



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
CAMPUS PAU DOS FERROS

TALISON FERNANDES COSTA

ANÁLISE NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS

PAU DOS FERROS

2015

TALISON FERNANDES COSTA

ANÁLISE NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS

Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa

PAU DOS FERROS

2015

TALISON FERNANDES COSTA

ANÁLISE NUMÉRICA DA PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS

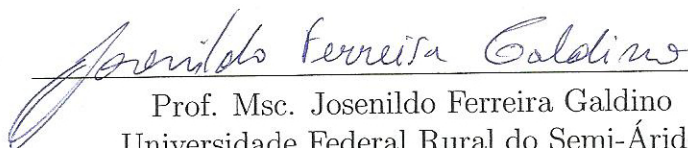
Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) submetido à Coordenação do Curso de Bacharelado em Ciência e Tecnologia, da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência e Tecnologia

Aprovada em 04/12/2015

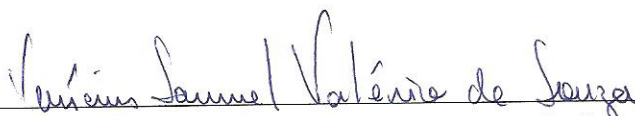
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa
(Orientador)
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Msc. Josenildo Ferreira Galdino
Universidade Federal Rural do Semi-Árido



Prof. Dr. Vinicius Samuel Valerio de Souza
Universidade Federal Rural do Semi-Árido

© Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Campus Pau dos Ferros (BCPDF)
Setor de Informação e Referência

C838a	Costa, Talison Fernandes. Análise numérica da propagação de ondas sísmicas / Talison Fernandes Costa - - Pau dos Ferros, 2015. 63 f.: il. Orientador: Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa Monografia (Graduação em Ciência e Tecnologia) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido. 1. Sísmica. 2. Modelagem. 3. Simulações. 4. Petróleo. I. Título
RN/UFERSA/BCPDF	CDD:530

*Aos Meus Pais,
Tios, Noiva, Amigos
e Professores!*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de inspiração. A minha família que diante das limitações sempre mim apoiaram. A minha noiva, Wellyda Damares, que por várias vezes tem sido compreensível comigo. Ao meu tio Franscisco Fernandes, que de modo especial tem me ajudado nessa caminhada do conhecimento e acreditado em mim. Ao meu orientador professor Ernandes que tem me ajudado e ensinado a fazer ciência, agradeço pela compreensão, pela amizade, pelo incentivo. Para mim, além de um grande mestre um exemplo de humildade e caráter. A todos aqueles que compoem a UFERSA onde diretamente ou indiretamente contribui para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado.

Não poderia deixar de citar seis pessoas que ao longo desta caminhada tem sido meus grandes motivadores: Geraldo Fernandes (meu pai), Auxiliadora Maria da Costa (minha mãe), tia Doroteia Fernandes, Manoel Nobrega Fernandes Junior (grande amigo), Maria Francisca Soares (sogra) e Edilson José Soares (sogro). Além destes, meus irmãos Tiago, Gracinha, Tassio, Talismar, Matheus, e Debora. Por fim, extendo este agradecimento a minha família de modo geral. Aprendi que preciso de gente para ser gente!

RESUMO

A descoberta de acumulações de petróleo e gás em uma dada região exige conhecimento muito preciso das formações geológicas da subsuperfície terrestre e é uma tarefa bastante complexa devido a anisotropia do meio. Tendo em vista esse objetivo, vários levantamentos de dados geofísicos precisam ser feitos inicialmente e os que apresentam melhores resultados são os levantamentos utilizando sísmica de reflexão. Esse método consiste em gerar artificialmente ondas sísmicas na superfície terrestre e medir o tempo levado por essas ondas para percorrer a distância da fonte aos receptores. Nesse sentido, o estudo da propagação de ondas em meios materiais, sobretudo em meios anisotrópicos, tem importantes aplicações na prospecção de hidrocarbonetos. É através da análise da propagação de pulsos ondulatórios na subsuperfície terrestre que se extrai informações litológicas das rochas e, conseqüentemente, pode-se inferir a existência de petróleo e gás em uma dada região. Dessa forma, a modelagem sísmica tem sido uma das ferramentas mais importantes à disposição dos profissionais envolvidos no processo de prospecção de petróleo e gás. A propagação de ondas mecânicas pode ser descrita pela teoria acústica ou elástica. Dependendo do meio uma teoria pode fornecer melhor resultado que a outra. Contudo, até que ponto os resultados obtidos simulando a equação de onda elástica difere dos resultados da equação de onda acústica? Neste trabalho aplicamos as teorias acústica e elástica à mesma geologia de subsuperfície e fizemos simulações numéricas, utilizando o método das diferenças finitas, para resolver o sistema de equações diferenciais parciais que regem o comportamento das ondas sísmicas.

Palavras-chave: Sísmica. Modelagem. Simulações. Petróleo.

ABSTRACT

The discovery of oil and gas accumulations in a given region requires very precise knowledge of the geological formations of the earth's subsurface and is a complex task due to the anisotropy of the medium. Towards this goal, various geophysical surveys need to be done initially and those with best results are surveys using seismic reflection. This method is to generate artificial seismic waves in the Earth's surface and measure the time taken by these waves to travel the distance from the source to the receivers. In this sense, the study of wave propagation in material resources, especially in anisotropic media, has important applications in hydrocarbon prospecting. It is by analyzing the pulse wave propagation in the Earth's subsurface lithologic information that is extracted from rocks and hence we can infer the existence of oil and gas in a given region. Thus, the seismic modeling has been one of the most important available to professionals involved in the prospecting process oil and gas tools. The propagation of mechanical waves can be described for acoustic or elastic domain. Depending on the medium a theory can provide better results than the other. However, to what extent the results obtained simulating the elastic wave equation differs from the results of the acoustic wave equation? In this paper we apply the acoustic and elastic theories to the same geology of the subsurface and made numerical simulations, using the finite difference method to solve the system of partial differential equations governing the behavior of seismic waves.

Keywords: Seismic. Modeling. Simulations. Oil.

LISTA DE TABELAS

1	Equações de campo único	p. 28
2	Equações de campo duplo	p. 29
3	Comparação entre termos de fontes.	p. 32

LISTA DE FIGURAS

1	Uma porção de fluido em movimento limitado por uma superfície de área A , volume V e densidade ρ	p. 18
2	Representação de um corpo de volume V formado de pequenas particulas em forma de cubo.	p. 25
3	Termo de Fonte Sísmica para $f_{corte} = 60Hz$	p. 31
4	Domínio de uma função discretizado em N partes iguais.	p. 36
5	Operador de malha simples em 4ª ordem (a) e 2ª ordem (b).	p. 40
6	Malha intercalada.	p. 40
7	Configuração de uma malha tridimensional nas coordenadas x, z e t . . .	p. 44
8	Extrutura da EDF.	p. 45
9	Configuração espacial do EDF para as Eqs. [(4.12) - (4.16)].	p. 48
10	Configuração espacial do esquema dado pelas Eqs. [(4.18) - (4.22)]. . .	p. 48
11	Distribuição espacial para o caso Isotrópico dados pelas Eqs. [(4.24) - (4.28)].	p. 49
12	Campo de pressão e tensão para 0,175 s (a) e (b) e 0,35 s (c) e (d). . .	p. 52
13	Campo de pressão e tensão para 0,7 s.	p. 52
14	Campo de pressão e tensão para 1,4 s.	p. 53
15	Amplitude de pressão e tensão nos pontos do domínio xOz em t=1,4 s. .	p. 53
16	Evolução da Pressão e Tensão Dinâmica com o tempo no ponto $(x, z) = (500\text{ m}, 250\text{ m})$	p. 54
17	Efeitos da evolução no tempo.	p. 54
18	Resposta elástica para τ_{xx}, τ_{xz} e τ_{zz}	p. 55
19	Variação da amplitude de tensão para τ_{xx} e τ_{xz}	p. 55

LISTA DE SÍMBOLOS

$\tau_{i,j}$	Tensor de tensão
c_{ijkl}	Tensor de elasticidade
e_{ij}	Tensor de deformação
ρ	Densidade volumétrica
i_M	Densidade volumétrica de injeção de massa
∇	Operador gradiente

LISTA DE SIGLAS

ED	Equação Diferencial
EDP	Equação Diferencial Parcial
MDF	Método das Diferenças Finitas
EDE	Equação de Diferença Finita

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	p. 15
2	PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS	p. 17
2.1	Teoria acústica	p. 17
2.1.1	Linearização das equações gerais	p. 20
2.1.2	Equação de onda acústica	p. 22
2.2	Teoria elástica	p. 23
2.2.1	Equação geral da onda elástica	p. 28
2.3	Fonte sísmica	p. 31
2.4	Condições de contorno e condições iniciais	p. 33
3	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	p. 35
3.1	Teoria de equações diferenciais	p. 35
3.2	Método das diferenças finitas	p. 36
3.2.1	Aproximação para a derivada primeira	p. 38
3.2.2	Aproximação para a derivada segunda	p. 39
3.3	Propriedades das equações de diferenças	p. 41
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	p. 43
4.1	Equação de onda de pressão discreta	p. 43
4.2	Equações de onda de tensão discreta	p. 47
4.3	Resultados numéricos	p. 51

5 CONCLUSÃO	p. 56
REFERÊNCIAS	p. 58
Apêndice A – Formulação acústica	p. 59
Apêndice B – Formulação elástica	p. 62

1 INTRODUÇÃO

A Geofísica é a ciência que aplica os princípios da Física ao estudo da Terra. Na sua forma aplicada, investiga certas propriedades e aspectos da crosta terrestre que embora não visíveis podem ocorrer. A investigação desses aspectos tem como objetivo principal a resolução de problemas práticos como a prospecção de petróleo, a localização de zonas favoráveis à circulação de águas subterrâneas e a prospecção mineral. Tendo em vista essa finalidade a Geofísica utiliza vários métodos de prospecção como gravimétrico, eletromagnético, sísmico, entre outros. Dentre os métodos de prospecção geofísica, o mais utilizado na prospecção de petróleo e gás é o método sísmico de reflexão. Esse método consiste em gerar artificialmente ondas sísmicas na superfície terrestre e medir o tempo levado por essas ondas para percorrer a distância da fonte aos receptores.

O método sísmico consiste em três etapas: aquisição, processamento e interpretação. No processo de aquisição, uma fonte de onda sísmica é aplicada na região de interesse, em terra ou no mar. Os sinais registrados na superfície pelos sensores contém informações sobre a região estudada, pois a forma como o pulso se propaga depende do meio. Após a aquisição, os dados são processados digitalmente com o intuito de gerar uma imagem representativa da geologia. Atualmente esse processamento é realizado utilizando técnicas de migração sísmica baseada na equação da onda, dentre elas: método baseado na solução de diferenças finitas de uma aproximação da equação da onda, migração de Kirchhoff, migração em profundidade e migração reversa no tempo. Por fim, os dados são interpretados.

A interpretação depende, dentre outros aspectos, do conhecimento dos parâmetros do meio que produziu o sinal analisado. Para obtê-los, as equações que descrevem o comportamento da onda devem ser ajustados aos dados adquiridos em campo. Por isso, a modelagem sísmica tem sido uma das ferramentas mais importantes à disposição dos profissionais envolvidos no processo de prospecção de petróleo e gás.

A modelagem sísmica busca descrever o fenômeno de propagação da onda desde a

fonte, passando pelas camadas do meio, até retornar aos receptores. Ela possibilita avaliar as limitações e armadilhas do método sísmico, otimizar parâmetros de aquisição, bem como fornecer dados para programas de processamento sísmico.

Há diferentes teorias físicas que modelam a propagação de ondas sísmicas, - a saber: teoria acústica, teoria elástica, teoria visco-elástica e poro-elástica - cada uma delas com diferente grau de refinamento. Com isso, diferentes equações matemáticas precisam ser resolvidas, de acordo com a teoria considerada. Dependendo do meio, uma teoria pode fornecer melhor resultado que a outra.

Este trabalho tem como objetivo principal fazer simulações para resolver a equação da onda acústica e elástica e comparar os resultados numéricos obtidos. Nessa perspectiva, o presente trabalho é descrito como segue.

No capítulo 2 é discutido os conceitos gerais referentes as formulações acústica e elástica e derivado as equações de onda para as duas formulações. No capítulo 3 apresenta-se o Método das Diferença Finitas (MDF) que será utilizado para resolver as equações de onda. As equações contínuas são discretizadas a partir dos modelos escritos para gerar os dados sintéticos. No capítulo 4 é mostrado os resultados e discutido alguns aspectos referentes a resposta produzida por cada modelo. Finalmente, no capítulo 5 concluímos analisando as diferenças existentes entre as duas respostas. Os programas que simulam a equação de onda acústica e elástica encontram-se nos apêndices A e B.

2 PROPAGAÇÃO DE ONDAS SÍSMICAS

O estudo da propagação de ondas em meios materiais tem importantes aplicações geofísicas, principalmente na sísmica de prospecção de hidrocarbonetos. É através da análise da propagação de pulsos ondulatórios na subsuperfície terrestre que se extrai informações físicas das rochas e, conseqüentemente, pode-se inferir a existência de petróleo e gás em uma dada região. Neste capítulo discutimos os aspectos gerais da propagação de ondas em meios acústicos e elásticos.

2.1 Teoria acústica

A teoria acústica descreve o fenômeno de propagação de ondas considerando um meio acústico, isso significa desprezar as tensões cisalhantes. Logo, qualquer material que ao sofrer uma perturbação em um ponto, transmite-a ponto a ponto ao longo do meio apenas de forma longitudinal, isto é, apenas a tensão normal ou pressão produz a oscilação nas camadas do meio fazendo com que um pulso gerado em um ponto se propague. Assim, um fluido pode ser modelado como um meio acústico.

Considere uma região no espaço contendo um material fluido qualquer. Se ocorrer em um ponto desse meio uma perturbação gerada por um campo de força qualquer, tal perturbação irá se propagar ao longo de todo o meio através de uma onda. A transmissão ponto a ponto ocorre apenas por meio de tensões normais.

Considere agora um fluido com densidade ρ , onde as partículas se deslocam com velocidade $\vec{v}$ dependente da posição e do tempo. Tomando uma porção de fluido de volume V , encerrado por uma superfície fechada A e a normal dada por $\vec{n}$, conforme mostra a Fig. (1). Neste caso, a taxa de variação da massa M , dentro do volume é dada

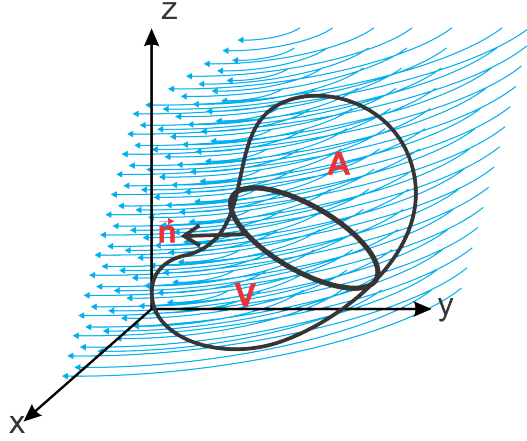


Figura 1: Uma porção de fluido em movimento limitado por uma superfície de área A , volume V e densidade ρ .

por

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (2.1)$$

Por outro lado, a taxa de variação da massa pode ser escrita como o negativo do fluxo de massa que atravessa a superfície fechada, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_A \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA. \quad (2.2)$$

Caso exista alguma fonte de massa, como exemplo, uma explosão próximo a superfície, deve ser incluído na equação anterior a taxa de injeção de massa. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_A \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA + \frac{\partial}{\partial t} \int i_M dV. \quad (2.3)$$

onde i_M é a densidade volumétrica de injeção de massa.

