



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO  
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE ANGICOS  
CURSO DE BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL

ITALO OLIVEIRA REBOUÇAS

**TORÇÃO EM PILARES TRELIÇADOS  
COM DIAGONAIS CRUZADAS**

ANGICOS

2023

ITALO OLIVEIRA REBOUÇAS

**TORÇÃO EM PILARES TRELIÇADOS  
COM DIAGONAIS CRUZADAS**

Trabalho Final de Graduação apresentado à  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Wendell Rossine Medeiros de  
Souza, Prof. Dr.

ANGICOS

2023

©Todos os direitos estão reservados à Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996, e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tornar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata, exceto as pesquisas que estejam vinculadas ao processo de patenteamento. Esta investigação será base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) seja devidamente citado e mencionado os seus créditos bibliográficos.

R292t Rebouças, Italo Oliveira.  
Torção em pilares treliçados com diagonais  
cruzadas / Italo Oliveira Rebouças. - 2023.  
42 f. : il.

Orientador: Wendel Rossine Medeiros de Souza.  
Monografia (graduação) - Universidade Federal  
Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia Civil,  
2023.

1. treliças. 2. diagonais cruzadas. 3.  
flambagem por torção. 4. análise paramétrica. I.  
Souza, Wendel Rossine Medeiros de, orient. II.  
Título.

Ficha catalográfica elaborada por sistema gerador automático em conformidade  
com AACR2 e os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Biblioteca Campus Angicos

Bibliotecário: Helder Romero Maia Duarte

CRB: 15/673

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

ITALO OLIVEIRA REBOUÇAS

**TORÇÃO EM PILARES TRELIÇADOS  
COM DIAGONAIS CRUZADAS**

Trabalho Final de Graduação apresentado à  
Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
como requisito para obtenção do título de  
Bacharel em Engenharia Civil.

Defendida em: 18 / 05 / 2023.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Wendell Rossine Medeiros de Souza, Prof. Dr. (UFERSA)  
Presidente

---

Kléber Cavalcanti Cabral, Prof. Dr. (UFERSA)  
Membro Examinador

---

Ilton Medeiros Pacheco, Prof. M.Sc.  
Membro Examinador

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me permitido chegar até aqui e ter me dado forças para concluir este curso.

Agradeço aos meus pais, José da Silva Rebouças e Luzia Lima Oliveira Rebouças, por sempre terem me ensinado e orientado e por terem me preparado para este desafio.

Agradeço à minha esposa, Naara Pereira Costa Rebouças, por me apoiar em todas as batalhas e por me ajudar nos momentos difíceis e às minhas filhas, Natália da Costa Rebouças e Heloísa Costa Rebouças, por me darem tanta motivação para prosseguir nos estudos.

Agradeço ao meu Orientador, Wendell Rossine Medeiros de Souza, pelo voto de confiança no meu trabalho e por estar sempre disponível para me orientar durante o desenvolvimento deste TFG, sempre dando valiosas contribuições.

Agradeço à Banca Examinadora pelos comentários e sugestões.

## RESUMO

Na maior parte das treliças planas, os eixos de todas as peças encontram-se em uma mesmo plano, e os esforços a que a estrutura está submetida também, o que justifica a utilização de uma análise bidimensional, porém existe um tipo particular de treliça que não satisfaz esta condição, que são as treliças com diagonais e montantes por dupla cantoneira (Ou barras chatas), em que as diagonais são dispostas de forma cruzada. A norma europeia de projeto de estruturas de aço (EN 1993 1-1) recomenda a não utilização de diagonais em dupla cantoneira cruzada e exige uma análise que considere os efeitos de torção quando estas forem utilizadas, enquanto a norma brasileira (NBR 8800/2008), assim como a norma americana (AISC Specification 2016), não cita tal questão. Este trabalho possuiu como objetivo geral identificar se há efeitos negativos devido à torção em colunas de diagonais cruzadas no que diz respeito à resistência e rigidez, verificando também o efeito do travamento assimétrico dos banzos no caso de diagonais cruzadas. Foram realizadas análises de flambagem elástica de três pares de colunas engastadas na base e livres no topo, tendo cada um destes um tipo diferente de ligações entre diagonais e banzos, sendo estas soldadas, parafusadas por contato e parafusadas por atrito, onde cada par foi composto por uma coluna com diagonais paralelas e outra com diagonais cruzadas. Para a realização destas análises, utilizou-se a versão acadêmica do software comercial Idea Statica, que utiliza um método chamado CBFEM, que é uma combinação do método dos componentes com o método dos elementos finitos. Observou-se que, embora a disposição das diagonais cruzadas seja não-recomendada pela norma europeia, esta configuração apresentou maior carga de flambagem do banzo a flexão e menor carga de flambagem da coluna a flexão e torção. Conclui-se que em casos de falha predominante de flambagem por flexão do banzo, o sistema de diagonais cruzadas pode ser efetivo por reduzir o comprimento destravado, sendo necessários estudos que verifiquem se as equações para flambagem por torção por eixo restringido se aplicam bem a este caso. Além disso, caso seja predominante a flambagem por torção da coluna, o uso de diagonais cruzadas pode ser contra a segurança, sendo também necessários estudos paramétricos para verificar se este tipo de falha é predominante para determinados parâmetros de treliças e necessário realizar a adaptação do modelo de cálculo de flambagem por torção para colunas treliçadas.

**Palavras-chave:** Treliças. Diagonais Cruzadas. Flambagem por torção. Análise paramétrica.

## ABSTRACT

For most plane trusses, the axis of all elements are located in the same plane, and also are the actions applied to the structure, which justifies a planar analysis, however there is a particular kind of truss which does not satisfy these conditions, these are the trusses composed of diagonals made of double angles (or flat bars) in which the angles are crossed. The european code for design of steel structures (EN 1993 1-1) recommends that diagonals made of crossed angles do not be used and requires an analysis that considers the torsional effects when they are used, while the brazilian code (NBR 8800/2008), as well as the american code (AISC spec 2016), do not approach this issue. This paper had as main objective to identify if there are negative effects due to torsion on columns composed of crossed diagonals with regards to strength and stiffness, checking also the effect of asymmetric bracing for the chords in the case of crossed diagonals. Elastic buckling analyses were performed for three pairs of columns fixed at the bases and free at the top, each one of these having one different type of connection between diagonals and chords, which were welded, bolted with bearing and bolted slip-critical, and each pair composed of one column with parallel diagonals and other with crossed diagonals. To perform these analyses, the academic version of the commercial software Idea Statica was used, which uses a method called CBFEM, that is a combination of the component method and the finite element method. It was observed that, although the use of crossed diagonals is not recommended by the european code, this configuration presented greater buckling load for chord flexural buckling and smaller buckling loads for flexural and torsional column buckling. It was concluded that in cases where the predominant failure mode was flexural buckling of the chord, the system of crossed diagonals can be effective because of the reduction of the unbraced length, being necessary to develop additional studies to check if the equations of constrained axis torsional buckling apply adequately to this situation. Also, if the torsional buckling of the column is predominant, the use of crossed diagonals may be unsafe, being also necessary to develop additional studies to check if this failure mode is predominant for certain parameters of trusses and also necessary to adapt the torsional buckling model to these columns.

**Keywords:** Trusses. Crossed Diagonals. Torsional Buckling. Parametric Analysis.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Recomendação do Eurocode 3 acerca de treliçado de colunas .....                                                             | 11 |
| Figura 2: Coluna Engastada-Livre sujeita a Flambagem.....                                                                             | 13 |
| Figura 3: Coluna biapoada sujeita a Flambagem.....                                                                                    | 16 |
| Figura 4: Efeito de Cisalhamento em coluna.....                                                                                       | 17 |
| Figura 5: Rigidez Transversal de Coluna Composta .....                                                                                | 19 |
| Figura 6: Diferentes configurações de colunas compostas.....                                                                          | 21 |
| Figura 7: Coluna com travamentos assimétricos nas mesas.....                                                                          | 24 |
| Figura 8: Curvas Momento-Rotação Real e Idealizada de uma ligação.....                                                                | 26 |
| Figura 9: Idealização de Ligação pelo Método dos Componentes .....                                                                    | 26 |
| Figura 10: Análise de elementos finitos de suporte.....                                                                               | 27 |
| Figura 11: Modelo simplificado de viga para suporte .....                                                                             | 28 |
| Figura 12: Geometria das colunas .....                                                                                                | 30 |
| Figura 13: Perfil dos Banzos (Dimensões em mm).....                                                                                   | 31 |
| Figura 14: Perfil da Diagonal (Dimensões em mm).....                                                                                  | 32 |
| Figura 15: Geometria das placas de Base ( Dimensões em mm).....                                                                       | 33 |
| Figura 16: Detalhe da ligação parafusada Banzo-Diagonal (Dimensões em mm).....                                                        | 34 |
| Figura 17: Modos de Flambagem da coluna. Da esquerda para a direita: Fora do plano, no plano, flexão do banzo, torção do banzo, ..... | 37 |



## LISTA DE TABELAS

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Propriedades geométricas do banzo .....                       | 31 |
| Tabela 2: Propriedades geométricas da diagonal .....                    | 32 |
| Tabela 3: Cargas de flambagem elástica para 8 elementos por alma .....  | 37 |
| Tabela 4: Cargas de flambagem elástica para 12 elementos por alma ..... | 37 |
| Tabela 5: Cargas de flambagem elástica para 16 elementos por alma ..... | 38 |

## LISTA DE GRÁFICOS

|                                                          |                                      |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Gráfico 1: Flambagem de coluna( $P \times \delta$ )..... | <b>Erro! Indicador não definido.</b> |
| Gráfico 2: Coeficientes $\tau$ .....                     | 20                                   |

