

APLICABILIDADE PRÁTICA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA ENGENHARIA CIVIL

Amanda Alves Araújo¹, Maria Joseane Felipe Guedes Macêdo², Paulo César Linhares da Silva³

Resumo: O presente trabalho tem o intuito de apresentar aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, de uma forma mais prática e real para os alunos, mostrando que o cálculo (matemática), participa de forma indireta e direta do nosso cotidiano e não se restringe somente a teoria vista em sala de aula. Apresentamos dois exemplos de aplicações na Engenharia Civil em sua esfera estrutural, para que os discentes consigam visualizar com uma maior facilidade o conteúdo, em acontecimentos cotidianos da área em questão. As aplicações foram exteriorizadas em uma linguagem mais simples, para que os alunos criem um maior interesse no estudo e na correlação de situações que estão inseridas no dia-dia da construção civil, além de proporcionar a outros acadêmicos conhecimentos da área estudada.

Palavras-chave: Aplicações; Engenharia Civil; Cálculo.

1. INTRODUÇÃO

Em anos de desenvolvimento, a matemática vem tomando uma significativa importância no cotidiano de todos no decorrer dos tempos. Ela está presente em tudo, em situações cotidianas e em cursos de graduação, seja de forma direta ou indireta. O Cálculo Diferencial e Integral, faz parte de toda a vida acadêmica dos estudantes de engenharia, proporcionando-os a possibilidade de solucionar problemas na profissão escolhida, ou nas diversas áreas do conhecimento de uma forma mais assertiva. Como por exemplo, no cálculo de tração, compressão, cisalhamento, tensões e deformações (deformações em barras carregadas axialmente/barras sob a ação do próprio peso), cálculo de áreas, volumes, momentos de inércia, cargas e entre outros, ver [1], [2], [3], [4] e [5].

Em [18] considera que a contextualização se desenrola quando o aluno é orientado a realizar um estudo de um conteúdo através de uma situação-problema, onde esta permeia a realidade do estudante, ou seja, que ela esteja enquadrada em uma perspectiva capaz de conceder um significado e sentido ao objeto de estudo.

Na Engenharia Civil, as aplicações do Cálculo Diferencial e Integral podem ser encontradas em quase todas as vertentes como, por exemplo, na elaboração de projetos estruturais os quais garantem qualidade e eficiência da construção, em projetos hidráulicos, em taxas de variações de quantidades e de custos. Para a situações práticas de tração e compressão pode-se citar as que envolvem as treliças e as de cisalhamento, vigas de concreto armado, ver [2].

Os alunos sentem dificuldades em imaginar situações práticas do conteúdo visto em disciplinas do curso, que apresentam exemplos de aplicações, mas são colocados de forma bem implícita. O que se busca aqui são aplicações mais diretas que envolvem problemas reais, trazendo assim, um estímulo maior para o aluno no processo de aprendizagem. Desse modo, o principal objetivo do trabalho é apresentar dois exemplos de

aplicações práticas (do dia a dia) da Engenharia Civil que envolvam os conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral, reescritos com uma linguagem mais simples para facilitar o entendimento do aluno. Este trabalho está organizado da seguinte maneira, na Seção 2 apresenta-se uma exposição teórica do Cálculo Diferencial e Integral. Na Seção 3, apresenta-se as aplicações relacionadas com os conteúdos visto na Seção 2, direcionadas para a área da construção civil, expostas com uma linguagem de fácil acesso para os estudantes.

2. CONCEITOS PRELIMINARES DO CÁLCULO

Nesta seção, revisa-se a definição de derivada e integral, que são conceitos importantes, para um melhor entendimento dos exemplos da construção civil que serão apresentados, por conseguinte. Inicia-se a revisão com derivada, se conceitua e mostra-se um exemplo numérico para entender melhor os conceitos algébricos envolvidos. Em seguida faz-se uma breve revisão sobre integrais. Para uma leitura mais profunda sobre o tema recomenda-se as seguintes referências, a saber [1], [6], [7], [8], e [9].

2.1. DERIVADAS

A derivada pode ser entendida como a inclinação da reta tangente ou como a taxa de variação instantânea de uma função.

Definição 1: Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$, quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim, $f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. (1)

Fazendo uma pequena mudança de variável, dada por $\Delta x = x - p$, pode-se reescrever a Equação (1) da seguinte forma $f'(p) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + p) - f(p)}{\Delta x}$. Se f admite derivada em p , então conclui-se que f é derivável ou diferenciável em p .