Utilizando agora o teorema do divergente de Gauss, escrito,

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) dV, \quad (2.4)$$

onde $\vec{B}$ é um campo vetorial. Dessa forma, a Eq. (2.3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial i_M}{\partial t}, \quad (2.5)$$

que é a equação da continuidade de massa.

Por outro lado, a taxa de variação temporal do momento linear pode ser escrita como,

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV. \quad (2.6)$$

Essa taxa é igual ao negativo do fluxo de momento através da superfície fechada somado as forças externas $\vec{F}$ que atuam no volume de fluido, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = - \oint (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} dA + \vec{F}. \quad (2.7)$$

As forças externas incluem as forças de campo e as forças de contato devido a pressão exercida pelo meio que envolve a superfície. Assim,

$$\vec{F} = - \oint p \hat{n} dA + \int \vec{f} dV, \quad (2.8)$$

onde $\vec{f}$ é a densidade volumétrica de forças de campo e p a pressão. Aplicando novamente o teorema do divergente, a Eq. (2.7) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \vec{v} dV = - \int \vec{\nabla} \cdot [(\rho \vec{v}) \vec{v}] dV - \int \vec{\nabla} p dV + \int \vec{f} dV, \quad (2.9)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} p = \vec{f}, \quad (2.10)$$

que é conhecida como 2ª lei de Newton generalizada.

Considerando que a propagação da onda em um meio acústico seja adiabática, pode-se assumir a seguinte equação de estado

$$p \rho^{-K} = cte, \quad \therefore \quad K = \frac{C_P}{C_V}, \quad (2.11)$$

onde C_V e C_P são os calores específicos a volume e pressão constantes, respectivamente.

Para muitas aplicações de interesse geológico, o meio pode ser considerado estático de forma que as mudanças em pressão e densidade ocorram somente devido a perturbação causada pela passagem da onda. Dessa forma, vamos escrever

$$p(\vec{r}, t) = p_o(\vec{r}) + \Delta p(\vec{r}, t), \quad (2.12)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o(\vec{r}) + \Delta \rho(\vec{r}, t), \quad (2.13)$$

onde Δp e $\Delta \rho$ representam uma perturbação em cada ponto em torno dos valores estáticos, p_o e ρ_o . Substituindo as Eqs. (2.12) e (2.13) na Eq. (2.11), vem que

$$p \rho^{-K} = (p_o + \Delta p)(\rho_o + \Delta \rho)^{-K} = p_o \rho_o^{-K}, \quad (2.14)$$

ou ainda,

$$\left(1 + \frac{\Delta p}{p_o}\right) \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_o}\right)^{-K} = 1. \quad (2.15)$$

Resolvendo para $\Delta \rho / \rho_o$,

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_o} = \left(1 + \frac{\Delta p}{p_o}\right)^{-K} - 1. \quad (2.16)$$

Fazendo $\gamma = 1/K$, e aplicando o teorema binomial, a equação acima é aproximada para,

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_o} = \gamma \frac{\Delta p}{p_o}, \quad (2.17)$$

onde os termos de ordem superior foram negligenciados.

2.1.1 Linearização das equações gerais

Em aplicações de interesse geofísico é comum considerar que o fluido encontra-se em equilíbrio estático, de forma que a velocidade das partículas é devida somente a perturbação causada pela passagem da onda acústica. Dessa forma, pode-se escrever

$$\frac{\Delta p}{p_o} \ll 1 \quad \text{e} \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_o} \ll 1. \quad (2.18)$$

Substituindo as Eqs. (2.12) e (2.13) na Eq. (2.5) e levando em conta as considerações dadas pela Eq. (2.18), obtém-se:

$$\frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} + (\rho_o + \Delta \rho) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + v \vec{\nabla} \cdot (\rho_o + \Delta \rho) = \frac{\partial i_M}{\partial t}, \quad (2.19)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\vec{v}}{\rho_o} \cdot \vec{\nabla} (\rho_o + \Delta \rho) = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial i_M}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Desprezando-se termos de ordem superior do lado esquerdo da equação acima, obtém-se a equação da continuidade linear escrita como segue,

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial(\Delta \rho)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial i_V}{\partial t}, \quad (2.21)$$

onde $i_V = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial i_M}{\partial t}$. Note que a taxa de variação da densidade volumétrica de injeção de massa dividido pela densidade estática do fluido representa uma fonte acústica mais realística i_V que depende da posição e do tempo.

Aplicando o mesmo procedimento para a segunda lei de Newton generalizada [Eq. (2.10)], obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial t}[(\rho_o + \Delta\rho)\vec{v}] + \vec{v}\vec{\nabla}\cdot[(\rho_o + \Delta\rho)\vec{v}] + [(\rho_o + \Delta\rho)\vec{v}\cdot\vec{\nabla}]\vec{v} + \vec{\nabla}(p_o + \Delta p) = \vec{f}, \quad (2.22)$$

ou ainda,

$$(\rho_o + \Delta\rho)\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial\Delta\rho}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\cdot[(\rho_o + \Delta\rho)\vec{v}] + [(\rho_o + \Delta\rho)\vec{v}\cdot\vec{\nabla}]\vec{v} + \vec{\nabla}(p_o + \Delta p) = \vec{f}. \quad (2.23)$$

Desprezando-se os termos não lineares e considerando que a variação da pressão estática é muito menor que a pressão acústica, ou seja, $|\vec{\nabla}p_o| \ll |\vec{\nabla}(\Delta p)|$, a 2ª lei de Newton na forma linearizada é escrita como,

$$\rho_o\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}(\Delta p) = \vec{f}. \quad (2.24)$$

A partir da Eq. (2.17), pode-se escrever $\Delta\rho$ como,

$$\Delta\rho = \rho_o\frac{\gamma}{p_o}\Delta p = \rho_o\frac{1}{\kappa}\Delta p, \quad (2.25)$$

onde $\kappa = p_o/\gamma$ é o módulo de compressão adiabática. Por conveniência de notação vamos fazer $\rho_o(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ e $\Delta p(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t)$. Substituindo esses resultados nas equações linearizadas da continuidade e de movimento, obtém-se:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial i_V}{\partial t}, \quad (2.26)$$

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}p = \vec{f}. \quad (2.27)$$

Essas duas equações representam completamente o campo das ondas acústica através das funções $p(\vec{r}, t)$ e $v(\vec{r}, t)$, já o fluido é representado por $\rho(\vec{r})$ e $\kappa(\vec{r})$ e a fonte é dada pelos termos $i_V(\vec{r}, t)$ e $\vec{f}$.

Outra forma de representar o campo acústico é através do deslocamento $u(\vec{r}, t)$ das partículas. Fazendo então, $\vec{v} = \partial(\vec{u})/\partial t$ e $\partial(\vec{v})/\partial t = \partial^2(\vec{u})/\partial t^2$ as Eqs. (2.26) e (2.27), podem ser reescritas como

$$\frac{p}{\kappa} + \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = i_V, \quad (2.28)$$

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}p = \vec{f}. \quad (2.29)$$

2.1.2 Equação de onda acústica

As equações obtidas até aqui relacionam o campo de pressão com o de velocidade ou deslocamento, resultando em modelos de campos duplo. Ao invés de equações hiperbólicas de primeira ordem, pode-se usar equação hiperbólica de segunda ordem, conhecida como equação da onda. Nessa representação os campos de pressão, velocidade e deslocamento podem ser separados em equações de onda de campo único, conforme mostrado a seguir.

Derivando então a Eq. (2.26) em relação ao tempo, multiplicando a Eq. (2.27) por $1/\rho$ e tomando o divergente, obtém-se:

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2}, \quad (2.30)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f} \right). \quad (2.31)$$

Combinando as Eqs. (2.30) e (2.31), vem que

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{\rho}{\kappa} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho \left[\frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f} \right) \right], \quad (2.32)$$

ou ainda,

$$\rho \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s, \quad (2.33)$$

e foi feito

$$s = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{f} \right) \quad \text{e} \quad c = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}. \quad (2.34)$$

Utilizando agora a identidade vetorial $\vec{\nabla} \cdot (\vec{f} \vec{\nabla} g) = \vec{\nabla} \vec{f} \cdot \vec{\nabla} g + \vec{f} \vec{\nabla}^2 g$, a Eq. (2.33) pode ser reescrita como

$$\vec{\nabla}^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \rho \cdot \vec{\nabla} p = -\rho s, \quad (2.35)$$

que é a equação de onda para a pressão. Note que em regiões onde o gradiente de ρ é desprezível, a equação anterior se reduz para,

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho s, \quad (2.36)$$

que é a equação de propagação de onda em um meio homogêneo e isotrópico.

Ainda é possível escrever a equação de onda acústica em termos do campo de velocidade ou do campo de deslocamento. Para tanto, vamos multiplicar a Eq. (2.26) por κ e

tomar o divergente, em seguida derivar a Eq. (2.27) com relação ao tempo, obtendo,

$$\frac{\partial \vec{\nabla} p}{\partial t} + \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\kappa \frac{\partial i_V}{\partial t} \right), \quad (2.37)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\nabla} p}{\partial t} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}. \quad (2.38)$$

Combinando as Eqs. (2.37) e (2.38), vem

$$\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \frac{\rho}{\kappa} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa} \left[\vec{\nabla} \left(\kappa \frac{\partial i_V}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} \right]. \quad (2.39)$$

Substituindo a Eq. (2.34) na equação anterior e fazendo $\vec{s}_u = \vec{f} - \vec{\nabla}(\kappa i_V)$, tem-se,

$$\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{s}_u}{\partial t}, \quad (2.40)$$

que é a equação de onda acústica escrita em termos do campo de velocidade. Finalmente, fazendo $\vec{v} = \partial \vec{u} / \partial t$ vem,

$$\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} \left(\kappa \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 \vec{u}}{\partial t^3} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \vec{s}_u}{\partial t}, \quad (2.41)$$

onde

$$\vec{s}_u = \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \quad (2.42)$$

que é a equação de onda em termos do campo de deslocamento.

2.2 Teoria elástica

Na formulação elástica, as tensões cisalhantes não podem ser desprezadas. Dessa forma, quando uma perturbação é aplicada em um ponto do domínio que representa o material, além da perturbação ser transmitida ponto a ponto de forma longitudinal pela pressão (ou tensão normal) também é transmitida transversalmente pelas tensões cisalhantes.

Meios que reagem a qualquer tipo de tensão são denominados meios sólidos. Todos os materiais sólidos são viscosos, por essa razão se deformam ao serem submetidos a esforços externos. Se, após a retirada do esforço que estava atuando sobre um corpo viscoso qualquer, este volte à sua configuração original, o material constituinte é dito elástico, portanto pode ser descrito pela teoria da elasticidade. Assim como na teoria acústica, a

variação de tensão em cada ponto do meio, quando uma perturbação é causada em um ponto, se propaga como uma onda.

A importância de considerar a viscosidade é que, os meios de interesse onde se desejam obter informações geofísicas são meios sólidos ou fluidos de alta viscosidade [1], estes devido a existência de tensões cisalhantes transmitem também ondas transversais. Desse modo, um meio geológico como as rochas não podem ser tratados como um meio fluido.

A principal diferença do ponto de vista matemático entre a teoria acústica e a elástica é que por considerar apenas a pressão, na teoria acústica, todos os modelos se resumem à apenas uma equação para todas as direções. Já na teoria elástica tem-se uma equação para cada direção, gerando modelos acoplados.

Considere agora uma região do espaço contendo um material qualquer de densidade $\rho(\vec{r}, t)$ cujas partículas do meio se movem com velocidade $v(\vec{r}, t)$ dependente da posição e do tempo. Tomando uma porção de volume V desse material encerrado por uma superfície fechada A e normal $\vec{n}$, similar a Fig. (1), a taxa de variação temporal do momento linear $\vec{P}$ da porção do material encerrada por A é,

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int (\rho \vec{v}) dV, \quad (2.43)$$

que representa as forças no volume de controle. Essa variação é devido ao fluxo de momento que entra ou sai pela superfície de modo que podemos escrevê-la como o negativo do fluxo de momento através da superfície mais a resultante das forças externas $\vec{F}$. Assim, podemos escrever a variação temporal do fluxo de $\vec{P}$ como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\rho \vec{v}) dV = - \oint (\rho \vec{v}) \vec{v} \cdot \hat{n} dA + \vec{F}, \quad (2.44)$$

onde $\vec{F}$ pode ser escrita como,

$$\vec{F} = - \oint \tau_n \hat{n} dA + \int \vec{f} dV. \quad (2.45)$$

Na equação acima τ_n inclui os termos de pressão e tensões cisalhantes e $\vec{f}$ é a densidade volumétrica de forças de campo. Aplicando o teorema do divergente, obtém-se,

$$\int \left[\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} \tau_n - \vec{f} \right] dV = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} \tau_n = \vec{f}, \quad (2.47)$$

que é a equação de movimento não linear para meios elásticos anisotrópicos.

Como estamos interessados apenas no caso linear, os termos não lineares serão desconsiderados. Considerando novamente a decomposição de pressão e densidade dadas pelas Eqs. (2.12) e (2.13), pode-se mostrar que a equação de movimento linearizada toma a seguinte forma,

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{\nabla} \tau_n = \vec{f}, \quad (2.48)$$

onde fizemos $\rho_o \rightarrow \rho$. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas, e utilizando a notação indicial (convenção de soma repetitiva), $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) := \partial_j$ sendo $j = 1 \rightarrow x$, $j = 2 \rightarrow y$ e $j = 3 \rightarrow z$, pode-se escrever a Eq. (2.48) como,

$$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i, \quad (2.49)$$

onde τ_{ij} é um tensor de 2ª ordem denominado tensor de tensão. No espaço euclidiano tridimensional o tensor de tensão pode ser representado por uma matriz 3x3.

Geralmente um corpo sofre a ação de forças externas de duas formas, pelo contato de sua superfície com os materiais presentes nas suas vizinhanças, ou por campo de forças. As forças de contato também conhecidas como forças de superfície são produzidas pelos materiais que tangencia a superfície do corpo. Para melhor entender isso, vamos considerar um corpo de volume V , formado de pequenas partículas em forma de cubo, como mostra a Fig. (2).