## SUMÁRIO

|                                                        |    |
|--------------------------------------------------------|----|
| 1. INTRODUÇÃO .....                                    | 10 |
| 2. Objetivos .....                                     | 12 |
| 2.1. Objetivo geral .....                              | 12 |
| 2.2. Objetivos específicos .....                       | 12 |
| 3. REFERENCIAL TEÓRICO .....                           | 13 |
| 3.1. Flambagem de peças comprimidas .....              | 13 |
| 3.2. Flambagem de treliças Planas .....                | 17 |
| 3.3. Flambagem por torção .....                        | 22 |
| 3.3.1. Flambagem por torção centrada .....             | 22 |
| 3.3.2. Flambagem por torção com eixo restringido ..... | 23 |
| 3.4. CBFEM .....                                       | 25 |
| 3.4.1. Método dos Componentes (Component Method) ..... | 25 |
| 3.4.2. Método dos Elementos Finitos .....              | 27 |
| 4. METODOLOGIA .....                                   | 29 |
| 4.1. Descrição dos Modelos .....                       | 30 |
| 4.1.1. Geometria .....                                 | 30 |
| 4.1.2. Perfis .....                                    | 31 |
| 4.1.3. Ligações .....                                  | 32 |
| 4.1.4. Carregamento .....                              | 34 |
| 4.1.5. Malha de elementos finitos .....                | 35 |
| 5. RESULTADOS .....                                    | 36 |
| 5.1. Cálculos Analíticos .....                         | 36 |
| 5.2. Resultados das simulações computacionais .....    | 36 |
| 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....                          | 40 |
| 6.1. Sugestões de trabalhos futuros .....              | 41 |
| 7. REFERÊNCIAS .....                                   | 42 |

# 1. INTRODUÇÃO

As treliças planas são estruturas muito eficientes para suportar esforços de flexão e flexo-compressão, sendo muito utilizadas para compor estruturas de coberturas, pontes, viadutos, entre outras. Na maior parte das treliças planas, os eixos de todas as peças encontram-se em um mesmo plano, e os esforços a que a estrutura está submetida também, o que justifica a utilização de uma análise bidimensional, porém existe um tipo particular de treliça que não satisfaz esta condição, que são as treliças com diagonais e montantes por dupla cantoneira (Ou barras chatas), em que as diagonais são dispostas de forma cruzada.

Neste tipo de treliça, os eixos das cantoneiras encontram-se fora do plano dos banzos, o que pode introduzir esforços adicionais, como torção da treliça, que não são quantificados por uma análise bidimensional ou análise tridimensional que desconsidere a excentricidade destas diagonais.

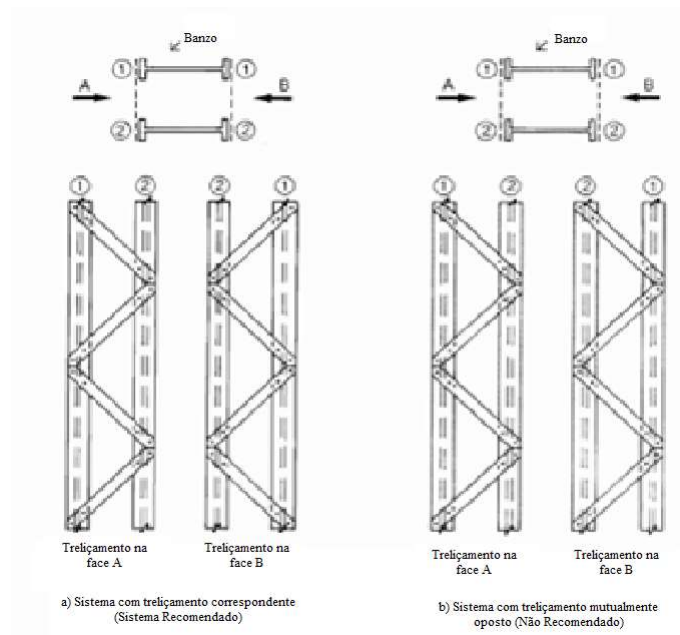
A norma europeia de projeto de estruturas de aço (EN 1993 1-1) recomenda a não utilização de diagonais em dupla cantoneira cruzada e exige uma análise que considere os efeitos de torção quando estas forem utilizadas, enquanto a norma brasileira (NBR 8800/2008), assim como a norma americana (AISC Specification 2016), não cita tal questão. Transcreve-se abaixo a recomendação (2) da seção 6.4.2.2 da norma EN 1993 1-1. A Figura 1 apresenta os sistemas recomendado e não-recomendado pela norma.<sup>1</sup>

*When the lacing systems on opposite faces of a built-up member with two parallel laced planes are mutually opposed in direction as shown in 6.10(b), the resulting torsional effects in the member should be taken into account.*

---

<sup>1</sup> A Figura 1 é nomeada Figura 6.10 na norma, sendo esta nomenclatura descrita no texto citado.

Figura 1: Recomendação do Eurocode 3 acerca de treliçado de colunas



Fonte: EN 1993 1-1

Deve-se questionar, então, se tais estruturas, projetadas com a utilização de análises simplificadas, apresentam níveis de segurança inadequados e se deve a NBR 8800 ignorar tais possíveis efeitos.

## **2. Objetivos**

### **2.1. Objetivo geral**

Este trabalho possuiu como objetivo geral identificar se há efeitos negativos devido à torção em colunas de diagonais cruzadas no que diz respeito à resistência e rigidez.

### **2.2. Objetivos específicos**

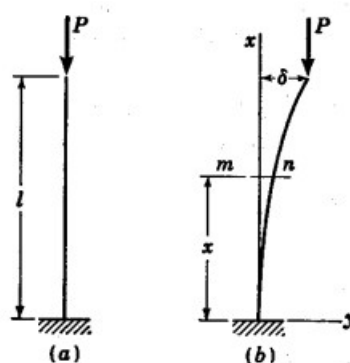
- Identificar se ocorre efeito de torção em treliças com diagonais cruzadas sujeitas a flambagem por flexão;
- Identificar se a distribuição de diagonais afeta as cargas críticas de flambagem lateral e flambagem por torção de pilares treliçados;  
Identificar se, para treliças do tipo Warren, a redução no comprimento destravado dos banzos resulta em um aumento da carga de flambagem dos mesmos;
- Verificar se a rigidez das ligações, sejam elas soldadas ou parafusadas, tem influência considerável nas cargas de flambagem dos diferentes modos de flambagem.

### 3. REFERENCIAL TEÓRICO

#### 3.1. Flambagem de peças comprimidas

Peças sujeitas a compressão estão sujeitas a falha por instabilidade, denominada de flambagem. Segundo Timoshenko (1953), o matemático Suíço Leonhard Euler foi a primeira pessoa a determinar a carga de flambagem de uma coluna. Em seu livro “Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes”, publicado em 1744, Euler, utilizando a equação da deformada de uma coluna Engastada-Livre, descreve a máxima carga suportada por uma *coluna ideal*, ou seja, perfeitamente reta, comprimida por uma carga perfeitamente centrada e no regime elástico. A seguir será apresentada a dedução desta carga, inicialmente para uma coluna Engastada-Livre e depois para uma coluna biapoada, de acordo com Timoshenko e Gere (1963):

Figura 2: Coluna Engastada-Livre sujeita a Flambagem

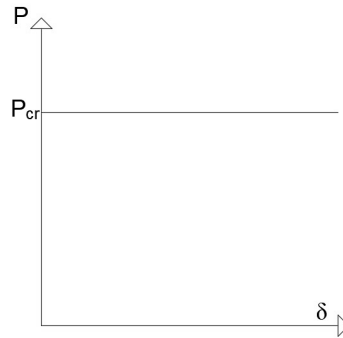


Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

Dada a coluna da Figura 2 com comprimento  $l$ , módulo de elasticidade  $E$  e momento de inércia  $I$ , se a carga  $P$  é menor que a carga crítica, a coluna permanece reta e está sujeita apenas a compressão axial. Esta forma reta do equilíbrio elástico é *estável*, o que significa que se uma força lateral é aplicada e produz um pequeno deslocamento, este deslocamento desaparece quando a força lateral é retirada e a coluna retorna à sua forma inicial. Se a carga  $P$  é gradualmente aumentada, mantendo-se o comprimento constante, uma condição é alcançada na qual a forma de equilíbrio se torna instável e uma pequena força lateral produzirá um deslocamento que não desaparecerá quando a força lateral é removida. A carga crítica, ou Carga de Flambagem de Euler, é, então, definida como a carga de compressão axial capaz de manter

a barra com esta deformação sem força lateral aplicada. O Gráfico 01 mostra a relação entre a carga  $P$  e o deslocamento do topo  $\delta$ . Observa-se que enquanto  $P < P_{cr}$ , o deslocamento no topo da barra é nulo, e que no momento em que  $P = P_{cr}$ , este deslocamento se torna indeterminado

Gráfico 1: Flambagem de coluna ( $P \times \delta$ )



Fonte: Autoria própria

Define-se, então, um deslocamento  $\delta$  no topo da coluna da Figura 2.b. O momento fletor em uma seção de coordenada  $x$  e cujo deslocamento é dado por  $y$  é:

$$M = -P \cdot (\delta - y) \quad (1)$$

E a equação diferencial da deformada da coluna é dada por

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot (\delta - y) \quad (2)$$

Definindo-se  $k^2 = \frac{P}{EI}$ , obtém-se

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = k^2 \delta \quad (3)$$

A solução gerada para a equação diferencial (3) é

$$y = A \cos(kx) + B \sin(kx) + \delta \quad (4)$$

Na extremidade engastada da coluna ( $x = 0$ ), temos que

$$y = \frac{dy}{dx} = 0$$

Aplicando estas condições de contorno, obtém-se

$$A = -\delta \text{ e } B = 0$$



Logo,

$$y = \delta(1 - \cos(kx)) \quad (5)$$

Na extremidade livre da coluna ( $x = l$ ), temos que

$$y = \delta$$

Aplicando esta condição de contorno, obtém-se

$$\delta \cdot \cos(kl) = 0$$

Este produto implica em duas possíveis soluções:

$$\delta = 0 \text{ ou } \cos(kl) = 0$$

A primeira solução representa uma barra reta, ou seja, trata de um caso de equilíbrio *estável*, em que a flambagem ainda não ocorreu, e a segunda solução representa uma barra deformada com  $\delta$  indeterminado, ou seja, pode assumir qualquer valor, o que representa a situação de equilíbrio *instável*, em que a flambagem ocorreu. Considerando a segunda solução, obtém-se

