



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

JUAN CARLOS SOARES DE OLIVEIRA

ANÁLISE E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ÓRBITA DE
TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PELO MÉTODO DE EULER

PAU DOS FERROS/RN

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS
BACHARELADO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

JUAN CARLOS SOARES DE OLIVEIRA

ANÁLISE E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ÓRBITA DE
TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PELO MÉTODO DE EULER

Monografia apresentada a Universidade
Federal Rural do Semi-árido - UFERSA,
Campus Pau dos Ferros para a obtenção
do título de Bacharel em Ciência e Tecno-
logia.

Orientador: Prof. Me. Marco Diego Aurélio Mesquita
Coorientador: Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS

PAU DOS FERROS/RN

2018

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

048a Oliveira, Juan Carlos Soares de.
ANÁLISE E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ÓRBITA DE
TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PELO MÉTODO DE EULER /
Juan Carlos Soares de Oliveira. - 2018.
43 f. : il.

Orientador: Marco Diego Aurélio Mesquita.
Coorientador: Francisco Ernandes Matos Costa.
Monografia (graduação) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e
Tecnologia, 2018.

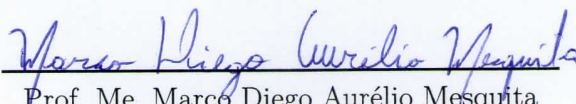
1. Simulações. 2. Transferência de Hohmann. I.
Mesquita, Marco Diego Aurélio, orient. II. Costa,
Francisco Ernandes Matos, co-orient. III. Título.

JUAN CARLOS SOARES DE OLIVEIRA

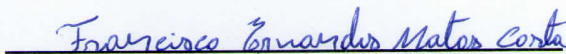
ANÁLISE E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DE ÓRBITA DE
TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN PELO MÉTODO DE EULER

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-árido - UFERSA, Campus Pau dos Ferros para a obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

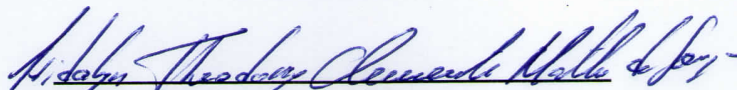
Trabalho aprovado em Pau dos Ferros/RN, 14 de Setembro de 2018:



Prof. Me. Marco Diego Aurélio Mesquita
Orientador



Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa
Coorientador



Prof. Dr. Hidilyn Theodory C. M. Souza
Professor Avaliador

Pau dos Ferros/RN
2018

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, cabe os agradecimentos aos meus orientadores Prof. Marco Diego Aurélio Mesquita e Prof. Francisco Ernandes Matos Costa, cujos votos de confiança depositados foram o incentivo constante para a concretização deste trabalho.

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional e paciência pelas decisões tomadas por mim durante o período de produção deste trabalho.

Por fim, deixo os agradecimentos a todos aqueles que contribuíram diretamente ou indiretamente a tornar essa obra possível.

RESUMO

Nesta monografia faz-se um estudo sobre os princípios básicos da Mecânica Celeste, utilizando conceitos da física Newtoniana. Apresenta-se uma abordagem introdutória sobre manobras de transferência orbital, com ênfase no método de Transferência de Hohmann. O método de Hohmann é uma técnica bastante simples, utilizada em situações de transferência de órbita onde se deseja otimizar o consumo de combustível de um veículo espacial. O método consiste na aplicação de dois impulsos, gerando uma órbita elíptica, onde se deseja alterar o raio desta órbita para outro de raio definido. O sistema de equações é resolvido analiticamente quando considerado a interação de somente 2 corpos, para 3 ou mais corpos as equações são resolvidas numericamente. É realizado simulações computacionais utilizando o método numérico de Euler para resolução das equações de trajetória do corpo de forma dinâmica. As simulações estão descritas em 5 cenários distintos, onde cada cenário é configurado para demonstrar as principais etapas de transferência de Hohmann e os efeitos de perturbações na órbita. Os resultados são apresentados através de gráficos obtidos para análise.

Palavras-chaves: Simulações. Transferência de Hohmann. Método de Euler.

ABSTRACT

In this monograph a study is made on the basic principles of Celestial Mechanics, using concepts of Newtonian physics. An introductory approach is presented on orbital transfer maneuvers, with emphasis on the Hohmann Transfer method. The Hohmann method is a rather simple technique, used in orbit transfer situations where it is desired to optimize the fuel consumption of a spacecraft. The method consists in the application of two pulses, generating an elliptical orbit, where it is desired to change the radius of this orbit to another of defined radius. The system of equations is solved analytically when considering the interaction of only 2 bodies, for 3 or more bodies the equations are solved numerically. Computational simulations are performed using the numerical method of Euler to solve the equations of trajectory of the body dynamically. The simulations are described in 5 different scenarios, where each scenario is configured to demonstrate the main steps of Hohmann transfer and the effects of perturbations in the orbit. The results are presented through graphs obtained for analysis.

Key-words: Simulation. Hohmann Transfer. Method of Euler.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração da 2ª Lei de Kepler.	15
Figura 2 – Representação de uma elipse com a indicação dos focos e dos semi-eixos.	17
Figura 3 – Representação da transferência de órbita de Hohmann.	19
Figura 4 – Ilustração das 3 etapas na transferência de órbita de Hohmann.	20
Figura 5 – Demonstração das órbitas menor e maior.	28
Figura 6 – Imagem obtida pelo simulador.	29
Figura 7 – Imagem obtida do simulador - Órbita Geoestacionária (sem in- fluência da Lua).	31
Figura 8 – Distância em função do tempo para uma órbita geoestacionária (sem influência da Lua).	31
Figura 9 – Distância em função do tempo para uma órbita Geoestacionária, com erros de arredondamento explícitos (sem influência da Lua).	32
Figura 10 – Imagem obtida do simulador - Órbita Geoestacionária (com in- fluência da Lua).	33
Figura 11 – Distância em função do tempo para uma órbita Geoestacionária (com influência da Lua).	33
Figura 12 – Imagem da transferência de órbita de Hohmann obtida na simu- lação (sem influência da Lua).	34
Figura 13 – Primeira manobra (ΔV_1) da transferência de órbita de Hohmann (sem influência da Lua).	35
Figura 14 – Imagem obtida do simulador - Segundo impulso da transferência de órbita de Hohmann (sem influência da Lua).	36
Figura 15 – Órbita de transferência de Hohmann com primeiro e segundo im- pulso (sem influência da Lua).	37
Figura 16 – Imagem obtida pelo simulador - Transferência de Hohmann com inserção na órbita lunar.	38
Figura 17 – Distância Foguete-Terra em função do tempo.	38
Figura 18 – Distância Foguete-Lua em função do tempo.	39

Lista de tabelas

Tabela 1 – Informações da Terra.	26
Tabela 2 – Informações da Lua.	27
Tabela 3 – Informações do veículo espacial.	27
Tabela 4 – Informações da manobra.	39

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OBJETIVOS	13
2.1	OBJETIVO GERAL	13
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	13
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
3.1	MECÂNICA CELESTE	14
3.1.1	Movimento orbital	16
3.1.2	Transferência de Hohmann	18
3.2	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	22
3.2.1	Método numérico de Euler	23
3.2.1.1	Aplicação na física	23
3.2.2	Linguagem de programação Java	24
3.2.3	<i>Processing 3</i>	25
4	METODOLOGIA	26
4.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS DE SIMULAÇÃO	26
4.2	SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL	28
4.2.1	Cálculo e processamento	28
4.2.2	Interface gráfica	28
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	30
5.1	SIMULAÇÃO DE ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA (SEM A LUA)	30
5.2	SIMULAÇÃO DE ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA (COM A LUA)	32
5.3	TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN - PRIMEIRO IMPULSO (SEM INFLUÊNCIA DA LUA)	34
5.4	TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN - SEGUNDO IMPULSO (SEM INFLUÊNCIA DA LUA)	35
5.5	EXPERIMENTO DE INSERÇÃO EM ÓRBITA LUNAR	37
6	CONCLUSÃO	40
6.1	TRABALHOS FUTUROS	41
	REFERÊNCIAS	42

1 INTRODUÇÃO

Os fenômenos astronômicos geraram um fascínio no homem, e talvez, tenha sido a fonte das primeiras investigações da ciência. A partir de observações que data desde os tempos remotos da humanidade, a curiosidade humana sobre esses fenômenos desempenhou papel importante que motivou a busca do seu entendimento causal. A simples contemplação desses fenômenos foi se tornando uma necessidade de registrar toda experiência vivida em interpretações do funcionamento da natureza do mundo.

Sociedades pré-históricas começaram a registrar os fenômenos celestes e expressavam isso através de compreensões distintas do mundo que os cercava. Algumas sociedades atribuíam aos eventos astronômicos o resultado de manifestações mitológicas, outras compreendiam que tais ocorrências podiam fornecer uma melhor compreensão do Cosmos, termo utilizado para referir a tudo que contempla o funcionamento do universo.

Com o passar de grandes períodos históricos, importantes nomes foram estabelecendo fundamentos da natureza celeste, em diversas partes do mundo, como na Antiga Grécia, China e Pérsia. Estudiosos como Aristóteles, Eudoxo de Cnido que definiu o ano solar de aproximadamente 365 dias; Eratóstenes que conseguia definir a circunferência da Terra. Do século IV a.C ao II a.C. foi o período da Física Aristotélica, onde começava a surgir conceitos do movimento natural dos corpos, trajetórias orbitais e as primeiras concepções sobre a gravidade (CHERMAN; MENDONÇA, 2010).

No fim da Idade Média, século XIV ao XVI, época do Renascimento, foi o momento do surgimento de grandes nomes como Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1643-1727), dentre muitos outros que ajudaram a fundar as bases da Mecânica Clássica. Cientistas que colaboraram com a compreensão científica e dos mecanismos básicos presentes nos fenômenos físicos relacionados à Cinemática, Gravitação Universal, estudo das Forças e Energia. Esse entendimento clássico estabeleceu os conceitos fundamentais da Mecânica Celeste.

Além dos empenhos aplicados aos estudos da Astronomia, despertou-se um desejo que transcendia os limites da capacidade humana: a exploração espacial. Um sonho que vinha sendo almejado por muitos séculos, incentivou uma cultura de obras literárias de ficções que endossavam esse fascínio pela viagem espacial. No entanto, era algo bastante complexo de se realizar (VERNE, 1865; WELLS, 1901; KUBRICK; CLARKE, 1965).