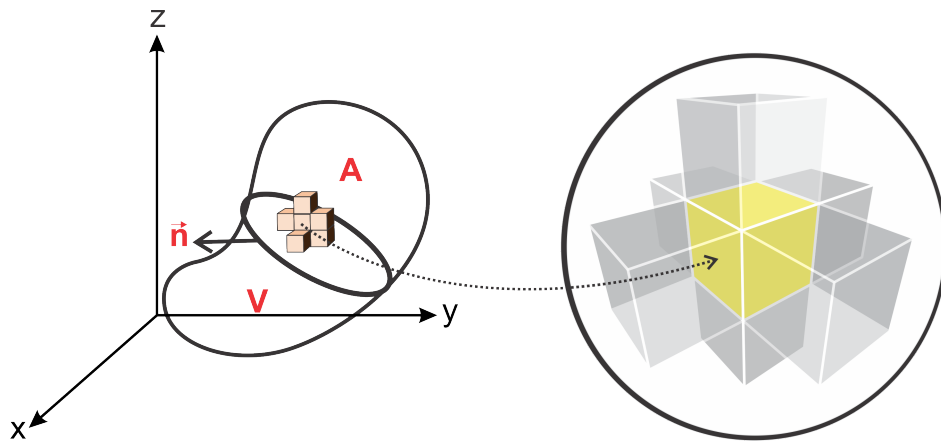


Figura 2: Representação de um corpo de volume V formado de pequenas partículas em forma de cubo.

O cubo central (em amarelo) está em contato com 6 cubos vizinho (em cinza) cada um aplica forças sobre cada face do cubo central. Como a força aplicada por cada cubo não é pontual, é mais conveniente expressa-la em termos de tensão. Generalizando a ideia

acima, tais forças podem estar perpendicular, tangente ou em uma direção arbitrária em relação a normal da face de contato. Portanto, para representar as tensões atuantes em um ponto específico do domínio de um material utilizamos o **tensor de tensão**. Veja a Ref. [6] para mais detalhes.

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix},$$

O tensor τ_{ij} é simétrico, isto é, $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ e $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ resultando em 6 componentes independentes. Para $i = j$ as tensões são normais e para $i \neq j$ as tensões são cisalhantes.

Uma vez submetido a um campo de tensão, seja por meio de forças de superfície ou de campo, o corpo se deforma, isto é, ocorre mudança em sua forma. Essa deformação pode ser expressa através do **tensor de deformação** (idem Ref. [6]) escrito como,

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (2.50)$$

para $i = j$, tem-se as deformações normais,

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (2.51)$$

e $i \neq j$ as deformações cisalhantes,

$$\begin{aligned} e_{yx} = e_{xy} &= \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x), \\ e_{zx} = e_{xz} &= \frac{1}{2}(\partial_x u_z + \partial_z u_x), \\ e_{zy} = e_{yz} &= \frac{1}{2}(\partial_z u_y + \partial_y u_z). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Assim,

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix},$$

que também é simétrico com 6 componentes independentes. Todas as demonstrações de simetrias relacionados a e_{ij} podem ser encontradas na Ref. [6].

Como estamos considerando apenas casos lineares, o tensor das tensões e deformações estão relacionados pela Lei de Hook. Segundo essa lei, tensão se relaciona a deformação por meio de um propriedade do meio chamada elasticidade. Para relacionar τ_{ij} e e_{ij} utilizando a lei de Hook, a elasticidade será definida como uma transformação da deformação

em tensão. Portanto, a elasticidade será um tensor de 4ª ordem com 81 componentes, e a relação tensão-deformação é descrita pela relação

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}e^{kl}, \quad (2.53)$$

onde c_{ijkl} é o tensor de elasticidade. Uma vez que os tensores de tensão e deformação são simétricos e as compressões e expansões ocorrem de forma adiabática, o tensor de elasticidade adquire as seguintes simetrias.

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad c_{ijkl} = c_{klij}, \quad (2.54)$$

reduzindo o número de componentes independentes para 21, veja a Ref. [6] para mais detalhes.

Devido as simetrias, podemos utilizar a notação de Voigt para representar o tensor de elasticidade através de uma matriz, isto é,

$$n = i\delta_{ij} + (9 - i - j)(1 - \delta_{ij}), \quad (2.55)$$

que transforma índices ij em índices n . Assim,

$$C_{nm} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{1122} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{1133} & c_{2233} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{1123} & c_{2223} & c_{3323} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1113} & c_{2213} & c_{3313} & c_{2313} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1112} & c_{2212} & c_{3312} & c_{2312} & c_{1312} & c_{1212} \end{bmatrix}.$$

Caso exista alguma fonte de deformação externa $h(\vec{r}, t)$, a Lei de Hook generalizada é alterada para

$$\tau_{ij} - c_{ijkl}e^{kl} = -g_{ij}, \quad (2.56)$$

com

$$g_{ij} = c_{ijkl}h^{kl}, \quad (2.57)$$

onde h_{ij} representa o tensor de deformação $h(\vec{r}, t)$ e g_{ij} o tensor de tensão gerado pela fonte. Note que a distribuição de tensão associada a fonte de deformação depende do meio, aqui representado pela elasticidade.

Para simplificar a Lei de Hooke generalizada com fonte e escrevê-la em função do deslocamento, vamos substituir a Eq. (2.50) na Eq. (2.56), resultando em,

$$\tau_{ij} - c_{ijkl} \frac{1}{2} (\partial^l u^k + \partial^k u^l) = -g_{ij}.$$

Utilizando a propriedade de simetria $c_{ijkl} = c_{ijlk}$,

$$\tau_{ij} - c_{ijkl} \partial^l u^k = -g_{ij}, \quad (2.58)$$

e lembrando que $\vec{v} = \partial_t \vec{u}$, chega-se a relação tensão-velocidade linearizada,

$$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial^l v^k = -\partial_t g_{ij}. \quad (2.59)$$

As Eqs. (2.59) e (2.49) descrevem completamente o movimento de um meio elástico geral quando submetido a uma perturbação ocasionada por uma fonte.

2.2.1 Equação geral da onda elástica

Tabela 1: Equações de campo único

Deslocamento	Velocidade	Tensão
$\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l u_k) = s_i$	$\rho \partial_t^2 v_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l v_k) = \partial_t s_i$	$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) = -c_{ijkl} s_{kl}$
$s_i = f_i - \partial_j g_{ik}$	$s_i = f_i - \partial_j g_{ik}$	$s_{kl} = \partial_t^2 h_{kl} - \partial_l (b f_k)$

Os campos de velocidade, deslocamento e tensão podem ser representados, na formulação elástica, por equações de campo duplo ou campo único. O sistema de campo duplo de deslocamento e tensão foi obtido substituindo $v = \partial_t u$ no sistema de campo duplo de velocidade e tensão (conforme mostrado na seção anterior). A partir dos sistemas de campo duplo obtemos as equações de campo único. Para mais detalhes consultar a Ref. [1]. A Tab. 1 contém as equações de velocidade, deslocamento e tensão em campo único.

As duas representações são formas matemáticas equivalentes para descrever o mesmo fenômeno. Todas as equações obtidas até aqui descrevem o caso geral, vimos que o objeto matemático que representa o meio é o tensor de elasticidade e é a partir dele que obtém-se as equações para os casos particulares de anisotropia como a Ortotropia¹ e a Isotropia.

As equações mostradas na Tab. 1 estão expressas de forma compacta pela notação

¹O termo Ortotropia é usado para definir meios com propriedade físicas equivalente em direções específicas. A Isotropia é por consequência um caso de Ortotropia, onde as propriedade físicas são iguais em todas as direções.

Tabela 2: Equações de campo duplo

Velocidade e Tensão	Deslocamento e Tensão
$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$	$\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$
$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l v_k = -\partial_t g_{ij}$	$\tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l u_k = -g_{ij}$
$g_{ij} = c_{ijkl} h_{kl}$	$g_{ij} = c_{ijkl} h_{kl}$

indicial, todos os modelos foram escritos sob a consideração de um sistema de coordenadas cartesianas onde os índices variam de 1 a 3 representando as direções (x, y, z) .

Desprezando agora a componente y , os tensores de elasticidade e tensão na notação de Voigt, são reduzidos para

$$\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{33} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{nm} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{bmatrix}.$$

Note que todos os termos associados a componente y foram eliminados. No tensor de tensão essa componente está relacionada ao índice 2 e no tensor de elasticidade aos índices 2, 4 e 6, conforme a notação de Voigt. Com essas simplificações podemos tratar as equações tensoriais com operações matriciais. Por exemplo, a lei de Hook generalizada que relaciona tensão e deslocamento pode ser vista como,

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x u_x \\ \partial_z u_z \\ \partial_x u_z + \partial_z u_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{15} \\ c_{13} & c_{33} & c_{35} \\ c_{15} & c_{35} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x h_x \\ \partial_z h_z \\ \partial_x h_z + \partial_z h_x \end{bmatrix}.$$

Fazendo i, j, k e l variar de 1 a 3 no sistema de campo duplo de velocidade e tensão mostrado na Tab. 2, obtém-se, com os termos do tensor de elasticidade na notação de Voigt, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} &= f_x \\ \rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} &= f_z \\ \partial_t \tau_{xx} - c_{11} \partial_x v_x - c_{13} \partial_z v_z - c_{15} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) &= -\partial_t g_{xx} \\ \partial_t \tau_{zz} - c_{13} \partial_x v_x - c_{33} \partial_z v_z - c_{35} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) &= -\partial_t g_{zz} \\ \partial_t \tau_{xz} - c_{15} \partial_x v_x - c_{35} \partial_z v_z - c_{55} (\partial_x v_z + \partial_z v_x) &= -\partial_t g_{xz}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

onde,

$$g_{xx} = c_{11} h_{xx} + c_{13} h_{zz} + c_{15} (h_{xz} + h_{zx})$$

$$\begin{aligned}
g_{zz} &= c_{13}h_{xx} + c_{33}h_{zz} + c_{35}(h_{xz} + h_{zx}) \\
g_{xz} &= c_{15}h_{xx} + c_{35}h_{zz} + c_{55}(h_{xz} + h_{zx}).
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Os demais casos podem ser consultados na Ref. [1].

Um dos casos de simetria elástica é a ortotropia isotrópica, "que define meios no qual as propriedades independem da direção, ou seja, as velocidades de propagação não dependem da direção de propagação", [1]. Conforme dito, as particularidades de cada meio são determinadas pelo tensor de elasticidade. No caso isotrópico, os elementos do tensor elástico estão relacionados com as velocidades transversal e longitudinal da onda, c_S e c_P , respectivamente,

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{33} = \rho c_P^2, \\
c_{13} &= \rho c_P^2 - 2\rho c_S^2, \\
c_{55} &= \rho c_S^2, \\
c_{15} &= c_{35} = 0.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Assim, o sistema geral (2.60) é simplificado para,

$$\begin{aligned}
\rho \partial_t v_x - \partial_x \tau_{xx} - \partial_z \tau_{xz} &= f_x \\
\rho \partial_t v_z - \partial_x \tau_{xz} - \partial_z \tau_{zz} &= f_z \\
\partial_t \tau_{xx} - \rho c_P^2 \partial_x v_x - \rho(c_P^2 - 2c_S^2) \partial_z v_z &= -\partial_t g_{xx} \\
\partial_t \tau_{zz} - \rho(c_P^2 - 2c_S^2) \partial_x v_x - \rho c_P^2 \partial_z v_z &= -\partial_t g_{zz} \\
\partial_t \tau_{xz} - \rho c_S^2 (\partial_x v_z + \partial_z v_x) &= -\partial_t g_{xz},
\end{aligned} \tag{2.63}$$

onde,

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= \rho c_P^2 h_{xx} + \rho(c_P^2 - 2c_S^2) h_{zz} \\
g_{zz} &= \rho(c_P^2 - 2c_S^2) h_{xx} + \rho c_P^2 h_{zz} \\
g_{xz} &= \rho c_S^2 (h_{xz} + h_{zx}).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Note que se considerarmos uma fonte isotrópica $c_P = c_S$, g_{xx} e g_{zz} serão nulas, restando apenas o termo de fonte cruzado.

2.3 Fonte sísmica

Os termos de fonte nas formulações acústica e elástica, representam uma fonte sísmica geradora de ondas. Uma fonte sísmica é qualquer aparato utilizado para gerar uma onda sísmica que irá se propagar através do meio que se deseja estudar. Uma explosão de dinamite enterrada, um peso controlado caindo no solo ou um arguim podem ser usados como fontes sísmicas artificiais. A representação de uma fonte sísmica é dada pela distribuição de densidade de forças ($\vec{f}$) na teoria acústica, e pela distribuição de tensões externas (g_{ij}) na teoria elástica. Para resolver as equações desenvolvidas considera-se uma fonte pontual, desse modo, seja qual for o instrumento utilizado, ele será modelado como uma fonte pontual. A expressão utilizada é uma generalização de uma fonte tipo pulso de Ricker, dada pela equação,

$$F(t) = [2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1]e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2}, \quad (2.65)$$

onde f_c é um parâmetro relacionado a frequência de corte da fonte e t_d é o tempo defasado. Ele desloca o início da aplicação da fonte para que o máximo da função seja deslocado de zero para $t_o > 0$. As expressões dos parâmetros são:

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}}, \quad t_d = t - t_o, \quad t_o = \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}}, \quad (2.66)$$

onde f_{corte} é a frequência da fonte.

O gráfico a seguir descreve o comportamento de uma fonte típica de pulso de Ricker para uma frequência de corte de 60Hz. Os gráficos mostram o que acontece caso a

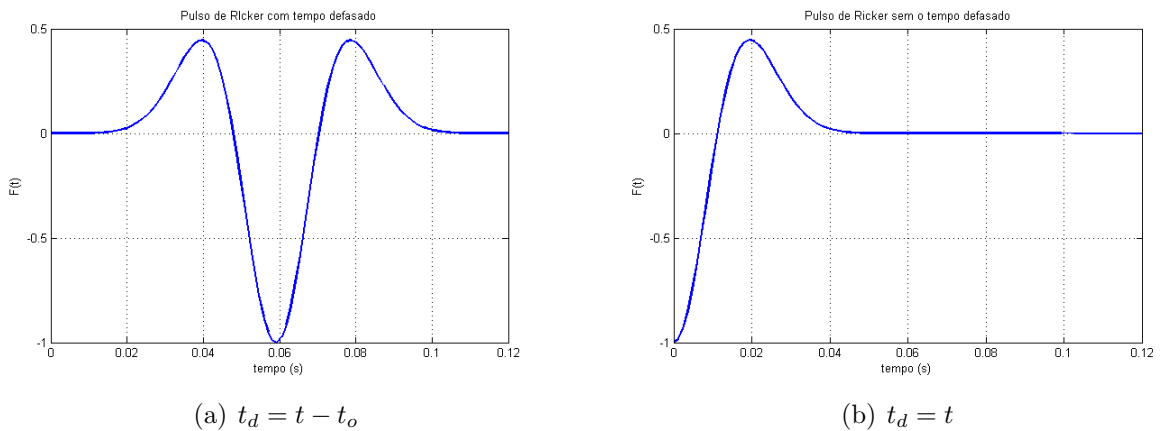


Figura 3: Termo de Fonte Sísmica para $f_{corte} = 60Hz$.

defasagem não seja considerada quando $F(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

Para o caso acústico, o termo de fonte s é considerado como sendo igual ao pulso de

Ricker. Assim, i_V é tomado como sendo uma distribuição gaussiana de modo que sua derivada segunda em s resulte numa expressão idêntica ao pulso de Ricker, contudo é necessário fazer $f = 0$. Portanto,

$$i_V(\vec{r}, t) = \frac{A}{2\pi(\pi f_c)^2} e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2} \delta(\vec{x} - \vec{x}_f), \quad (2.67)$$

onde A é a amplitude da fonte, δ é a função delta de Dirac e $\vec{x}_f$ é a coordenada de aplicação da fonte. Dessa forma, os termos não homogêneos das equações diferenciais acústicas podem ser obtidos a partir da derivada primeira ou segunda de i_V , a depender do modelo utilizado. No caso da equação de onda de pressão, a fonte s será dada por,

$$s = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{f}}{\rho} \right) = \frac{\partial^2 i_V}{\partial t^2}, \quad (2.68)$$

onde foi feito $\vec{f} = 0$. Segue então que

$$s = [2\pi(\pi f_c t_d)^2 - 1] e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2} \delta(\vec{x} - \vec{x}_f). \quad (2.69)$$

Para obter os termos de fonte do caso elástico, equivalente aos termos de fonte acústico, comparamos as equações de ambas as teorias, conforme tabela abaixo.