Para um melhor entendimento da Definição 1, expõe-se um exemplo gráfico e um numérico. A Figura 1 apresenta o gráfico da função dada por função $f(x) = x^2$. Observe que existe uma reta secante em azul, que passa por dois pontos $A = (p, f(p))$ e $B = (x, f(x))$, a inclinação dessa reta é dada pelo coeficiente $\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$. Fixa-se o ponto $A (p, f(p))$ e fazer o ponto B variar (se aproximar de A), ou seja, fazer x se aproximar de p , pela direita, representado pela reta vermelha. Neste caso, em síntese obtém-se uma reta tangente, em que sua inclinação será dada por, $\tan \beta = f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

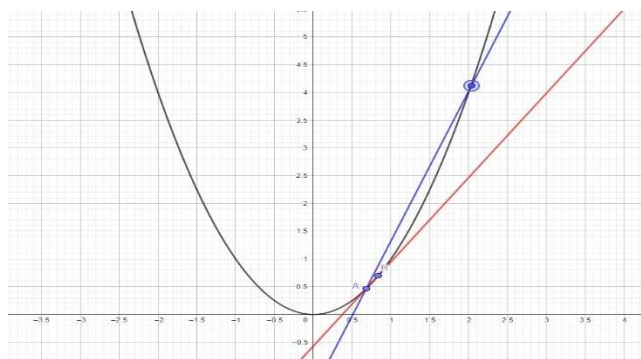


Figura 1: Reta secante (azul) e reta tangente (vermelho). Autoria própria

Usa-se na Figura 1 o Geogebra, software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatística e cálculo em um único motor. Ele é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas. Expõe-se agora, um exemplo numérico para entender melhor como funciona esse limite chamado de derivada.

Exemplo 1: Sendo a função $f(x) = x^2$ e $f'(2)$, encontre $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Resolvendo a derivada de forma analítica, isto é, usando a definição ou as regras de derivação, tem-se $f'(x) = 2x$. E portanto, $f'(2) = 4$. Agora vamos visualizar numericamente esse resultado com a tabela a seguir.

x (direita)	4	3,5	3,0	2,5	2,2	2,1	2,001
$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$	6	5,5	5	4,5	4,2	4,1	4,001

Tabela 1

Na Tabela 1, observa-se o que acontece com o coeficiente, $\frac{f(x) - f(p)}{x - p}$, quando se atribui valores a x que se aproximam de 2 pela direita. Numericamente, pode-se concluir que a medida que x chega próximo a 2 o quociente do limite se aproxima de 4. De maneira análoga, quando x se aproxima de 2 pela esquerda o limite também se aproxima de 4.

2.2. INTEGRAIS

Nesta seção revisa-se a definição de integral definida de uma maneira simples, através da Soma de Riemann. Na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral aprende-se que para determinar a área de uma região plana qualquer usa-se a integral definida. A Figura 2 apresenta uma região plana limitada pelo gráfico da função dada por $f(x)$, contínua no intervalo $[a, b]$. Para calcular essa área, realiza-se uma partição do intervalo $[a, b]$, conseqüentemente a região do plano será dividida em retângulos. A área de um retângulo é dada pelo produto da sua largura pelo seu comprimento. Somando a área desses n retângulos obtém-se uma aproximação da área total da região.

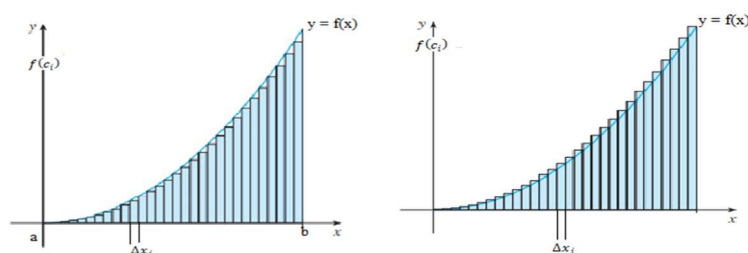


Figura 2: Área de uma região plana. Autoria própria.

A soma das áreas dos n retângulos é dada por:

$$A_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (2)$$

Assim: $\sum_{i=1}^n f(c_{i(\text{abaixo})})\Delta x_i \leq \text{área } A \leq \sum_{i=1}^n f(c_{i(\text{acima})})\Delta x_i$

Passando o limite na desigualdade, isto é, fazendo $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, o que é equivalente ao número de retângulos tender ao infinito ($n \rightarrow \infty$). E utilizando o Teorema do sanduiche temos que,

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (3)$$

Vale salientar que, à medida que n tem um crescimento, Δx_i (base), se torna muito pequena.

