

**O ESTUDO DA TEORIA DA ELASTICIDADE PARA
CÁLCULO DE DEFLEXÕES : ESTUDO DE CASO DE
UMA VIGA ENGASTADA.**

Pedro Vinícius Alves de Araújo¹

Marcilene Vieira da Nóbrega²

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise comparativa da deflexão em vigas calculada por meio da Teoria da Elasticidade e da Resistência dos Materiais. O objetivo principal é avaliar as diferenças nos resultados obtidos por cada método e determinar a adequação de cada abordagem para diferentes aplicações estruturais. A metodologia empregada envolveu a aplicação de ambas as teorias para calcular os deslocamentos, tensões e deformações em uma viga engastada submetida a uma carga pontual em sua extremidade. Foram comparados os valores obtidos, identificando as discrepâncias entre os métodos e analisando suas causas. Os resultados demonstraram que a Teoria da Elasticidade fornece valores de deslocamento ligeiramente maiores em comparação com a Resistência dos Materiais. Esse fato pode ser atribuído às suposições simplificadoras desta última. Conclui-se que, para aplicações rotineiras em engenharia, a Resistência dos Materiais é uma ferramenta eficaz e suficientemente precisa, sendo amplamente utilizada devido à sua simplicidade. No entanto, para análises detalhadas e situações onde há variações significativas de tensões, a Teoria da Elasticidade se mostra mais apropriada por fornecer uma representação mais precisa do comportamento estrutural.

Palavras-chave: Deflexão; Teoria da Elasticidade; Resistência dos Materiais.

¹ Discente do curso interdisciplinar em ciência e tecnologia – Ufersa Angicos.

² Docente do curso interdisciplinar em ciência e tecnologia – Ufersa Angicos.

ABSTRACT

This work presents a comparative analysis of beam deflection calculated using Elasticity Theory and Strength of Materials. The main objective is to evaluate the differences in the results obtained by each method and to determine the suitability of each approach for various structural applications. The methodology involved applying both theories to calculate the displacements, stresses, and strains in a fixed-end beam subjected to a point load. The obtained values were compared, discrepancies between the methods were identified, and their causes were analyzed. The results demonstrated that Elasticity Theory yields slightly higher displacement values compared to Strength of Materials, due to the latter's simplifying assumptions. It is concluded that for routine engineering applications, Strength of Materials is an effective and sufficiently accurate tool, widely used due to its simplicity. However, for detailed analyses and situations where significant stress variations occur, Elasticity Theory is more appropriate as it provides a more precise representation of the structural behavior.

Keywords: Deflection; Elasticity Theory; Strength of materials.

1. INTRODUÇÃO

A teoria da elasticidade pode ser definida como uma ferramenta que estuda as tensões, deformações e deslocamentos em um corpo elástico sob a ação de forças externas. (Timoshenko & Goodier, 1970).

Surgiu a partir de uma análise mais rigorosa dos esforços internos em corpos sólidos. Seu desenvolvimento iniciou-se com Navier e foi aprimorado por Cauchy, Lamé e Saint-Venant. Essa teoria baseia-se nas investigações sobre mecânica dos materiais realizadas nos séculos XVII e XVIII, que buscavam compreender o comportamento dos sólidos submetidos a carregamentos, fundamentando-se no cálculo infinitesimal. Cientistas como Galileu, Mariotte e Coulomb procuravam desenvolver equações matemáticas que previssem a carga máxima de ruptura, sendo necessário entender a distribuição dos esforços internos nos corpos sólidos. (Rojahn & Alquati, 2017).

Pesquisadores como Leonhard Euler e Jacob Bernoulli desempenharam um papel fundamental ao estudar a forma final de uma viga submetida à flexão e a descrição

matemática desse fenômeno, resultando no conceito de curvas elásticas. A análise sem simplificações torna-se inviável para estruturas usuais, mas é essencial para a formulação matemática do tema. No início do século XIX, Navier e Cauchy introduziram ideias inovadoras que revolucionaram o estudo dos corpos sólidos. Navier, seguindo os princípios de Euler sobre a deformação dos materiais, encontrou soluções para barras com restrições estruturais complexas. Ele propôs a análise dessas estruturas a partir de pequenas porções infinitesimais e formulou as equações gerais de contorno para descrever o comportamento dos corpos elásticos.(Rojahn & Alquati,2017).

Com base nos princípios da teoria da elasticidade, pode-se afirmar que suas simplificações deram origem ao que hoje conhecemos como resistência dos materiais. Essa área da mecânica está diretamente relacionada com diversas aplicações na engenharia, como projetos de pontes e edifícios desenvolvidos por engenheiros civis.(Popov,1978)

A Resistência dos Materiais adota hipóteses simplificadoras, assumindo seções transversais planas e materiais homogêneos e isotrópicos, a fim de viabilizar a análise de elementos estruturais como vigas, colunas e eixos.Este ramo foca na análise de elementos estruturais submetidos a esforços. (Universidade Federal do Paraná, 2024).