Tabela 3: Comparação entre termos de fontes.

Equação	Teoria Elástica	Teoria Acústica
Movimento	$\rho \partial_t v_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$ $\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j \tau_{ij} = f_i$	$\rho \partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} p = \vec{f}$ $\rho \partial_t^2 \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{f}$
Continuidade	$\partial_t \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l v_k = -c_{ijkl} \partial_t h_{kl}$ $\tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l u_k = -c_{ijkl} h_{kl}$	$\partial_t p + \kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \kappa \partial_t i_V$ $p + \kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \kappa i_V$
Onda de Velocidade	$\rho \partial_t^2 v_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l v_k) = \partial_t s_i$	$\rho \partial_t^2 \vec{v} - \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \partial_t \vec{s}_u$
Onda de Deslocamento	$\rho \partial_t^2 u_i - \partial_j (c_{ijkl} \partial_l u_k) = s_i$	$\rho \partial_t^2 \vec{u} - \vec{\nabla} (\kappa \vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \vec{s}_u$
Onda de Tensão	$\partial_t^2 \tau_{ij} - c_{ijkl} \partial_l (b \partial_n \tau_{kn}) = -c_{ijkl} s_{kl}$	$\partial_t^2 p - \kappa \vec{\nabla} \cdot (b \vec{\nabla} p) = -\kappa s$
Fonte	$s_i = f_i - \partial_j (c_{ijkl} h_{kl})$ $s_{kl} = \partial_t^2 h_{kl} - \partial_l (b f_k)$	$\vec{s}_u = \vec{f} - \vec{\nabla} (\kappa i_V)$ $s = \partial_t^2 i_V - \vec{\nabla} \cdot (b f)$

Percebe-se que i_V no formalismo elástico é a distribuição de deformação, bem como $f_i = 0$. Assim,

$$h_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{A}{2\pi(\pi f_c)^2} e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2} \delta(\vec{x} - \vec{x}_f). \quad (2.70)$$

A partir do sistema de campo duplo em velocidade e tensão temos que o termo não

homogêneo e não nulo ($\partial_t h_{ij}$) será dado por,

$$\partial_t h_{ij} = -At_d e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2} \delta(\vec{x} - \vec{x}_f). \quad (2.71)$$

É importante observar que a representação dada pela gaussiana é adimensional, contudo, no caso acústico i_V sempre aparece multiplicado por κ que tem dimensão de pressão e no caso elástico h_{ij} sempre aparece multiplicado por c_{ijkl} que tem dimensão de tensão.

2.4 Condições de contorno e condições iniciais

A condição inicial define o que acontece no início do fenômeno modelado, enquanto a condição de contorno descreve o comportamento do fenômeno na fronteira do domínio para todo intervalo de tempo considerado. Tal problema matemático é conhecido como problema de valor inicial e de contorno.

Uma definição trivial para a condição inicial é a de campos nulos. Assim, para o problema da onda representado por termos de derivada segunda, a condição inicial fica,

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t = 0) &= 0 \\ \partial_t u(\vec{r}, t = 0) &= 0. \end{aligned}$$

Classicamente há dois tipos de condição de contorno:

1. **Condições Essenciais** (de Dirichlet) - com valores de campos prescritos,

$$u(\beta) = \alpha,$$

onde β representa os pontos da fronteira e α um valor qualquer.

2. **Condições Naturais** (de Neumann) - com valor da derivada do campo em relação a coordenada espacial, prescrita,

$$\frac{\partial u(\beta)}{\partial \vec{n}} = \alpha.$$

No problema de propagação de onda, essas condições fazem com que toda onda incidente seja refletida com a mesma fase ou com a fase invertida, dependendo da condição.

Além dessas condições existem ainda condições de contorno não-reflexivas (CCNR), muito uteis quando se deseja modelar problema de domínio semi-discreto. No próximo capítulo, as equações de onda de pressão e tensão serão modeladas usando as definições

discretas do Método das Diferenças Finitas, condições iniciais e de contorno nulas e fontes conforme descrita neste capítulo.

3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

Dentre os métodos numéricos utilizados para resolver equações diferenciais parciais, a saber - Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Elementos Finitos (MEF), Método do Elemento Espectral (MEE), Método de Galerkin Descontínuo (MGD), e outros - , o Método das Diferenças Finitas (MDF) tem sido bastante explorado, em especial na modelagem de equações parabólicas e elípticas. Neste capítulo, será abordado os princípios gerais do MDF, obtenção dos operadores de diferença e uma discussão sobre a análise numérica implementada.

3.1 Teoria de equações diferenciais

Toda equação que contém derivadas em seus termos é dita diferencial. Podemos subdividi-las em duas classes, as equações diferenciais ordinárias (**EDO**) e as equações diferenciais parciais (**EDP**). Se uma equação diferencial contém apenas derivadas ordinárias ela é uma EDO, caso contenha pelo menos uma derivada parcial ela é uma EDP.

Por razões práticas e também didática é comum na literatura classificar as equações diferenciais parciais em três grupos distintos: Equações parabólicas, equações elípticas e equações hiperbólicas, [3]. No caso de equações de segunda ordem em duas dimensões da forma,

$$a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y, u_x, u_y, u) = 0,$$

onde a, b, c e d são funções conhecidas. A classificação é feita segundo o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. $\Delta = 0 \rightarrow$ parabólica
2. $\Delta < 0 \rightarrow$ elíptica

3. $\Delta > 0 \rightarrow$ hiperbólica

Como a, b, c e d dependem dos valores de x e y , Δ também depende e pode assumir mais de uma classificação no domínio. Em geral, os dois primeiros tipos apresentam soluções estáveis enquanto que o último pode apresentar soluções singulares.

As equações de onda, apresentadas no capítulo anterior, se enquadram no grupo das equações elípticas, neste caso não precisamos tomar cuidado com possíveis singularidades na solução.

3.2 Método das diferenças finitas

Considere a equação de onda de pressão [Eq.(2.20)], em uma dimensão,

$$\frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x, t)} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial \rho(x)}{\partial x^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x^2} = -\rho(x)s(x, t). \quad (3.1)$$

A ideia geral do método das diferenças finitas é a discretização do domínio e a substituição das derivadas presentes na equação diferencial por aproximações envolvendo somente valores numéricos da função. Tais aproximações são obtidas de duas formas, utilizando a série de Taylor ou por meio de interpolação, discutiremos apenas o primeiro método que é mais utilizado na literatura.

Como o método só envolve valores numéricos da função, neste caso é impossível representar todos os valores numéricos em um domínio limitado qualquer, pois são infinitos pontos, então é necessário discretizar o domínio, ou seja, dividi-lo em partes finitas, e desse modo, as aproximações podem ser escritas em relação ao tamanho do passo, distância entre dois pontos vizinhos.

Para discretizar o domínio de uma função $f(x)$, que vai desde um $x = x_0$ até um $x = x_{N+1}$, dividimos o intervalo em N partes iguais. Assim, quaisquer dois pontos consecutivos (x_i, x_{i+1}) da malha estão espaçados por uma distância de tamanho $\Delta = (x_{N+1} - x_0)/N$, também chamado de passo.

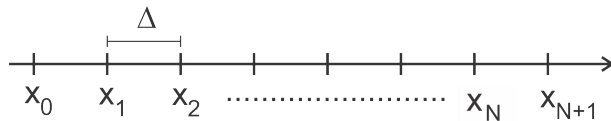


Figura 4: Domínio de uma função discretizado em N partes iguais.

Desse modo, a quantidade infinita de pontos existentes em um intervalo se reduz a

um número finito N de pontos. Logo o domínio discreto contém N pontos, que vai desde x_0 até x_{N+1} e qualquer ponto do domínio é dado por,

$$x_i = x_o + i\Delta, \quad (3.2)$$

onde $i = 0, 1, 2, \dots, (N+1)$. O procedimento acima também pode ser aplicado a n variáveis.

Na prática, todas as derivadas da EDP são substituídas por razões incrementais que convergem para o valor da derivada quando o incremento tende a zero ($\Delta \rightarrow 0$), e o domínio contínuo se transforma em uma malha discreta.

As aproximações citadas anteriormente são obtidas por meio da série de Taylor truncando na ordem adequada. Tais aproximações são conhecidas por **diferenças finitas** (DF) ou **operadores de diferenças finitas** (ODF).

Considere agora uma função contínua $f(x)$. Para encontrar os operadores de diferença finita dessa função, expande-se o valor da função em diferentes pontos do domínio. Fazendo $x = x_i \pm l\Delta$ e de acordo com Eq. (3.2) $x_o = x_i$, obtemos a versão discreta da série de Taylor dada abaixo,

$$f(x_i \pm l\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}} \Big|_{x=x_i} (\pm l\Delta)^n,$$

onde x_i define a expansão em todos os pontos da discretização dada pela Eq. (3.2), já l permite variar o domínio nas duas direções em torno de um ponto específico x_i . Expandindo então $f(x)$ temos,

$$f(x_i + l\Delta) = f(x_i) + \frac{l\Delta}{1!} \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(l\Delta)^2}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} + \frac{(l\Delta)^3}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (3.3)$$

$$\dots + \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n},$$

$$f(x_i - l\Delta) = f(x_i) - \frac{l\Delta}{1!} \frac{df(x_i)}{dx} + \frac{(l\Delta)^2}{2!} \frac{d^2f(x_i)}{dx^2} - \frac{(l\Delta)^3}{3!} \frac{d^3f(x_i)}{dx^3} + \dots \quad (3.4)$$

$$\dots + \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}.$$

Agrupando os termos com índices pares e ímpares nas Eqs. (3.3) e (3.4),

$$f(x_i + l\Delta) = \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n} + \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.5)$$

$$f(x_i - l\Delta) = \sum_{n=2k}^{\infty} \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n} - \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.6)$$

A partir de agora adotaremos a seguinte notação, $f(x_i) = f_i$, e $f(x_i + l\Delta) = f_{i+l}$.

3.2.1 Aproximação para a derivada primeira

Para obter a aproximação da derivada de 1ª ordem, faz-se $l = 1$ nas Eqs. (3.5) e (3.6) e subtrai a Eq. (3.6) da Eq. (3.5), obtendo,

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2 \sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{(l\Delta)^n}{n!} \frac{d^n f(x_i)}{dx^n}.$$

Expandindo o termo do lado direito,

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta \frac{df_i}{dx} + 2\frac{\Delta^3}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} + \dots + 2\frac{\Delta^n}{n!} \frac{d^n f_i}{dx^n},$$

resolvendo para df_i/dx ,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta} - \frac{\Delta^2}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \dots - \frac{\Delta^n}{\Delta(n!)} \frac{d^n f_i}{dx^n}, \quad (3.7)$$

que fornece a aproximação da derivada primeira com erro de truncamento em segunda ordem, isto é, Δ^2 . Nas 3 expressões acima $n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Para obter aproximações de ordem superior, é necessário considerar mais pontos da malha, ou seja, outros valores de l . Fazendo $l = 2$ nas Eqs. (3.5) e (3.6), e subtraindo a Eq. (3.6) da Eq. (3.5), obtém-se,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta} - \frac{4\Delta^2}{3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{16\Delta^4}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} - \dots - \frac{(2\Delta)^n}{2\Delta(n!)} \frac{d^n f_i}{dx^n}. \quad (3.8)$$

Combinando agora as Eqs. (3.7) e (3.8) vem que,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{4}{3} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta} - \frac{1}{3} \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4\Delta} + 4 \frac{\Delta^4}{5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} + \dots,$$

que é a aproximação para a derivada primeira em 4ª ordem, isto é, com erro de truncamento de ordem Δ^4 .

De maneira mais compacta,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta} + O(\Delta^2), \quad (3.9)$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta} + O(\Delta^4). \quad (3.10)$$

3.2.2 Aproximação para a derivada segunda

Somando as Eqs. (3.5) e (3.6), para $l = 1$, obtém-se:

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2 \sum_{2=2k}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \frac{d^n f_i}{dx^n}, \quad (3.11)$$

ou ainda,

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + 2\frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2 f_i}{dx^2} + 2\frac{\Delta^4}{4!} \frac{d^4 f_i}{dx^4} + \dots + 2\frac{\Delta^n}{n!} \frac{d^n f_i}{dx^n}, \quad (3.12)$$

Isolando $d^2 f_i/dx^2$,

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2} - 2\frac{\Delta^2}{4!} \frac{d^2 f_i}{dx^4} - \dots - 2\frac{\Delta^n}{\Delta^2(n!)} \frac{d^n f_i}{dx^n}, \quad (3.13)$$

que é a aproximação em 2º ordem para a derivada segunda.

Tomando agora $l = 2$ nas Eqs. (3.5) e (3.6) e somando os resultados, obtém-se,

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{(2\Delta)^2} - 2\frac{(2\Delta)^2}{4!} \frac{d^2 f_i}{dx^4} - \dots - 2\frac{(2\Delta)^n}{(2\Delta)^2(n!)} \frac{d^n f_i}{dx^n}. \quad (3.14)$$

Multiplicando a Eq. (3.13) por 4 e subtraindo da Eq. (3.14), vem,

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2} - \frac{1}{3} \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4\Delta^2} + O(\Delta^4), \quad (3.15)$$

que é a aproximação em 4º ordem para a derivada segunda.

De forma mais compacta,

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2} + O(\Delta^2), \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{-f_{i-2} + 16f_{i-1} - 30f_i + 16f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta^3} + O(\Delta^4). \quad (3.17)$$

Os operadores de DF encontrados podem ser aplicados a qualquer variável bem como a funções de n variáveis sendo que as DF são escritas para a variável específica enquanto as outras se mantêm constantes, quem determina é a variável derivada em questão. Quando substituímos os operadores em uma ED, o resultado é um esquema de diferenças finitas. Subsequente essa ideia será aplicada para resolver as equações obtidas no capítulo anterior.

Seguindo o mesmo raciocínio obtém-se esquemas de diferenças finitas em ordem de aproximações maiores, por hora, os esquemas desenvolvidos acima é suficiente para as aplicações desse trabalho.

Observe agora que os operadores encontrados apresentam a característica de utilizar pontos simétricos, ou seja, a mesma quantidade de pontos a direita e a esquerda do ponto de equilíbrio.

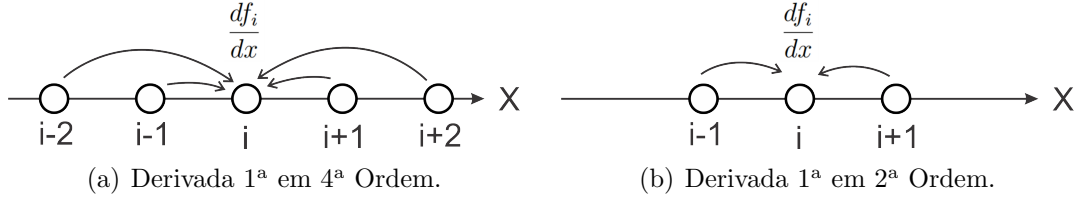


Figura 5: Operador de malha simples em 4ª ordem (a) e 2ª ordem (b).

