DSS em argila mole**. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 2014.
- STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. **Fourier analysis an introduction**. Princeton University Press, 2007.
- THOMAS, G. B. **Cálculo**. 11. ed. vol. 2. São Paulo: Addison Wesley, 2009.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais, Vol. 1**. Editora Makrom Books do Brasil, 2003.