Compreender e controlar a deflexão é essencial na engenharia . Deflexões excessivas podem comprometer a resistência da estrutura, resultando em fissuras, falhas e, em casos extremos, até o colapso. Além disso, em edificações, deformações perceptíveis podem causar desconforto aos usuários e levantar preocupações sobre a estabilidade do imóvel. Do ponto de vista estético, curvaturas indesejadas em pisos e tetos podem comprometer a aparência do projeto. Outro aspecto importante é a compatibilidade com elementos não estruturais, como paredes de alvenaria, divisórias e acabamentos, que podem sofrer danos devido a deslocamentos excessivos, aumentando os custos de manutenção e reparo.Dentro desse contexto surge a necessidade de apontar de qual dos dois métodos analisados fornece resultados mais precisos e eficientes para o cálculo da deflexão em uma viga.

A escolha desse tema deve-se ao fato de que o método baseado na teoria da elasticidade ainda é pouco explorado para o cálculo de deflexões. Comparar os resultados obtidos por essa abordagem com aqueles fornecidos pelo método tradicional permitirá avaliar a precisão e previsibilidade das soluções.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para desenvolver a teoria da deformação de vigas, é essencial considerar a cinemática e a geometria. A hipótese cinemática serve como base para essa teoria, desconsiderando a deformação causada pelo esforço cortante. Felizmente, as deformações associadas ao esforço cortante são insignificantes na maioria dos casos.(Popov,1984)

Um segmento de uma viga , com eixo inicialmente reto , é ilustrado no estado deformado na figura 1 , utilizado no estabelecimento da distribuição das tensões em vigas, devidas à flexão.O eixo encurvado da viga,isto é , a sua linha elástica , é representado fletida com um raio ρ . O centro de curvatura O relativo ao raio de um elemento qualquer pode ser determinado prolongando-se,até a sua interseção, duas quaisquer seções adjacentes , tais como $A' B'$ e $D' C'$,para as seguintes considerações ,vamos admitir que a flexão ocorre em torno de um dos eixos principais da seção transversal . Na representação ampliada na figura 2 pode-se observar que , em uma viga fletida , o ângulo entre duas seções adjacentes é $\Delta\theta$.

Figura 1-Deformação de um segmento de viga por flexão

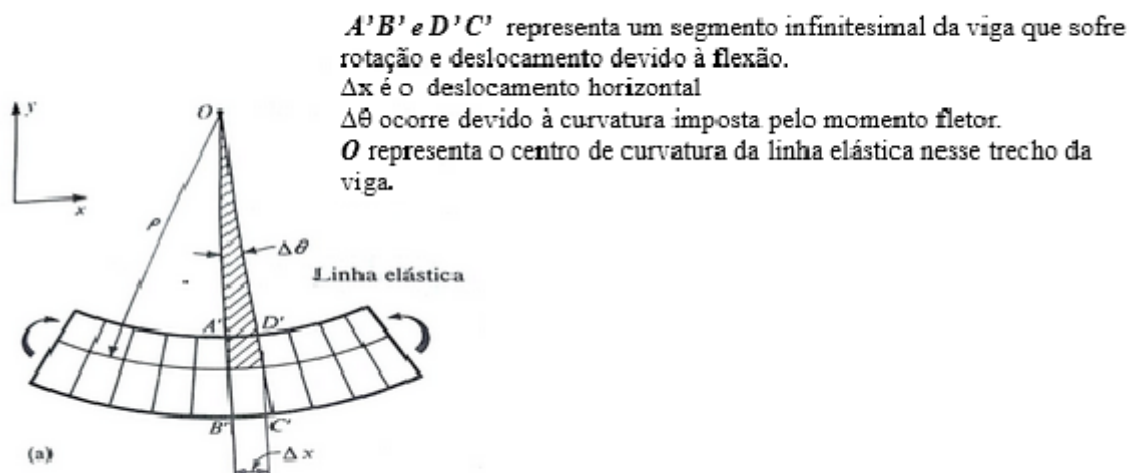
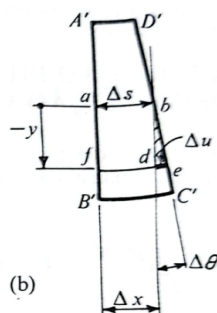


Figura 2-Trecho ampliado da deformação de um segmento de viga por flexão



Fonte : Adaptado de POPOV ,1984

Se a distância y , em relação à superfície neutra, até as fibras deformadas for medida na forma usual como sendo positiva para cima , a deformação de uma fibra qualquer será expressa por :

$$\Delta u = - y \Delta \theta \quad (1)$$

Para valores negativos de y , esta expressão (1) corresponde a alongamento , o que consiste com a deformação representada na figura 1 .As fibras situadas na superfície neutra encurvada da viga deformada , e caracterizada pela fibra ab , não sofrem deformação. Portanto, o comprimento de um arco Δx corresponde ao comprimento inicial de todas as fibras entre seções $A'B$ e $D'C'$.Tendo esta condição em vista , dividindo-se os termos da equação por Δs ,obtém se as seguintes relações :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = - y \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \quad (2)$$

Pode-se reconhecer du/ds como a deformação específica da viga , logo :

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon \quad (3)$$

2.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL FUNDAMENTAL PARA DEFORMAÇÃO

É demonstrado que a curvatura de uma linha pode ser definida como :

$$\kappa = \frac{v''}{[1+(v')^2]^{3/2}} \quad (4)$$

Sabendo que v' e v'' São primeira e segunda derivadas em função de x , respectivamente, podemos afirmar que a distância x apresenta um ponto na linha elástica , e v fornece a deformação no mesmo ponto em relação à sua posição inicial .

