

PROPOSTA DE UMA BANCADA EXPERIMENTAL DE UM PÊNDULO INVERTIDO

Jair Gildenberg Bezerra de Paiva Junior¹, Bruno Emmanuel de Oliveira Barros Luna²

Resumo: Este artigo aborda a proposta de um desenvolvimento de uma bancada experimental voltada para o estudo do pêndulo invertido no contexto do curso de Engenharia Elétrica. O objetivo é criar um ambiente didático interativo para os estudantes explorarem as dinâmicas complexas de sistemas de controle, especificamente o pêndulo invertido. A obtenção de recursos práticos para aulas e laboratórios muitas vezes é desafiadora devido ao alto custo e à falta de material didático adequado. O seguinte trabalho destaca que, embora a análise matemática e simulação sejam importantes, a implementação prática é essencial para a compreensão profunda desses sistemas, além disso, abre possibilidades para futuros estudos e projetos na área de controle de sistemas, contribuindo para uma formação mais sólida dos futuros engenheiros.

Palavras-chave: pêndulo invertido, bancada experimental, controle de sistemas

1. INTRODUÇÃO

A engenharia é uma disciplina que floresce na interseção do conhecimento teórico e principalmente da aplicação prática. Como parte do curso de engenharia elétrica, a busca pelo entendimento das complexas dinâmicas dos sistemas de controle é essencial para preparar um profissional altamente qualificado, existindo assim uma necessidade de recursos didáticos para uso em laboratório e aulas práticas. Muitas vezes, tais equipamentos não são de fácil obtenção, devido os mesmos possuírem um custo elevado e que por muitas vezes não possuem um manual de fácil entendimento, como também não abranger nosso idioma nativo.

Como alternativa para obtenção desses recursos, e também incentivar futuros discentes a praticar a metodologia “hands-on”, este conceito pode ser traduzido para “mãos na massa” ou “aprender fazendo”. Foi proposto a montagem de um pêndulo invertido com sucatas de uma impressora jato de tinta para fins didáticos, na qual permitiria o estudo de sistemas de controle, que consiste na compreensão das leis e teoremas matemáticos capazes de reproduzir e controlar a dinâmica que representa sistemas físicos reais [1].

Embora o uso de análise matemática e simulação seja importante, as técnicas de implementação de leis de controle não preveem a aplicação deste conceito a sistemas reais de aprendizagem. Assim, métodos alternativos de ensino são relevantes para a adoção.

Experimentos práticos ajudam ainda mais em desenvolver ou fortalecer conceitos científicos estudados em sala de aula, além de permitir que os estudantes aprendam como analisar objetivamente a dinâmica de um protótipo e como desenvolver soluções para problemas complexos [2]. Além disso, as aulas práticas permitem que os docentes possam abordar um determinado conteúdo sob diferentes perspectivas e também podem ser exploradas a partir de um ponto de vista matemático, físico, mecânico, dentre outros conceitos específicos em uma observação de um sistema real, mesmo que em escalas de laboratório.

Especificamente, o uso de bancadas experimental constitui um importante recursos para ensino e aprendizagem de disciplinas técnicas e promove conexões entre os conhecimentos teóricos adquiridos e a prática profissional relacionada a diversos cursos de formação [3]. Elas também ilustram conceitos importantes, facilitando a compreensão de modelos matemáticos necessário para análise do sistema e são dispositivos usados didaticamente pra avaliar conceitos e validar modelos teóricos [4,5].

Com base no que foi apresentado, este trabalho tem como finalidade a construção de uma bancada experimental de um pêndulo invertido, para fins práticos nas disciplinas que abrangem controle e automação, assim como também detalha toda a concepção do pêndulo invertido, como também o seu modelo matemático por completo.

2. O PÊNDULO INVERTIDO

O problema de estabilização de um pêndulo de forma invertida já é bem conhecido na mecânica clássica. O pêndulo invertido possui propriedades cinemáticas instáveis e, portanto, é amplamente utilizado como ferramenta objetiva para avaliar o desempenho de diversas técnicas de controle.