Essa característica contribui para o equilíbrio da EDP em cada ponto. Operadores que não satisfazem essa simetria em geral não atendem aos requisitos de estabilidade, consistência e convergência, propriedades fundamentais do MDF.

A malha mostrada até aqui é espaçada apenas em Δ , não tendo, em nenhuma hipótese pontos calculados entre os intervalos. Esse tipo de malha é denominado de **malha simples**.

Considerando agora malhas com pontos intermediários, como mostrado na Fig. (6), e $l = 1/2 + r$ com $r \in \mathbb{Z}$. Substituindo l nas Eqs. (3.5) e (3.6) para $r = 0$, subtraindo a Eq. (3.6) de Eq. (3.5), obtém-se,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta} - \frac{\Delta^2}{2^2 \cdot 3!} \frac{d^3 f_i}{dx^3} - \frac{\Delta^4}{2^4 \cdot 5!} \frac{d^5 f_i}{dx^5} \dots, \quad (3.18)$$

que é o operador de derivada primeira em 2ª ordem na malha intercalada. De forma compacta,

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta} + O(2).$$

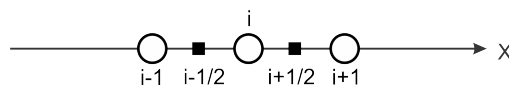


Figura 6: Malha intercalada.

Os operadores de malha intercaladas levam os pontos da malha padrão para os pontos da malha intercalada e vice-versa, sendo aplicado a sistemas de EDP de 1ª ordem com

campos acoplados, caso descrito na modelagem elástica.

3.3 Propriedades das equações de diferenças

A solução numérica de uma EDP é calculada a partir dos valores iniciais, parâmetros do meio e parâmetros da malha. O MDF permite resolver ED substituindo as derivadas ordinárias ou parciais por equações de diferenças finitas (EDF). Como as EDF são aproximações de ordem $O(\Delta)$, é evidente que tais esquemas produzem erros tanto inerente ao método quanto pelo uso de computadores nos cálculos. Desse modo, para garantir que a resposta das EDF representem de forma satisfatória a solução da ED original, é necessário que as EDF atendam certos critérios de **consistência**, **estabilidade** e **convergência numérica**. Tais critérios estabelecem uma relação entre a EDF (aproximação) e a ED original, bem como entre a solução numérica e exata.

Uma EDF é dita consistente com uma EDP se o erro de truncamento ϵ_r^n vai a zero quando o espaçamento da malha Δ e o incremento do tempo Δt tendem a zero. O erro de truncamento é obtido pela diferença entre EDF e a EDP. Sendo u_r^n a solução exata da EDP e U_r^n a solução numérica, o erro é definido como

$$\epsilon_r^n = |u_r^n - U_r^n|.$$

Para $\Delta \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, $\epsilon_r^n \rightarrow 0$, desse modo, um método numérico é **consistente** com relação a uma equação, se o erro de truncamento local desse método para a equação for pelo menos $O(\Delta)$, isto é, $\epsilon_r^n \leq O(\Delta)$.

Pode acontecer da condição de consistência ser satisfeita apenas quando uma certa relação entre o espaçamento da malha e do tempo também forem satisfeitas. Nesse caso, a EDF é dita **condicionalmente consistente**. Se o erro de truncamento é conhecido, então a prova de consistência é direta.

O erro de que trata a consistência é local, isto é, avaliado em um ponto específico do domínio, em um instante definido. Contudo, a solução é calculada diversas vezes nesse ponto à medida que os cálculos evoluem no tempo, como consequência disto, pode acontecer do erro se amplificar, o que degradaria a solução. Por essa razão é necessário analisar a **estabilidade** do esquema numérico. O cuidado que deve-se ter é fazer com que os erros locais não se amplifiquem pois caso contrário a solução se torna instável. Há casos em que a estabilidade depende do espaçamento da malha e do passo de tempo, esses esquemas são chamados de **condicionalmente estável**.

Na análise de estabilidade de um esquema de diferença finita o método mais abordado na literatura é o de Von Neumann, Ref. [8]. A ideia de Von Neuman se baseia no princípio da superposição, onde o erro global é o resultado da soma dos erros locais. Esse fato é interpretado matematicamente como soma de harmônicos e o erro é representado pela série de Fourier.

Para ser estável o esquema precisa obedecer a dois critérios: o critério de estabilidade e o de amplificação. O primeiro estabelece que $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_r^n \leq K$, onde K é um valor finito real, ou seja, o erro tem que tender a um valor finito. O segundo critério diz respeito a amplificação do erro,

$$\left| \frac{\epsilon_r^{n+1}}{\epsilon_r^n} \right| \leq 1,$$

o erro não pode ser amplificado.

A última propriedade é a convergência. Ela define que a solução discreta deve convergir para a solução original quando o espaçamento da malha e o passo de tempo tendem a zero. Para provar a convergência o teorema da equivalência de Lax-Richtmyer, Ref. [3], estabelece que, para equações lineares as propriedades de consistência e estabilidade são equivalentes a de convergência, assim basta provarmos a estabilidade e consistência que temos provado a convergência.

Os principais resultados de estabilidade encontrado na literatura para esquemas de diferenças finitas aplicado a equação da onda bidimensional com operadores em segunda ordem são mostrados abaixo:

$$c_P \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{c_P^2 + c_S^2}}, \quad (3.19)$$

onde o primeiro é aplicado aos esquemas isotrópicos acústicos e o segundo a esquemas elásticos ortotrópicos. No primeiro caso tem-se, apenas a velocidade da onda longitudinal c_P , enquanto nos demais casos é necessário incluir o segundo modo de onda, a velocidade transversal c_S . Vale ressaltar que as análises são realizadas apenas para os esquemas homogêneos, critérios para operadores de maior grau podem ser encontrados na Ref. [7]. A análise da estabilidade para esquemas heterogêneos ainda constitui um problema em aberto. Contudo, mesmo utilizando esses resultados nos esquemas heterogêneos anisotrópicos, as respostas encontradas não apresentam sinais de instabilidade e inconsistência.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo é apresentado os esquemas numéricos referente a formulação acústica e elástica e os resultados obtidos. As equações de onda de pressão (teoria acústica) e a equação de onda de tensão (teoria elástica), mostradas no capítulo 2 são discretizadas com base nos operadores de diferenças finitas definidos no capítulo 3.

4.1 Equação de onda de pressão discreta

Vamos inicialmente escrever a [Eq. (2.20)] nas dimensões (x e z), isto é,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\rho s. \quad (4.1)$$

Nesse caso, temos uma malha espacial bidimensional com x variando de 0 a L_x e z variando de 0 a L_z . Denotaremos o domínio, por $\Omega = \{(x, z) | x \in [0, L_x], z \in [0, L_z]\}$ e t variando de 0 a T . As condições iniciais e de contorno do problema são:

$$\left\{ \begin{array}{ll} p(x, z, 0) = V(x, z), & x \in [0, L_x], y \in [0, L_z] \\ p_t(x, z, 0) = I(x, z), & x \in [0, L_x], y \in [0, L_z] \\ p(0, z, t) = 0, & y \in [0, L_z], t \in [0, T] \\ p(L_x, z, t) = 0, & y \in [0, L_z], t \in [0, T] \\ p(x, 0, t) = 0, & y \in [0, L_x], t \in [0, T] \\ p(x, L_z, t) = 0, & y \in [0, L_z], t \in [0, T] \end{array} \right.$$

As funções $V(x, z)$ e $I(x, z)$ definem o perfil do deslocamento de pressão inicial e a variação temporal inicial do deslocamento de pressão, respectivamente. As duas primeiras condições são as condições iniciais e as outras são as condições de contorno também conhecidas por **condições de Dirichlet**. Como a EDP é de 2ª ordem é necessário 2 condições iniciais e 4 condições de contorno, uma para cada lado do quadrado $[0, L_x] \times [0, L_z]$.

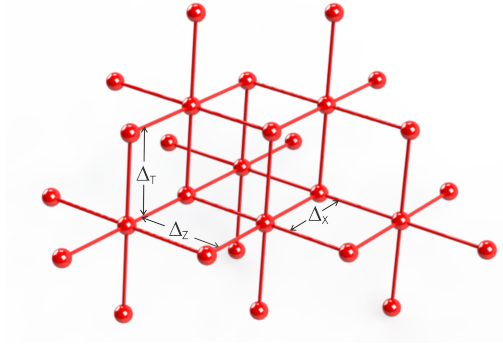


Figura 7: Configuração de uma malha tridimensional nas coordenadas x , z e t .

O domínio temporal $[0, T]$ é representado por um número finito de pontos na malha,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N_t-1} < t_{N_t} = T.$$

Similarmente, o domínio espacial $[0, L_x] \times [0, L_z]$,

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x-1} < x_{N_x} = L_x, \quad (4.2)$$

$$0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{N_z-1} < z_{N_z} = L_z. \quad (4.3)$$

A Fig. 7 mostra a configuração de uma malha tridimensional com 2 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal consistindo de pontos (x_i, z_j, t_n) com $i = 0, \dots, N_x$, $j = 0, \dots, N_z$ e $n = 0, \dots, N_T$. Para pontos da malha uniformemente distribuídos podemos introduzir um espaçamento de malha constante $\Delta_x = \Delta_z$ e Δ_t , assim $N_x = L_x/\Delta_x$ e $N_z = L_z/\Delta_z$. Desse modo,

$$x_i = i\Delta_x, \quad z_j = j\Delta_z, \quad t_n = n\Delta_t.$$

A solução $p(x, z, t)$ será calculada em cada ponto da malha. Para tanto, é necessário discretizar a EDP (4.1) com $p(x, z, t) \approx p(x_i, z_j, t_n)$ que denotaremos a partir de agora por, $p_{i,j}^n$. Aproximando as derivadas da Eq. (4.1) em 2ª ordem, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 p_{i,j}^n}{\partial x^2} = [D_x D_x p]_{i,j}^n = \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{\Delta_x^2}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 p_{i,j}^n}{\partial z^2} = [D_z D_z p]_{i,j}^n = \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{\Delta_z^2}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 p_{i,j}^n}{\partial t^2} = [D_t D_t p]_{i,j}^n = \frac{p_{i,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^n + p_{i,j}^{n-1}}{\Delta_t^2}, \quad (4.6)$$

e ainda,

$$\xi_{i,j}^n = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x} \left(\frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta_x} \right) + \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial z} \left(\frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta_y} \right), \quad (4.7)$$

sendo $\xi_{i,j}^n$ o operador divergente discreto. Substituindo os operadores dado pelas Eqs. [(4.4) - (4.7)] na EDP (4.1) chegamos a equação discreta para a equação de onda acústica escrita como

$$[D_x D_x p]_{i,j}^n + [D_z D_z p]_{i,j}^n - \frac{1}{c^2} [D_t D_t p]_{i,j}^n - \frac{1}{\rho_{i,j}} \xi_{i,j}^n = -\rho_{i,j} s_{i,j}^n. \quad (4.8)$$

Para equilibrar a equação de onda em todos os pontos do domínio discreto começamos dos valores conhecidos e a partir deles calculamos a evolução em cada ponto, isto é, $p_{i,j}^{n+1}$. Com base na discretização temporal observamos 3 instantes de tempo envolvidos no cálculo, $p_{i,j}^{n-1}$, $p_{i,j}^n$ e $p_{i,j}^{n+1}$, logo para cada valor de n ligamos um valor em $n-1$ para obter $n+1$. Tirando $p_{i,j}^{n+1}$, obtém-se,

$$p_{i,j}^{n+1} = -p_{i,j}^{n-1} + 2p_{i,j}^n + A(p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n) + B(p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n) - \frac{D}{\rho_{i,j}} \xi_{i,j}^n + D\rho_{i,j} s_{i,j}^n, \quad (4.9)$$

onde,

$$A = \frac{c^2 \Delta_t^2}{\Delta_x^2}, \quad B = \frac{c^2 \Delta_t^2}{\Delta_z^2}, \quad D = c^2 \Delta_t^2.$$

O esquema acima liga 6 pontos da malha ao ponto $p_{i,j}^{n+1}$, são eles, $p_{i,j}^n$, $p_{i,j}^{n-1}$, $p_{i+1,j}^n$, $p_{i-1,j}^n$, $p_{i,j+1}^n$ e $p_{i,j-1}^n$, conforme mostra a Fig. 8a.

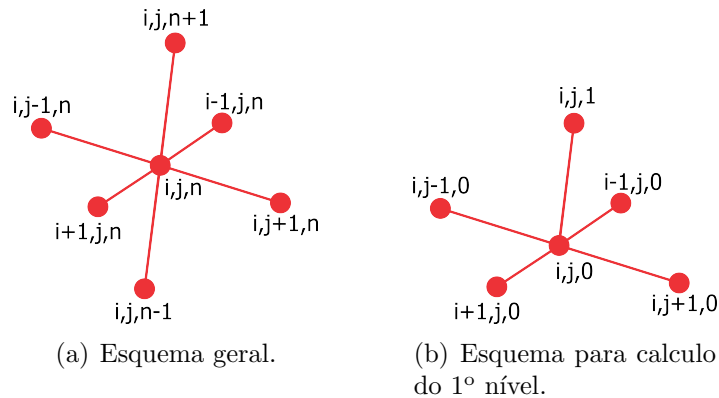


Figura 8: Extrutura da EDF.

Em $n = 0$ tem-se $p_{i,j}^1$, contudo é necessário conhecer $p_{i,j}^{-1}$, ponto que está fora da malha. Utilizando a segunda condição inicial modificamos o esquema para calcular os

valores de $p_{i,j}^1$, aplicando o operador de derivada primeira,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial p_{i,j}^n}{\partial t} \right|_{n=0} &= V(x_i, z_j) \\ \left. \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n-1}}{2\Delta_t} \right|_{n=0} &= V(x_i, z_j) \\ p_{i,j}^{-1} &= p_{i,j}^1 - 2\Delta_t V_{i,j}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A alteração é feita fazendo $p_{i,j}^{-1} = p_{i,j}^1 - 2\Delta_t V(x_i, z_j)$. Desse modo o esquema para o primeiro nível depende apenas de 5 pontos anteriores conforme mostra a figura (8b),

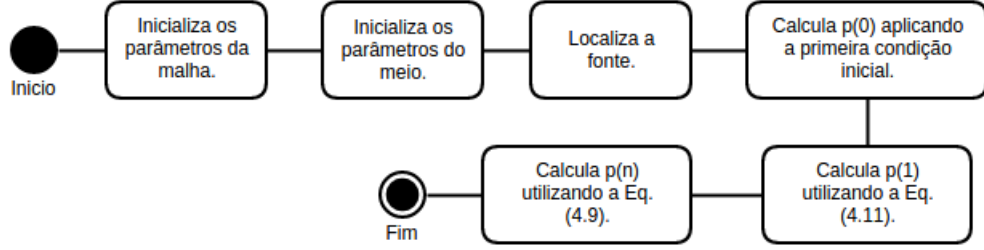
$$\begin{aligned} p_{i,j}^1 = \Delta_t V_{i,j} + p_{i,j}^0 + \frac{A}{2}(p_{i+1,j}^0 - 2p_{i,j}^0 + p_{i-1,j}^0) + \frac{B}{2}(p_{i,j+1}^0 - 2p_{i,j}^0 + p_{i,j-1}^0) \\ - \frac{D}{2\rho_{i,j}}\xi_{i,j}^0 + \frac{D}{2}\rho_{i,j}s_{i,j}^0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Na fronteira, p é calculado pelas 4 condições de contorno. Assumindo que $p_{i,j}^n$ e $p_{i,j}^{n-1}$ já estão calculados para $i = 0, \dots, N_x$ e $j = 0, \dots, N_z$, a única quantidade desconhecida é $p_{i,j}^{n+1}$ que é encontrada aplicando a Eq. (4.9). Os valores A e B são conhecidos por número de Courant, parâmetros importantes para a qualidade do esquema pois dependem da condição de estabilidade. Aos pontos de fronteira, $i = 0$, $i = L_x$, $j = 0$ e $j = L_z$, aplica-se $p_{i,j}^{n+1} = 0$.