Define-se então, a integral definida,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \quad (4)$$

A integral definida, através da soma de Riemann, exprime a área da região plana sob a curva.

3. APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL

Nesta seção serão expostos, dois exemplos de situações do Cálculo Diferencial e Integral, relacionando-os com situações presentes na Engenharia Civil. Primeiramente, de forma breve entende-se sobre as vigas e posteriormente sobre as treliças, ambos são elementos estruturais, usados corriqueiramente em construções, sejam elas de pequeno ou grande porte. O primeiro exemplo é motivado, [2], [3], [4], além das apostilas e notas de aulas referenciadas na última seção. O segundo, motivado por, [1], [2] e [5].

3.1. USO DA DERIVADA NO DIMENSIONAMENTO DE VIGAS POR FORÇAS CORTANTES E MOMENTO FLETOR

As vigas podem ser entendidas como barras horizontais que estão no mesmo plano. É um elemento estrutural presente em várias obras civis, como pontes, edifícios, teatros, shoppings, entre outros. Ela é responsável por dar sustentação as lajes e as paredes, transmitindo as cargas para os pilares. A Figura 3 apresenta uma viga de concreto armado e na Figura 4 tem-se uma viga encurvada, submetida ao ensaio de flexão. Vale ressaltar que, no dimensionamento das vigas de concreto, elas são submetidas a resistência de flexão, onde é possível saber o quanto de ação ela aguenta até antes de romper e as propriedades (resistência) dos materiais usados.



Figura 3: Viga de concreto armado. Fonte: [10]



Figura 4: Viga de concreto armado, submetida ao ensaio de flexão. Fonte: [11]

Em relação aos apoios as vigas podem ser simples ou compostas. Para a primeira classificação, vigas em balanço, biapoiada e biapoiada com balanço. Na segunda classificação tem-se as vigas de Gerber, as quais podem ser usadas em rampas, escadas e nas arquibancadas. As Figuras 5, 6 e 7 apresentam alguns exemplos de tipos de vigas.



Figura 5: Viga em balanço - Mausoléu Castello Branco. Fonte: [12]



Figura 6: Viga biapoiada - Viaduto na BR-040 em Valparaíso de Goiás-GO. Fonte: [13]



Figura 7: Viga de Gerber - Estrutura de apoio para reservatório de água – UFERSA.

Uma vez que, o equilíbrio para as vigas é genérico, e se aplica para todos os tipos, pode-se relacionar o cálculo diferencial com a idealização dos diagramas dos esforços internos. Assim, apresenta-se as relações diferenciais de equilíbrio de vigas. Sendo uma viga isostática (apoios garantem total estabilidade) biapoiada, com carregamento vertical distribuído uniformemente.

Primordialmente, se faz necessário um entendimento básico sobre momento fletor. O momento fletor é a soma algébrica dos momentos relativos à seção XY, compreendidos no eixo da peça, motivados por cargas que são aplicadas transversalmente ao eixo longitudinal. Estabelecendo assim, o esforço que tende a curvar o eixo longitudinal, que ocasiona tensões normais de tração e compressão na estrutura. No cotidiano, ao observar uma mesa com um peso no centro, a carga tende a "forçar" uma rotação e, dessa forma, ocorre uma encurvadura no centro (similar a uma régua encurvada), o momento fletor provoca esforços de tração nas fibras externas e compressão nas internas.

Na Figura 8, tem-se uma viga completa e também uma viga com os esforços internos do elemento Δx , nela observa-se o momento fletor (M), a força cortante do elemento Δx (Q), a força vertical do apoio/reação (V_B), a força vertical do apoio/reação (V_A), a seção do elemento (S), a distância entre o apoio A e a seção (x), o comprimento da viga (L) e a força vertical distribuída (q).