As primeiras pesquisas modernas sobre foguetes surgiam, fomentando o anseio pela viagem espacial (SHEARER, 2008; TEITEL, 2015). Até a metade do século

XX, os foguetes se tornam armas de destruição durante a Segunda Guerra Mundial. Após esse período, surge a Guerra Fria, que impulsionou a Corrida Espacial. O sonho dos voos espaciais tripulados se tornava realidade, surge a primeira missão espacial tripulada, na União Soviética, a missão *Vostok I*, que tinha como tripulante Yuri Gagarin. Os Estados Unidos também desenvolvem suas próprias missões, nasce então o Programa Apollo, que levou o homem à Lua (SHEARER, 2008).

A exploração espacial traz consigo as técnicas de navegação espacial, onde se precisa considerar a realização de procedimentos e manobras necessários para execução bem sucedida de uma missão. As manobras são esforços que um veículo espacial precisa realizar para alterar sua rota de navegação. As características presentes nesses veículos, como consumo de combustível, limitam a quantidade de manobras que podem ser realizadas durante seu percurso, reduzindo o alcance de navegação.

A transferência de órbita é uma das manobras possíveis na execução do processo da navegação espacial, onde se precisa transferir a trajetória orbital de um corpo para outra órbita com raio definido. Entretanto, a redução do consumo de combustível numa missão reforça a pesquisa no desenvolvimento de técnicas sobre otimização de transferências de órbitas, onde se deseja o menor ΔV (variação de velocidade total).

Uma solução para otimização das manobras de transferências foi proposta por Hohmann (1925), que desenvolvem um método baseado numa órbita elíptica, denominado como órbita de transferência de Hohmann. O método tem uma execução bi-impulsiva, isto é, são realizados dois impulsos durante a órbita de transferência nos *apsides*, pontos mais extremos de sua órbita.

Existem outras abordagens e métodos de otimização de transferência que são recorrentes na pesquisa espacial. Hoelker e Silber (1961) desenvolveram um método bi-elíptico, propondo uma solução para órbitas que o método de Hohmann não se mostrava eficiente. Ela é tri-impulsiva e se mostrou mais lenta em comparação ao método de Hohmann.

Scheel e Conway (1994) desenvolveram uma proposta que tenta otimizar para o mínimo de tempo as transferências orbitais por baixa propulsão, que apresentam transferências de órbitas terrestre baixa (*low Earth orbit* - LEO) para uma órbita geostacionária (*geosynchronous orbit* - GEO), depois para uma órbita de raio especificado.

A modelagem de equações que definem a trajetória das órbitas recorre a uma análise da composição de considerações existentes nessas equações, isto é, características da trajetória definida, se ela é uma órbita circular ou elíptica, sua inclinação e outros parâmetros. Tais considerações definem o nível de complexidade de uma órbita, baseado em parâmetros que as vezes não são controláveis e influenciam na precisão de uma manobra.

Essas equações são modeladas em equações diferenciais e existem considerações que influenciam na sua complexidade, como imperfeições dos corpos e perturbações gravitacionais. A quantidade de corpos a serem analisados também estabelece o tipo de problema; situações onde um corpo de massa menor segue uma trajetória em torno de corpo de massa maior definem um Problema de 2 corpos. Quando considerado mais influências gravitacionais de terceiros, o problema analisado possa ser a de N corpos.

O problema de 2 corpos apresenta uma solução analítica, no entanto, para problemas de N corpos suas equações diferenciais não podem ser resolvidas pelo método analítico. A solução destas equações diferenciais, portanto, são somente resolvidas por métodos numéricos.

As soluções por métodos numéricos, em contraste às soluções analíticas que trabalham no domínio contínuo, operam no domínio discreto (FRANCO, 2006). Um dos primeiros métodos numéricos utilizados, e o mais simples, para solução numérica é o método de Euler. Posteriormente, surgiram outros métodos mais sofisticados e precisos como Runge-Kutta (RUNGE, 1895; MARTIN, 1901) ou Adams-Bashforth (BASHFORTH; ADAMS, 1883), onde cada método traz implicações no grau de precisão de sua solução (BUTCHER, 2016, p. 142).

Esta monografia tem o propósito de apresentar um estudo dos princípios básicos de otimização necessária para transferência de órbitas, com ênfase ao método de Hohmann. Os conceitos serão abordados com viés prático às simulações computacionais, utilizando o método numérico de Euler para execução do motor de simulação.

No cap. 2 serão revisados os princípios da Mecânica Celeste delimitada aos conceitos da Mecânica Clássica, Leis de Kepler e a teoria da Gravitação Universal Clássica e a definição de uma órbita; características e fundamentos que fundamentaram o desenvolvimento método de transferência de Hohmann. No cap. 3, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados para desenvolver este trabalho. No cap. 4 apresenta-se os principais resultados obtidos neste estudo. E finalmente, no cap. 5, apresenta-se as principais conclusões obtidas neste estudo, bem como algumas perspectivas de estudos futuros.

2 OBJETIVOS

Esta pesquisa tem como objetivo principal apresentar estudos da Mecânica Clássica na sintetização de equações da Mecânica Celeste aplicadas ao estudo de órbitas planetárias, suas perturbações, considerando o processo de execução de transferência da órbita de Hohmann.

A aplicação desse estudo será apresentada por meio de simulações computacionais, através do método numérico de Euler, utilizando de meios de animações gráficas para tornar acessível a compreensão do comportamento de uma trajetória orbital e imprecisões existentes no seu cálculo numérico.

2.1 OBJETIVO GERAL

- Fazer simulação de transferência de órbita de Hohmann para o sistema Terra-Lua-Foguete.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Realizar simulações computacional, utilizando métodos numéricos;
- Modelar, analisar e simular a órbita de transferência de Hohmann;
- Sintetizar um estudo da física em animação gráfica.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A exploração espacial despertou um fascínio no homem em conquistar novos horizontes além do planeta Terra, em meio a ambições e aspirações científicas que buscasse compreender a mecânica que rege o espaço. Pesquisas espaciais, partindo de experiências observacionais a estudos puramente teóricos, que se empenham em determinar princípios fundamentais da mecânica celeste.

A busca pela exploração espacial trouxe desafios a serem solucionados. A navegação de veículos espaciais é realizada por meios de manobras que efetivam a rota de viagem de uma missão, no entanto, há uma restrição na quantidade de manobras possíveis, devido a fontes de energia limitadas e com custos elevados. Uma das manobras recorrentes de uma missão é a transferência orbital.

O problema da transferência orbital consiste em um problema de fundamental importância no planejamento e concepção de missões espaciais e na mudança de órbitas de veículos. Esse problema tem sido amplamente estudado, mas soluções analíticas completas só foram obtidas essencialmente para órbitas circulares e elípticas (CHOBOTOV, 2002).

A consideração de situações onde a interação de dois corpos fossem perturbadas por influências gravitacionais de outros corpos restringiu que soluções fossem obtidas somente por métodos numéricos, não mais analiticamente. O método de Euler é um dos métodos numéricos mais simples aplicados a situações de tal complexidade.

A utilização de métodos numéricos possibilitou a aplicação da simulação computacional. Ela é uma forma de redemonstrar os fenômenos físicos e fazer experimentos práticos sob ambientes controlados, utilizando o poder do cálculo computacional. No entanto, traz consigo as imprecisões numéricas.

Os fundamentos a serem explorados estarão divididos em seções que falam, de forma sintetizada, da modelagem matemática direcionada estudo da Mecânica Celeste até o método de transferência de Hohmann. Em seguida, uma abordagem sobre o ambiente de simulação computacional.

3.1 MECÂNICA CELESTE

A astronomia é uma das bases que ajudou a fundar um dos grandes campos de estudo da física, a Mecânica Celeste, onde contribuiu a definir princípios físicos dos fenômenos espaciais. Apresentou teorias e leis universais para a compreensão do o dos corpos celestes. Assim, fomentou um histórico de descobertas científicas que estabelecem afirmações consistentes ao desenvolvimento da Física Clássica.

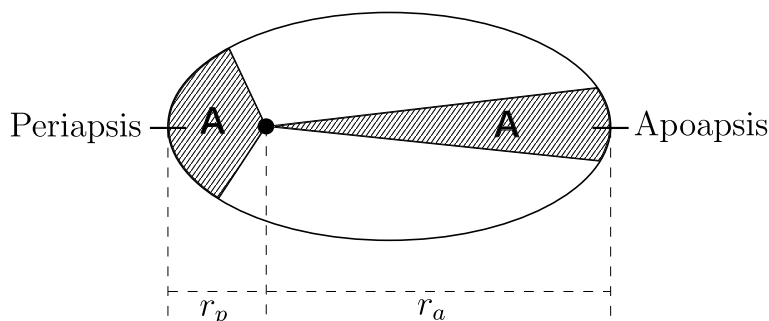
Na Mecânica Clássica, grandes cientistas começaram a definir proposições que fundamentaram todos os conceitos básicos de gravitação e cinemática. Esta que

é a raiz dos primeiros raciocínios sobre entendimento de órbitas planetárias e suas interações, através de enunciados que ajudaram a definir leis fundamentais da física Newtoniana.

Johannes Kepler (1571-1630) apresentou três principais definições sobre a natureza orbital dos corpos celestes. Posteriormente, suas abordagens definiram o que se conhece por suas 3 leis empíricas.

1. Lei das órbitas: planetas se movem ao redor do Sol em órbita elíptica com o Sol localizado em um dos focos da elipse.
2. Lei das áreas: uma linha imaginária conectando Sol até um planeta varre áreas iguais de uma elipse em intervalos de tempos iguais. Na prática, descreve a variação de velocidade de um planeta que orbita o Sol (SINICROPE; BELLITIERE, 2011). Essa lei é uma consequência da conservação de momento angular: a velocidade de um corpo é máxima no seu *Periapsis* (ponto da órbita mais próximo do corpo central) e mínima no seu *Apoapsis* (ponto da órbita mais distante do corpo central) (VERIS, 2017, p. 697), conforme ilustrado na figura 1.

Figura 1 – Ilustração da 2ª Lei de Kepler.



Fonte: Autor

3. Lei Harmônica: O quadrado do período (P) de órbita dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol (a), isto é, $P^2 = Ka^3$, onde K é a constante Kepleriana, que tem o mesmo valor para todos planetas do Sistema Solar.