Um pêndulo invertido é um dispositivo físico que consiste em uma barra cilíndrica (geralmente de metal) que pode se mover livremente em torno de um ponto fixo. Este ponto está preso ao carro e o carro fica livre para se mover nessa direção horizontalmente [1,6]. Os carros são movidos por motores que podem aplicar uma força

variável que proporciona movimento. A mesma haste tende naturalmente a tombar porque sua posição vertical está em um estado de equilíbrio instável [7].

2.1. Modelos comerciais de pêndulo invertido

Existem diversos modelos comerciais de kit do pêndulo invertido voltados ao ambiente educacional. Como o modelo GLIP2001 fabricado pela empresa chinesa Googol Technology [8] porém o modelo mais conhecido e requisitado é o modelo IP02 fabricado pela empresa canadense Quanser [9].

Como é mostrado na Figura 2 o dispositivo GLIP2001 o pêndulo consiste em um carro que desliza sobre trilhos paralelos acionado por um servo motor CA apoiado em pivôs. Um codificador de alta resolução é acoplado ao servo motor e ao eixo de articulação para fornecer informações sobre a posição do carro e o ângulo do pêndulo. Além de mecanismos, sensores e atuadores, o GLIP2001 inclui hardware de aquisição de dados, software de controle e interação com aplicativo MATLAB e conjuntos de hastes de vários comprimentos [8].

Já o equipamento IP02 da Quanser consiste em uma barra montada no carro, com o eixo de rotação da barra perpendicular à direção horizontal do movimento do carro. O aparelho vem com um par de barras, uma de 12 polegadas e outra de 24 polegadas. A mesa deslizante composta de alumínio sólido se move horizontalmente sobre uma haste de metal em um suporte. O movimento do carro é conseguido por uma engrenagem fixada no eixo de um motor de 6V DC. A posição do carro é informada por um sensor que funciona em conjunto com uma engrenagem montada no carro. O ângulo de origem é lido pelo sensor do encoder incremental de quadratura. Neste modelo, a haste do pêndulo pode girar 360 graus em torno de seu eixo muitas vezes, permitindo estudar o processo de auto elevação do pêndulo. Assim como o aparelho anterior o IP02 vem acompanhado de diversos acessórios como placa de aquisição de dados, módulo de alimentação e software de controle e interação com aplicativo MATLAB [9].

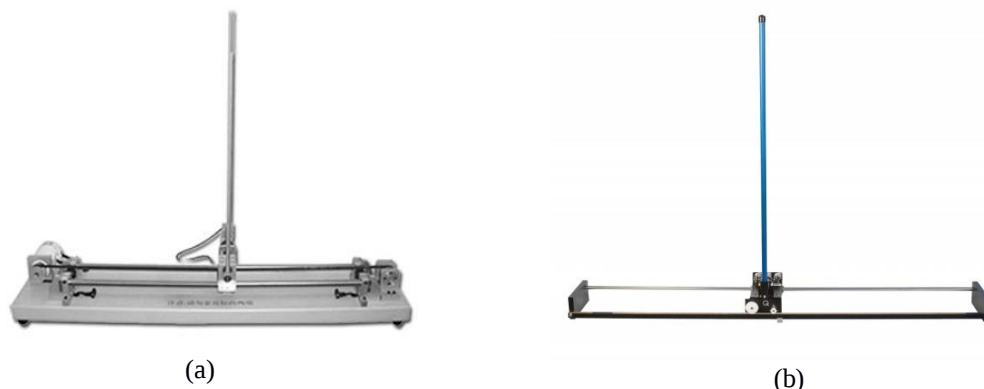


FIGURA 1. Pêndulo GLIP2001 (a) Pêndulo IP02 (b), retirado de [8,9]