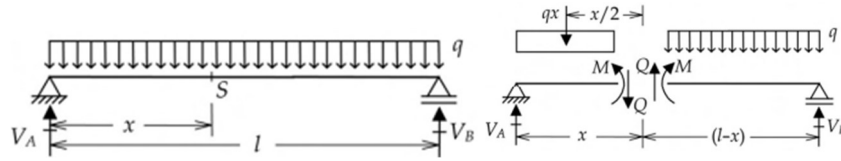


Figura 8: Cálculo de esforços internos em viga biapoiada solicitada por força uniformemente distribuída. Fonte: [4]

Na Figura 9, um elemento infinitesimal (Δx) da viga com forças cortantes e momentos fletores, ou seja, o diagrama de corpo livre desse elemento (Δx), onde V é a força cortante, $V + \Delta V$ como a força cortante mais um acréscimo de força cortante do elemento Δx , $w(x) = q$ como a força vertical distribuída, e $M + \Delta M$ sendo o momento fletor mais o acréscimo de momento do elemento Δx . Assim, para esse elemento tem-se $\frac{dV}{dx}$, a derivada do esforço cortante em relação à x , ou seja, a inclinação do diagrama em cada ponto, e para o $\frac{dM}{dx}$, a derivada do momento fletor em relação à x , sendo a inclinação do diagrama em cada ponto.

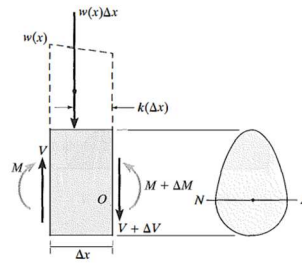


Figura 9: Diagrama de corpo livre do elemento Δx . Fonte: [2]

No equilíbrio o somatório de todas as forças deve ser igual a zero. Salienta-se que a seta para cima ($\uparrow$) significa que a força em questão é positiva. Desse modo, no somatório das forças em y (F_y) para o elemento (Figura 9):

$$\sum F_y = 0 \uparrow + \gg V - q \cdot \Delta x - (V + \Delta V) = 0 \rightarrow -q \cdot \Delta x - \Delta V = 0$$

$$-q = \frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (5)$$

No somatório do momento fletor (M_o), na seção do elemento (o), adotando o sentido horário ($\curvearrowright$) como negativo:

$$\sum M_o = 0 \text{ (sentido horário)} - \curvearrowright \gg -M - q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} + (M + \Delta M) - (V + \Delta V) \cdot \Delta x = 0$$

$$-q \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta x}{2} + \Delta M - V \cdot \Delta x - \Delta V \cdot \Delta x = 0 \gg \Delta M = \Delta x \cdot \left(V + \Delta V + q \cdot \frac{\Delta x}{2} \right), \text{ onde } \Delta V = \Delta x \cdot -q.$$

$$\text{Logo, } \frac{\Delta M}{\Delta x} = V - q \cdot \Delta x + q \cdot \frac{\Delta x}{2} \gg \frac{\Delta M}{\Delta x} = V + q \cdot \Delta x \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} \right) \gg \frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2} q \cdot \Delta x. \quad (6)$$

Para os apoios em toda a viga (Figura 8), tem-se que o somatório das forças verticais (F_y), onde V_a e V_b , são as reações dos apoios, é dado por:

$$\sum F_y = 0 \uparrow + \gg V_a + V_b - q \cdot l = 0. \quad (7)$$

Momento fletor (M_z), adotando sentido anti-horário ($\curvearrowright$)

$$\sum M_z = 0 \text{ (sentido anti - horário) } \curvearrowright +; \text{ (apoio A fixado)}$$

$$V_b \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \gg V_b = q \cdot \frac{l}{2} \quad (8)$$

Assim para V_a , substituindo a equação (8) na equação (7):

$$\begin{aligned} V_a + V_b - q \cdot l &= 0 \gg V_a + q \cdot \frac{l}{2} - q \cdot l = 0 \\ V_a &= q \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = q \cdot l \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

A principal característica de uma viga é a sua capacidade de flexionar (encurvamento), resultado da ação dos carregamentos transversais gerando uma distribuição de tensões. Essa flexão é vista no cálculo dos esforços internos (momento fletor) e se relaciona diretamente com a carga aplicada junto com seu peso próprio. Nas vigas apresenta-se as reações dos apoios (esforços externos) e as reações internas (esforços internos), em que o momento fletor, a força cortante e a força normal dependem do apoio.

Através desses esforços internos, se constrói seus respectivos diagramas nas Figuras 10 e 11, onde é possível realizar uma análise crítica da estrutura, descobrir o ponto onde ocorre maior probabilidade de romper, local em que ocorre tração e a compressão, como a estrutura reage a toda carga aplicada a ela. Ao analisar o Diagrama de Esforço Cortante (DEC) e Diagrama de Momento Fletor (DMF), ao relaciona-se ambos em uma viga de concreto armado, o DMF se interliga com as armaduras que se encontram na longitudinal (onde as fibras serão tracionadas) e o DEC com o número de estribos que irão compor a viga. Vale salientar que, os diagramas representam os esforços internos das estruturas. Assim, para o DEM, tem-se uma função do segundo grau (parábola), quando se trata de carregamentos uniformes, o momento máximo é dado por $\frac{ql^2}{8}$, no DEC se encontra onde é nulo (muda de sinal).