As relações e valores necessários para o cálculo da resposta numérica podem ser resumidos em um algoritmo computacional.

1. Calcular os valores iniciais com $p_{i,j}^0 = I_{i,j}$ para $i = 0, \dots, N_x$ e $j = 0, \dots, N_z$.
2. Calcular $p_{i,j}^1$ com a Eq. (4.11) e definir as condições de contorno na fronteira.
3. Para cada nível de tempo subsequente a $n = 0$:
 - (a) Aplicar a equação algébrica (4.9) para saber $p_{i,j}^{n+1}$ em $i = 0, \dots, N_x$ e $j = 0, \dots, N_z$.
 - (b) Definir $p_{i,j}^{n+1} = \alpha_\eta$ com $\eta = 1, \dots, 4$ para os pontos da fronteira.

O procedimento de cálculo é descrito no diagrama de bloco a seguir.



4.2 Equações de onda de tensão discreta

O modelo elástico utilizado é o da equação de campo duplo de velocidade e tensão [Eq. (2.42)]. Utilizando o operador de derivada primeira em 2ª ordem para malha intercalada e introduzindo a notação $(v_x, v_z) = (U, V)$ e $(\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}) = (X, Z, T)$ o esquema de diferenças finitas do sistema (2.42) fica,

$$U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = U_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^n - X_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + b\Delta_t f_x, \quad (4.12)$$

$$V_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = V_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(T_{i+\frac{1}{2},j}^n - T_{i-\frac{1}{2},j}^n + Z_{i,j+\frac{1}{2}}^n - Z_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + b\Delta_t f_z, \quad (4.13)$$

$$X_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = X_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + Ac_{11} \left(U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) + Ac_{13} \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + Ac_{15} \left(V_{i+\frac{1}{2},j}^n - V_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i,j+\frac{1}{2}}^n - U_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}, \quad (4.14)$$

$$Z_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = Z_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + Ac_{13} \left(U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) + Ac_{33} \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + Ac_{35} \left(V_{i+\frac{1}{2},j}^n - V_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i,j+\frac{1}{2}}^n - U_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}, \quad (4.15)$$

$$T_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = T_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + Ac_{15} \left(U_{i+\frac{1}{2},j}^n - U_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) + Ac_{35} \left(V_{i,j+\frac{1}{2}}^n - V_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + Ac_{55} \left(V_{i+\frac{1}{2},j}^n - V_{i-\frac{1}{2},j}^n + U_{i,j+\frac{1}{2}}^n - U_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}, \quad (4.16)$$

onde,

$$A = \frac{\Delta_t}{h}, \quad (4.17)$$

sendo Δ_t o incremento no tempo e h o passo da malha. Para representar computacionalmente este esquema são necessários pelo menos 5 estruturas de dados para armazenar os valores de U, V, X, Z e T . Desenhando a configuração espacial de cada campo obtemos a seguinte distribuição de pontos.

Observe que todas as configurações apresentam valores intermediários na malha, esse fato dificulta o desenvolvimento de um algoritmo para o cálculo do sistema, uma vez que a indexação de matrizes e vetores é feita apenas com valores positivos inteiros. Desse modo é necessário ajustar o esquema para obter uma configuração mais fácil computacionalmente.

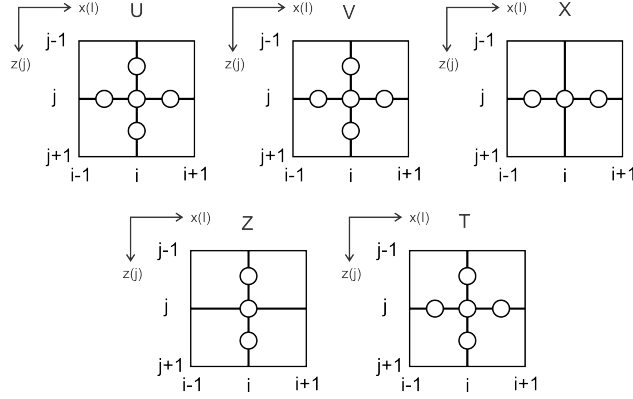


Figura 9: Configuração espacial do EDF para as Eqs. [(4.12) - (4.16)].

Adicionando $1/2$ ao índice i das Eqs. [(4.13), (4.14) e (4.15)], ao índice j das Eqs. (4.13) e (4.16) e ao índice n das Eqs. [(4.14), (4.15) e (4.16)] o esquema anterior é alterado para

$$U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = U_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^n - X_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + b\Delta_t f_x, \quad (4.18)$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - Z_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) + b\Delta_t f_z, \quad (4.19)$$

$$X_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = X_{i+\frac{1}{2},j}^n + Ac_{11} \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{13} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{15} \left(V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}, \quad (4.20)$$

$$Z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = Z_{i+\frac{1}{2},j}^n + Ac_{13} \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{33} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{35} \left(V_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - V_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}, \quad (4.21)$$

$$T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + Ac_{15} \left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{35} \left(V_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{55} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \partial_t g_{xx}. \quad (4.22)$$

Nessas condições a configuração espacial da malha fica.

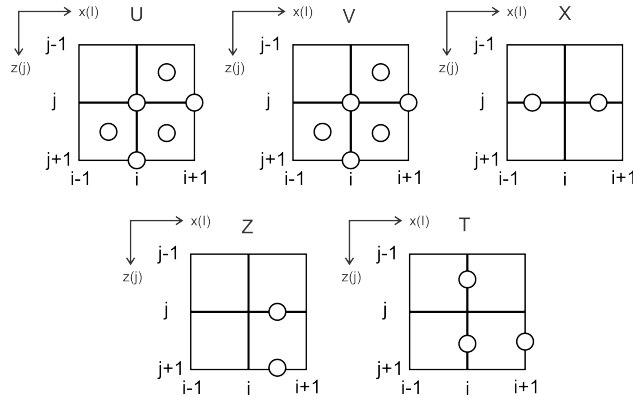


Figura 10: Configuração espacial do esquema dado pelas Eqs. [(4.18) - (4.22)].

Dessa forma os termos intermediários foram eliminados ficando apenas termos intercalados. Esse esquema ainda pode ser simplificado dependendo da simetria elástica considerada. No caso isotrópico, temos

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{33} = \rho c_P^2 \\
 c_{13} &= \rho c_P^2 - 2\rho c_S^2 \\
 c_{55} &= \rho c_S^2 \\
 c_{15} &= c_{35} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Aplicando esses valores ao esquema de diferenças finitas anterior, obtém-se

$$U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = U_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(X_{i+\frac{1}{2},j}^n - X_{i-\frac{1}{2},j}^n + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) + b\Delta_t f_x, \tag{4.24}$$

$$V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + bA \left(T_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + Z_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - Z_{i+\frac{1}{2},j}^n \right) + b\Delta_t f_z, \tag{4.25}$$

$$X_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = X_{i+\frac{1}{2},j}^n + Ac_{11} \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{13} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \eta_{xx}, \tag{4.26}$$

$$Z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = Z_{i+\frac{1}{2},j}^n + Ac_{13} \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \right) + Ac_{33} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \eta_{xx}, \tag{4.27}$$

$$T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = T_{i,j+\frac{1}{2}}^n + Ac_{55} \left(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - V_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) - \Delta_t \eta_{xx}, \tag{4.28}$$

em que,

$$\eta_{ij} = \partial_t g_{ij}. \tag{4.29}$$

A disposição espacial dos pontos em U, V, X, T e Z é simplificada conforme mostra a figura abaixo.

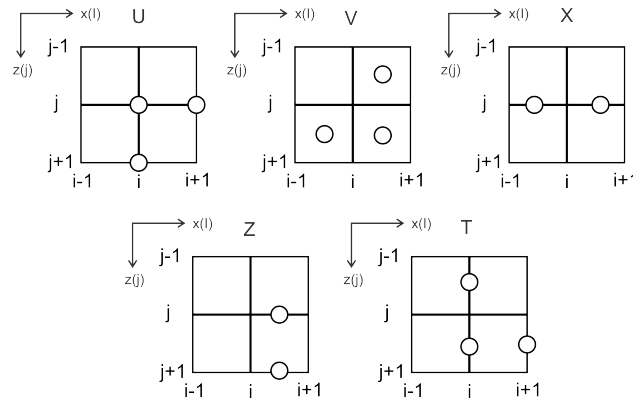


Figura 11: Distribuição espacial para o caso Isotrópico dados pelas Eqs. [(4.24) - (4.28)].

Nessas condições, os termos de fonte ficam,

$$f_x = 0,$$

$$\begin{aligned}
f_z &= 0, \\
g_{xx} &= c_{11}h_{xx} + c_{13}h_{zz}, \\
g_{zz} &= c_{13}h_{xx} + c_{33}h_{zz}, \\
g_{xz} &= c_{55}(h_{xz} + h_{zx}).
\end{aligned} \tag{4.30}$$

O sistema de Equações Diferenciais acopladas dado pelas Eqs. [(4.12) a (4.16)] possui apenas derivadas primeira, portanto, apenas uma condição inicial é necessária para todos os campos, isto é, $U_{ij}^0 = \alpha_1$, $V_{ij}^0 = \alpha_2$, $X_{ij}^0 = \alpha_3$, $T_{ij}^0 = \alpha_4$ e $Z_{ij}^0 = \alpha_5$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$. As condições de contorno são semelhantes as descritas no caso acústico. Nesse esquema, os campos de velocidade $U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ e $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ são calculados a partir de seus valores em um tempo anterior a n , isto é, $U_{ij}^{n-\frac{1}{2}}$ e $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$, e dos valores de X , T e Z no instante atual n . Esse resultado é usado no cálculo dos campos de tensão $X_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$, $T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ e $Z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$. Assim, os valores do campo de velocidade são levados para o campo de tensão e vice-versa. A consistência dimensional das equações é garantida pela presença do inverso da densidade nas equações de velocidade e dos valores do tensor de elasticidade nas equações de tensão.

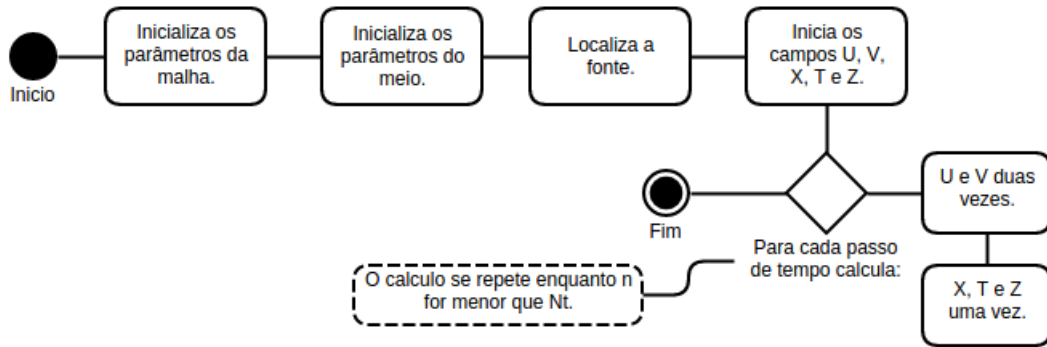
Note que os campos de tensão avançam uma unidade de tempo a cada iteração, enquanto os campos de velocidade avançam meia unidade de tempo, por isso, a cada iteração os campos de velocidade são calculados duas vezes, conforme pode ser visto no programa descrito no Apêndice (B).

O cálculo da resposta elástica é resumido no algoritmo abaixo:

1. Inicializa os campos U , V , X , T e Z com os valores iniciais.
2. Para cada passo de tempo calcula:
 - (a) $U_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ e $V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ duas vezes.
 - (b) $X_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$, $T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ e $Z_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}$ uma vez.

No diagrama de blocos o procedimento de cálculo é descrito abaixo.

A implementação dos algoritmos referentes as duas formulações discretas podem ser encontrados nos Apêndices A e B.



4.3 Resultados numéricos

Em nossas análises, consideramos uma região quadrada de largura 1000 m e profundidade 1000 m com densidade de 1000 kg/m^3 . A velocidade da onda da modelagem acústica foi de $c = 1000 \text{ m/s}$, igual a aplicada na modelagem elástica $c_S = c_P = 1000 \text{ m/s}$. Todas as condições iniciais e de contorno foram nulas.

A malha considerada está espaçada em $h = 5 \text{ m}$, com isso, utilizando as condições de estabilidade mostrada no Capítulo 3, para a formulação acústica e elástica, o incremento no tempo foi de $3,5 \times 10^{-3} \text{ s}$. Com esse valor, temos em um tempo de 2 s, $N_T = 565$ passos de tempo. A malha espacial é constituída de $N_x = N_z = 1000/5 = 200$ pontos, totalizando 40000 pontos. Portanto a cada iteração 40000 pontos são calculados, assim, cerca de $40000 \times 565 = 22.6 \text{ M}$ pontos são calculados durante os 2 s. Esses valores constituem os parâmetros necessários para execução dos programas mostrados nos Apêndices A e B, escritos e executados usando o Matlab 2013.

A fonte mostrada no Capítulo 2 foi localizada no centro do domínio, isto é, $x_f = (500 \text{ m}, 500 \text{ m})$. A frequência de corte escolhida foi 60 Hz, assim, $f_c = 319,04 \text{ Hz}$ e $t_o = 0,047 \text{ s}$. A Fig. 12 mostra a configuração dos campos de pressão acústica e tensão elástica em dois instantes de tempo 0,175 e 0,35 s. Percebe-se a propagação de pulsos esféricos a partir do centro. Note que para o meio considerado as respostas acústicas e elásticas são similares. Para tempos maiores, 0,7 e 1,4 s, conforme mostrado nas Figs. 13 e 14, o pulso já tem atingido as bordas da região considerada e sofrido reflexão.

Por motivo de completeza também mostramos na Fig. 15 as amplitudes de pressão e tensão elástica em todos os pontos do domínio $x0z$ para 1,4s. Essas imagens mostram uma boa aproximação entre as respostas acústica e elástica.