As leis de Kepler descrevem o movimento dos planetas, mas não explicam porque eles se movimentam dessa forma. A explicação física para o movimento dos planetas foi dada por Isaac Newton (1642-1727), com a formulação da sua teoria de gravitação universal. Ele propôs uma solução para análise orbital de Kepler.

Newton também estabeleceu um conjunto de leis que descrevem o movimento dos corpos.

1. Um corpo em movimento uniforme tende a permanecer em movimento com velocidade constante, a menos que uma força atue sobre o mesmo.
2. A resultante das forças externas que atuam sobre um corpo é dada pela taxa de variação no tempo do momento linear, isto é,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} . \quad (3.1)$$

3. As forças ocorrem aos pares na natureza. A toda ação corresponde uma reação igual e oposta.

Quanto a lei da gravitação universal, percebe-se que essa força é proporcional ao produto das massas dos dois corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Assim,

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} , \quad (3.2)$$

onde: $G = 6.67408(31)10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ é a constante gravitacional; m é a massa do corpo menor; M é a massa do corpo maior; r é a distância entre esses dois corpos.

3.1.1 Movimento orbital

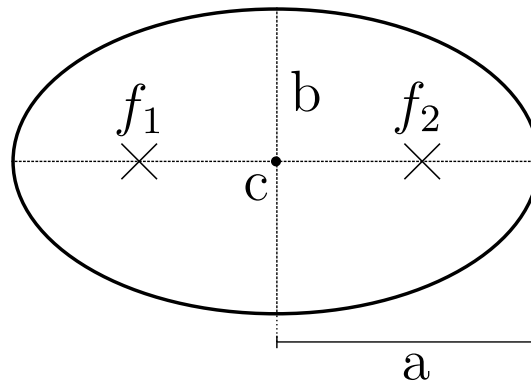
A análise de órbitas de corpos celestes ocupa uma posição de destaque na Mecânica Celeste, pois a partir dela se pode extrair informações que contribuem para descobertas de seus elementos básicos. Segundo Veris (2017, p. 129), a determinação de uma órbita é um processo iterativo destinado a prever a posição e velocidade (ou elementos orbitais) de um objeto espacial, com respeito a um objeto celestial primário, a partir de observações desse objeto.

Veris (2017, p. 129) também ressalta pelo menos alguns métodos utilizados para essa finalidade: o método clássico (determinístico), livre de muitos erros, que considera um número mínimo de medições necessárias para determinar uma órbita; e o segundo é o moderno (estatístico, observacional) que considera medições aferidas com erros, estritamente necessárias para determinação de uma órbita, tendo em vista o seu tratamento matemático para redução de tais erros.

O grau de complexidade na análise de uma órbita está relacionado a quantidade de corpos a serem considerados no espaço de influências gravitacionais e outras perturbações que alterem a trajetória de um corpo. Uma órbita pode estar definida de forma simplificada a partir do problema de 2 corpos, que consiste em um corpo de massa menor orbitando em torno de um corpo de massa maior. Esse tipo de situação normalmente pode ser resolvida analiticamente. Também existem órbitas determinadas por 3 ou até N corpos, quando consiste em uma situação mais complexa de ser analisada e, que somente soluções numéricas podem ser obtidas.

A trajetória de uma órbita, conforme descrita por Kepler em sua primeira lei, apresenta um perfil elíptico (SINICROPE; BELLITTIERE, 2011). Na geometria analítica a elipse é uma representação geométrica de uma seção cônica, conforme mostrado na figura 2. c é o centro da elipse, a é o semi-eixo maior e b o semi-eixo menor.

Figura 2 – Representação de uma elipse com a indicação dos focos e dos semi-eixos.



Fonte: Autor

A excentricidade de uma órbita é dada pela razão entre a distância dos focos da elipse e o comprimento do semi-eixo maior a . (CURTIS, 2005).

$$e = \frac{r_a - r_p}{2a} . \quad (3.3)$$

Szebehely e Mark (2004, p. 62) também demonstram que a excentricidade pode ser escrita como a razão entre a diferença entre *apoapsis* (r_a) e *periapsis* (r_p) e o dobro do semi-eixo maior.

Qualquer órbita cônica pode se transformar em outra órbita cônica a partir de um ajuste de velocidade. Trajetórias circulares podem ser transformadas em elipses, apenas alterando sua excentricidade, e circunferências ou elipses podem ser transformadas em hipérboles por meio do ajuste da velocidade (BROWN, 1998).

O valor da excentricidade também define o perfil geométrico de uma trajetória como:

- Trajetória circular: $e = 0$;
- Trajetória elíptica: $0 < e < 1$;
- Trajetória parabólica: $e = 1$;
- Trajetória hiperbólica: $e > 1$.

O período de uma órbita como deduzido por Curtis (2005, p. 59) e Szebehely e Mark (2004, p. 59), de acordo com a 3ª lei de Kepler é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}, \quad (3.4)$$

onde $a = \frac{r_p + r_a}{2}$.

As manobras orbitais são definidas por meio de variações na velocidade de um corpo (CHOBOTOV, 2002). Para a realização destas variações, os veículos espaciais devem ser submetidos a forças naturais ou provocadas, por exemplo, por propulsores (SANTOS; ROCCO; CARRARA, 2014).

Algumas manobras são estabelecidas para realizar uma transferência orbital, em que esta tem o propósito de alterar as características orbitais até uma aproximação com a órbita objetivo. O uso de acionamentos de motores para tais manobras provoca um consumo de energia que se traduz em altos custos. Existem propostas de solução para esse problema através de métodos de otimização de transferência. Alguns métodos conhecidos são:

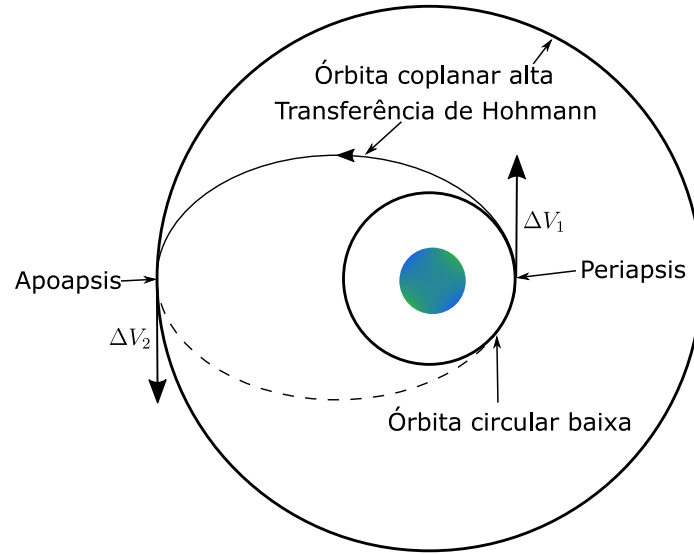
- Transferência de Hohmann: caracterizada por ser bi-impulsiva, isto é, há a aplicação de dois impulsos.
- Transferência de Hoelker e Silber (bí-elíptica): é uma manobra que apresenta menor ΔV em comparação com o de Hohmann, é tri-impulsiva e necessita maior tempo para completá-la (HOELKER; SILBER, 1961).
- *Weak Stability Boundary* (WSB): apresenta um perfil de trajetória mais econômico em relação ao método de Hohmann, pois as variações de velocidades são determinadas por influências gravitacionais (GARCÍA; GÓMEZ, 2006).

3.1.2 Transferência de Hohmann

A órbita de transferência de Hohmann (HOHMANN, 1925) determina que existe uma órbita de transferência elíptica entre duas órbitas de raios distintos. É definida como uma órbita bi-impulsiva, ou seja, é realizada sob dois impulsos ΔV_1 e ΔV_2 nos seus pontos *apsides* (*Periapsis* e *Apoapsis*) da órbita de transferência (CHOBOTOV, 2002; VERIS, 2017).

Para situações onde existem duas órbitas circulares, concêntricas e coplanares, o método pode ser uma manobra bastante conveniente para uso. Assim apresentado como exemplo por (BATE; MUELLER; WHITE, 1971, p. 163): considera-se uma situação onde se deseja fazer uma subida direta para uma órbita de estacionamento de baixa altitude e então realizar uma transferência para uma órbita circular de maior altitude. A elipse de Hohmann logo aparece como uma órbita de transferência que é tangente em ambas órbitas, conforme ilustrado na figura 3.

Figura 3 – Representação da transferência de órbita de Hohmann.



Fonte: Autor

De acordo com a figura 3, Veris (2017, p. 634) também relata que a órbita elíptica segue a transição de duas órbitas circulares, com raios r_1 (baixa altitude) e r_2 (maior altitude), onde um ponto no raio r_1 é verificado como ponto mais próximo do corpo central (*Periapsis*) e um ponto em r_2 apresenta como ponto mais distante (*Apoapsis*). O uso da transferência para uma situação inversa também é válido.

Segundo Hoelker e Silber (1961), sob comparação ao método bi-elíptico em órbitas coplanares, a razão entre os raios na transferência de Hohmann se torna viável até um determinado valor limite, dado por

$$\frac{r_2}{r_1} < 11,94 . \quad (3.5)$$

E para o método bi-elíptico,

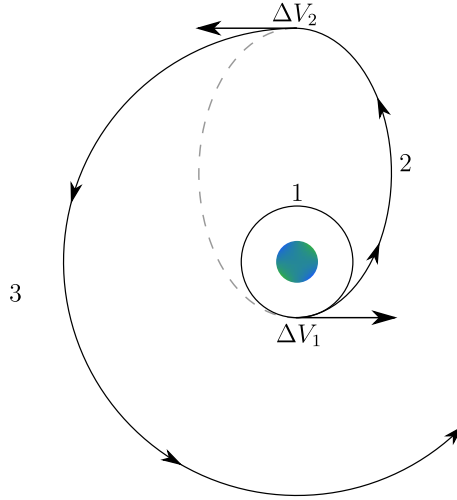
$$\frac{r_2}{r_1} > 15,58 . \quad (3.6)$$

Em síntese, o método de transferência de Hohmann, conforme a figura 4, é executado em 3 etapas básicas:

- Primeira etapa: realização do primeiro impulso (ΔV_1) na órbita menor, no ponto mais próximo do corpo central (*Periapsis*);
- Segunda etapa: a fase de transferência, onde está formada a órbita elíptica de transferência de Hohmann;

- Terceira etapa: estágio de finalização da transferência, onde se aplica o segundo impulso (ΔV_2) para formação da órbita maior.