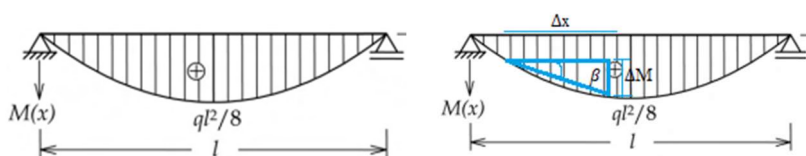


Figura 10: – Diagrama de momentos fletores em viga biapoiada solicitada por força uniformemente distribuída. Fonte: [4]

Analisando a relação, $\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - \frac{1}{2}q \cdot \Delta x = \tan \beta$, a inclinação da reta no trecho Δx iguala-se a variação do momento fletor no trecho. Na Figura 11, o DEC, com a taxa de variação do esforço cortante no trecho Δx é $-q$, já a inclinação da reta é dada por, $\tan \alpha = q$ (baixo para cima).

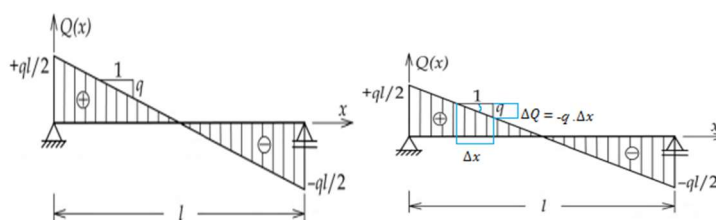


Figura 11: – Diagrama de esforços cortantes em viga biapoiada solicitada por força

Se o trecho Δx possuir um valor extremamente pequeno, com o limite de Δx tendendo a 0, tem-se que nas taxas de variações dos esforços internos irão tender a medidas pontuais. Onde, aplicando os limites, serão:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx}.$$

Realizando a dedução das relações diferenciais de equilíbrio de vigas:

$$\blacksquare \frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (V - \frac{1}{2} q \cdot \Delta x) = V \therefore \frac{dM}{dx} = V(x) \quad (10)$$

$$\blacksquare \frac{dQ}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -q = -q \therefore \frac{dV}{dx} = -q \quad (11)$$

A derivada representa a taxa de variação de uma função, em determinados pontos. Assim, para esse elemento tem-se $\frac{dV}{dx}$ para o esforço cortante (inclinação do diagrama em cada ponto), e para o momento fletor $\frac{dM}{dx}$ (inclinação do diagrama em cada ponto). Por fim, em uma viga de concreto armado por exemplo, analisando o diagrama do momento fletor (encurvadura da viga), conclui-se que o aço sofre tração (bordas superiores) e o concreto a compressão (bordas inferiores).

Nessa demonstração, vê-se claramente a utilização do conceito de derivada, visto na Seção 2. Além disso, também pode-se interpretar a derivada de uma função como a taxa de variação, amplamente utilizada nesta aplicação. A seguir, um exemplo numérico desta aplicação que foi retirado de [3].

No exemplo a seguir, usa-se o Ftool um programa gráfico-interativo de Engenharia Civil, desenvolvido na PUC-Rio, para auxiliar no ensino do comportamento estrutural. Proporciona a análise de múltiplos casos de carregamento, tais como cargas acidentais, vento em múltiplas direções e expõe a seção transversal prismática genérica para barras.

Exemplo 2: Traçar os diagramas dos esforços internos da viga biapoiada, de acordo com a figura.

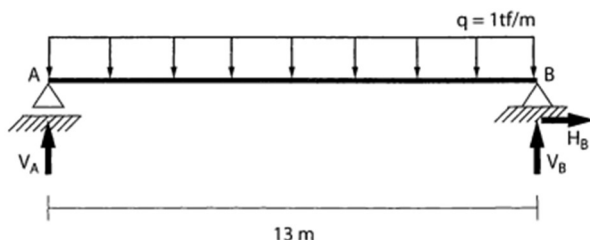


Figura 12: – Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuída. Fonte: [4]

Calculando as reações de apoio V_a , V_b e H_b . Para as forças verticais (F_y),

$$\sum F_y = 0 \uparrow + \gg V_a + V_b - 1 \cdot 13 = 0 \gg V_a + V_b = 13 \text{ tf} \cdot \text{m} \quad (\text{I})$$