A curvatura da linha elástica e a deformação específica pode ser expressa como :

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = - \frac{\varepsilon}{y} \quad (5)$$

É importante levar em consideração que as propriedades do material não foram levadas em conta na dedução da equação anterior , pode ser usado tanto para problemas elásticos como problemas inelásticos . Tem-se que :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (6)$$

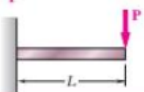
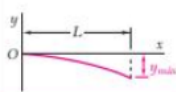
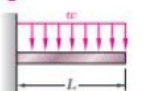
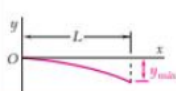
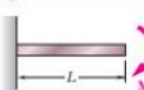
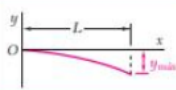
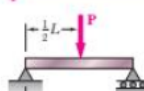
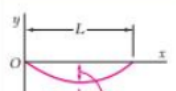
Se combinarmos as equações (4), (5) e (6) , obtemos a equação fundamental para a deformação de uma viga elástica , que pode ser descrita por:

$$v'' = - \frac{M(x)}{EI} \quad (7)$$

Partindo do princípio que as deformações são muito pequenas , a declividade dv/dx também é de valor muito pequeno . Em consequência , o quadrado de v' é desprezado para esse efeito .

Na engenharia civil é comum o uso de tabelas que apresentam diferentes vinculações e carregamentos , e suas respectivas equações para as duas linhas elásticas , para o cálculo de deflexão máxima de uma viga , também conhecido como flecha.

Quadro 1- Equações de deslocamento de vigas

Viga e carregamento	Linha elástica	Deflexão máxima	Inclinação e extremidade	Equação da linha elástica
1 		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
2 		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3 		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI}x^2$
4 		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$\pm \frac{PL^2}{16EI}$	Para $x \leq \frac{1}{2}L$: $y = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$

Fonte: Adaptado de Beer, Jr e Dewolf (1996)

2.2 CONDIÇÕES DE CONTORNO PELA RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

Para a solução de problemas sobre deformações em vigas , além das equações diferenciais ,deve ser formuladas as condições de contorno.(Popov,1984).

As vigas têm diferentes configurações e condições de contorno , para o caso da viga que é objeto de estudo , adotamos ela como uma viga engastada em sua extremidade à direita uma carga P . As condições de contorno para essa viga diz que $v=(0)$, $v'(0)$, ou seja o deslocamento v e a declividade v' devem se anular .(Popov,1984).

Para calcular a deflexão utilizando resistência dos materiais , vamos considerar as seguintes hipóteses :

1. A Lei de Hooke tem validade desta maneira é considerado linear a relação existente entre tensões e deformações.
2. A contribuição da força cortante é desprezada no cálculo das deflexões;
3. A Seção plana perpendicular ao eixo da viga permanece plana após aplicado o carregamento (Beer & Johnston , 1982).
4. As deflexões são pequenas quando comparadas com as dimensões da viga (base, altura e comprimento);

Para calcular a deflexão por esses métodos precisamos obter as equações de momento fletor , primeiro precisamos calcular as reações de apoio . sabendo que as condições de equilíbrio estático consistem em $\sum F=0$ e $\sum M=0$, tem-se que :

Equilíbrio vertical

$$\uparrow^+ \sum F_y = 0$$

$$A_y - P = 0$$

$$A_y = P \quad (8)$$

Somatórios dos momentos

$$\curvearrowright \sum M_A = 0$$

$$Pl - Ma = 0$$

$$Ma = Pl \quad (9)$$

Esforços internos

$$Q(x) = P \quad (10)$$

$$M(x) = Px - Ma$$

$$M(x) = Px - (Pl)$$

$$M(x) = (Px - Pl) \quad (11)$$

Quando obtemos as equações de esforço cortante e de momento fletor , podemos integrá-las e aplicar as condições de contorno que foram citadas acima, utilizando a equação diferencial (7) . Vamos considerar a rigidez como constante ,logo :

$$EIv'' = - M(x) \quad (12)$$

Substituímos e integramos os dois lados da equação (12) para obter rotação e deslocamento :