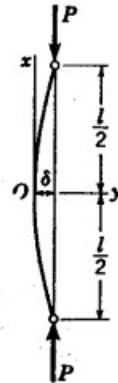
$$kl = (2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad (6)$$

Existem infinitas soluções algébricas para o problema, uma para cada valor natural de  $n$ , porém a única de interesse prático é a menor, ou seja, aquela para a qual  $n = 1$ , logo

$$kl = \frac{\pi}{2} \quad (7)$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4l^2} \quad (8)$$

Figura 3: Coluna biapoada sujeita a Flambagem



Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

Para o caso de uma coluna biapoada pode-se realizar o mesmo procedimento, porém uma forma mais simples de chegar ao resultado é por analogia ao da coluna engastada-livre. Observando-se a forma deformada da coluna biapoada na Figura 3, percebe-se que a metade desta coluna é exatamente igual à coluna engastada-livre, o que ocorre devido à simetria. Pode-se então, aplicar a equação (8), substituindo-se  $l$  por  $\frac{l}{2}$ , de onde se obtém, para a coluna biapoada:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2} \quad (9)$$

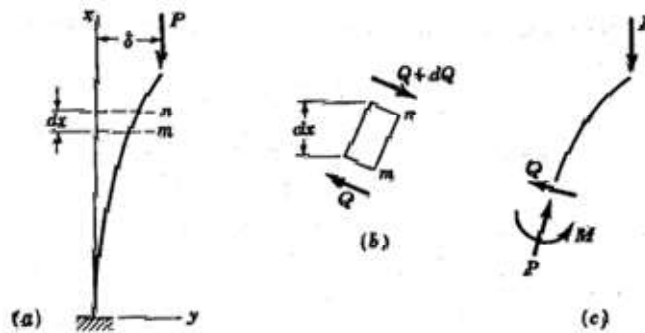
### 3.2. Flambagem de treliças Planas

A seção 3.1 apresentou o cálculo de flambagem de uma coluna simples, ou seja, de uma coluna que possui uma seção transversal constante. O Cálculo de flambagem de uma treliça plana pode ser realizado de forma semelhante ao de uma coluna simples, desde que seja levado em consideração o efeito das deformações por cisalhamento, que normalmente são desconsideradas em caso de colunas simples por serem, neste caso, desprezíveis, porém que possuem importância significativa no caso de treliças.

Segundo Timoshenko e Gere (1963), o método descrito a seguir, desenvolvido por Friederich Engesser, deve ser utilizado quando os efeitos de cisalhamento não forem desprezíveis.

Tomemos a coluna da Figura 4 com seu diagrama de corpo livre,

Figura 4: Efeito de Cisalhamento em coluna



Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

Quando a colunar flambar, irá surgir um esforço cortante  $Q$ , dado por:

$$Q = P \cdot \frac{dy}{dx} \quad (10)$$

A mudança na inclinação da deformada da coluna produzida pelo esforço cortante é dada por  $\frac{nQ}{AG}$ , onde  $n$  é um fator numérico dependente da forma da seção e  $G$  é o módulo de rigidez transversal. Para uma seção retangular,  $n = 1,2$ , enquanto para uma seção circular,  $n = 1,11$  e para uma seção I fletida no eixo de menor inércia,  $n \cong 1,2 \frac{A}{A_f}$ , em que  $A_f$  é a área das duas mesas. Para uma seção I fletida no eixo de maior inércia,  $n \cong \frac{A}{A_w}$ , em que  $A_w$  é a área da alma.

A derivada da mudança de inclinação representa a curvatura adicional devida ao efeito de cisalhamento e é igual a:

$$\frac{n}{AG} \frac{dQ}{dx} = \frac{nP}{AG} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (11)$$

A curvatura total é obtida somando-se a curvatura devido ao momento fletor com a curvatura devido ao esforço cortante, obtendo assim a seguinte equação de deformada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI} + \frac{nP}{AG} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (12)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P(\delta - y)}{EI(1 - nP/AG)} \quad (13)$$

A equação (13) é igual àquela obtida para uma coluna engastada-livre com a substituição de  $P$  pelo termo equivalente  $\frac{P}{(1 - nP/AG)}$ , de forma que se obtém a seguinte solução para a mesma:

$$\frac{P_{cr}}{EI(1 - nP_{cr}/AG)} = \frac{\pi^2}{4l^2} \quad (14)$$

$$P_{cr} = \frac{P_e}{1 + nP_e/AG} \quad (15)$$

, Onde  $P_e = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$  para este caso particular de uma coluna engastada-livre.

O denominador da equação (15) é muito próximo da unidade para colunas simples, como aquelas de seção retangular ou em I, porém pode divergir bastante da unidade quando esta equação é utilizada para treliças ou colunas compostas.

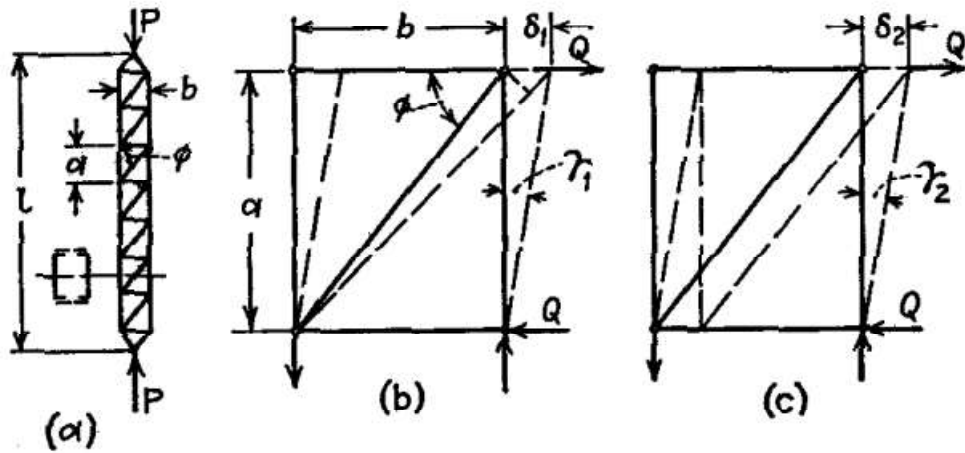
Segundo Timoshenko e Gere (1963), o método para utilização da equação (15) para o cálculo de flambagem de colunas compostas foi desenvolvido também por Friederich Engesser, e este método consiste em determinar a rigidez ao cisalhamento equivalente da coluna com a aplicação de uma força que cause uma diferença de inclinação unitária. Desta forma, obtém-se:

$$P_{cr} = \frac{P_e}{1 + \frac{P_e}{P_d}} \quad (16)$$

Onde,  $P_d$  representa a rigidez ao cisalhamento equivalente e substitui  $AG/n$ , que é dado para colunas simples, ou seja,  $1/P_d$  é a quantidade pela qual deve-se multiplicar o esforço cortante  $Q$  para se obter a inclinação adicional  $\gamma$  devido ao cisalhamento.

$$\gamma = \frac{Q}{P_d} \quad (17)$$

Figura 5: Rigidez Transversal de Coluna Composta



Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

Consideremos inicialmente a coluna apresentada na Figura 5. Enquanto o momento fletor é suportado pelos banzos, o esforço cortante é suportado pelas diagonais e montantes, que estão sujeitas a esforços de compressão ou tração. Estes esforços causam alongamento ou encurtamento destas barras. Assumindo que todas as ligações sejam rotuladas, o alongamento da diagonal produzido pela esforço cortante  $Q$  é dado por  $\frac{Qa}{A_d E \cdot \sin(\varnothing) \cdot \cos(\varnothing)}$ , onde  $\varnothing$  é o ângulo entre as barras horizontais e diagonais,  $Q/\cos(\varnothing)$  é a força de tração na diagonal,  $a/\sin(\varnothing)$  é o comprimento da diagonal e  $A_d$  é a área da seção transversal da diagonal (Ou a soma das áreas das duas diagonais, caso ela seja dupla, como a da Figura 5). O deslocamento lateral causado pelo alongamento da diagonal é dado por:

$$\delta_1 = \frac{Qa}{A_d E \cdot \sin(\varnothing) \cdot \cos^2(\varnothing)} \quad (18)$$

Semelhantemente, obtém-se o seguinte deslocamento lateral referente ao encurtamento dos montantes:

$$\delta_2 = \frac{Qb}{A_b E} \quad (19)$$

, Onde  $b$  é o comprimento do montante e  $A_b$  é a área da seção transversal do montante (Ou a soma das áreas dos dois montantes, caso ele seja duplo, como a da Figura 5).