Para as forças horizontais (F_x), para direita positivo,

$$\sum F_x = 0 \rightarrow + \gg H_b = 0$$

O momento (M_z) é dado por:

$$\sum M_z = 0 \text{ (sentido anti - horário)} \curvearrowright +; \text{ (apoio A fixado)}$$

$$-1 \cdot 13 \cdot \frac{13}{2} + 13 \cdot V_b = 0 \Rightarrow V_b = \frac{(13 \cdot 13)}{13} = 6,5 \cdot \text{tf} \cdot \text{m} \quad (\text{II})$$

Logo para V_a , substitui a equação (II) na equação (I):

$$V_a + V_b = 13 \text{ tf} \cdot \text{m} \quad (\text{I}) \gg V_a + 6,5 = 13 \text{ tf} \cdot \text{m} \gg V_a = 13 - 6,5 = 6,5 \cdot \text{tf} \cdot \text{m}$$

A construção dos diagramas vai ser realizada no Ftool:

Diagrama de esforço cortante:

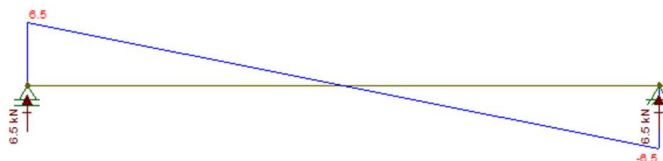


Figura 12 (a): Diagrama de esforço cortante. Fonte: Ftool.

Diagrama de momento fletor com momento máximo em 21,1tf.m. Demonstrando:

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1 \cdot 13^2}{8} = 21,125 \text{ tf} \cdot \text{m}$$



Figura 12 (b): Diagrama de momento fletor. Fonte: Ftool.

3.2 DEFORMAÇÕES/DESLOCAMENTOS EM BARRAS SOB FORÇAS AXIAIS

As barras são elementos estruturais, e pode-se citar como exemplo, as treliças que, “são estruturas compostas de barras ou elementos retos, com orientações quaisquer, interligados por nós rotulados ou articulados. Podem ser estruturas planas, quando todas as barras e as forças aplicadas pertencem a um mesmo plano” ([3], p. 105), e as vigas apresentadas na aplicação anterior. Ambas sofrem deformações/deslocamentos quando sujeitas a cargas, situações estas corriqueiras na esfera da construção civil. As treliças são usadas geralmente em obras de grande porte ou quando existe um distanciamento grande entre as estruturas, sua função é evitar rupturas, ou seja, eventuais danos, trazendo maior sustentação, resistência e segurança às estruturas das obras, já as vigas dispõem da sua utilização expressa no exemplo anterior. Vale salientar que, “o alongamento ou contração de um segmento de reta por unidade de comprimento é denominado deformação normal” ([2], p.47). Na Figura 13, tem-se um exemplo de estrutura composta por quatro pilares de treliças.



Figura 13: Torre Eiffel. [14]

Através de [2] e [5], explanarei mais sobre as deformações em barras, quando estas estão sob ação de uma força axial. Sendo uma barra carregada axialmente (linearmente elástica), onde existe forças aplicadas em cada parte que a compõe, o alongamento ou encurtamento (deformação) de cada parte é dado por:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{E_i A_i} \quad (12)$$

Onde: P_i – Força; L_i – Comprimento; E_i – Módulo de Elasticidade; A_i – Área da seção transversal.

A Figura 14 ilustra uma barra com forças verticais $2P$ e P agindo sob a mesma, com distâncias de AB , BC e CD de $L/3$.

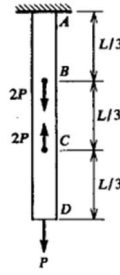


Figura 14: – Barra com cargas axiais intermediárias. [5]

A Equação (12) é formada pela junção da deformação específica (Equação 13) e a tensão (Equação 14) através da lei de Hooke ($\sigma = \epsilon \cdot E$).

$$\epsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\text{alongamento total}}{\text{comprimento}} \quad (13) \quad \sigma = \frac{P}{A} = \frac{\text{força}}{\text{área}} \quad (14)$$

A Figura 15 apresenta a barra com forças normais concentradas nas extremidades, seção transversal e força axial variando continuamente.