Figura 4 – Ilustração das 3 etapas na transferência de órbita de Hohmann.



Fonte: Autor

Os impulsos aplicados são deduzidas a partir conceitos já conhecidos da mecânica clássica. Por exemplo, supondo duas órbitas circulares concêntricas coplanares com raio menor r_1 e maior r_2 , conforme a figura 3, onde deseja-se analisar um corpo de massa m com velocidades v_1^- , v_1^+ , v_2^- e v_2^+ , onde v^- é a velocidade antes do ponto da manobra e v^+ é a velocidade depois da manobra. Os acionamentos ΔV_1 e ΔV_2 podem ser deduzidos.

Para determinar v_1^- , considerado uma órbita circular:

$$v_1^- = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}. \quad (3.7)$$

Para determinar v_1^+ , considera-se a conservação de energia mecânica e momento angular. Partindo dos conceitos da conservação de energia mecânica:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_2 \\ \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mGM_T}{r_1} &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mGM_T}{r_2} \\ \frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_T}{r_1} &= \frac{v_2^2}{2} - \frac{GM_T}{r_2} \\ v_1^2 - \frac{2GM_T}{r_1} &= v_2^2 - \frac{2GM_T}{r_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando também a conservação de momento angular:

$$\begin{aligned} r_1 m v_1 &= r_2 m v_2 \\ v_2 &= \frac{r_1}{r_2} v_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo 3.9 em 3.8,

$$v_1^2 - \frac{2GM_T}{r_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}v_1\right)^2 - \frac{2GM_T}{r_2}$$

$$v_1^+ = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1} \left(\frac{2r_2}{r_1 + r_2}\right)}. \quad (3.10)$$

Definindo agora,

$$\Delta V_1 = v_1^+ - v_1^- . \quad (3.11)$$

Segue que,

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) .$$

De forma análoga, para determinar v_2^- da equação (3.8), tem-se então

$$v_2^- = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2} - \frac{2r_1}{r_1 + r_2}} . \quad (3.12)$$

A velocidade após o segundo impulso v_2^+ , seguindo a órbita r_2 é dada por

$$v_2^+ = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} . \quad (3.13)$$

De maneira similar a equação (3.11) é possível escrever

$$\Delta V_2 = v_2^+ - v_2^- . \quad (3.14)$$

Dessa forma,

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) . \quad (3.15)$$

Um foguete tem uma limitação básica quanto a variação de velocidade que pode sofrer em decorrência da quantidade combustível transportada. Nesse sentido, é importante que qualquer manobra tenha sua variação de velocidade total necessária calculada, a fim de se verificar sua viabilidade.

A variação de velocidade total necessária para a manobra completa é a soma das variações de velocidades de cada manobra, isto é,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 . \quad (3.16)$$

Logo:

$$\Delta V = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) . \quad (3.17)$$

Outro parâmetro importante a ser calculada é o tempo necessário para efetuar a transferência de Hohmann.

A partir da equação (3.18), o período de uma órbita completa é dado por

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} . \quad (3.18)$$

Neste caso, o tempo percorrido pela transferência de Hohmann é a metade do período da órbita:

$$T = \frac{P}{2} \rightarrow T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} . \quad (3.19)$$

3.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

O surgimento de problemas matemáticos com maior complexidade incentivou o desenvolvimento de novos métodos de cálculo e novas tecnologias que dessem suporte a busca de suas soluções.

Os métodos numéricos são técnicas que buscam resoluções de equações diferenciais através do domínio discreto. O domínio discreto pode ser entendido como um conjunto dos números representáveis em qualquer máquina é finito, ou seja, não é possível representar em uma máquina todos os números de um dado intervalo $[a, b]$ (FRANCO, 2006).

Franco (2006) também ressalta que métodos numéricos estão sujeitos a imprecisão, tais imprecisões se originam da simplificação do modelo matemático utilizado. Os principais erros presentes em métodos numéricos são:

- Erro de truncamento: troca de uma série infinita por uma finita;
- Erro de arredondamento: devido à própria estrutura da máquina;
- Erro nos dados: dados imprecisos obtidos de experimentos, ou arredondamentos de entrada.

Aplicações computacionais também dispõem de ambiente de desenvolvimento e geração de multimídia. Valores calculados podem ser utilizados como entrada para animações gráficas e geração de gráficos.

O processamento de uma simulação deve ser executada por um ambiente de desenvolvimento que deve dispor, pelo menos, de uma linguagem de programação e, opcionalmente, ferramentas e bibliotecas de rotinas desenvolvidas para essa linguagem. Além das ferramentas, algumas bibliotecas são capazes de gerar automaticamente todo conteúdo multimídia, baseado nos dados processado por um algoritmo.

3.2.1 Método numérico de Euler

O método criado por Leonhard Euler (1707-1783), que leva seu nome, tem como finalidade a resolução de equações diferenciais, que não apresentam soluções analíticas, assim necessitando da abordagem no domínio discreto. Essa técnica também é conhecida como método da reta tangente (BOYCE; DIPRIMA, 2005) ou método explícito de 1-passo (FRANCO, 2006).

A discretização de uma função contínua, que tem um intervalo $[a, b]$, pode ser feita definindo o passo, dividindo o intervalo em um número de passos N , onde $N \geq 2$.

$$h = \frac{b - a}{N} . \quad (3.20)$$

O próximo valor é em função do passo incrementado, isto é,

$$t_{n+1} = t_n + h . \quad (3.21)$$

Considerando o passo uniforme (BOYCE; DIPRIMA, 2005), cada iteração está definida como um incremento nh (n passos) a partir do valor inicial,

$$t_n = t_0 + nh , \quad (3.22)$$

onde o n -ésimo passo deve estar no intervalo $0 \leq n \leq N$.

O valor da próxima iteração da solução será obtido a partir da iteração atual mais o passo e a função atual, conforme a equação a seguir:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) . \quad (3.23)$$

3.2.1.1 Aplicação na física

O método de Euler pode ser representado numa aplicação da cinemática, dentro do contexto linear. Suponha que uma partícula, sob condição inicial (x_0, y_0) , move-se a partir de uma velocidade inicial v_0 . A solução será em função dos incrementos curtos de tempo aplicados a velocidade e posição da partícula Butcher (2016, p. 55).

Considerando a posição como sendo dada por

$$r = f(x, y) , \quad (3.24)$$

e que no instante inicial, tem-se que

$$r(t_0) = r_0 \quad (3.25)$$

$$\text{e } \dot{r}(t_0) = v_0 , \quad (3.26)$$

pode-se calcular

$$\ddot{r}_{n+1} = f(r_n) \quad (3.27)$$

$$\dot{r}_{n+1} = \dot{r}_n + h\ddot{r}_{n+1} \quad (3.28)$$

$$r_{n+1} = r_n + h\dot{r}_{n+1} . \quad (3.29)$$

3.2.2 Linguagem de programação Java

A linguagem de programação Java foi desenvolvida pelo cientista James Gosling e sua equipe de programadores da empresa Sun Microsystems. Atualmente a empresa Oracle é a sua atual proprietária e mantenedora.

Dentre as características principais encontradas na linguagem Java, pode-se citar:

- É uma linguagem que tem como paradigma principal a Orientação a Objetos. Logo, ela dispõe de algumas características comuns nesse paradigma de programação (DEITEL, 2010). Algumas das características são:
 - **Classe:** representa uma abstração de objetos da realidade, isto é, é a junção de características comuns entre instâncias de um modelo representado. Exemplo de classes: pessoa; animal; automóvel.
 - **Subclasse:** traz as mesmas definições da classe, no entanto, a subclasse é uma atribuição a classes que têm suas próprias características, mas, ao mesmo tempo, recebem juntas todas as características de uma classe de nível maior, a superclasse. Exemplo: Cachorro é uma subclasse da superclasse animal; carro é uma subclasse da superclasse automóvel.
 - **Objeto:** É uma instância de uma determinada classe, isto é, é uma representação concreta de características definidas na classe. Exemplo: instância da classe Pessoa pode ser João, Maria etc; instância da classe cachorro (podendo ser subclasse de animal) seria pastor alemão.
 - **Atributo:** é uma característica presente numa dada classe. Exemplo: atributo de pessoa pode ser altura, peso, nome.

- **Método:** define a ação presente numa dada Classe. Exemplo: método de Cachorro seria latir; método de automóvel seria frear.
- **Pacotes:** é um conjunto organizado de várias classes que utilizam um mesmo contexto. Exemplo: pacote empresa pode conter todas classes pertencentes ao contexto da empresa, funcionário, cliente etc.
- É uma linguagem multiplataforma, ou seja, vários sistemas operacionais podem executar a aplicação, mesmo se o código for compilado em outro sistema operacional.

3.2.3 *Processing* 3

O ambiente de desenvolvimento *Processing* criado por Casey Reas e Benjamin Fry, sob licença GPL e LGPL, em sua origem foi criado com o objetivo de facilitar o desenvolvimento de aplicações gráficas. Existe forte influência da plataforma Java e a especificação OpenGL. Atualmente, oferece suporte às linguagens Java, JavaScript e Python. O propósito de criação da biblioteca *Processing* ressalta o uso em aplicações que estão presentes no ensino (REAS; FRY, b) (REAS; FRY, a) e produções artísticas (REAS; FRY, 2004).

A biblioteca *Processing* dispõe de funções que facilitam a criação de elementos gráficos sob o motor de animação que a própria biblioteca fornece. Para produção de animações gráficas, ela dispõe de uma biblioteca núcleo (*Processing core*) para animações gráficas. Dentro do ambiente *Processing* também há outras bibliotecas para interações com dispositivos periféricos.

4 METODOLOGIA

A produção deste trabalho se orienta num estudo introdutório sobre a mecânica celeste e navegação espacial por manobras de transferência de órbita. A abordagem prática se desenvolve com o objetivo de visualizar e experimentar conceitos da mecânica de forma interativa, por meio de simulação computacional.

O estudo introdutório percorre das definições básicas da gravitação de Newton até uma revisão de método de transferência orbital de Hohmann. Esse estudo fundamenta a identificação de um caso de manobra de transferência e contribui à modelagem das equações de trajetórias orbitais, ajudando a definir o percurso orbital percorrido por um corpo celeste, sob influência de outros campos gravitacionais.

A simulação é a etapa de aplicação dos estudos realizados, utilizando do método numérico de Euler para cálculo da posição, velocidade e aceleração dos objetos simulados.