Momento :

$$EIv'' = -(Px - Pl) \quad (13)$$

$$EI \int v'' = \int -(Px - Pl) dx \quad (14)$$

Rotação :

$$EI \int v'' = \int (-Px + Pl) dx \quad (15)$$

$$EIv' = \left(-\frac{Px^2}{2} + Plx\right) + C1 \quad (16)$$

Deslocamento :

$$EI \int v' = \int \left(-\frac{Px^2}{2} + Plx\right) + C1 \quad (17)$$

$$EIv(x) = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} + C1x + C2 \quad (18)$$

Depois de termos integrado aplicamos as condições de contorno :

$$v'(0) = 0 \text{ (Rotação nula);}$$

$$v(0) = 0 \text{ (Deslocamento nulo)}$$

$$x = l$$

Cálculo de C1 :

$$0 = \left(-\frac{Px^2}{2} + Max\right) + C1 \quad (19)$$

$$C1 = \left(\frac{Pl^2}{2} - Pl(l)\right) \quad (20)$$

$$C1 = \left(\frac{Pl^2}{2} - Pl^2\right) \quad (21)$$

$$C1 = -\frac{Pl^2}{2} \quad (22)$$

Cálculo de C2 :

$$EIv(x) = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Max^2}{2} + C1x + C2 \quad (23)$$

$$0 = -\frac{Pl^3}{6} + \frac{Pl^3}{2} - C1l + C2 \quad (24)$$

$$C2 = \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^3}{2} + \frac{Pl^3}{2} \quad (25)$$

$$C2 = \frac{Pl^3}{6} \quad (26)$$

Substituindo os valores das constantes de integração obtemos as expressões finais para rotação e deslocamento, respectivamente:

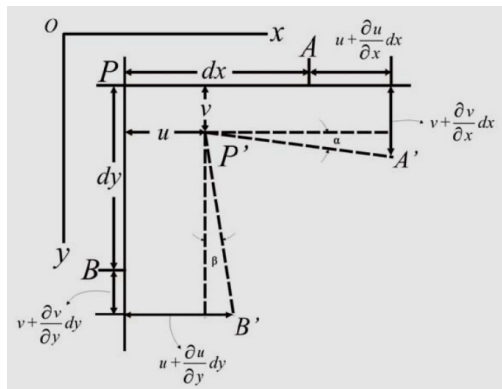
$$EIv' = -\frac{Px^2}{2} + Plx - \frac{Pl^2}{2} \quad (27)$$

$$EIv(x) = -\frac{Px^3}{6} + \frac{Plx^2}{2} - \frac{Pl^2}{2}x + \frac{Pl^3}{6} \quad (28)$$

2.3 TEORIA DA ELASTICIDADE E SEUS COMPONENTES DE DEFORMAÇÃO

Para a teoria da elasticidade temos que as deslocamento podem ser obtidas em componentes verticais e horizontais (u,v) e suas deformações (ϵ , γ). (Martins, 2011)

Figura 3 - Deformações no plano xy (Timoshenko & Goodier, 1970)



Fonte : Adaptado de Timoshenko e Goodier, 1970

No estudo da deformação de um corpo elástico será presumido que há suficientes restrições para impedir seu deslocamento como corpo rígido, de tal forma que nenhum deslocamento de partículas do corpo é possível sem que este sofra uma deformação. (Timoshenko & Goodier, 1970)

Somente pequenas deformações, tais como usualmente ocorre na engenharia estrutural. Os pequenos deslocamentos das partículas de um corpo deformado serão primeiramente decompostas nas componentes u , v e w paralelas aos eixos coordenados x , y e z respectivamente. Será suposto que estas componentes são quantidades muito pequenas, variando continuamente no volume do corpo. Considere-se um elemento infinitesimal dx , dy dz de um corpo elástico.

Se um corpo sofre uma deformação, então u, v, w são as componentes do deslocamento do ponto P . O deslocamento na direção x de um ponto adjacente A , localizado sobre o eixo x , é dado, até a primeira ordem em dx , por:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (29)$$

Devido ao acréscimo $(\partial u / \partial x) dx$ da função com o aumento da coordenada x , o alongamento do elemento PA causado pela deformação é $(\partial u / \partial x) dx$. Assim, o alongamento unitário, também chamado de deformação linear unitária ou deformação específica no ponto P , na direção x , é dado por $\partial u / \partial x$.

De maneira análoga, pode-se demonstrar que os alongamentos unitários nas direções y e z são dados, respectivamente, por $\partial v / \partial y$ e $\partial w / \partial z$

Usaremos a letra ϵ para representar o alongamento unitário e a letra γ para a deformação angular.

Para indicar as direções das deformações, serão usados, para essas letras, os mesmos índices que foram utilizados para as componentes de tensão.

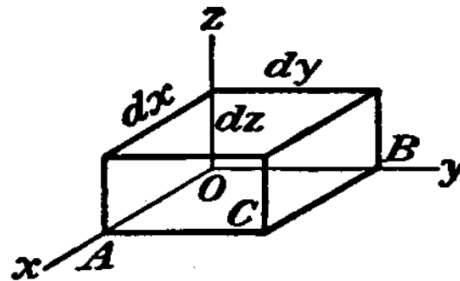
Então, da discussão acima, podemos estabelecer as seguintes relações :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (30)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (31)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (32)$$

Figura 4-Elemento infinitesimal



Fonte : Adaptado Timoshenko e Goodier-1970

As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas, geralmente, como Lei de Hooke, já conhecida por nós.