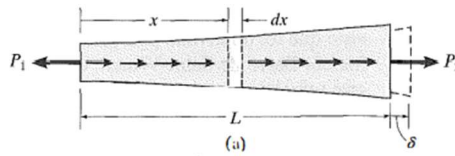


Figura 15: – Barra com seção transversal e força axial variando continuamente, e cargas concentradas nas extremidades. [2]

Através do método das seções que, “exige que seja feita uma seção ou "corte" imaginário passando pela região onde as cargas internas deverão ser determinadas” ([2], p. 03). Isola-se um elemento de dimensão dx da barra, com um afastamento x do início da mesma, ilustrado na Figura 15. Na representação da Figura 16, tem-se o diagrama de corpo livre do elemento de dimensão dx .

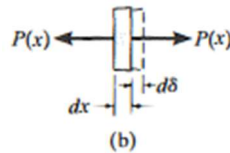


Figura 16: – Diagrama de corpo livre do elemento. [2]

Onde as equações (13) e (14) ficam na forma:

$$\epsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad (13.1) \quad \sigma = \frac{P_x}{A_x} \quad (14.1)$$

Se a barra for submetida a uma carga axial variável constantemente distribuída, e uma seção transversal variável constante, a deformação é dada por um elemento diferencial, onde a equação (15), é integrada em todo o comprimento:

$$d\delta = \frac{P_x dx}{EA_x} \quad (15)$$

Realizando a integração com os limites de 0 a L para o comprimento total, e considerando P_x , E e A_x constantes ao longo de dx (comprimento do elemento):

$$\delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{P_x dx}{EA_x} = \frac{P_x}{EA_x} \int_0^L dx \gg \delta = \frac{P_x}{EA_x} \cdot x \Big|_0^L = \frac{P_x}{EA_x} \cdot (L - 0) = \frac{P_x L}{EA_x} \quad (16)$$

Ou seja, assim, encontra-se dessa forma a deformação de um elemento sob carga axial. As unidades de medidas dependem do sistema que será adotado. Nesta aplicação mostra-se claramente o uso da ferramenta integral para uma aplicação da Engenharia Civil. A seguir, um exemplo numérico para essa aplicação retirado de [2].

Exemplo 2 - A barra de aço A-36 mostrada na Figura 17 é composta por dois segmentos, AB e BD, com áreas de seção transversal $A_{AB} = 600 \text{ mm}^2$ e $A_{BD} = 1200 \text{ mm}^2$, respectivamente. Determine o deslocamento vertical da extremidade A e o deslocamento de B em relação a C.

Onde, em (a), observa-se a figura do problema e em (b), usa-se o método das seções em cada parte da figura, uma vez que, as forças axiais internas e as forças externas nos segmentos AB, BC e CD são distintas. Após separar os segmentos, pela equação de equilíbrio de forças verticais ($\sum F_y = 0$), adotando forças apontando para cima como positivas, descobre-se: $P_{AB} = -75 \text{ kN}$, $P_{BC} = -35 \text{ kN}$ e $P_{CD} = +45 \text{ kN}$

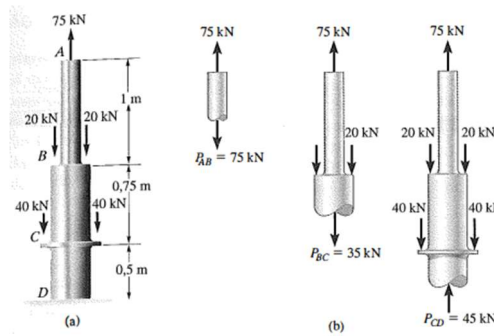


Figura 17: Barra de aço. [2]

Assim, para os deslocamentos, sendo $E_{aço} = 210 \cdot 10^3 \text{ MPa}$, módulo de elasticidade tabelado, e adotando forças de tração (+) e forças de compressão (-), possui-se para o deslocamento vertical de A em relação ao apoio D, a soma do deslocamento em todos os segmentos AB, BC e CD:

$$\delta_{AD} = \frac{75 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} \cdot (10^6)}{210 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \cdot 600 \text{ mm}^2} + \frac{35 \text{ kN} \cdot 0,75 \text{ m} \cdot (10^6)}{210 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \cdot 1200 \text{ mm}^2} + \frac{-45 \text{ kN} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot (10^6)}{210 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \cdot 1200 \text{ mm}^2} = +0,61 \text{ mm}$$

A barra se alonga, logo o deslocamento A é para cima. Agora, para o deslocamento de B em relação a C:

$$\delta_{BC} = \frac{P_{BC} \cdot L_{BC}}{A_{BC} \cdot E} = \frac{35 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} \cdot (10^6)}{210 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \cdot 1200 \text{ mm}^2} = +0,104 \text{ mm}$$