Algumas considerações iniciais são feitas para fornecer os valores iniciais da simulação e delimitar o contexto de aplicação, a fim de manter uma abordagem introdutória sobre temática de transferência orbital de Hohmann.

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS DE SIMULAÇÃO

Nos instantes iniciais é necessário definir as condições que constituirão os cenários das simulações, valores serão já estabelecidos, constantes e órbitas para realização da transferência. Desses valores atribuídos às simulações, foram definidas sob influência de cenários, cujas características se assemelham a realidade, valores que são facilmente consultáveis em bases de dados.

Os cenários se constituem de corpos como: o planeta Terra e o seu satélite natural, a Lua. Um foguete será o elemento essencial de estudo deste trabalho, ele será o atuador principal no processo de transferência orbital.

Nas tabelas 1, 2 e 3, estão informações presentes nos corpos que constituem o ambiente de simulação:

Tabela 1 – Informações da Terra.

Massa [kg]	Raio [km]
$5,9723 \cdot 10^{24}$	6.371

Fonte: (NASA, 2018)

Para fins de simplificação e restrição da aplicação do método de Hohmann, as órbitas pré-definidas foram definidas como circulares, concêntricas e coplanares. Perturbações gravitacionais, efeitos de imperfeições dos corpos, como achatamento da Terra, efeitos aerodinâmicos nas proximidades terrestre foram ignorados.

Tabela 2 – Informações da Lua.

Massa [kg]	Raio [km]	Período orbital [dias]
$7,346 \cdot 10^{22}$	1.736	27,3217

Fonte: (NASA, 2018)

Tabela 3 – Informações do veículo espacial.

Corpo	Massa	Posição inicial
Foguete	$2.97 \cdot 10^6 \text{kg}$	42.164.000m do centro de referência

Fonte: Produzido pelo Autor.

A determinação dos raios de órbita serão definidos conforme o movimento de órbitas circulares, conforme a equação

$$r = \left(\frac{GM_T P^2}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.1)$$

O foguete está inicialmente numa órbita geoestacionária, onde o período orbital é aproximadamente 24 horas.

De acordo com a Transferência de Hohmann, mostrada na figura 3, é preciso estar definido as órbitas menor e maior.

- Órbita menor (r_1): geoestacionária;
- Órbita maior (r_2): órbita lunar.

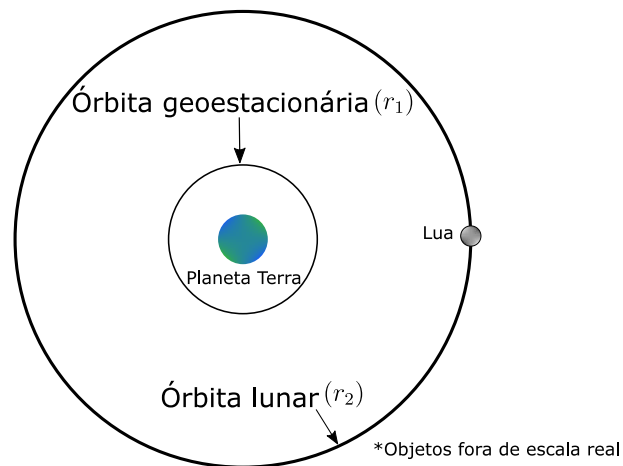
De acordo com os dados já obtidos, calculando os raios:

$$r_1 = 42.240,941\text{km} \quad (4.2)$$

$$\text{e } r_2 = 383.182,267\text{km} . \quad (4.3)$$

Na figura 5 é mostrado o cenário padrão estabelecido em todas simulações.

Figura 5 – Demonstração das órbitas menor e maior.



Fonte: Autor

4.2 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

A simulação computacional aplica o método numérico de Euler para os cálculos de aceleração, velocidade e posição dos elementos orbitais.

Após isso, os dados extraídos são repassados para a biblioteca *Processing*, para animação das interações dos componentes que constituem o cenário, podendo também apresentar gráficos para análise em tempo real.

4.2.1 Cálculo e processamento

As equações determinadas em fundamentos teóricos serviram de base para criação de algoritmos que processassem os resultados obtidos, de acordo com uma precisão máxima estabelecida pelo computador. A partir de uma linguagem de programação, torna-se possível reunir todas as fórmulas e equações em conjunto de rotinas para o desenvolvimento final do software de simulação.

A linguagem Java foi utilizada como ambiente de programação padrão para desenvolvimento das rotinas presentes na simulação. Através do java, que suporta o paradigma de orientação a objetos, os elementos simulados foram modelos base para criação de classes que representassem atributos e comportamentos comuns entre os elementos.

Os gráficos gerados foram produzidos pela biblioteca de código aberto *XChart* da Knowm Inc. para linguagem Java. O intervalo de tempo do estudo foi fixado em 60 dias no ambiente de simulação.

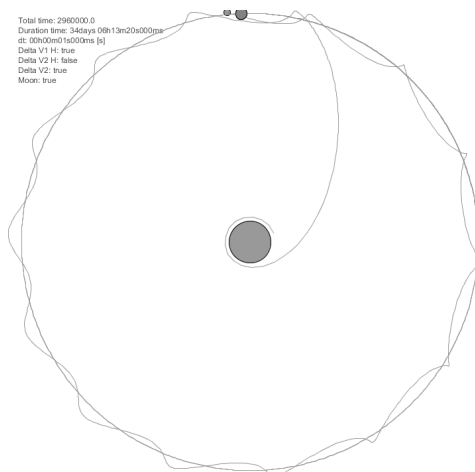
4.2.2 Interface gráfica

A simulação computacional disponibiliza além do poder de processamento das funções matemáticas uma plataforma de desenvolvimento gráfico. Essa inter-

face gráfica será a representação visual das interações entre os elementos simulados, possibilitando a geração de animações dos movimentos orbitais.

A biblioteca *Processing*, através da linguagem Java, foi a plataforma de desenvolvimento utilizada para geração dos elementos gráficos. Ela dispõe de um conjunto de funções de representação de formas geométricas.

Figura 6 – Imagem obtida pelo simulador.



Fonte: Autor

Na figura 6 é representado os elementos que compõem um dos cenários. Em alguns outros espaços da tela aparecem informações sobre o estado atual da simulação.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Baseados nos estudos sobre princípios básicos da Mecânica Celeste à aplicação do método de transferência de órbitas, em especial a transferência de Hohmann, os resultados obtidos são extraídos de cenários definidos com características, cuja estrutura tenta se assemelhar as situações de interação Terra-Lua-Foguete, no entanto, com considerações iniciais simplificadas. Com objetivo de validar o simulador, foram testados 4 casos e um experimento de inserção em órbita lunar foi realizado.

É importante ressaltar que, quando considerada a influência da Lua, a simulação sai da análise do problema de 2 Corpos e passa para o problema de 3 Corpos, tornando a transferência de órbita mais complexa.

Como definido, r_1 é o raio de uma órbita geoestacionária e r_2 é o raio da órbita da Lua em torno da Terra. A razão (3.5) é válida para esse cenário, logo torna-se mais viável aplicar os métodos da transferência de Hohmann, onde

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{383.182,267}{42.240,941} \approx 9,07. \quad (5.1)$$

No primeiro caso de teste, foi verificado se o simulador se comporta de forma adequada para simular uma órbita geo-estacionária, com pequenos desvios de erro computacional. No segundo caso, a presença de um terceiro corpo, a Lua começa a gerar perturbações gravitacionais na relação de órbita foguete-Terra, em comparação com os resultados do primeiro caso. No terceiro caso, o cenário foi preparado para apresentar a primeira manobra da elipse de Hohmann a partir do ponto mais próximo da Terra, o seu perigeu, também conhecido de forma genérica *periapsis*. No quarto cenário, seguindo o estágio prosseguido pelo terceiro cenário, a segunda manobra de Hohmann é aplicada.

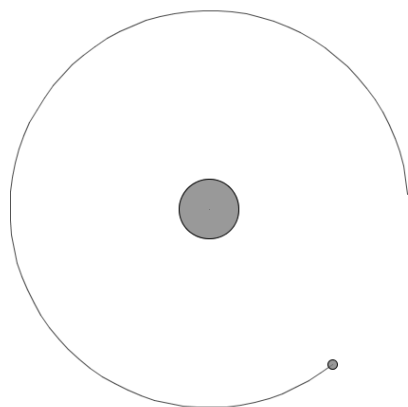
O quinto cenário, dado como experimento a parte, utiliza-se Hohmann como manobra intermediária. O veículo é preparado para inserção de uma órbita em torno da Lua, diferente do método de Hohmann, onde se propõe colocar na órbita lunar em torno da Terra.

5.1 SIMULAÇÃO DE ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA (SEM A LUA)

Baseado no princípio do problema de 2 corpos, a solução poderia ser obtida analiticamente. A figura 7 ilustra a simulação realizada do movimento orbital do foguete em torno da Terra.

Figura 7 – Imagem obtida do simulador - Órbita Geoestacionária (sem influência da Lua).

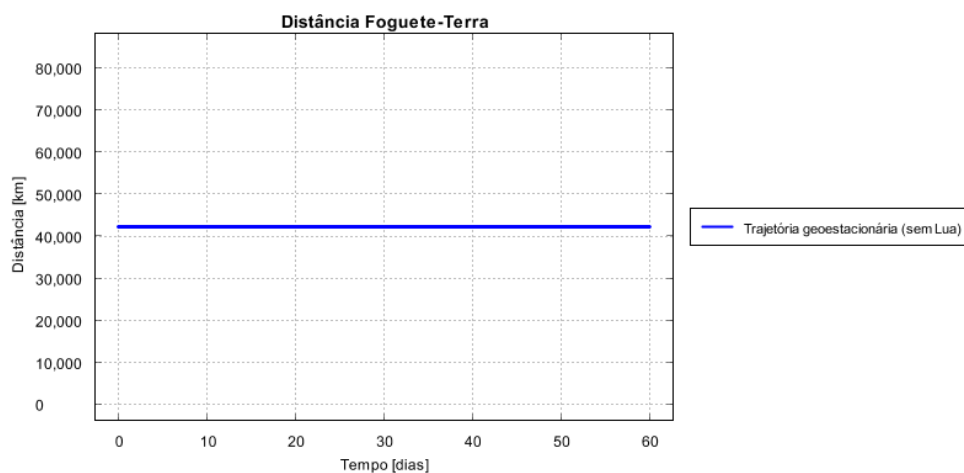
Total time: 73000.0
Duration time: 20h16m40s000ms
dt: 00h00m01s000ms [s]



Fonte: Autor

Nesta simulação as interações consideradas foram unicamente da Terra e o veículo espacial, neste caso, um foguete. Não houve influências gravitacionais que gerassem perturbações na trajetória orbital, conforme mostrado na figura 8.