A inclinação inicial  $\gamma$  devida ao cisalhamento é, então, dada por

$$\gamma = \frac{\delta_1 + \delta_2}{a} = \frac{Q}{A_d E \cdot \sin(\varnothing) \cdot \cos^2(\varnothing)} + \frac{Qb}{A_b E a} \quad (20)$$

Aplicando-se (20) em (17) e (16), obtém-se, para uma coluna biapoiada:

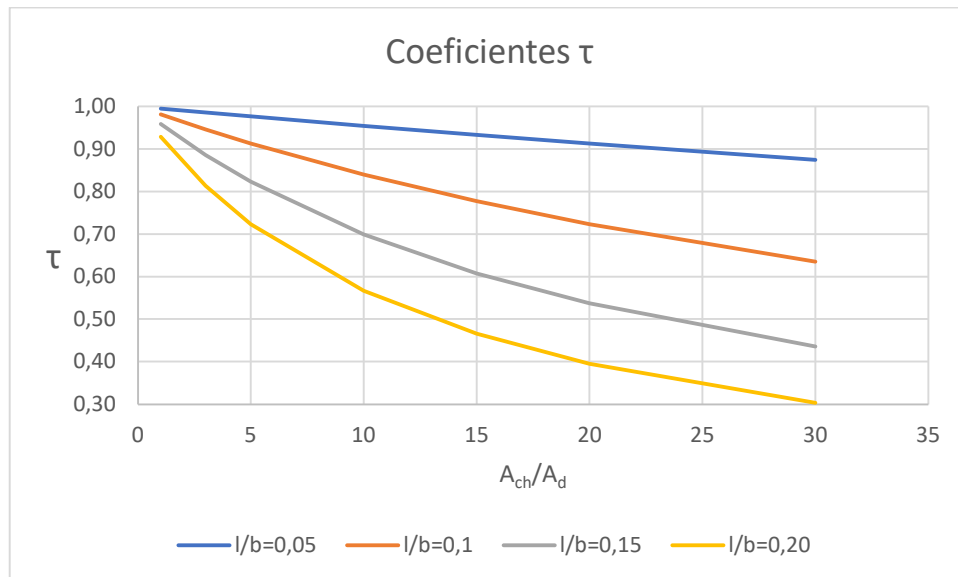
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \left( \frac{1}{A_d E \cdot \sin(\varnothing) \cdot \cos^2(\varnothing)} + \frac{b}{a \cdot A_b E} \right)} \quad (21)$$

, Onde I é o momento de inércia da seção composta. Caso as áreas  $A_d$  e  $A_b$  sejam muito inferiores à área do banzo ( $A_{ch}$ ), a carga crítica de flambagem pode ser bem inferior àquela obtida para uma coluna simples com mesmo valor de I. O gráfico 2 apresenta os valores de  $\tau$  em função de  $A_{ch}/A_d$ , considerando que  $A_d = A_b$ , em que

$$\tau = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \left( \frac{1}{A_d E \cdot \sin(\varnothing) \cdot \cos^2(\varnothing)} + \frac{b}{a \cdot A_b E} \right)} \quad (22)$$

Ou seja,  $\tau$  é o coeficiente que pelo qual se deve multiplicar a carga de flambagem elástica de uma coluna simples com o mesmo momento de inércia de determinada coluna treliçada para se obter a carga de flambagem desta. Este gráfico apresenta 4 curvas para diferentes valores de  $l/b$ .

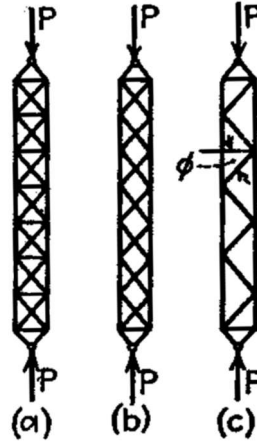
Gráfico 2: Coeficientes  $\tau$



Fonte: Autoria própria

A equação (21) pode ser utilizada, com variações, para o cálculo de colunas compostas com diferentes configurações. A Figura 6 apresenta outras três configurações para as quais se apresentam fórmulas de carga crítica de flambagem a seguir:

Figura 6: Diferentes configurações de colunas compostas



Fonte: Timoshenko e Gere (1963)

No caso da coluna da Figura 6.a, uma das diagonais encontra-se em tração, enquanto a outra em compressão, e devido a simetria existente, pode-se concluir que estes esforços possuem igual magnitude, de forma que os montantes não estão solicitados e não contribuem para a carga crítica de flambagem, ou seja, a coluna possui a mesma carga que aquela apresentada na Figura 6.b. Altera-se a equação (21), eliminado-se o termo referente aos montantes e dobrando a área das diagonais, ou seja,  $A_d$  representa a área de duas diagonais, caso sejam simples, e de quatro diagonais, caso sejam duplas, obtendo-se assim a seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{l^2} \cdot \left( \frac{1}{A_d E \cdot \sin(\phi) \cdot \cos^2(\phi)} \right)} \quad (23)$$

Finalmente, no caso da coluna da Figura 6.c, a equação (23) pode ser utilizada, desde que a área da diagonal não seja dobrada, como foi realizado para a coluna da figura 6.c, e que o ângulo  $\phi$  seja tomado como apresentado na figura, ou seja, entre a diagonal e a linha horizontal. Cabe destacar que, por representar este um estudo da flambagem global da coluna, não considerou-se a possibilidade de flambagem das peças que a compõe, sejam banzos, diagonais ou montantes.

### 3.3. Flambagem por torção

#### 3.3.1. Flambagem por torção centrada

Peças de aço formadas por perfis de seção aberta possuem baixa resistência à torção, se comparados a seções maciças ou tubulares. A resistência à torção destes elementos é composta, em geral, por duas componentes, que são a componente referente à torção de Saint-Venant e a componente referente ao empenamento.

A componente da rigidez referente à torção de Saint-Venant desses tipos de perfis é, em geral, menor que a rigidez de perfis tubulares ou maciços por duas ou três ordens de grandeza, o que significa que a flambagem por torção, que não representa um problema para elementos tubulares ou maciços, pode ser um problema para perfis de seção aberta e deve ser analisado nestes casos.

A equação (23) descreve a carga de flambagem elástica à torção de uma peça. Segundo Timoshenko (1963), H. Wagner foi o primeiro a desenvolver esta equação, que está aqui apresentada com a nomenclatura da NBR 8800/2008.

$$N_{ez} = \frac{1}{r_0^2} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot C_w}{(k_z L_z)^2} + G \cdot I_t \right) \quad (24)$$

Onde,

$C_w$  é a constante de empenamento da seção transversal;

$I_t$  é o momento de inércia à torção uniforme, ou de Saint-Venant;

$(k_z L_z)$  é o comprimento de flambagem por torção;

$G$  é o módulo de elasticidade transversal do aço;

$r_0$  é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de cisalhamento, dado por

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + y_0^2 + x_0^2}$$

$x_0$  e  $y_0$  são as coordenadas do centro de cisalhamento na direção dos eixos centrais  $x$  e  $y$ , respectivamente, em relação ao centro geométrico da seção, e  $r_x$  e  $r_y$  são os raios de giração em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.



### 3.3.2. Flambagem por torção com eixo restringido

A seção 3.3.1 descreveu a situação de uma barra que sofre flambagem torção quando sujeita a uma compressão centrada e quando não possui travamentos assimétricos, porém existem situações em que uma barra comprimida estará sujeita a travamentos fora do plano assimétricos.

Nesta situação, existe a possibilidade de que ocorra um tipo de flambagem chamado flambagem por torção com eixo restringido. Um exemplo prático em que este tipo de falha é possível é o caso de um pilar de aço laminado com terças de tapamento que realizam o travamento da mesa externa mas não da mesa interna. Neste caso, pode ocorrer flambagem por torção em que o eixo de torção é o plano de ligação entre a mesa externa e a terça de travamento.

Segundo AISC (2011), a carga de flambagem por torção elástica com eixo restringido de uma coluna com seção I é dada por:

$$P_{cAT} = \frac{1}{(r_x^2 + r_y^2 + a_c^2)} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot (C_w + I_y \cdot a_s^2)}{(k_z L_{binside})^2} + G \cdot J \right) \quad (25)$$

Onde,

$L_{binside}$  é a distância destravada da mesa interna;

$I_y$  é o momento de inércia da coluna em torno do eixo y;

$J$  é o momento de inércia à torção uniforme, ou de Saint-Venant;<sup>2</sup>

$a_s$  é a distância entre o travamento da mesa externa e o centróide da seção;

$a_c$  é a distância entre o travamento da mesa externa e o centro de cisalhamento da seção.

A equação (24) foi apresentada especificamente para uma coluna de seção I, que possui o centro de cisalhamento coincidente com o centróide, de forma que  $r_0^2 = r_x^2 + r_y^2$ , pois  $y_0 = x_0 = 0$ . Para uma seção genérica, é importante considerar que o centro de cisalhamento pode diferir do centróide, de forma que a equação (24) se torna:

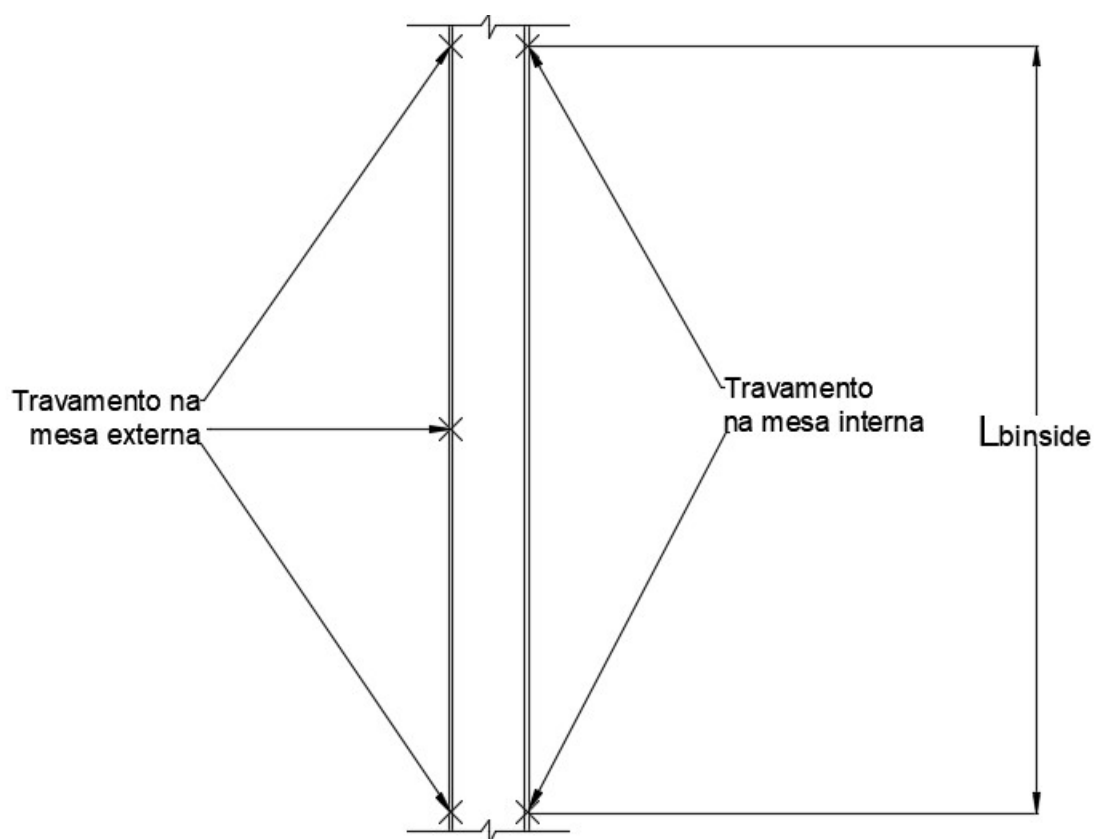
$$P_{cAT} = \frac{1}{(r_0^2 + a_c^2)} \cdot \left( \frac{\pi^2 \cdot E \cdot (C_w + I_y \cdot a_s^2)}{(k_z L_{binside})^2} + G \cdot J \right) \quad (26)$$

<sup>2</sup> Observar que esta propriedade possui nomenclatura diferente na NBR 8800/2008, descrita na seção 3.3.1.

A

Figura 7 apresenta uma representação de uma coluna com travamentos fora do plano assimétricos. Neste caso particular, o comprimento destravado da mesa externa é a metade do comprimento destravado da mesa interna e existe a possibilidade de flambagem por torção com eixo restringido.

Figura 7: Coluna com travamentos assimétricos nas mesas



Fonte: Autoria Própria

### 3.4. CBFEM

O método CBFEM (Component-Based Finite Element Method) é composto pela combinação de dois métodos consagrados na análises de estruturas: O método dos componentes (Component Method) e o Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method). A seguir é descrito o método dos componetes.

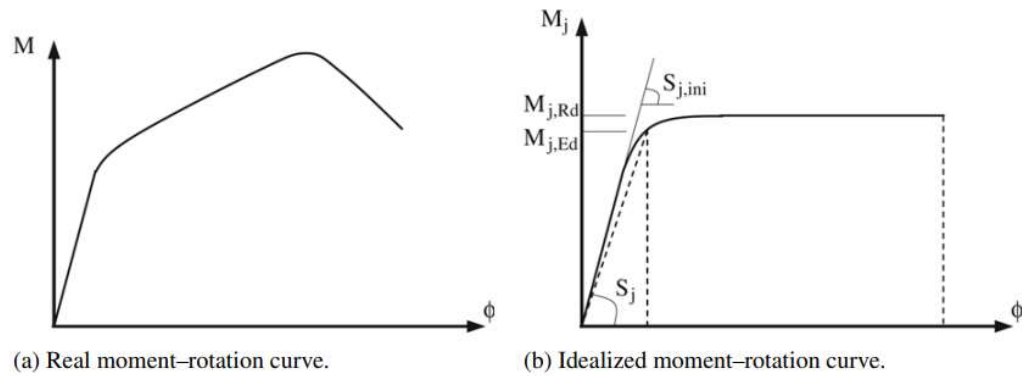
#### 3.4.1. Método dos Componentes (Component Method)

O método dos componentes é um método para cálculo de ligações de estruturas de aço, capaz de prever a completa curva Momento-Rotação da ligação, fornecendo assim as três principais características desta: Resistência, Rigidez e Ductilidade. Segundo Wald (2016) ,

*O procedimento começa com a decomposição dos componentes da ligação, seguida da descrição do comportamento em termos da relação força-deformação axial e Cisalhante. Após isso, os componentes são agrupados para examinar o comportamento Momento-rotação da ligação e para classificação/Representação em um modelo Mola/Cisalhamento e aplicação na análise global. A vantagem do modelo dos Componentes é a integração do atual conhecimento analítico e experimental do comportamento de compoentes de ligações, como parafusos, soldas, placas de extremidade, mesas de colunas, chumbadores e placas de base. Isto fornece previsões muito acuradas do comportamento elástico e no Estado limite Último.*

Segundo Da Silva (2008), o método dos componentes é a abordagem adotada pelo Eurocode 3 (EM 1993 1-8) para a determinação de curvas Momento-Rotação de ligações de aço. A Figura 8 apresenta duas curvas Momento-Rotação para uma determinada ligação. A curva da esquerda é a curva real, obtida por ensaios laboratoriais, e a curva da esquerda é a curva idealizada pelas prescrições do Eurocode 3 baseadas no método dos componentes.

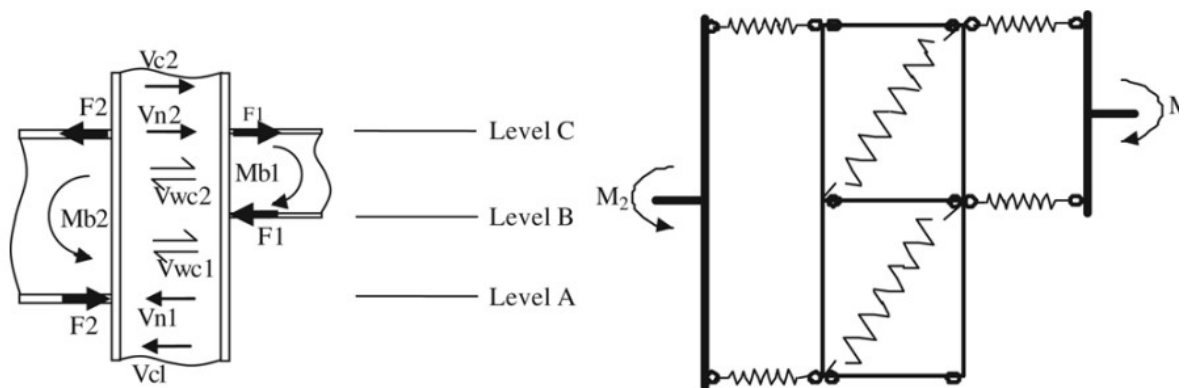
Figura 8: Curvas Momento-Rotação Real e Idealizada de uma ligação



Fonte: Da Silva (2008)

A Figura 9 apresenta uma ligação entre duas vigas e uma coluna e sua representação idealizada pelo método dos componentes, com o uso de molas e ligações rígidas para representar os diversos componentes.

Figura 9: Idealização de Ligação pelo Método dos Componentes



Fonte: Da Silva (2008)

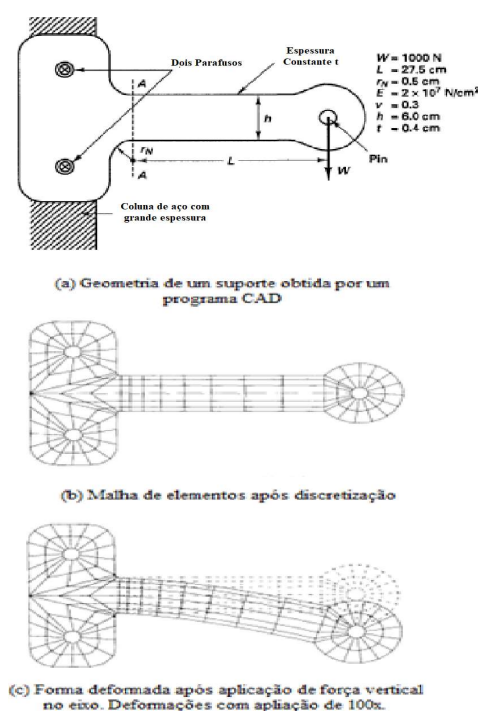
### 3.4.2. Método dos Elementos Finitos

O Método dos elementos finitos é um método matemático para solução numérica de equações diferenciais. Segundo Bathe (1996), o método dos elementos finitos na engenharia foi desenvolvido inicialmente em uma base física para a análise de problemas de mecânica estrutural, contudo foi posteriormente adaptado para uso em outras classes de problemas.

Nos problemas de mecânica estrutural, o método consiste em discretizar um meio contínuo em vários elementos com formas regulares, que podem ser triângulos e quadriláteros em casos de análises bidimensionais, e tetraedros ou hexaedros em casos de análises tridimensionais. Estes elementos, por terem geometria mais simples, possuem resposta conhecida quando sujeitos a determinado esforço, ou seja, seus deslocamentos podem ser determinados.

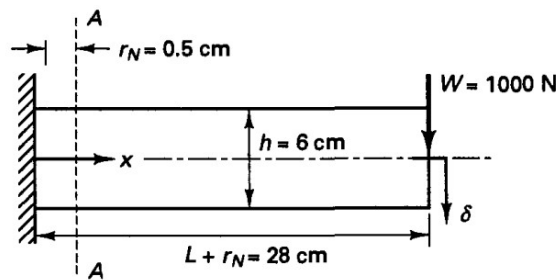
A Figura 10 mostra um suporte com geometria relativamente complexa. Caso não seja utilizado o método dos elementos finitos, estruturas como essa devem ser analisadas por meios experimentais ou deve-se utilizar um modelo de cálculo simplificado, que para este caso poderia ser o modelo da Figura 11. Este modelo considera uma peça prismática, ou seja, com seção transversal uniforme. Modelos simplificados possuem certas limitações na obtenção de tensões locais nas proximidades de aplicações de carga concentrada e em regiões de descontinuidade e podem ser impossíveis para casos de geometrias muito complexas.