Observa-se um paralelepípedo retangular elementar com as faces paralelas aos eixos coordenados e submetido à ação da tensão normal σ_z uniformemente distribuída. Para calcular deflexão utilizando teoria faremos uso das seguintes hipóteses :

- 1) Considera-se que não ocorra deslocamento de corpo rígido (deslocamento sem deformação). Portanto, o deslocamento de qualquer partícula do corpo somente ocorre se este se deformar.
- 2) É válida a Lei de Hooke, ou seja, considera-se linear a relação existente entre tensões e deformações.
- 3) Seção plana perpendicular ao eixo da barra permanece plana na flexão (BEER & JOHNSTON, 1982).

As condições de contorno são :

$v=0$ no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = 0$.

$v=0$ no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = h/2$

$v=0$ no ponto de coordenadas $x = 0$ e $y = - h/2$

$u=0$ no ponto de coordenadas $x=0$ e $y=0$.

$u=0$ no ponto de coordenadas $x=0$ e $y=h/2$

$u=0$ no ponto de coordenadas $x=0$ e $y= - h/2$

Sabendo as expressões conhecidas de $M(x)$ e $V(x)$,estes esforços produzem as seguintes expressões:

$$\sigma_x = - \frac{M(x)*y}{I} = - \frac{(Px-Pl)*y}{I} \quad (33)$$

$$\tau = \frac{V(x)*Q}{b*I} = \frac{P*Q}{b*I} \quad (34)$$

Podemos obter as deformações ϵ_x , ϵ_y e γ_{xy} , a partir da generalização da lei de hooke e a extensão da mesma :

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = - \frac{(Px-Pl).y}{EI} \quad (35)$$

$$\epsilon_y = - \frac{\nu \sigma_x}{E} = \frac{\nu * (Px-Pl).y}{EI} \quad (36)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{P*Q}{b*I*G} \quad (37)$$

Sabendo que a deflexão u é positiva quando estiver no sentido positivo de x e que a deflexão v é positiva quando estiver no sentido positivo de y integramos as equações (39) e (40) e obteremos as seguintes expressões ,para determinar u e v .

$$u = - \left(\frac{\nu}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + f(y) \quad (38)$$

$$v = \frac{\nu*(Px-Pl)y^2}{2EI} + g(x) \quad (39)$$

As funções $f(y)$ e $g(x)$ representam funções desconhecidas para encontrar os deslocamentos u e v . , podemos reescrever a equação , como :

$$\gamma_{xy} = \frac{P*Q}{b*I*G} + \frac{df(y)}{dy} - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + \frac{dg(x)}{dx} \quad (40)$$

Na equação acima, alguns termos são apenas funções de x , outras são funções de y , e um deles é uma constante. Portanto, é possível escrever:

$$K = F(y) + G(x) \quad (41)$$

$$F(y) = \frac{df(y)}{dy} \quad (42)$$

$$G(x) = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + \frac{dg(x)}{dx} \quad (43)$$

$$K = \frac{P*Q}{b*I*G} \quad (44)$$

Entretanto, a equação (41) somente será satisfeita para qualquer x e qualquer y se

G(x) e F(y) forem constantes:

$$F(y) = \frac{df(y)}{dy} = C1 \quad (45)$$

$$G(x) = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + \frac{df(x)}{dx} = C2 \quad (46)$$

Integrando F(y) e G(x)

$$F(y) = C1y + C3 \quad (47)$$

$$G(x) = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} \right) + C2x + C4 \quad (48)$$

$$u = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + C1y + C3 \quad (49)$$

$$v = \frac{v*(Px-Pl)y^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} \right) + C2x + C4 \quad (50)$$

C1, C2, C3 e C4 podem ser determinadas através das condições de contorno citadas anteriormente :

Para $y = \frac{h}{2}$, tem-se :

$$x = L$$

$$y = \frac{h}{2}$$

$$v = 0 \text{ (Deslocamento Vertical nulo)}$$

$u = 0$ (Deslocamento Horizontal nulo)

Utilizando a equação (49), temos que :

$$u = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + C1y + C3 \quad (51)$$

$$0 = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Pl^2}{2} - Pl^2 \right) + C1(h/2) + C3 \quad (52)$$

$$C3 = \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(- \frac{Pl^2}{2} \right) - C1(h/2) \quad (53)$$

Utilizando a equação (50), temos que:

$$v = \frac{v^*(Px-Pl)y^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} \right) + C2x + C4 \quad (50)$$

$$0 = \frac{v^*(Pl-Pl)\left(\frac{h}{2}\right)^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl*l^2}{2} \right) + C2(l) + C4 \quad (54)$$

$$C4 = \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(- \frac{Pl^3}{3} \right) - C2(l) \quad (55)$$