Figura 8 – Distância em função do tempo para uma órbita geoestacionária (sem influência da Lua).



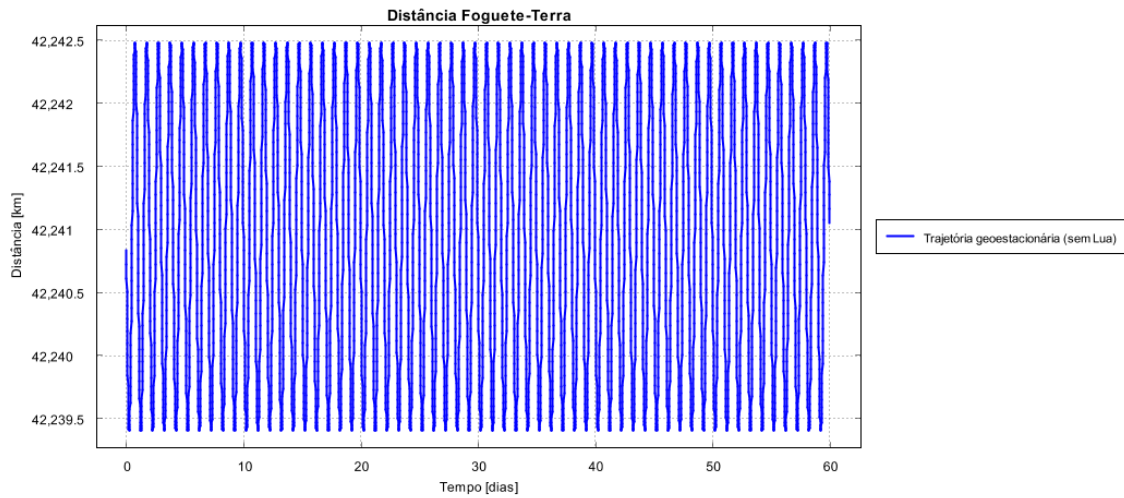
Fonte: Autor

A partir da figura 8, percebe-se que a distância se manteve praticamente constante em relação ao centro da terra. De acordo com a Eq. (4.1), o valor do raio

orbital r_1 foi aproximadamente 42.240km, comprovando a órbita geoestacionária.

Esse cenário é bastante simples, com propósito inicial de demonstrar o seu funcionamento estável. No entanto, conforme a figura 9, ainda apresentou alguns erros provenientes de arredondamento do próprio método numérico. Erros como esse, em escalas astronômicas, podem comprometer a precisão de um manobra espacial, fazendo-se necessário que o veículo execute novas manobras para correção.

Figura 9 – Distância em função do tempo para uma órbita Geoestacionária, com erros de arredondamento explícitos (sem influência da Lua).



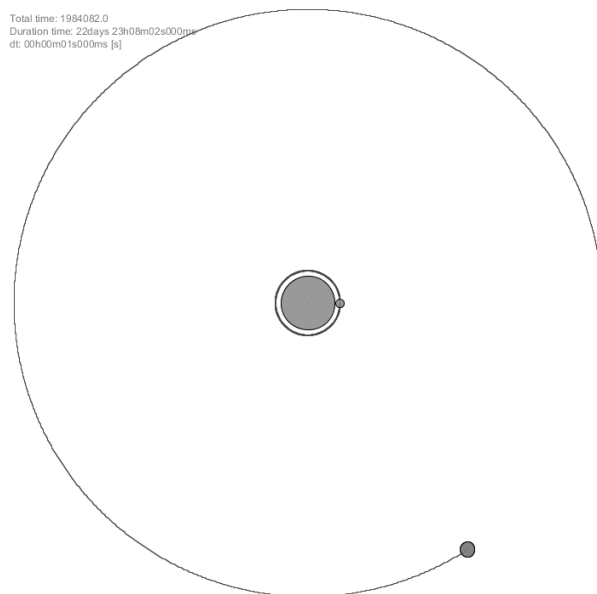
Fonte: Autor

5.2 SIMULAÇÃO DE ÓRBITA GEOESTACIONÁRIA (COM A LUA)

Esta simulação parte da mesma proposta do primeiro cenário criado, onde o veículo espacial está em órbita geoestacionária. No entanto, foi inserido um terceiro corpo, a Lua, cujo objetivo é mostrar a influência gravitacional que um terceiro corpo pode propagar na interação orbital da Terra e o veículo espacial. É o primeiro cenário a ocorrer um problema de 3 corpos, onde seu cálculo de trajetória se obtêm unicamente pelo método numérico.

Nessa simulação desse cenário foi incluído, em animação, apenas o movimento orbital da Lua em torno da Terra, conforme apresentado na figura 10.

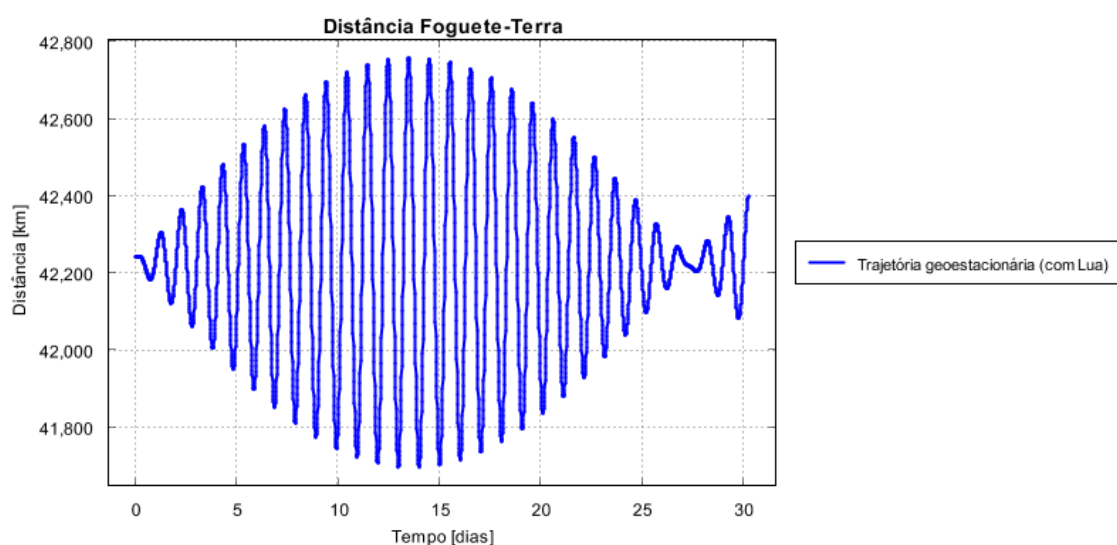
Figura 10 – Imagem obtida do simulador - Órbita Geoestacionária (com influência da Lua).



Fonte: Autor

Conforme mostrado na figura 11, a presença da Lua na simulação gerou perturbações na trajetória órbita. Em comparação com o primeiro cenário, as variações da distância Foguete-Terra ficaram aproximadamente 900 km durante o intervalo de tempo analisado.

Figura 11 – Distância em função do tempo para uma órbita Geoestacionária (com influência da Lua).



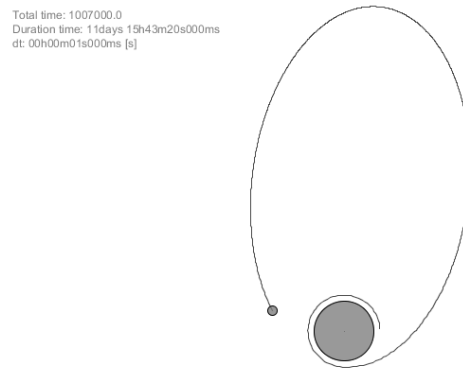
Fonte: Autor

5.3 TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN - PRIMEIRO IMPULSO (SEM INFLUÊNCIA DA LUA)

Neste cenário, partindo da órbita geoestacionária sem influência gravitacional da Lua, conforme já simulado no primeiro cenário, a trajetória orbital se propaga a partir da execução do primeiro impulso da transferência de Hohmann.

A intenção dessa órbita é analisar a formação da elipse de Hohmann proveniente da aplicação do impulso ΔV_1 na manobra de transferência. Conforme ilustrado na figura 12.

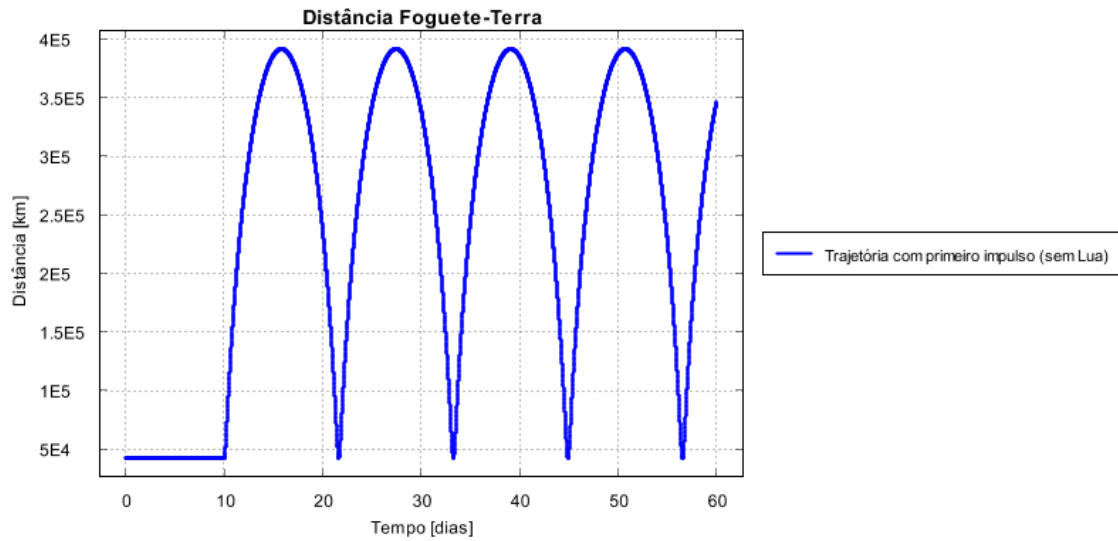
Figura 12 – Imagem da transferência de órbita de Hohmann obtida na simulação (sem influência da Lua).