Figura 10: Análise de elementos finitos de suporte



Fonte: Bathe (1996)

Figura 11: Modelo simplificado de viga para suporte



Fonte: Bathe (1996)

Quando é realizada a discretização de elementos finitos, cada vértice de um elemento é chamado nó e a ele estão associados um número  $n$  de variáveis, onde  $n$  é o número de graus de liberdade do nó. Após a discretização da estrutura, é gerada uma equação matricial cuja ordem é a quantidade de variáveis total do modelo. Devido à grande quantidade de variáveis envolvida em um modelo físico real, um problema de engenharia somente pode ser resolvido pelo método dos elementos finitos com o auxílio de computadores, o que explica o fato de o método ter se desenvolvido apenas com o advento do computador digital.

## 4. METODOLOGIA

Neste trabalho serão realizadas análises computacionais das treliças pela utilização do método dos Elementos Finitos (FEM) com a versão educacional do software comercial Idea Statica. O software Idea Statica utiliza um método chamado CBFEM (Component Based Finite Element Method), que consiste na combinação de dois métodos consagrados, o método dos Elementos Finitos, utilizado, neste software, para discretização de placas, e o método dos componetes, utilizado para discretização dos elementos de ligação, ou seja, parafusos e soldas.

Embora tenha sido formulado inicialmente apenas para o cálculo de ligações, o software Idea Statica possui, atualmente, um módulo chamado member, em que são realizadas três tipos de análises para estruturas de aço que levam em conta as suas ligações. Estas análises são: MNA (Materilly Non-Linear Analysis), LBA (Linear Buckling Analysis) e GMNIA (Geometrically and Materially Non-linear Analysis with Imperfections).

As análises realizadas neste trabalho serão do tipo LBA para colunas treliçadas engastadas na sua base e livres no topo. Esta é uma análise de Flambagem linear, onde são desconsideradas as não-linearidades físicas do material. Foram realizadas análises de seis colunas, três delas com diagonais paralelas (Uma soldada e duas parafusadas, sendo uma por contato e outra por atrito) e as outras três com diagonais cruzadas (Uma soldada e duas parafusadas, sendo uma por contato e outra por atrito). Optou-se por modelar as colunas com ambos os tipos de ligação, soldada e parafusada, tanto por contato como por atrito, para verificar a influência do tipo de ligação nas cargas de flambagem.

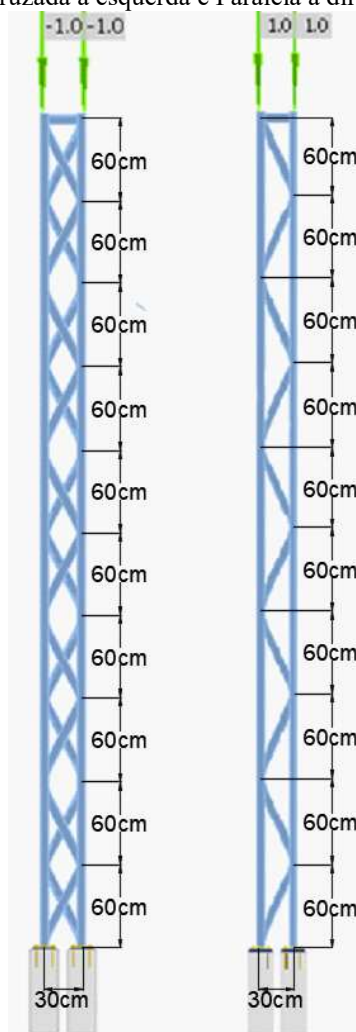
Como o Software determina uma grande quantidade de modos de flambagem, buscou-se determinar não apenas o primeiro modo de flambagem, mas os diversos modos possíveis, que são: Flambagem da coluna fora do plano, Flambagem da coluna no plano, Flambagem à flexão do banzo, Flambagem à torção do banzo, Flambagem à torção da coluna (que corresponde à Flambagem de ambos os banzos a flexão fora do plano em direções opostas), Flambagem à torção restringida por uma eixo (Constrained-axis Torsional Buckling) do banzo, que é possível apenas para as colunas com diagonais cruzadas. Para cada tipo de Flambagem foi considerado apenas o primeiro modo, por exemplo, desconsiderou-se o segundo modo de Flambagem da coluna fora do plano. Foram obtidos os primeiros 50 modos de flambagem para cada modelo, porém considerados apenas o primeiro modo de cada tipo de flambagem. Alguns modelos não apresentaram determinados modos de flambagem até o modelo de nº 50, ou por impossibilidade física de ocorrência deste modo de flambagem, ou porque o seu valor é superior, não sendo captado.

## 4.1. Descrição dos Modelos

### 4.1.1. Geometria

Como descrito na seção anterior, foram analisadas seis colunas, três delas com diagonais cruzadas e três delas com diagonais paralelas. Estas diagonais foram dispostas segundo o padrão de treliças de Warren, com espaçamento entre eixos de banzos de 30 cm e comprimento total de 600cm dividido em 10 espaçamentos de 60cm entre nós, como mostrado na Figura 12.

Figura 12: Geometria das colunas  
(Cruzada à esquerda e Paralela à direita)



Fonte: Autoria Própria



#### 4.1.2. Perfis

Os perfis adotados foram:

- Banzos: U 200x60x8mm (A36)

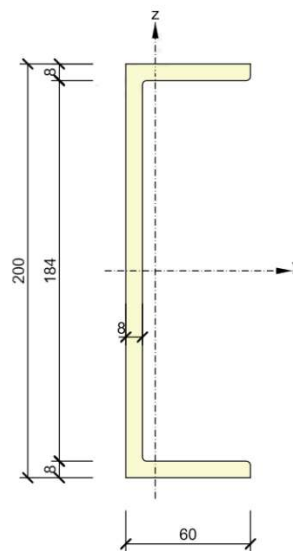
Foi utilizado um perfil fictício, ou seja, não padronizado, para o banzo. Este foi determinado de forma a impedir a ocorrência de flambagem local das chapas do perfil, já que estes modos de flambagem não eram de interesse para o estudo.

- Propriedades físicas:

$E = 200GPa$  (Módulo de Elasticidade)

$\nu = 0,3$  (Coeficiente de Poisson)

Figura 13: Perfil dos Banzos (Dimensões em mm)



Fonte: Autoria Própria

Tabela 1: Propriedades geométricas do banzo

| A (cm <sup>2</sup> ) | I <sub>z</sub> (cm <sup>4</sup> ) | I <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> ) | J (cm <sup>4</sup> ) | C <sub>w</sub> (cm <sup>6</sup> ) | r <sub>y</sub> (cm) | r <sub>z</sub> (cm) | y <sub>0</sub> (cm) |
|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 24,3                 | 68,5                              | 1300,5                            | 5,3                  | 4512                              | 7,31                | 1,68                | -2,80               |

- Diagonais: Cantoneira 60x8mm (A36)

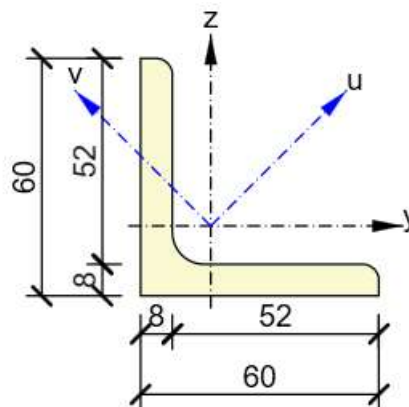
Foi utilizada uma cantoneira laminada com abas de pequena esbeltez de forma a impedir a ocorrência de flambagem local.

- Propriedades físicas:

$E = 200GPa$  (Módulo de Elasticidade)

$\nu = 0,3$  (Coeficiente de Poisson)

Figura 14: Perfil da Diagonal (Dimensões em mm)



Fonte: Autoria Própria

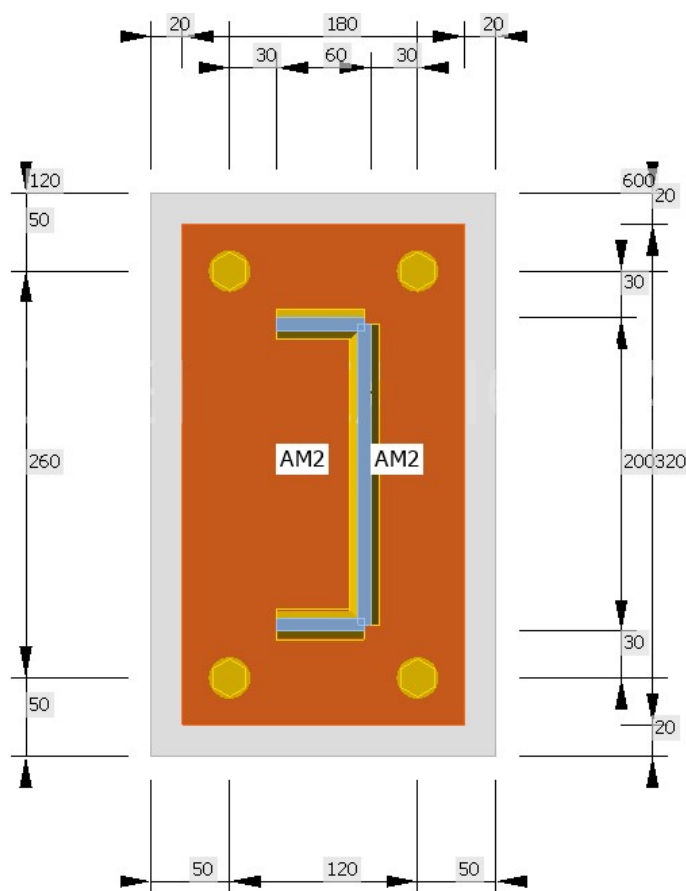
Tabela 2: Propriedades geométricas da diagonal

| A<br>(cm <sup>2</sup> ) | $\alpha$ (°) | $I_y = I_z$<br>(cm <sup>4</sup> ) | $I_u$<br>(cm <sup>4</sup> ) | $I_v$<br>(cm <sup>4</sup> ) | J<br>(cm <sup>4</sup> ) | $C_w$<br>(cm <sup>6</sup> ) | $r_y = r_z$<br>(cm) | $r_u$<br>(cm) | $r_v$<br>(cm) |
|-------------------------|--------------|-----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------------|-----------------------------|---------------------|---------------|---------------|
| 9,0                     | 45           | 29,1                              | 46,1                        | 12,1                        | 2,05                    | 0                           | 1,80                | 2,26          | 1,16          |