2.2. Concepção Mecânica

Este dispositivo foi concebido com base numa impressora matricial, mas devido à complexidade do aparato, as dificuldades ao longo do caminho e ao pouco tempo que dispusemos para trabalhar no projeto, infelizmente não foi possível finalizar a montagem da bancada. Porém foi possível remover e reutilizar as sucatas da impressora matricial, e a partir dela foram obtidos os sensores de ângulo e de posição, o eixo de deslocamento, o motor para acionamento do carro. Ele desliza ao longo da barra guia e é conectado ao atuador elétrico através de uma correia dentada. A base do próprio pêndulo, incluindo o sistema de sensor de posição angular, é montada no suporte da impressora e a haste é acoplada a um eixo horizontal. As figuras 2 e 3 mostra as peças que seriam usadas para a montagem do protótipo.

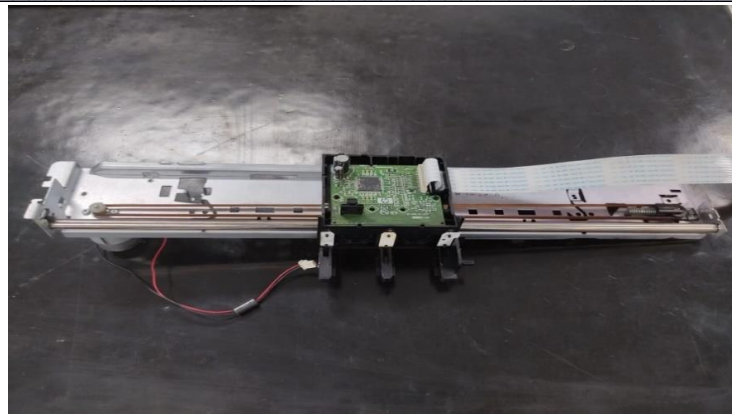


FIGURA 2. Pêndulo invertido sem a haste (autoria própria).

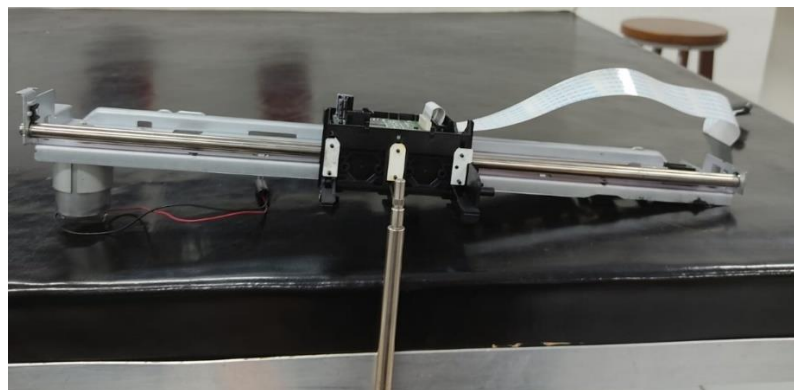


FIGURA 3. Pêndulo invertido com a haste (autoria própria).

Para a análise dos dados emitidos do kit do pêndulo invertido iria ser utilizado a placa de aquisição Q2 ou Q8 (ambos possuem a mesma finalidade) da fabricante Quanser, na qual o laboratório de controle e automação se dispunha a ter, juntamente com o software MATLAB, para a realização de cálculos complexo, mas devido a um problema de compatibilidade entre o modelo mais recente do MATLAB, não foi possível no momento criar uma conexão entre software e aparelho.



FIGURA 4. placa de aquisição Q2 (autoria própria).



FIGURA 5. placa de aquisição Q8 (autoria própria).

2.3. Modelo Matemático

A metodologia utilizada para obtenção das equações de movimento tem como base as 3 leis de Newton, para o carro, e as leis de Kirchhoff, para o motor. A Figura 5 apresenta as variáveis e constantes de interesse para o sistema pêndulo invertido juntamente com as correspondentes referências assumidas no modelo.