Fonte: Autor

Considerando agora os valores estabelecidos para G , M_T , calculando os raios r_1 e r_2 para a órbita de translação lunar (Eq. 4.1). Nesse caso, pela Eq. (3.11), obtém-se $\Delta V_1 = 1056.17 \text{ m s}^{-1}$.

Figura 13 – Primeira manobra (ΔV_1) da transferência de órbita de Hohmann (sem influência da Lua).



Fonte: Autor

De acordo com a figura 13, foi determinado arbitrariamente a execução do primeiro impulso de Hohmann no décimo dia na simulação. Após a aplicação do impulso, a elipse é formada, com valores que apresentaram mínimo 42.162 km (no *Periapsis*) e máximo 387.951 km (no *Apoapsis*), que indicam, respectivamente, os valores r_1 (órbita geoestacionária) e r_2 (órbita lunar).

Pode-se calcular também o período orbital, substituindo os valores na Eq. (3.18), que resulta em

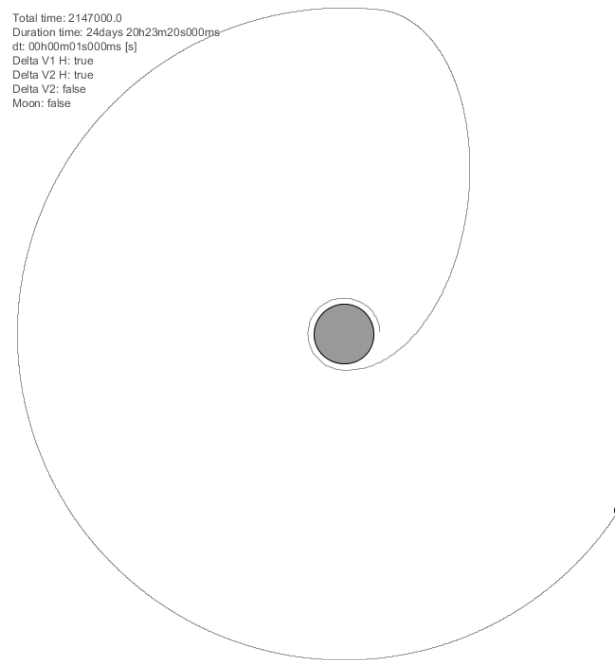
$$P = 992526.74 \text{ s} .$$

Logo, foi necessário 11 dias, 11 horas e 42 minutos para realizar uma órbita completa em torno da elipse. Como pode ver visto pelo tempo simulado, a órbita se manteve razoavelmente estável.

5.4 TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN - SEGUNDO IMPULSO (SEM INFLUÊNCIA DA LUA)

Neste cenário, a simulação agora parte do configuração já proposta no cenário anterior, onde a trajetória se propaga como resultado do conjunto das aplicações do primeiro e segundo impulso de transferência, conforme ilustrado na figura 14.

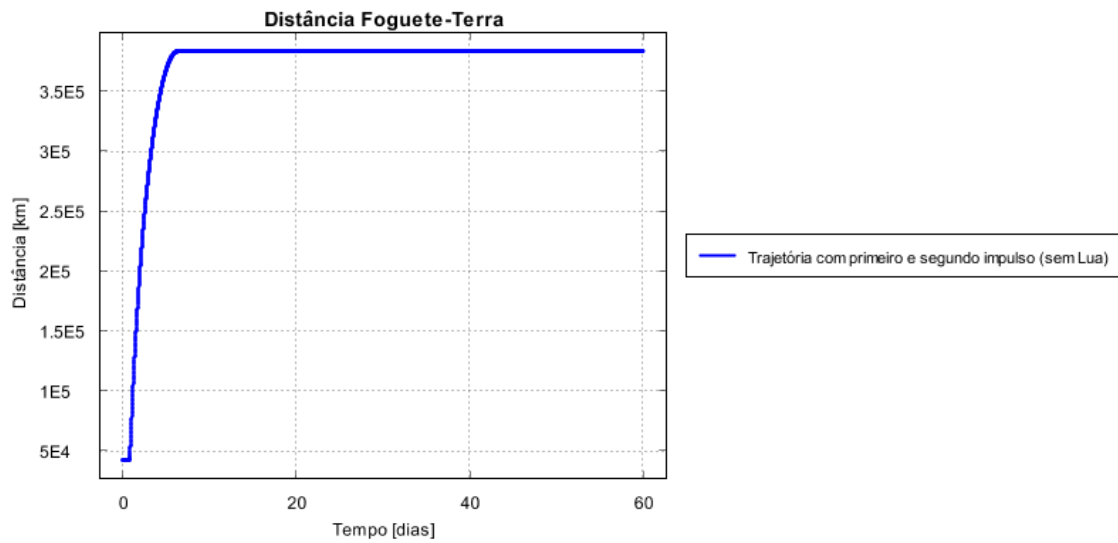
Figura 14 – Imagem obtida do simulador - Segundo impulso da transferência de órbita de Hohmann (sem influência da Lua).



Fonte: Autor

Na Eq. (3.19), obtém-se o tempo necessário para execução da segunda manobra a partir do término do primeiro impulso. Isso também representa o tempo percorrido do *Periapsis* ao *Apoapsis*, de acordo com a Eq. (3.19). Logo, a segunda manobra é efetuada em aproximadamente 488.168,93 segundos (5 dias, 15 horas e 36 minutos) após a primeira manobra.

Figura 15 – Órbita de transferência de Hohmann com primeiro e segundo impulso (sem influência da Lua).



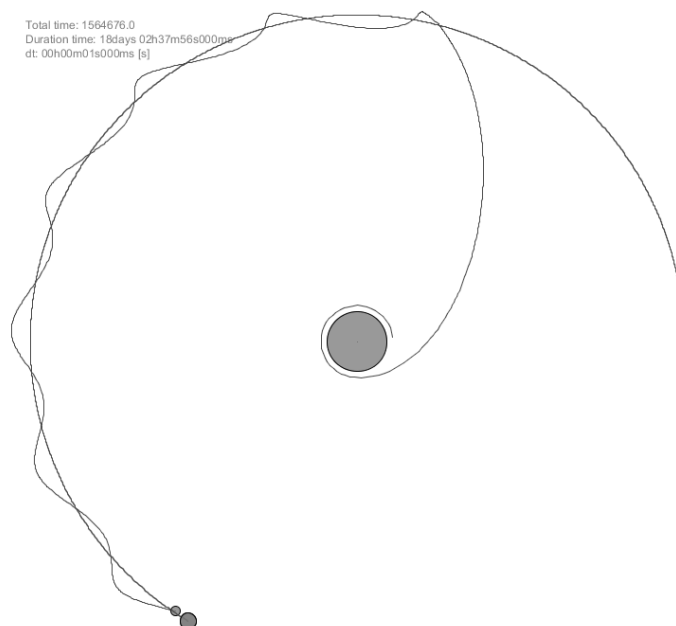
Fonte: Autor

Assim mostrado na fig. 15, o veículo inicia o movimento na órbita de raio geoestacionário, como visto nos cenários anteriores, e forma sua segunda órbita com raio equivalente a órbita de translação lunar em torno da Terra.

5.5 EXPERIMENTO DE INSERÇÃO EM ÓRBITA LUNAR

Esta simulação é um experimento de uso do método de Hohmann como técnica intermediária para órbita em torno de um outro corpo. O propósito agora é fazer uma tentativa de aproximação à Lua, onde se deseja inserir o veículo espacial numa órbita em torno da Lua, conforme ilustrado na figura 16.

Figura 16 – Imagem obtida pelo simulador - Transferência de Hohmann com inserção na órbita lunar.

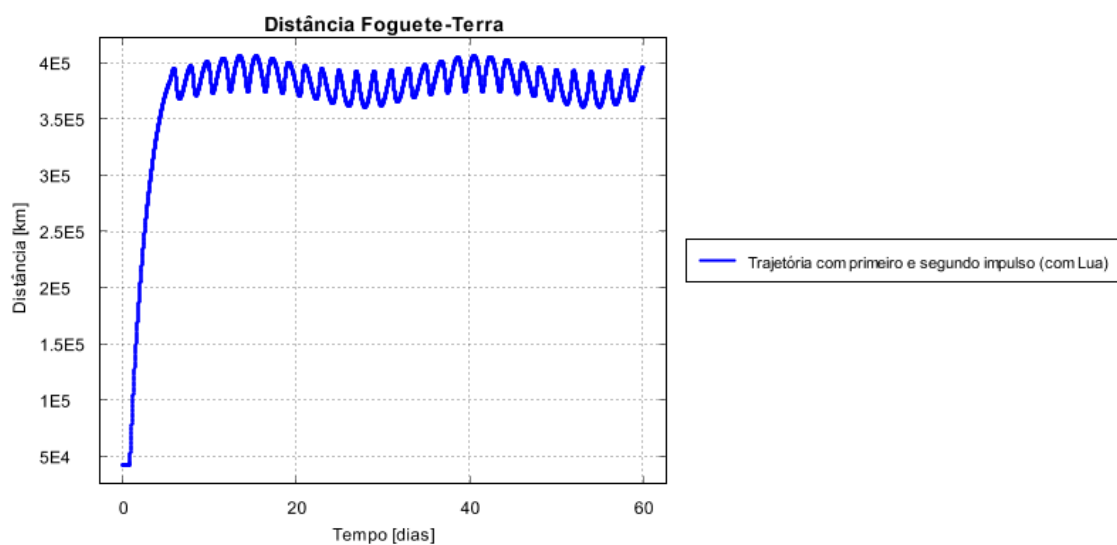


Fonte: Autor

A fase de aproximação tornou-se uma experiência a parte das simulações apresentadas. Os dados dela extraídos contribuem para demonstração de um processo experimental de tentativa de realização de órbita em torno da Lua.

Conforme a figura 16, ela apresenta todos os estágios da missão, através do Processing teve seu trajeto marcado na tela de animação.

Figura 17 – Distância Foguete-Terra em função do tempo.