#### 4.1.3. Ligações

As ligações de placa de base foram modeladas todas iguais. Cada banzo foi conectado a uma fundação separada pela placa de base cuja geometria está mostrada na Figura 15. A utilização de duas fundações separadas foi considerada porque o software Idea Statica não permite a utilização de uma fundação compartilhada entre dois nós.

Figura 15: Geometria das placas de Base ( Dimensões em mm)

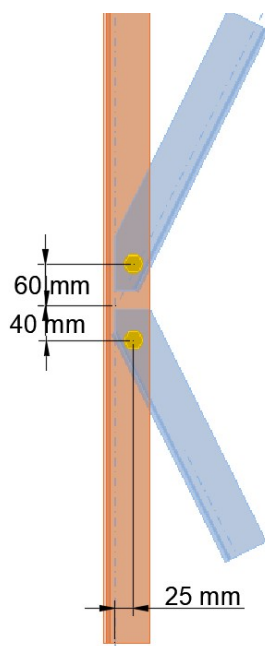


Fonte: Autoria Própria

- Placa de Base: 25mm (1") – A36
- Chumbadores: ½" x 5" – A36
- Soldas de Filete de 5mm de perna em todo o contorno.

As ligações entre banzos e diagonais foram, como descrito anteriormente, feitas de duas formas diferentes, parafusadas e soldadas. As ligações soldadas foram feitas por solda de topo, entre uma das pernas da diagonal e a mesa do banzo, enquanto as ligações parafusadas foram realizadas por um parafuso entre cada diagonal com sua respectiva mesa do banzo, com espaçamentos mostrados na Figura 16. As distâncias mostradas tem como referência o nó, ou seja, a interseção entre os eixos das três barras.

Figura 16: Detalhe da ligação parafusada Banzo-Diagonal (Dimensões em mm)



Fonte: Autoria Própria

#### 4.1.4. Carregamento

Os carregamentos para todas as colunas foram iguais, consistindo em uma carga vertical para baixo aplicada no centroide de cada banzo no valor de 1 kN, como mostrado na Figura 12. Na análise de flambagem, o resultado fornecido pelo software é um fator amplificador que deve ser multiplicado por cada carga para se obter a situação de flambagem. Desta forma, o resultado da análise fornece a força a ser aplicada em cada banzo.

#### 4.1.5. Malha de elementos finitos

No programa utilizado, Idea Statica, a criação da malha de elementos finitos é realizada de forma automática pelo programa, sendo definida pelo usuário apenas os limites superior e inferior do tamanho dos elementos, que foram adotados 10mm e 50mm, respectivamente, e a quantidade de elementos na maior chapa de alma ou mesa, neste caso, a quantidade de elementos nas chapas menores é obtido de tal forma que o seu tamanho seja o mais próximo possível do tamanho dos elementos da chapa de referência, que é a maior.

Por padrão, o programa considera uma divisão de 8 elementos na chapa maior. Foi realizado um processo iterativo, em que esta quantidade de elementos recebeu um incremento de 4 em 4 até que a diferença de carga crítica fosse menor que 2% com relação à análise inferior. Esta diferença de 2% como critério de parada foi considerada para todos os modos de flambagem, ou seja, caso nenhum dos modos de flambagem tivesse uma variação de carga crítica superior a 2%, em módulo, a convergência foi obtida.

## 5. RESULTADOS

Os resultados obtidos neste trabalho foram as cargas de flambagem elástica das colunas. Estas cargas foram separadas para os diferentes modos de flambagem, descritos na seção 4. As 6 colunas receberam a seguinte nomenclatura: CS (Coluna com diagonais soldados), CPC (Coluna com diagonais parafusadas por contato) e CPA (Coluna com diagonais parafusadas por atrito) com o sufixo 1 para diagonais paralelas e 2 para diagonais cruzadas. As colunas CA' e CA'' representam o cálculo analítico, com travamento no nó e no parafuso, respectivamente. A carga de flambagem elástica recebeu a seguinte nomenclatura para os diferentes modos de flambagem:

- $N_{ffp}$ : Carga de Flambagem da coluna fora do plano;
- $N_{fp}$ : Carga de Flambagem da coluna no plano;
- $N_{ffb}$ : Carga de Flambagem por flexão do banzo;
- $N_{ftb}$ : Carga de Flambagem por torção do banzo;
- $N_{ftc}$ : Carga de Flambagem por torção da coluna;
- $N_{ftrb}$ : Carga de Flambagem por torção em eixo restringido do banzo.

### 5.1. Cálculos Analíticos

Para os cálculos analíticos de carga de flambagem elástica da coluna fora do plano, da coluna no plano, de flexão do banzo, de torção em eixo restringido do banzo e de torção do banzo foram utilizadas, respectivamente, as equações (8), (23), (9), (26) e (24).

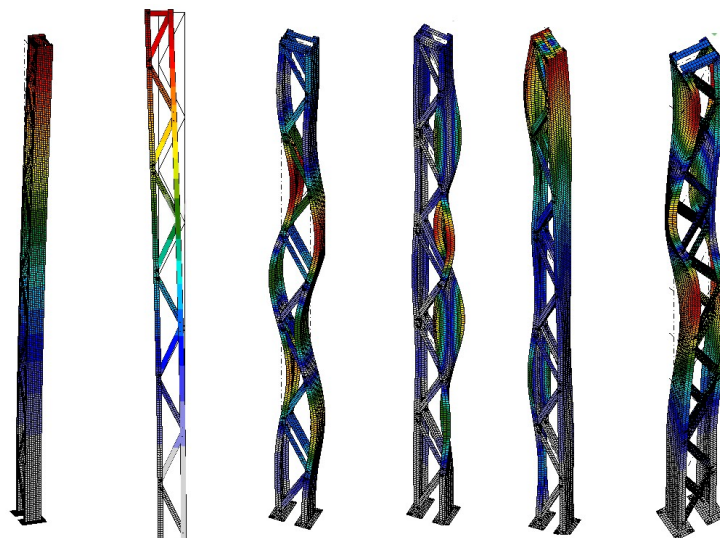
### 5.2. Resultados das simulações computacionais

A Figura 17 apresenta a coluna deformada para os diferentes modos de flambagem obtidos, enquanto as Tabelas 3, 4 e 5 apresentam os valores destas cargas críticas para diferentes valores de divisões de elementos por alma do banzo, respectivamente, 8, 12 e 16.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup> Apenas as colunas CS1 e CS2 não alcançaram convergência para 12 elementos por alma, sendo necessário calculá-las novamente para 16 elementos por alma.

Figura 17: Modos de Flambagem da coluna.  
Da esquerda para a direita: Fora do plano, no plano, flexão do banzo, torção do banzo, torção da coluna, torção com eixo restringido do banzo



Fonte: Autoria Própria

Tabela 3: Cargas de flambagem elástica para 8 elementos por alma

| <b>Iteração 1 - 8 Elementos</b> |                       |                      |                       |                        |                       |                       |
|---------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
|                                 | N <sub>ffp</sub> (KN) | N <sub>fp</sub> (KN) | N <sub>ffb</sub> (KN) | N <sub>ftfb</sub> (KN) | N <sub>ftb</sub> (KN) | N <sub>ftc</sub> (KN) |
| <b>CS1</b>                      | 176,2                 | 682,8                | 2488,8                | -                      | -                     | 2926,5                |
| <b>CS2</b>                      | 173,2                 | 678                  | -                     | 2970,4                 | -                     | 2872,4                |
| <b>CPC1</b>                     | 169,2                 | 490,5                | 1018,8                | -                      | 1973,0                | 2290                  |
| <b>CPC2</b>                     | 167,1                 | 473,6                | -                     | 1301,1                 | -                     | 2212,9                |
| <b>CPA1</b>                     | 168,9                 | 665                  | 1045,2                | -                      | 2013,1                | -                     |
| <b>CPA2</b>                     | 166,7                 | 639,5                | -                     | 1400,3                 | -                     | 3184,2                |
| <b>CA'</b>                      | 178,3                 | 732,4                | 939                   | 1198,2                 | 1602,3                | -                     |
| <b>CA''</b>                     | 178,3                 | 732,4                | 1117,8                | 1378,8                 | 1785,6                | -                     |