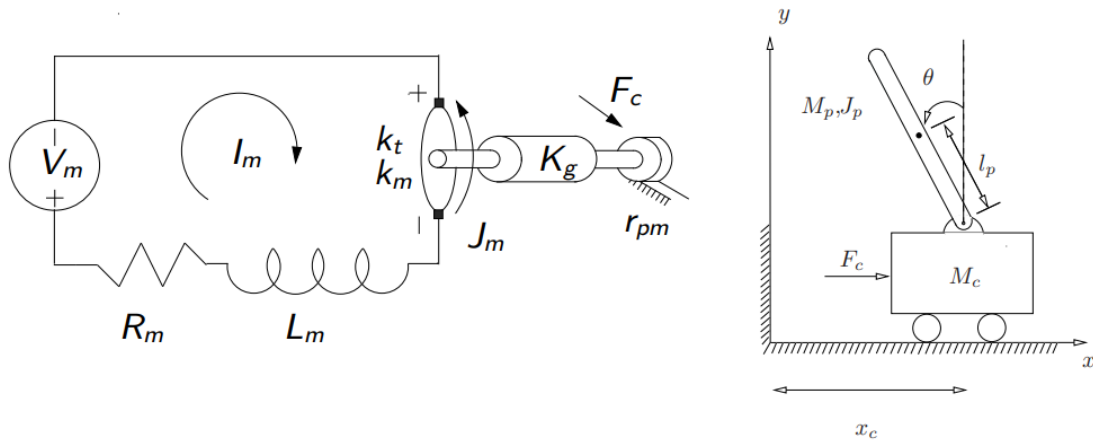


FIGURA 6. Diagrama do sistema elétrico e mecânico. retirado de [10]

2.3.1. Pêndulo

O pêndulo possui um momento de inércia em J_p em relação ao seu centro de gravidade, ele está localizado a uma distância l_p do ponto que segura a haste do pêndulo, assim o movimento circular do pêndulo fica:

$$M_p \frac{d^2}{dt^2} (x_c - l_p \sin(\theta)) - T_x = 0 \quad (1)$$

Juntando o movimento de rotação na equação (1) fica:

$$(j_p + M_p l_p^2) \ddot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p g l_p \sin(\theta) + B_p \dot{\theta} = 0 \quad (2)$$

2.3.2. Motor

O motor do pêndulo possui um momento de inércia J_m , onde L_m é a indutância do motor, R_m a resistência do resistor, K_m a constante de força contra-eletromotriz, I_m a corrente, V_m a tensão de entrada e θ_m é o ângulo de rotação do motor. Adicionando a Lei de Kirchhoff no circuito do motor, fica:

$$V_m - R_m I_m(t) - L_m \dot{I}_m(t) - K_m \dot{\theta}_m = 0 \quad (3)$$

A indutância do motor pode ser considerada desprezível, assim a corrente elétrica se torna:

$$I_m = \frac{V_m - K_m \dot{\theta}_m}{R_m} \quad (4)$$

Em que $K_m \dot{\theta}_m$ é a força contra-eletromotriz. O torque produzido pelo motor é transferido para a carga em proporção direta à corrente I_m da seguinte forma:

$$T_m = \eta_m K_t I_m \quad (5)$$

Onde K_t é uma constante de proporcionalidade corrente-torque e η_m é a eficiência do motor. Após a troca da caixa de transmissão, ela é calculada com base na constante de desaceleração K_g e na eficiência η_g , o torque é responsável por exercer a força

$$F_c = \frac{\eta_g - K_g \tau_m}{r_{pm}} \quad (5)$$

As equações citadas anteriormente, elas descrevem a dinâmica do motor do pêndulo. Aplicando elas a equação da transformação de movimento no mecanismo pinhão-cremalheira mostrado abaixo:

$$\dot{\theta}_m = \frac{K_g \dot{x}_m}{r_{pm}} \quad (5)$$

Com isso ela permite obter a força exercida sobre o carro do pêndulo em função da velocidade $\dot{x}_c$ e da tensão V_m , do tipo:

$$F_c = \frac{\eta_g K_g K_t \eta_m}{r_{pm} R_g} \left(V_m(t) - \frac{K_m K_g}{r_{pm}} \dot{x}_c(t) \right) \quad (6)$$