Para $y = - \frac{h}{2}$

$x = L$

$y = - \frac{h}{2}$

$v = 0$ (Deslocamento Vertical nulo)

$u = 0$ (Deslocamento Horizontal nulo)

Substituindo a equação (53), na equação (51), temos que:

$$u = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx \right) + C1y + C3 \quad (56)$$

$$0 = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Pl^2}{2} - Pl * l \right) - C1\left(\frac{h}{2}\right) - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Pl^2}{2} \right) - C1\left(\frac{h}{2}\right) \quad (57)$$

$$C1 = 0 \quad (58)$$

Utilizando a equação (54)

$$v = \frac{v^*(Px-Pl)y^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI}\right) * \left(\frac{Pl^3}{6} - \frac{Plx^2}{2}\right) + C2x + C4 \quad (59)$$

$$0 = \frac{v^*(Pl-Pl)\left(-\frac{h}{2}\right)^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI}\right) * \left(\frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^*l^2}{2}\right) + C2l + C4 \quad (60)$$

$$C4 = -\frac{Pl^3}{3EI} - C2l \quad (61)$$

Para calcular C2:

$$k = C1 + C2 \quad (41)$$

$$\frac{P^*Q}{b^*I^*G} = C1 + C2 \quad (62)$$

$$C2 = \frac{P^*Q}{b^*I^*G} - 0 \quad (63)$$

Para calcular C3:

$$C3 = \left(\frac{1}{EI}\right) * \left(-\frac{Pl^2}{2}\right) - 0 \left(\frac{h}{2}\right) \quad (64)$$

$$C3 = \left(\frac{1}{EI}\right) * \left(-\frac{Pl^2}{2}\right) \quad (65)$$

Para calcular C4:

$$C4 = -\frac{(Pl^3)}{3EI} - C2l \quad (66)$$

$$C4 = -\frac{(Pl^3)}{3EI} - \frac{P^*Q}{b^*I^*G} \quad (67)$$

Substituindo as constantes nas equações (48) e (49), temos:

$$u = -\left(\frac{y}{EI}\right) * \left(\frac{Px^2}{2} - Plx\right) - \left(\frac{Pl^2}{2EI}\right) \quad (68)$$

$$v = \frac{v^*(Px-Pl)y^2}{2EI} - \left(\frac{1}{EI}\right) * \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2}\right) + \frac{P^*Q}{b^*I^*G}x - \frac{(Pl^3)}{3EI} - \frac{P^*Q}{b^*I^*G} \quad (69)$$

As equações acima fornecem as componentes dos deslocamentos de todos os pontos

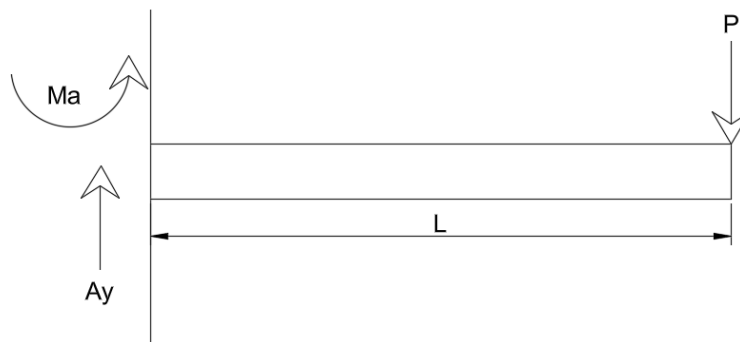
da viga engastada. As componentes verticais dos deslocamentos verticais dos pontos com coordenada $y = 0$ são dadas por:

$$v = - \left(\frac{1}{EI} \right) * \left(\frac{Px^3}{6} - \frac{Plx^2}{2} \right) + \frac{P*Q}{b*I*G} x - \frac{(Pl^3)}{3EI} - \frac{P*Q}{b*I*G} \quad (70)$$

3. METODOLOGIA DA PESQUISA

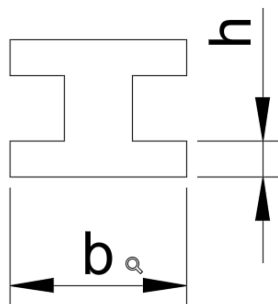
A viga que foi adotada para estudo de deflexões foi uma viga engastada com uma carga pontual em sua extremidade como solicitação. O perfil escolhida foi W610x82 (Hibbeler, 2008)

Figura 5 - Viga estudada



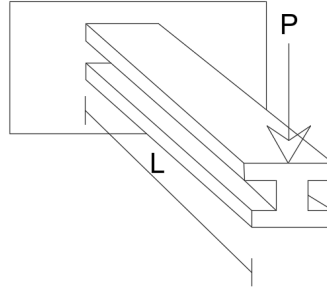
Fonte : Autoria própria

Figura 6 - Perfil adotado



Fonte : Autoria própria

Figura 7-Perspectiva em 3D da viga



Fonte : Autoria Própria

Para esse problema base serão aplicados os dois métodos de cálculo para as deflexões e posteriormente feita a comparação.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 DEFLEXÃO DE UMA VIGA ENGASTADA PELO MÉTODO DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS.