Fonte: Autoria Própria

Tabela 4: Cargas de flambagem elástica para 12 elementos por alma

| <b>Iteração 2 - 12 Elementos</b> |                       |                      |                       |                        |                       |                       |
|----------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
|                                  | N <sub>ffp</sub> (KN) | N <sub>fp</sub> (KN) | N <sub>ffb</sub> (KN) | N <sub>ftfb</sub> (KN) | N <sub>ftb</sub> (KN) | N <sub>ftc</sub> (KN) |
| <b>CS1</b>                       | 176,7                 | 682,6                | 2564                  | -                      | -                     | 3071                  |
| <b>CS2</b>                       | 174,3                 | 679,6                | -                     | 3041,3                 | -                     | 2905,2                |
| <b>CPC1</b>                      | 169,2                 | 490,1                | 1024,1                | -                      | 1954,0                | 2282,4                |
| <b>CPC2</b>                      | 167                   | 472,8                | -                     | 1290,4                 | -                     | 2193,1                |
| <b>CPA1</b>                      | 168,9                 | 664,3                | 1033,4                | -                      | 1981,6                | -                     |
| <b>CPA2</b>                      | 166,6                 | 638,3                | -                     | 1377,7                 | -                     | 3169,6                |
| <b>CA'</b>                       | 178,3                 | 732,4                | 939                   | 1198,2                 | 1602,3                | -                     |
| <b>CA''</b>                      | 178,3                 | 732,4                | 1117,8                | 1378,8                 | 1785,6                | -                     |

Fonte: Autoria Própria

Tabela 5: Cargas de flambagem elástica para 16 elementos por alma

| <b>Iteração 3 - 16 Elementos</b> |                       |                      |                       |                        |                       |
|----------------------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
|                                  | N <sub>ffp</sub> (KN) | N <sub>fp</sub> (KN) | N <sub>ffb</sub> (KN) | N <sub>ftfb</sub> (KN) | N <sub>ftb</sub> (KN) |
| <b>CS1</b>                       | 176,4                 | 681,9                | 2562,7                | -                      | -                     |
| <b>CS2</b>                       | 174                   | 678,3                | -                     | 2999,2                 | -                     |

Fonte: Autoria Própria

Observa-se nos resultados apresentados nas tabelas 3 a 5 que as cargas de flambagem obtidas pelo programa foram coerentes com os cálculos analíticos apresentados para aqueles modos de flambagem para os quais se dispunha de métodos analíticos, com as seguintes observações:

- Para flambagem da coluna fora do plano, a maior diferença entre o resultado das simulações e o cálculo analítico foi de -6,6%, que corresponde a um  $k$  igual a 2,07, que é superior ao  $k$  teórico porém inferior ao  $k$  recomendado pela NBR 8800/2008, que é de 2,1.
- Para flambagem da coluna no plano, a maior diferença ocorreu para a coluna CPC2, que é uma coluna parafusada por contato com diagonais cruzadas. Para esta coluna, a diferença entre o resultado da simulação e o cálculo analítico foi de -35,4%, que é muito discrepante. Observou-se que esta diferença diminuiu significativamente quando adotou-se uma ligação parafusada por atrito, mostrando que o deslizamento ocorrido devido à folga dos furos afeta significativamente a rigidez no plano da coluna e que as equações (21) e (22) não são confiáveis no caso de ligações parafusadas por contato.

Para as outras ligações, a maior discrepância ocorreu para a coluna CPA2, e este valor foi de 12,8%. Embora este valor seja significativo, ele está associado a um  $k$  de 2,14, que é apenas um pouco superior ao  $k$  recomendado pela NBR 8800/2008, que é de 2,1. Para todos os tipos de ligação, a coluna com diagonais cruzadas obteve uma carga de flambagem menor que a coluna com diagonais paralelas, indicando que a disposição das diagonais é um fator de influência na rigidez no plano.

É possível que o fato de as diagonais terem sido conectadas apenas por uma aba ao banzo tenha sido um fator determinante na redução da rigidez da coluna, visto que estas diagonais estão sujeitas a flexo-compressão, tendo sua rigidez axial reduzida.

- Para flambagem dos banzos à flexão, a coluna CPA2 teve uma carga de flambagem 10% superior à  $CA'$ , que é aquela obtida por cálculos analíticos considerando-se o nó, porém  $x\%$  inferior à  $CA''$ , que é aquela obtida por cálculos analíticos considerando-se a distância livre entre os parafusos, indicando que o fato de os parafusos estarem mais próximos é um fator conservador, mas que não é prudente ser utilizado no cálculo de estruturas reais. Os



banzos soldados tiveram ganho significativo de resistência, tendo a coluna CS1 uma carga de flambagem elástica 173% acima da coluna CA’;

- Para flambagem dos banzos à torção, observou-se que os valores das simulações foram próximo e superiores aos obtidos analiticamente, e que o cálculo utilizando a distância livre entre os parafusos foi conservador, sendo 8,6% inferior ao da coluna CPC1 e 9,9% inferior ao da coluna CPA1.

- Para flambagem por torção com eixo restringido do banzo, observou-se que a equação (24) apresentou boa concordância com as simulações computacionais, tendo a coluna CPA2 diferença de -0,1% com relação ao cálculo analítico CA”, e que o uso da distância real entre parafusos como comprimento destravado mostrou-se adequado, embora seja necessário um estudo paramétrico para sua validação.

- Para flambagem por torção da coluna, observou-se uma redução na resistência quando se utilizou diagonais cruzadas, porém estas reduções foram modestas, sendo de 5,4% para as colunas soldadas e de 4,0% para as colunas parafusadas por contato. Para a coluna parafusadas por atrito com diagonais paralelas, a análise não obteve este modo de flambagem.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos nas análises de flambagem elástica com o uso do software Idea Statica e descritos na seção 5, conclui-se que a disposição das diagonais de forma cruzada não é necessariamente pior que a disposição paralela, possuindo algumas vantagens assim como desvantagens, sendo necessário analisar qual tipo de falha é predominante para cada estrutura.

Para as colunas analisadas, houve um aumento na resistência do banzo pois o comprimento destravado do banzo no eixo de menor inércia reduziu pela metade. Ao reduzir este comprimento destravado, surgiu o modo de flambagem por torção com eixo restringido que, neste caso particular, ocorreu para uma carga superior ao da flambagem por flexão. Este resultado não permite concluir se isto ocorrerá sempre, sendo necessário um estudo aprofundado para saber se as metodologias de cálculo previstas no anexo E da NBR 8800/2008 são suficientes ou se é necessário realizar o cálculo da carga de flambagem por torção com eixo restringido.

Com relação à flambagem da coluna no plano, a carga de flambagem da coluna com diagonais cruzadas foi inferior, porém a maior diferença ocorreu para a coluna parafusada por atrito e este valor foi de 4%. Esta diferença de 4% não é suficiente, no entendimento do autor deste artigo, para recomendar que não se utilize tal sistema. Além disto, é evidente pelos resultados que, caso sejam utilizadas ligações parafusadas, não é adequada a utilização das prescrições da EN 1993 1-1 para flambagem de colunas devido ao deslizamento dos parafusos.

Finalmente, observou-se que ocorreu uma redução na resistência à flambagem por torção da coluna, mas o resultado foi inconclusivo acerca de se isto representa um problema para colunas reais, pois no caso analisado este modo de flambagem foi superior a todos os outros. Como o modo que realmente leva à falha é aquele de carga mínima, isto não seria problema para o caso particular, porém poderia ser problema para uma coluna na qual este modo de flambagem fosse o primeiro ou crítico.

### 6.1. Sugestões de trabalhos futuros

- Análise paramétrica de colunas com diagonais cruzadas, de forma a observar em que condições a carga crítica de flambagem da coluna com diagonais cruzada é inferior à carga crítica de flambagem da coluna com diagonais paralelas, ou seja, quando utilizar esta configuração seria contra a segurança. Nesta análise, as possíveis variáveis seriam o comprimento total da coluna, a distância entre nós e a distância entre eixos dos banzos.
- Análise paramétrica para observar se a metodologia de cálculo para flambagem por torção com eixo restringido, descrita na seção 3.3.2, é adequada para a verificação dos banzos de colunas com diagonais cruzadas. Neste trabalho, como deseja-se verificar apenas a flambagem do banzo, pode-se utilizar uma coluna menor com apenas dois ou três comprimentos destravados. As variáveis a serem analisadas seriam o comprimento destravado do banzo e o perfil deste.

## 7. REFERÊNCIAS

AISC. **Design Guide 25: Frame Design using Web-tapered Members**. United States of America: AISC, 2011. 204 p.

AISC. **Specification for structural Buildings**. Chicago, IL: AISC, 2016. 620 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800: projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. Rio de Janeiro, p. 237. 2008. ISBN 978-85-07-00933-7.

BATHE, Klaus J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 1037 p. ISBN 0-13-351458-4.

Da Silva Simões L., Towards a consistent Design approach for steel joints under generalized loading, *Journal of constructional steel research*, 64, 2008, 1059-1075.

Eurocode 3: Design of steel structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. Bruxelas, p. 91. 2004.

PFEIL, Walter; PFEIL, Michèle. **Estruturas de aço: Dimensionamento prático de acordo com a NBR 8800:2008**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 357 p. ISBN 978-85-216-1611-5.

TIMOSHENKO, Stephen. **History of Strength of Materials: With a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures**. New York: Dover Publications, Inc, 1953. 439 p. ISBN 0-486-611 87- 6.

TIMOSHENKO, Stephen. **Strength of Materials: Part 1, Elementary theory and problems**. 2. ed. Lancaster: D. Van Nostrand Company, 1940. 359 p.

TIMOSHENKO, Stephen. **Strength of Materials: Part 2, Advanced theory and problems**. 2. ed. Lancaster: D. Van Nostrand Company, 1940. 510 p.

TIMOSHENKO, Stephen; GERE, James. **Theory Of Elastic Stability**. 2. ed. New York: McGraw Hill, 1963. 541 p. ISBN 0-07-Y85821-7.

WALD, Frantisek *et al.* **Benchmark Cases for advanced design of structural steel connections**. Praga, República Tcheca: [s. n.], 2016. 187 p. ISBN 978-80-01-05826-8.