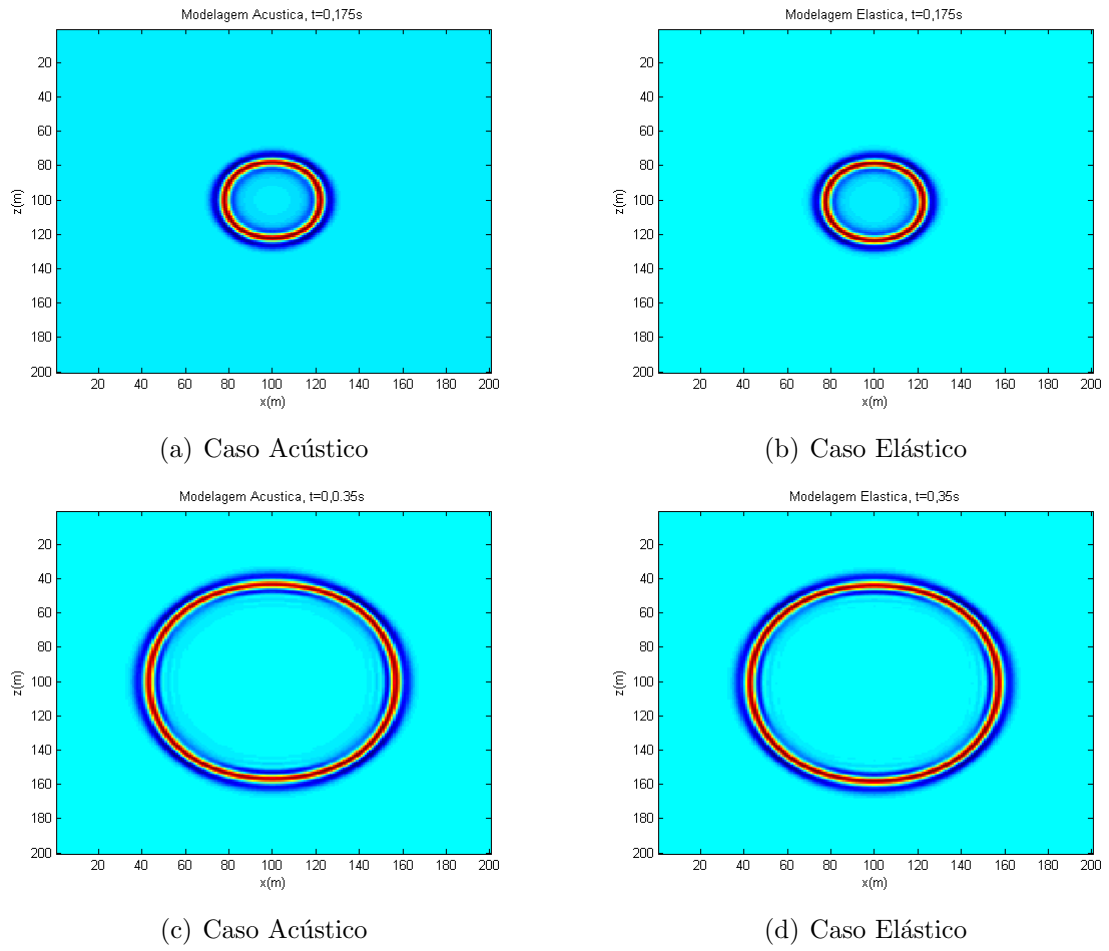


Figura 12: Campo de pressão e tensão para 0,175 s (a) e (b) e 0,35 s (c) e (d).

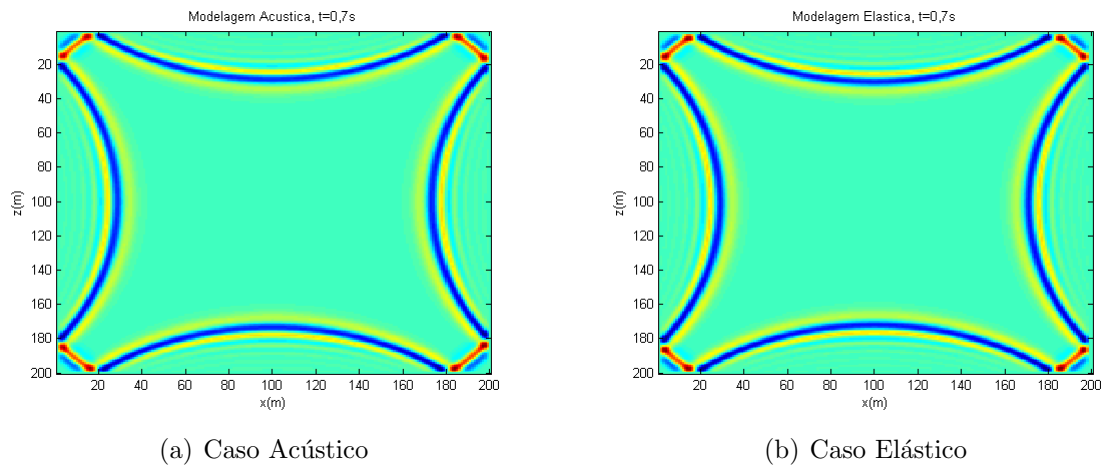


Figura 13: Campo de pressão e tensão para 0,7 s.

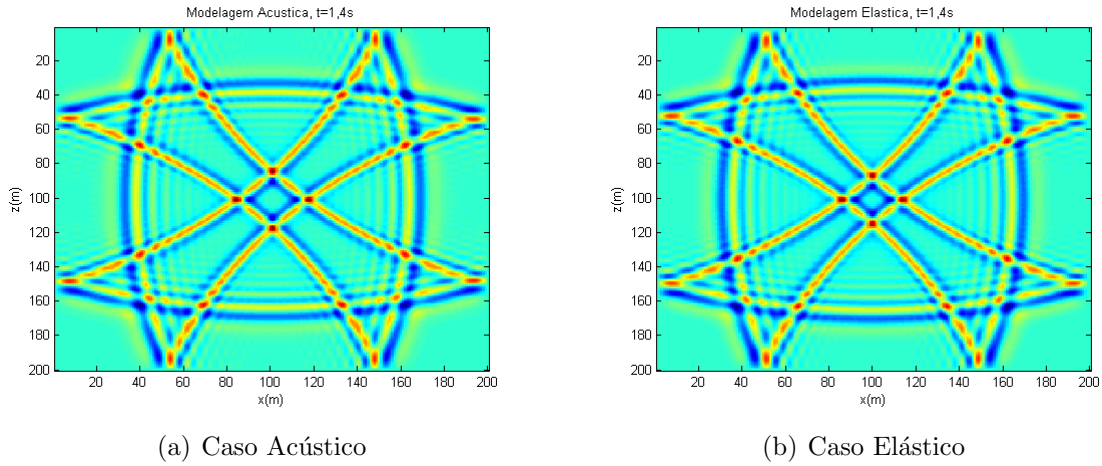


Figura 14: Campo de pressão e tensão para 1,4 s.

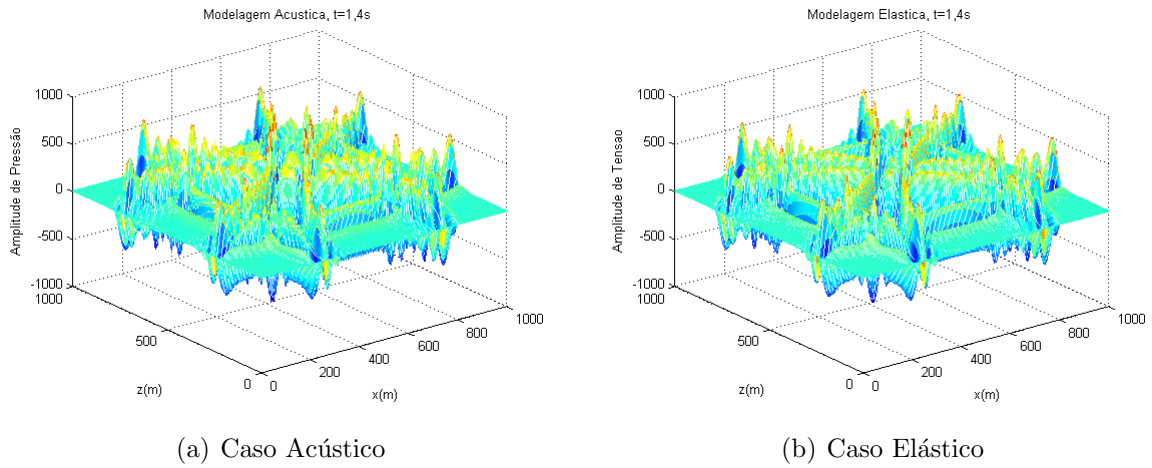


Figura 15: Amplitude de pressão e tensão nos pontos do domínio xOz em $t=1,4$ s.

Na Fig. 16 tomamos um ponto fixo $(x, z) = (500 \text{ m}, 250 \text{ m})$ e mostramos a variação da amplitude de tensão em função do tempo para a resposta acústica (curva tracejada) e a resposta elástica (curva contínua), percebemos um pequeno atraso entre as duas respostas e que esse atraso aumenta com o tempo. Lembrando que a resposta acústica fornece apenas uma componente (a pressão), enquanto a elástica fornece 3 componentes de tensão ($\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz}$), a resposta mostrada diz respeito apenas a componente τ_{xx} . Note que para $t < 1\text{ s}$ as respostas acústica e elástica estão sobrepostas, Fig. (17a). Enquanto para $t > 1\text{ s}$ percebe-se uma pequena defasagem das respostas acústica e elástica, Fig. (17b).

Devido a consideração das tensões cisalhantes, a resposta elástica não é exatamente igual em todas as direções. Os gráficos das Figs. 18a, 18b e 18c representam a resposta elástica para τ_{xx} , τ_{xz} e τ_{zz} . Note que apesar da fase ser a mesma em τ_{xx} e τ_{xz} , a amplitude varia, enquanto τ_{zz} tem a fase invertida.

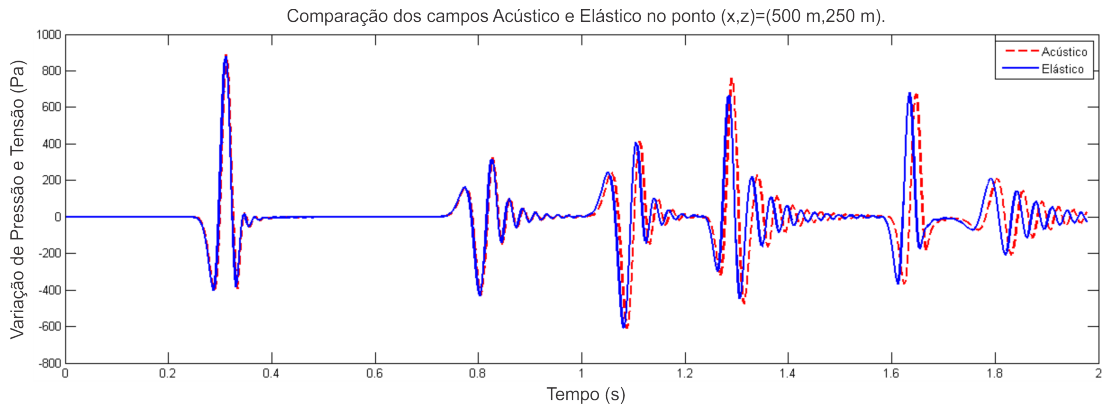
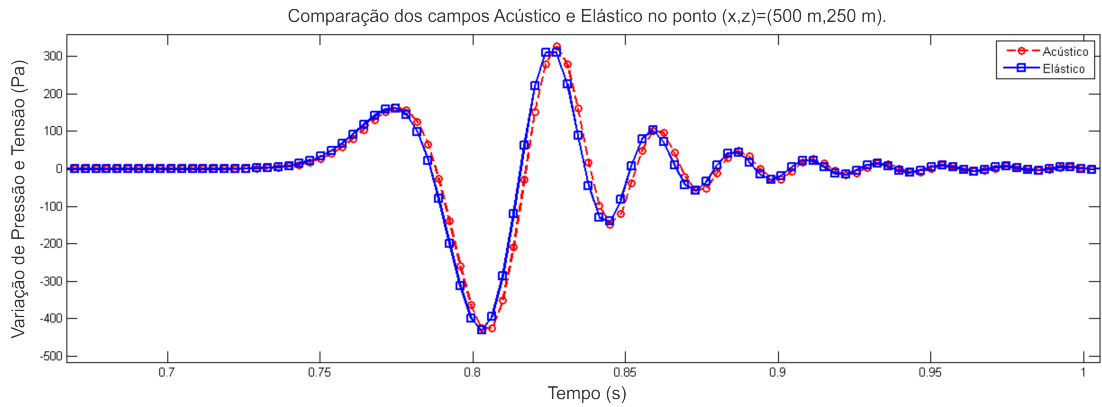
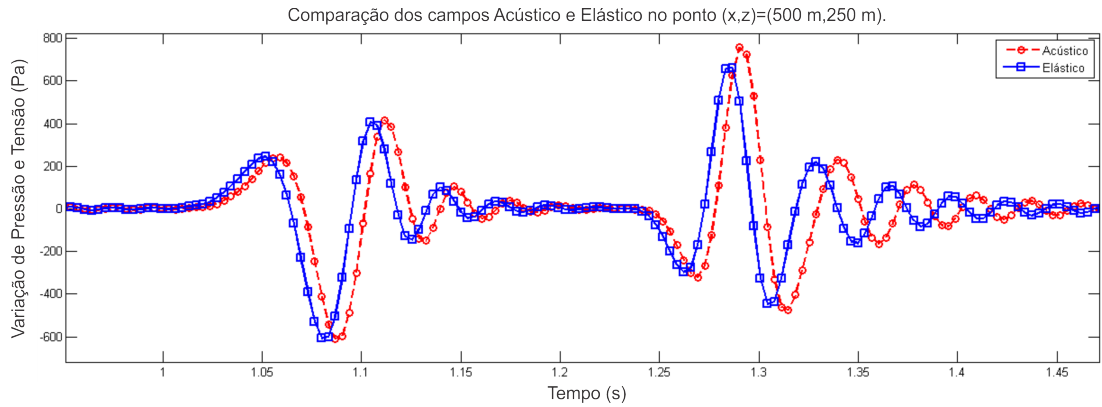


Figura 16: Evolução da Pressão e Tensão Dinâmica com o tempo no ponto $(x, z) = (500 \text{ m}, 250 \text{ m})$.



(a) Detalhes da evolução da amplitude de pressão e tensão com o tempo no ponto $(x, z) = (500 \text{ m}, 250 \text{ m})$ entre 0,7 s e 1 s.



(b) Detalhes do ponto $(x, z) = (500 \text{ m}, 250 \text{ m})$ entre 1 s e 1,3 s.

Figura 17: Efeitos da evolução no tempo.

A Fig. 19 mostra um comparativo entre τ_{xx} e τ_{xz} . Desse modo, como o sistema elástico constitui um conjunto de equações diferenciais acopladas, a resposta em uma direção influencia as demais de modo que não apresenta resposta igual a acústica, mesmo considerando os mesmos parâmetros do meio.