Fonte: Autor

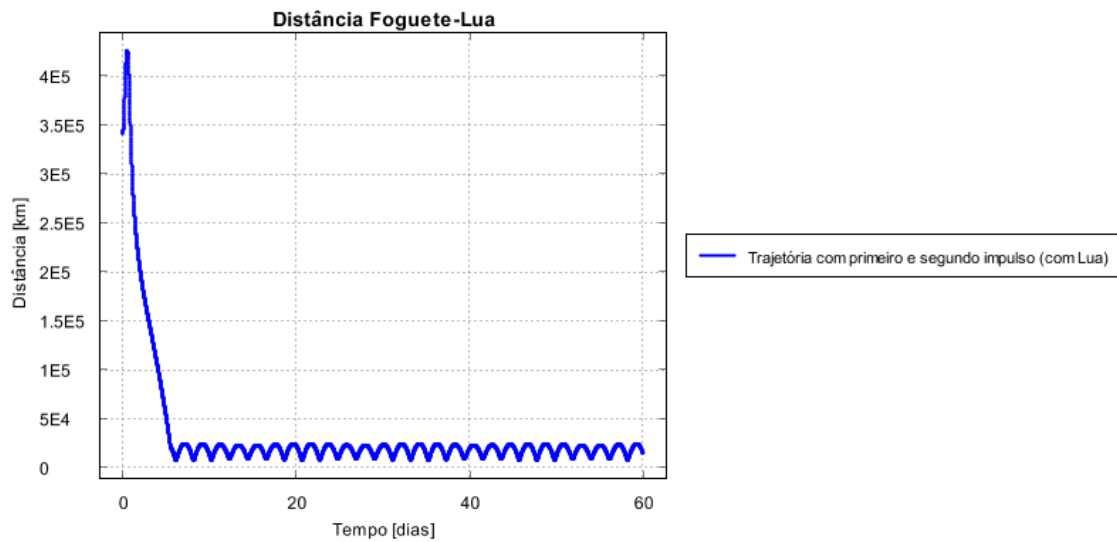
Na figura 17, percebe-se que após a aplicação do primeiro impulso de Hohmann, 5 dias, 11 horas e 50 minutos (474657s) depois, aplica-se a segunda manobra. Esta manobra efetua um impulso com objetivo de iniciar a inserção na órbita lunar. Tais valores são obtidos por meio da tentativa e erro, mostrados na tabela 4.

Tabela 4 – Informações da manobra.

Tempo [s]	474657
V_x [m s ⁻¹]	-588.491
V_y [m s ⁻¹]	355.811

Fonte: Autor

Figura 18 – Distância Foguete-Lua em função do tempo.



Fonte: Autor

De acordo com o gráfico 18, ao término da segunda manobra, é gerado uma órbita em torno lua com perfil elíptico.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados os princípios da transferência orbital, no entanto, algumas limitações foram utilizadas ao se adotar a concepção Newtoniana do movimento orbital. Assim como Volchan (2007) ressalta que algumas questões ficaram mal explicadas, como o desvio na órbita do planeta Mercúrio, que só foi solucionada por Einstein em 1915 na Teoria da Relatividade Geral.

A Mecânica Celeste deixou assim um vasto legado, já que inúmeras ideias, métodos e técnicas criadas para abordar seus problemas influenciaram decisivamente várias áreas da matemática (em alguns casos dando origem a disciplinas autônomas): Cálculo, Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais, Álgebra Linear, Estatística e Probabilidade, dentre muitos outros (VOLCHAN, 2007).

A abordagem de Hohmann é uma técnica bastante popular, porém, muito simples. As considerações, como por exemplo, órbitas concêntricas, limitam a certas situações. Pesquisadores como Hoelker e Silber (1961), afirmaram a existência de situações que o método de Hohmann se tornaria ineficiente. Outros métodos foram elaborados para soluções mais refinadas e complexas, embora a técnica de Hohmann tenha bastante apreciação no campo de estudo de órbitas, suas limitações restringem sua aplicação efetiva.

O uso das simulações computacionais facilitaram bastante o processo de cálculo, especialmente quando utilizado em métodos numéricos, onde soluções podem obtidas independente do grau de complexidade do problema. Na precisão dos dados obtidos, no entanto, deve-se enfatizar o cuidado a ser tomado sobre os erros provenientes do método numérico aplicado ou até na própria estrutura computacional. Erros que afetam a precisão das manobras e acabam gerando custos extras para execução de uma missão espacial.

As simulações apresentadas seguiram os resultados esperados. Porém, a simulação de aproximação lunar, tinha o propósito de realizar uma tentativa de colocar o veículo espacial em torno da lua, utilizando tentativa e erro, embora já existam estudos voltados para esse cenário. Não houve um estudo preciso neste trabalho sobre a aproximação. Não era propósito desta pesquisa explorar tal tópico. Diversas técnicas de aproximação já foram elaboradas, a exemplo: o método *Patched Conics*.

Atualmente, procedimentos de transferência orbital já apresentaram avanços, métodos que já abordam situações mais complexas e oferecem suporte a maior precisão já foram desenvolvidos. Alguns pesquisadores já utilizam algoritmos de busca e otimização para essa finalidade. As ciências em torno da mecânica celeste têm deixado em aberto a pesquisa sobre navegação espacial, cujo interesse está em busca de novas soluções para viagem a Marte.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho pode ser melhorado. Notavelmente, os seguintes métodos de simulação podem ser experimentados: Runge-Kutta, Verlet, leapfrog e outros.

Outra característica interessante seria enriquecer a simulação com o propósito de se obter simulações mais fiéis que levem em consideração detalhes como o arrasto da alta atmosfera ou a mudança da massa do foguete ao acionar os motores e até mesmo efeitos relativísticos.

Uma interface gráfica que permita definir detalhes da simulação pode ser desenvolvida, sua aplicação e resultados pedagógicos também podem ser observados.

Uma modificação com uso de algoritmos de inteligência artificial poderia utilizar o simulador para obter manobras otimizando algum parâmetro, como uso mínimo de combustível.

Por fim, outras simulações, mais avançadas, podem ser feitas. Por exemplo, transferência para órbita em torno de Marte, aproximação de foguetes ou asteróides ou efeito estilingue.

REFERÊNCIAS

BASHFORTH, Francis; ADAMS, John Couch. **An attempt to test the theories of capillary action: by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid.** [S.l.]: University Press, 1883.

BATE, R.R.; MUELLER, D.D.; WHITE, J.E. **Fundamentals of Astrodynamics.** [S.l.]: Dover Publications, 1971. (Dover Books on Aeronautical Engineering Series). ISBN 9780486600611.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.** [S.l.]: Wiley, 2005. ISBN 9780471433385.

BROWN, C.D. **Spacecraft Mission Design.** [S.l.]: American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1998. (AIAA education series). ISBN 9781600861154.

BUTCHER, J.C. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations.** [S.l.]: Wiley, 2016. ISBN 9781119121503.

CHERMAN, A.; MENDONÇA, B.R. **Por que as coisas caem?** [S.l.]: ZAHAR, 2010. ISBN 9788537801772.

CHOBOTOV, Vladimir A. **Orbital mechanics.** 3. ed. Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. 460 p. (AIAA education series, v. 1). ISBN 9781563475375.

CURTIS, H.D. **Orbital Mechanics: For Engineering Students.** [S.l.]: Elsevier Science, 2005. (Aerospace Engineering). ISBN 9780080470542.

DEITEL, Harvey. M.; DEITEL, Paul J. **Java: Como programar. 8ª Edição.** [S.l.]: São Paulo: Prentice Hall, 2010.

FILHO, Kepler de Souza Oliveira; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e Astrofísica.** [S.l.: s.n.], 2014.

FRANCO, N.B. **Cálculo numérico.** [S.l.]: PRENTICE HALL BRASIL, 2006. ISBN 9788576050872.

GARCÍA, F.; GÓMEZ, G. A note on weak stability boundaries. 2006.

HOELKER, Rudolf F; SILBER, Robert. The bi-elliptical transfer between co-planar circular orbits. **Planetary and Space Science**, Elsevier, v. 7, p. 164–175, 1961.

HOHMANN, Walter. Nasa Technical Translation, **The Attainability of Heavenly Bodies.** 1925. 162 p.

KUBRICK, S.; CLARKE, A.C. **2001: a Space Odyssey: Screenplay.** [S.l.]: Script City, 1965.

MARTIN, W. Kutta. **Beitrag zur Näherungsweise Integration Totaler Differentialgleichungen.** *Zeit. Math. Phys.*, v. 46, p. 435–53, 1901.

NASA. **Planetary Fact Sheet**. 2018. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/>>. Acesso em: 06 set. 2018.

REAS, Casey; FRY, Benjamin. **Processing: A Learning Environment for Creating Interactive Web Graphics**.

REAS, Casey; FRY, Benjamin. **Processing.org: A Networked Context for Learning Computer Programming**.

REAS, Casey; FRY, Benjamin. **Processing.org: Programming for Artists and Designers**. 2004.

RUNGE, Carl. Über die numerische auflösung von differentialgleichungen. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 46, n. 2, p. 167–178, 1895.

SANTOS, Willer Gomes dos; ROCCO, Evandro Marconi; CARRARA, Valdemir. Trajectory control during an aeroassisted maneuver between coplanar circular orbits. **Journal of Aerospace Technology and Management**, SciELO Brasil, v. 6, n. 2, p. 159–168, 2014.

SCHEEL, Wayne A; CONWAY, Bruce A. Optimization of very-low-thrust, many-revolution spacecraft trajectories. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 17, n. 6, p. 1185–1192, 1994.

SHEARER, D.A. **Rockets : an educator's guide with activities in science, mathematics, and technology**. DIANE Publishing, 2008. ISBN 9781428925601. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=Xm-q_TKi69QC>.

SINICROPE, Rose; BELLITTIERE, Daniel V. Ellipses and orbits: An exploration of eccentricity. **The Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 105, p. 220–224, 2011.

SZEBEHELY, Victor G.; MARK, Hans. **Adventures in Celestial Mechanics**. 2. ed. Weinheim: WILEY-VCH, 2004.

TEITEL, A.S. **Breaking the Chains of Gravity: The Story of Spaceflight before NASA**. [S.l.]: Bloomsbury Publishing, 2015. ISBN 9781472911193.

VERIS, Alessandro de Iaco. **Practical Astrodynamics**. 1. ed. Rome, Italy: Springer International Publishing, 2017.

VERNE, J. **From the Earth to the Moon**. [S.l.: s.n.], 1865.

VOLCHAN, Sérgio B. **Uma introdução a mecânica celeste**. [S.l.]: Impa, 2007.

WELLS, H. G. **The First Men in the Moon**. [S.l.: s.n.], 1901.