2.3.3. Carro

O carro move um pêndulo de massa M_p e fica imerso no meio, causando atrito viscoso no carro B_c e no pêndulo B_p . T_x será a força causada pela haste do pêndulo e aplicando o princípio de D'Alembert, a equação dinâmica do carro horizontalmente é dado por:

$$M_c \ddot{x}_c + F_a + T_x + B_c \dot{x}_c = F_c \quad (7)$$

A força inercial do resistor F_a ocorre devido à ação de rotação do motor com torque de inércia:

$$\tau_m = J_m \ddot{\theta}_m = J_m \left(\frac{K_g \ddot{x}_c}{r_{pm}} \right) \quad (8)$$

Sendo Reescrita na equação:

$$F_a = \frac{\eta_g K_g \tau_m}{r_{pm}} = \frac{\eta_g K_g^2 J_m \ddot{x}_c}{r_{pm}^2} \quad (9)$$

Pegando as equações (6) e (9), a equação do carro (7) vira:

$$M_{eq} \ddot{x}_c + B_{eq} \dot{x}_c + T_x = A_{eq} V_m \quad (10)$$

Onde o ganho de atuação A_{eq} é:

$$A_{eq} = \frac{\eta_g \eta_m K_g^2 K_t K_m}{r_{pm}^2 R_m} \quad (11)$$

Onde a massa equivalente M_{eq} é:

$$M_{eq} = M_c + \frac{\eta_g K_g^2 J_m}{r_{pm}^2} \quad (12)$$

Onde o coeficiente de atrito viscoso B_{eq} é:

$$B_{eq} = B_c + \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{r_{pm} R_m} \quad (13)$$

2.3.4. Equações não lineares

Eliminando a força em T_x das equações (1) e (10), percebe-se que as equações diferenciais não lineares, que descrevem o deslocamento angular do pêndulo $\theta(t)$ e o comportamento $x_c(t)$ quando $t \geq 0$, serão resumidas em:

$$(M_p l_g^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{x}_c - M_p l_p g \sin(\theta) = 0 \quad (14)$$

$$(M_p + M_{eq}) \ddot{x}_c + B_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \cos(\theta) \ddot{\theta} + M_p l_p \sin(\theta) \dot{\theta}^2 = A_{eq} V_m \quad (15)$$

Ambas as equações representam o sistema dinâmico sistema do pêndulo invertido

2.4 Linearização

A linearização é importante para identificação dos parâmetros físicos, visto que os valores podem diferir de um modelo de pêndulo para outro, não só pela estrutura de cada um, como também pelos seus desgastes. Adicionando a série de Taylor até a primeira ordem nas equações (14) e (15) e considerando a origem $(x_0, \theta_0) = (0,0)$ como ponto de operação, tem-se:

$$(M_p + M_{eq}) \ddot{x}_c + B_{eq} \dot{x}_c - M_p l_p \ddot{\theta} = A_{eq} V_m \quad (16)$$

$$(M_p l_g^2 + J_p) \ddot{\theta} + B_p \dot{\theta} - M_p g l_p \theta - M_p l_p \ddot{x}_c = 0 \quad (17)$$

Ambas as equações representam a dinâmica do sistema pêndulo invertido linearizado em relação à origem.

2.5 Representação de estado

Utilizando as equações (14) e (15) das equações não lineares e as equações (16) e (17) da linearização, é possível encontrar a representação em espaço de estado do conjunto. Elas são definidas conforme abaixo:

$$P : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (18)$$

Na qual x é o vetor de estado e u é a entrada de controle. No caso do pêndulo, temos que:

$$x = [M_c \theta \ddot{x}_c \dot{\theta}]' \in \mathbb{R}^4 \quad (19)$$

Na qual x_i , representa a i -ésima componente do vetor x e $u = V_m$.