Utiliza-se a equação (28) para calcular a deflexão v e suas teorias apresentadas anteriormente substituindo os valores adotados obtemos os dados do quadro 1 em que é possível visualizar o deslocamento vertical causado pelas solicitações presentes na mesma . Para calcular a deflexão por esse método vamos adotar o seguintes dados :

Perfil : W610x82 (Hibbeler,2008)

$L=5$ m

$E=200$ Gpa

$I= 560*10^6$ mm⁴

$P=50$ kN

Quadro 2- Deflexão vertical calculada por Resistência dos Materiais

Deflexão vertical calculada por Resistência dos materiais (v)		
Ponto	x(m)	v (10^{-6} mm)
1	0,0	2,916666667
2	0,5	2,12625
3	1,0	1,493333333
4	1,5	1,000416667
5	2,0	0,630000000
6	2,5	0,3645833333
7	3,0	0,1866666667
8	3,5	0,07875
9	4,0	0,02333333333
10	4,5	0,002916666667
11	5	0

Fonte : Autoria própria

Depois de analisar o quadro 2 foi possível observar que o ponto onde a deflexão máxima acontece, está em $x = 0$ m com um valor de $2,91 \cdot 10^{-6}$ mm .Ao longo da viga em balanço, o momento fletor aumenta gradualmente, atingindo seu valor máximo no engaste e diminuindo até zero na extremidade livre. Como a deflexão está diretamente relacionada à curvatura da viga, ela se acumula ao longo do comprimento, alcançando seu valor máximo na extremidade esquerda . Um dos motivos da deflexão ser igual à zero na extremidade pode ser .a carga puramente vertical e não induzir um momento fletor diretamente na extremidade livre, pode ocorrer uma configuração na qual o deslocamento vertical naquele ponto seja nulo, enquanto a inclinação (rotação) ainda seja significativa.

4.2 DEFLEXÃO DE UMA VIGA ENGASTADA POR TEORIA DA ELASTICIDADE

Para o método da teoria da elasticidade serão adotados os seguintes parâmetros:

Perfil : W610x82 (Hibbeler,2008)

L=5 m

$$E=200 \text{ Gpa}$$

$$I=560 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$P=50 \text{ kN}$$

$$G=75 \text{ Gpa}$$

$$\nu=0,32$$

$$S=1810 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Sabendo que a teoria da elasticidade admite deslocamento em duas componentes utiliza-se a equação (69) para obter os valores do quadro 3. Como a altura da viga tem uma influência significativa em relação ao seu comprimento longitudinal, avaliamos o deslocamento vertical em três diferentes posições ao longo da altura da seção transversal, considerando os seguintes valores, sendo $y=-0,20 \text{ mm}$, $y=0 \text{ mm}$ e $y=0,20 \text{ mm}$. As escolhas desses valores se devem pelo fato de que em $y=-0,20$ nessa região está em tração, ou seja, as fibras se alongam devido à curvatura da viga, $y=0$ é o eixo neutro, o deslocamento ocorre sem tensão normal, pois é a linha onde não há alongamento nem compressão e em $y=0,20$ é a região que está em compressão, ou seja, as fibras se encurtam devido à curvatura da viga.

Quadro 3- Deslocamento vertical(v)calculado por teoria da elasticidade para $y=-0,20$

Deslocamento vertical(v)calculada por teoria da elasticidade para $y=-0,20$			
Pontos	y	-0,0002 m	
	x(m)	v(m)	V(mm)
1	0,0	-0,005748699345	-5,748699345
2	0,5	-0,00009347083929	-0,09347083929
3	1,0	-0,00007440447619	-0,07440447619
4	1,5	-0,000166945256	-0,166945256
5	2,0	-0,00042689675	-0,42689675
6	2,5	-0,0009100625298	-0,9100625298
7	3,0	-0,001672246167	-1,672246167
8	3,5	-0,002769251232	-2,769251232
9	4,0	-0,004256881298	-4,256881298
10	4,5	-0,006190939935	-6,190939935
11	5	-0,008627230714	-8,627230714

Fonte : Autoria própria

Quadro 4 -Deslocamento vertical (v)calculado por teoria da elasticidade para y=0

Deflexão vertical calculada por teoria da elasticidade para y =0 (v)			
Pontos	y (m)	0	
	x(m)	v(m)	V(mm)
1	0,0	-0,005748697917	-5,748697917
2	0,5	-0,00009347098214	-0,09347098214
3	1,0	-0,0000744047619	-0,0744047619
4	1,5	-0,0001669456845	-0,1669456845
5	2,0	-0,0004268973214	-0,4268973214
6	2,5	-0,000910063244	-0,910063244
7	3,0	-0,001672247024	-1,672247024
8	3,5	-0,002769252232	-2,769252232
9	4,0	-0,00425688244	-4,25688244
10	4,5	-0,00619094122	-6,19094122
11	5	-0,008627232143	-8,627232143