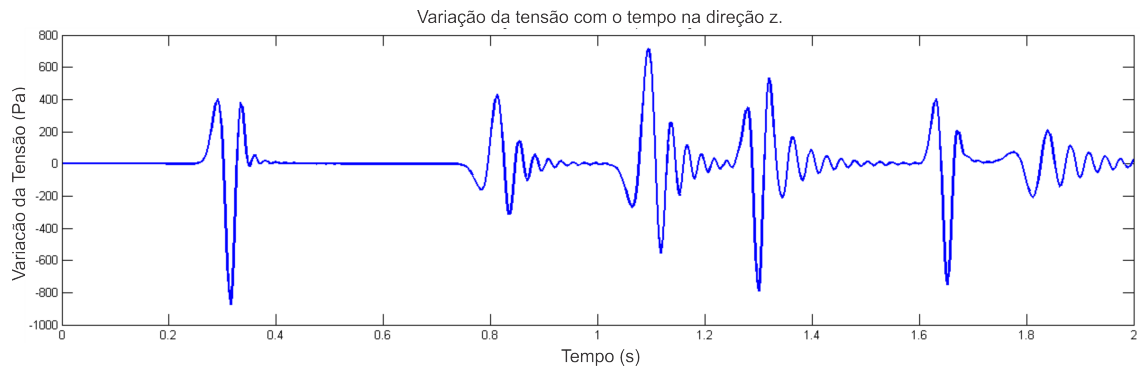
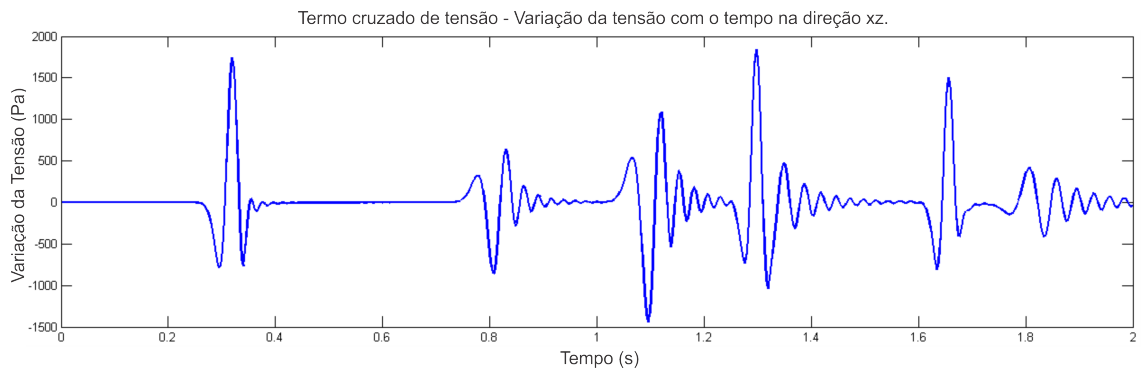
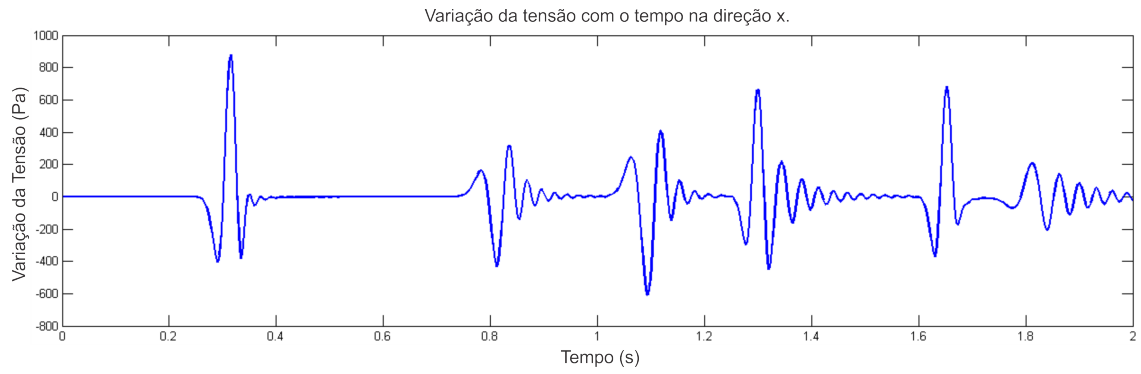


Figura 18: Resposta elástica para τ_{xx} , τ_{xz} e τ_{zz} .

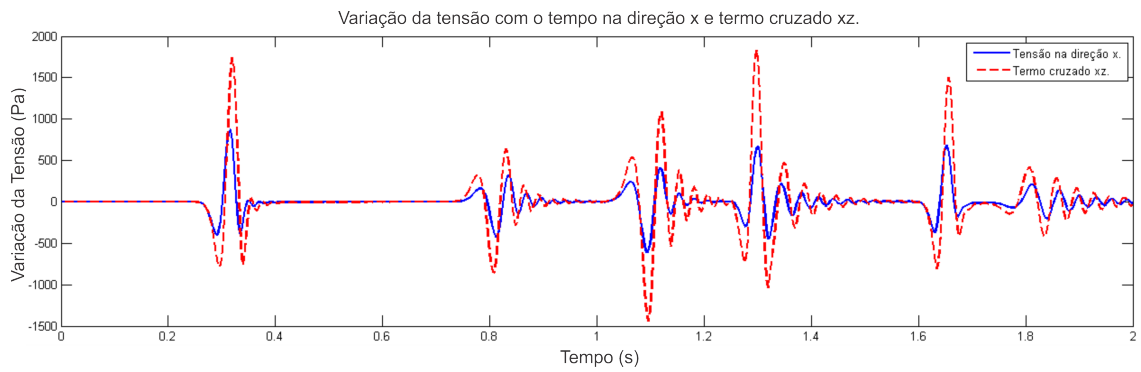


Figura 19: Variação da amplitude de tensão para τ_{xx} e τ_{xz} .

5 CONCLUSÃO

Discutimos os aspectos gerais da propagação de ondas sísmicas em meios acústicos e elásticos. Utilizando uma decomposição para o campo de pressão e densidade as equações não lineares foram reduzidas para a forma linear. No formalismo elástico foi mostrado que as equações lineares gerais deriva vários subcasos a depender dos valores das componentes do tensor de elasticidade.

Para resolver numericamente as equações de propagação de onda utilizamos o método das diferenças finitas. Neste método as equações diferenciais parciais foram discretizadas utilizando operadores de diferenças em 2ª ordem de aproximação. As respostas foram armazenadas em matrizes multidimensionais o que permitiu compará-las posteriormente a partir de imagens da propagação do pulso em todos os pontos do domínio considerado e também da evolução do pulso em um ponto específico.

Em ambas as análises acústica e elástica foi utilizado um meio geológico com as seguintes características: densidade de 1000 Kg/m^3 e velocidades transversal e longitudinal de 1000 m/s . Além disso, consideramos que o meio possui isotropia ortotrópica, pois a resposta acústica produz apenas um campo de força, enquanto a elástica em duas dimensões apresenta três campos ($\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz}$). Assim, optou-se pela isotropia para gerar resposta equivalente nas três componentes.

Os resultados numéricos mostraram que as respostas acústica e elástica são muito similares, mas com a evolução temporal a diferença entre a resposta acústica e elástica aumenta. Também foi mostrado que mesmo sob a consideração de isotropia definida pelo tensor de elasticidade, as três componentes elásticas não exibem exatamente o mesmo resultado. O termo cruzado, mesmo estando em fases iguais com os demais, tem sua amplitude um pouco maior que os termos normais, embora as amplitudes dos dois termos normais sejam equivalentes, a não ser pela inversão de fase ocasionada pela condição de contorno nula. A diferença média entre as duas resposta foi da ordem de 10^{-2} .

Uma das razões para a aplicação do formalismo elástico é que o mesmo descreve melhor

a propagação de onda em meios complexos. Conforme discutido na Ref. [1] muitos estudos de sismica despreza a anisotropia considerando apenas modelos isotrópicos por serem mais fáceis computacionalmente de ser resolvido. Portanto, foi mostrado que mesmo em uma geologia simples existe uma pequena diferença em considerar modelos mais detalhados no estudos de propagação das ondas sísmicas.

- **Sugestões de trabalhos futuros**

- Utilizar uma densidade dependente da profundidade.
- Aplicar condições de contorno não nulas e semi-reflexiva.
- Resolver os esquemas de diferenças finitas para um domínio com várias camadas com propriedades físicas distintas.

REFERÊNCIAS

- [1] BARTOLO, Leandro di. *Modelagem Sísmica Anisotrópica Através do Método das Diferenças Finitas Utilizando Sistema de Equações em Segunda Ordem*. 2010.241 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.
- [2] BARTOLO, Leandro di. *Introdução à Modelagem Sísmica utilizando MDF*. 25-26 de julho de 2013. 90 p. Notas de Aula.
- [3] FRANCO, Neide Bertoldi. *Cálculo Numérico*. 1^a.ed. São Paulo: Pearson, 2006. 520p.
- [4] GEOLTRAIN, S. *Propagation of elastic waves in transversely isotropic media*. CWP-074, Colorado, sept.,(1988).
- [5] JOSE, P. *Elastic wave propagation and generation in seismology*. Cambridge University Press (2003).
- [6] LANDAU, L. D.; LIFSHIT, E. M. *Course of theoretical physics*. Theory Of Elasticity, Pergamon (1975).
- [7] TASAVKIN, V. *Seismic Signatures and Analysis of Reflection Data in Anisotropic Media* (2001).
- [8] CORDÓVA, Pablo N. G. *Análise de Estabilidade de Métodos Numéricos para Modelos Lineares de Ondas Internas*. 2011.67 f. Dissertação (Mestre) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Paraná, 2011.

APÊNDICE A – Formulação acústica

O programa a seguir foi usado para simular a equação de onda de pressão com os valores de entradas inicializados conforme discutido no Capítulo (04).

```
% Parâmetros da malha
Ly=1000;
Lz=1000;
T= 2;
dy=5;
dz=dy;

% Velocidade da onda acústica
c = 1000;

% Condição de estabilidade
dt= (1/c)*sqrt((dy*dz)^2/(dy^2+dz^2))

Ny=floor(Ly/dy)
Nz=floor(Lz/dz)
Nt=floor(T/dt)

% Constantes do esquema de diferenças geral
Ay=(c*dt/dy)^2;
Az=(c*dt/dz)^2;
D=(c*dt)^2;
By=D/dy;
Bz=D/dz;
```

```

% Localização da fonte
x1=[(Ny/2)*dy (Nz/2)*dz];

% Matrix solução
p=zeros(Ny,Nz,Nt);

% Inicialização do campo de pressão - condição inicial
for j=1:Ny
    n=1;
    for k=1:Nz
        p(j,k,n)=Io(j*dy,k*dz);
    end
end

% Calculo de p(1) com o esquema geral alterado
for j=2:Ny-1
    for k=2:Nz-1
        Dyy=p(j+1,k,n)-2*p(j,k,n)+p(j-1,k,n);
        Dzz=p(j,k+1,n)-2*p(j,k,n)+p(j,k-1,n);
        Dtt=p(j,k,n)+D*Vo(j*dy,k*dz);
        b=-0.1/rho(k*dz);
        Dy=p(j,k,n)-p(j-1,k,n);
        Dz=p(j,k,n)-p(j,k-1,n);
        x2=[j*dy k*dz];
        f=s(n*dt,x1,x2);
        p(j,k,n+1)=Dtt+(1/2)*(Ay*Dyy+Az*Dzz+b*(By*Dy+Bz*Dz)-D*rho(k*dz)*f);
    end
end

% Calculo de p(n) para n>1
for n=2:Nt-1
    for j=2:Ny-1
        for k=2:Nz-1
            Dyy=p(j+1,k,n)-2*p(j,k,n)+p(j-1,k,n);
            Dzz=p(j,k+1,n)-2*p(j,k,n)+p(j,k-1,n);

```

```

Dtt=-p(j,k,n-1)+2*p(j,k,n);
b=-0.1/rho(k*dz);
Dy=p(j,k,n)-p(j-1,k,n);
Dz=p(j,k,n)-p(j,k-1,n);
x2=[j*dy k*dz];
f=s(n*dt,x1,x2);
p(j,k,n+1)=Dtt+(Ay*Dyy+Az*Dzz+b*(By*Dy+Bz*Dz)-D*rho(k*dz)*f);
end
end
end

```

APÊNDICE B – Formulação elástica

O programa escrito abaixo resolve o sistema elástico discreto descrito no Capítulo (03) conforme os valores discutidos no Capítulo (04).

```
% Parâmetros da malha
Lx = 1000;
Lz = 1000;
T = 2;
h = 5;
dt = h/(Cp*sqrt(Cp^2+Cs^2))
A = dt/h;
Nx = floor(Lx/h)
Nz = floor(Lz/h)
Nt = floor(T/dt)

% Parâmetros do meio
rho = 1000;
Cp = 1000;
Cs = 1000;

% Inicialização dos campos
X = zeros(Nz,Nx,Nt);
T = zeros(Nz,Nx,Nt);
Z = zeros(Nz,Nx,Nt);
U = ones(Nz,Nx,Nt);
V = ones(Nz,Nx,Nt);
```

```

% Localização da fonte
x1 = [(Nx/2)*h (Nz/2)*h];
M = [Cp Cs rho];

% Calculo do esquema de diferenças finitas acoplados
for n=2:Nt-1
    for i=2:Nz-2
        for j=2:Nx-2
            x2 = [i*h j*h];
            B = 1/rho;
            U(i,j,n+1)=U(i,j,n) + B*A*(X(i+1,j,n)-X(i,j,n)+T(i,j+1,n)-T(i,j,n));
            U(i+1,j,n+1)=U(i+1,j,n)+B*A*(X(i+2,j,n)-X(i+1,j,n)+T(i+1,j+1,n)-T(i+1,j,n));
            U(i,j+1,n+1)=U(i,j+1,n)+B*A*(X(i+1,j+1,n)-X(i,j+1,n)+T(i,j+2,n)-T(i,j+1,n));
            V(i+1,j+1,n+1)=V(i+1,j+1,n)+B*A*(T(i+1,j+1,n)-T(i,j+1,n)+Z(i,j+1,n)-Z(i,j,n));
            V(i+1,j,n+1)=V(i+1,j,n)+B*A*(T(i+1,j,n)-T(i,j,n)+Z(i,j,n)-Z(i,j-1,n));
            V(i,j+1,n+1)=V(i,j+1,n)+B*A*(T(i,j+1,n)-T(i-1,j+1,n)+Z(i-1,j+1,n)-Z(i-1,j,n));
            X(i+1,j,n+1)=X(i+1,j,n)+(rho*Cp^2)*A*(U(i+1,j,n+1)-U(i,j,n+1))+
            rho*(Cp^2-2*Cs^2)*A*( V(i+1,j+1,n+1)-V(i+1,j,n+1))-dt*n_xx(x1,x2,(n+1)*dt,M);
            Z(i,j,n+1)=Z(i,j,n)+(rho*Cp^2)*A*(V(i+1,j+1,n+1)-V(i+1,j,n+1))
            +rho*(Cp^2-2*Cs^2)*A*(U(i+1,j,n+1)-U(i,j,n+1))-dt*n_zz(x1,x2,(n+1)*dt,M);
            T(i,j+1,n+1)=T(i,j+1,n)+(rho*Cs^2)*A*(U(i,j+1,n+1)-U(i,j,n+1))
            +(rho*Cs^2)*A*(V(i+1,j+1,n+1)-V(i,j+1,n+1))-dt*n_xz(x1,x2,(n+1)*dt,M);
        end
    end
end
end

```