2.5.1. Caso linear

Feitas as considerações iniciais, basta substituir as variáveis de estado nas equações dinâmicas e obter as matrizes A e B:

$$A = \frac{1}{J_t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \\ 0 & M_p^2 l_p^2 g & -B_{eq}(M_p l_p^2 + J_p) & -B_{eq} M_p l_p \\ 0 & M_p l_p g (M_{eq} + M_p) & -B_{eq}(M_p l_p) & -B_p(M_{eq} + M_p) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$B = \frac{A_{eq}}{J_T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p l_p^2 + J_p \\ M_p l_p \end{bmatrix} \quad (21)$$

Com $J_T = M_{eq}(M_p l_p^2 + J_p) + J_p M_p$. As matrizes C e D vão representar a saída do sistema mecânico do pêndulo invertido, que serão medidos por encoders nas variáveis de posição.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.5estado.2. Caso não linear

Nos casos não lineares, as matrizes A e B são dependentes das variáveis de estado $x_i, i = 1, \dots, 4$. Desse modo, para conseguir encontrá-las, devesse reescrever as equações (14) e (15) na forma matricial:

$$\Phi \dot{x} + \Gamma_x + \Omega = \Psi_u \quad (24)$$

Sendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_p + M_{eq} & -M_p l_p \cos(x_2) \\ 0 & 0 & -M_p l_p \cos(x_2) & J_p + M_p l_p^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & B_{eq} & M_p l_p \sin(x_2) x_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_p l_p g \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{eq} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Isolando $\dot{x}$, tem-se:

$$\dot{x} = -\Phi^{-1} \Gamma_x + \Phi^{-1} \Psi_u - \Phi^{-1} \Omega \quad (29)$$

Assim $A = -\Phi^{-1} \Gamma$, $B = \Phi^{-1} \Psi$ e $E = -\Phi^{-1} \Omega$, portanto fica:

$$A = \frac{1}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & J_{Tn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{Tn} \\ 0 & 0 & -B_{eq}(M_p l_p^2 + J_p) & -M_p l_p x_4 \sin(x_2)(M_p l_p^2 + J_p) \\ 0 & 0 & -B_{eq} M_p l_p \cos(x_2) & -M_p^2 l_p^2 \cos(x_2) \sin(x_2) x_4 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$B = \frac{A_{eq}}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p l_p^2 + J_p \\ M_p l_p \cos(x_2) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$E = \frac{1}{J_{Tn}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p^2 l_p^2 g \sin(x_2) \cos(x_2) \\ M_p l_p g \sin(x_2) (M_p + M_{eq}) \end{bmatrix} \quad (32)$$

Na qual $J_{Tn} = -M_p^2 l_p^2 (\cos(x_2))^2 + (M_p + M_{eq})(M_p l_p^2 + M_p)$. Assim as matrizes A, B e E concluem a modelagem do sistema pêndulo invertido em casos não lineares.

3. DISCUSSÕES

As grandes vantagens de construir um kit experimental a partir de sucatas é o seu baixo custo de montagem devido ao desperdício de grande quantidade de componentes elétricos e eletrônicos e a possibilidade de ser montado por qualquer aluno que queira realizar experimentos para aplicar os conhecimentos teóricos adquiridos.

Em comparação com os kits de treinamento comerciais, os kits montados a partir de sucata têm várias diferenças: primeiro, os kits comerciais usam servomotores para posicionar o carro horizontalmente, tornando o dispositivo menos afetado pela inércia do carro do que o conjunto do pêndulo é para o movimento lateral do carro. Em segundo lugar, o carro se move por meio de rolamentos, o que ajuda a reduzir o atrito entre o carro e o eixo de deslocamento. Por fim, as principais variáveis da montagem, como momento de inércia, atrito viscoso, etc. São conhecidas e fornecidas no manual do produto, enquanto nos pêndulos de sucata é necessário realizar testes específicos para obter os valores relacionados aos parâmetros físicos do pêndulo invertido.