Fonte : Autoria Própria

Quadro 5 -Deslocamento vertical (v) calculado por teoria da elasticidade para y=0,20

Deflexão vertical obtida por resistência dos materiais (v)			
Pontos	y (m)	0,0002	
	x(m)	v(m)	v(mm)
1	0,0	-0,005748699345	-5,748699345
2	0,5	-0,00009347083929	-0,09347083929
3	1,0	-0,00007440447619	-0,07440447619
4	1,5	-0,000166945256	-0,166945256
5	2,0	-0,00042689675	-0,42689675
6	2,5	-0,0009100625298	-0,9100625298
7	3,0	-0,001672246167	-1,672246167
8	3,5	-0,002769251232	-2,769251232
9	4,0	-0,004256881298	-4,256881298
10	4,5	-0,006190939935	-6,190939935
11	5	-0,008627230714	-8,627230714

Fonte: Autoria própria

Vamos analisar o deslocamento horizontal que vai ser representado pela equação (68), que estará presente nos quadros 6, 7 e 8.

Quadro 6-Deslocamento horizontal por teoria da elasticidade para $y=-0,20$

Deslocamento horizontal por teoria da elasticidade para $y = -0,20$		
Pontos	y	-0,20
	x(m)	u(mm)
1	0,0	0
2	0,5	-0,1004464286
3	1,0	-0,1785714286
4	1,5	-0,234375
5	2,0	-0,2678571429
6	2,5	-0,2790178571
7	3,0	-0,2678571429
8	3,5	-0,234375
9	4,0	-0,1785714286
10	4,5	-0,1004464286
11	5	0

Fonte : Autoria própria

Quadro 7-Deslocamento horizontal(u) por teoria da elasticidade para $y=0$

Deslocamento horizontal(u) por teoria da elasticidade para $y=0$		
Pontos	y	0
	x(m)	u(mm)
1	0,0	0
2	0,5	0
3	1,0	0
4	1,5	0
5	2,0	0
6	2,5	0
7	3,0	0

8	3,5	0
9	4,0	0
10	4,5	0
11	5	0

Fonte : Autoria própria

Quadro 8-Deslocamento horizontal(u) calculado por teoria da elasticidade para $y=0,2$

Pontos	y	0,2
	x(m)	u(mm)
1	0,0	0
2	0,5	-0,1004464286
3	1,0	-0,1785714286
4	1,5	-0,234375
5	2,0	-0,2678571429
6	2,5	-0,2790178571
7	3,0	-0,2678571429
8	3,5	-0,234375
9	4,0	-0,1785714286
10	4,5	-0,1004464286
11	5	0

Fonte : Autoria própria

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A comparação entre as duas abordagens foi realizada com base nos deslocamentos, tensões e deformações previstas por cada método.

Os deslocamentos foram calculados utilizando ambas as abordagens e os resultados indicam que a Teoria da Elasticidade fornece valores ligeiramente maiores em comparação com a Resistência dos Materiais. Essa diferença pode ser atribuída às suposições

simplificadoras da Resistência dos Materiais, como a hipótese de seções planas permanecendo planas após a deformação, o que pode superestimar os deslocamentos em alguns casos.

Os valores de deformação obtidos pelos dois métodos apresentaram diferenças significativas ao longo da viga, sendo que as discrepâncias foram mais acentuadas em zonas de alta concentração de tensão. A Resistência dos Materiais forneceu distribuições aproximadas, enquanto a Teoria da Elasticidade apresentou valores mais elevados e uma representação mais detalhada das deformações, evidenciando melhor a influência dos efeitos locais.

Os resultados demonstram que, para análises de engenharia rotineiras, a Resistência dos Materiais fornece estimativas suficientemente precisas e de fácil aplicação. No entanto, para análises detalhadas, especialmente em estruturas submetidas a carregamentos complexos ou onde há grande variação de tensões, a Teoria da Elasticidade se mostra mais precisa

REFERÊNCIAS

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1970.

POPOV, E. P. **Resistência dos Materiais**. 2. ed. São Paulo: PHB, 1984.

ROJAHN, Éricson; ALQUATI, Ernesto L. G. **Breve história da teoria da elasticidade**. In: **16ª Mostra da Produção Universitária** – MPU, 2017, Rio Grande. Anais...: Universidade Federal do Rio Grande – FURG, 2017. Disponível em https://petcivil.furg.br/images/MPU_2017/MPU-RESUMO-TCC.pdf. Acesso em 12 jan.2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ. **Notas de aula de Resistência dos Materiais**. Disponível em: <https://estruturas.ufpr.br/wp-content/uploads/resistencia/Apostila/Capitulo1.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2025.

BEER, F. P.; JOHNSTON Jr., E. R.; DEWOLF, J. T. **Mecânica dos Sólidos**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.