Outra questão importante é o cuidado necessário a ser tomado com relação ao descarte ambientalmente correto das peças não aproveitadas no processo de montagem. Esse é um ponto que desperta grande interesse, visto que, apesar de termos uma nova política para tratamento de resíduos sólidos, ainda não temos orientações claras de como descartar corretamente os resíduos potencialmente tóxicos dos equipamentos elétricos e eletrônicos.

4. TRABALHOS FUTUROS

O esforço para montar uma bancada de testes feitos a partir de sucatas evidenciou algumas lacunas que precisavam ser preenchidas, como a necessidade de elaborar um manual de instruções para o kit detalhando os métodos e medidas práticas que serão implementadas. Além de precisar finalizar a construção da bancada experimental, também há necessidade de resolver o problema de compatibilidade do software MATLAB com a placa de aquisição Q2 e Q8 da Quanser. Para que assim futuramente qualquer discente que queira se aprofundar na área não precise passar por tantas dificuldades.

5. CONCLUSÕES

Embora não tenha sido possível a construção do pêndulo invertido dentro do cronograma planejado, o desenvolvimento deste trabalho foi de suma importância, não só no desenvolvimento educacional, como também pessoal. Uma das principais realizações deste projeto reside no desenvolvimento das equações teóricas, o que ajudou na compreensão teórica, mas também mostrou as futuras aplicações e desafios no campo do controle de sistemas complexos.

Este projeto também destaca a importância de unir a teoria à prática no contexto da educação em Engenharia Elétrica. Ao permitir que os estudantes se envolvam em um projeto prático, fomentamos a aplicação do conhecimento adquirido em sala de aula, fortalecendo assim a sua compreensão e confiança em conceitos teóricos complexos.

Em termos educacionais, esta iniciativa abre portas para futuros estudos e projetos que podem explorar ainda mais as equações e algoritmos desenvolvidos. O conhecimento adquirido pode ser transferido para outros domínios e desafios, consolidando nossa base em engenharia de controle.

Em última análise, este trabalho ressalta a importância das práticas laboratoriais na formação de um engenheiro. Além disso, demonstra que, com os conhecimentos adquiridos até o momento é possível num futuro próximo a construção e finalização da bancada experimental, juntamente de um material didático competente, para que aqueles que tenham interesse em entrar nessa área possam aprender sem muitas dificuldades.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

-
- [1] OGATA, K. (2010). Engenharia de controle moderno (5a ed.). São Paulo: Pearson Prentice Hall do Brasil.
- [2] Lunetta, V. N. (1991). Atividades práticas no ensino da Ciência. *Revista Portuguesa de Educação*, 1(2), 81-90.
- [3] Padula, F., & Visioli, A. (2013). An approach for teaching automatic control in a laboratory of mechatronics. *10th IFAC Symposium Advances in Control Education*, 17(46), 214-219.
- [4] Klassner, F., & Anderson, S. D. (2003). Lego mindstorms: Not just for k-12 anymore. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 10(2), 12-18.
- [5] Amorim, M. J. (2006). Desenvolvimento de Bancada Didático-Experimental de Baixo Custo para Aplicações em Controle Ativo de Vibrações (Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- [6] RIBEIRO, J.M.S.; GARCIA, J.P.F; GARCIA, L.M.C.F.; APOLINÁRIO, G.C. “Controle Experimental do Pêndulo Invertido Considerando Atraso Computacional”, In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, SBAI, São João del Rei, 2011.
- [7] TEIXEIRA, M.C.M.; ZAK, S.H. “Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, NY, USA, v. 7, n. 2, p. 133-142, 1999.
- [8] Googol, Inverted Pendulum Experimental Manual, Second Edition. Disponível em <<http://www.googoltech.com>>. Acessado em 4 de outubro de 2023.
- [9] Quanser, User manual, IP02 Linear Inverted Pendulum and IP02 Linear Pendulum Gantry Experiments, Ontario, 2012.
- [10] LIMA, J. et al. Universidade Estadual de Campinas Orientadora. [s.l: s.n.]. Disponível em: <http://www.fem.unicamp.br/~grace/JoseLima_RelatorioFinal.pdf>. Acesso em: 5 out. 2023.