O segmento se alonga, logo, B se afasta de C.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos dias de hoje, os alunos da engenharia possuem uma enorme adversidade na visualização das aplicações do conteúdo estudado em sala de aula, em situações práticas da profissão escolhida. Nessas circunstâncias, sabe-se que grande parte dos livros de cálculo lidam com exemplos sem a contextualização em determinadas áreas. Ao se alternar o conteúdo estudado em sala de aula com aplicações concretas, o aluno manifesta mais habilidade em assimilar o assunto, as aulas ficam mais estimulantes e proveitosas, o estudo fica com mais sentido. A aplicação do Cálculo Diferencial e Integral em outros campos de conhecimento, é um artifício de grande poder para o ensino.

Nesse âmbito, é de extrema importância o desenvolvimento de ferramentas inovadoras de ensino e metodologias, que busquem a interdisciplinaridade, para se explorar com os alunos as diversas esferas em que matemática no geral se aplica, almejando uma evolução significativa no ensino e na aprendizagem. Uma vez que, assim, o aluno consegue visualizar, a relevância do tema estudado, na vida acadêmica, na profissional e até mesmo em cenários corriqueiros do dia-a-dia.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. Cálculo A. 6 ed. [S. l.]: Pearson, 2006.
- [2] HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 7ed. [S. l.]: Pearson Education do Brasil, 2010.
- [3] DE ALMEIDA, Maria Cascão Ferreira. Estruturas isostáticas. Oficina de Textos, 2009.
- [4] MARTHA, Luiz Fernando. Métodos básicos da análise de estruturas. Rio de Janeiro: Campus, 2010.
- [5] TOMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James E. Mecânica dos sólidos. [S. l.]: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1983. v. 1.
- [6] STEWART, James. Cálculo. 7 ed.. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2013. v. 1.
- [7] STEWART, James. Cálculo. 7 ed.. ed. [S. l.]: Cengage Learning, 2013. v. 2.
- [8] MACÊDO, Maria Joseane Felipe Guedes. CÁLCULO II. 1. ed. BCOT/UFERSA: EdUFERSA, 2013. 92 p.
- [9] GUIDORIZZI, H. L., Um curso de Cálculo, V. 1, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda, 5a edição (2001).
- [10] DE MOURA, José. Guia da Engenharia, 2019. Dimensionamento de vigas: Cálculo da armação. Disponível em: <<https://www.guiadaengenharia.com/dimensionamento-vigas-concreto-aplicacoes/>>. Acesso em: 25 de Out. de 2022.
- [11] DE MOURA, José. Guia da Engenharia, 2019. Dimensionamento de vigas de concreto: hipóteses. Disponível em: <<https://www.guiadaengenharia.com/dimensionamento-vigas-concreto-hipoteses/>>. Acesso em: 01 de Nov. de 2022.
- [12] HERCULANO, Daniel; FORTES, Tatiana; STILLE, Tiago. CEARÁ GOVERNO DO ESTADO, 2020. Palácio da Abolição celebra cinquentenário. Disponível em: <<https://www.vivadecora.com.br/pro/trelica/>>. Acesso em: 01 de Nov. de 2022.
- [13] ALENCAR, Joana. Blog do Paulo Melo, 2020. Pábio Mossoró firma compromisso de entregar viaduto na BR-040 em Valparaíso de Goiás-GO. Disponível em: <<https://www.paulomelo.blog.br/2020/11/pabio-mossoro-firma-compromisso-de.html>>. Acesso em: 01 de Nov. de 2022.
- [14] CRUZ, Talita. VivaDecora, 2021. O que é Treliça? Conheça os 4 Tipos Mais Usados na Construção Civil. Disponível em: <<https://www.vivadecora.com.br/pro/trelica/>>. Acesso em: 01 de Nov. de 2022.
- [15] HALLACK, João Chafi; LEMONGE, Afonso Celso de Castro; BARBOSA, Flávio de Souza; HALLAK, Patrícia Habib. Apostila de Resistência dos Materiais I. Departamento de Mecânica Aplicada e Computacional. Maio de 2013. Apostila de aula. Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: <<https://www.uff.br/mac/files/2012/11/apostila-RMI-2013.pdf>>. Acesso em: 05 de Out. de 2022.
- [16] Aplicação do Cálculo Diferencial e Integral no Estudo de Vigas Isostáticas. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Junho de 2012. Universidade Estadual Vale do Acaraú. Disponível em: <<file:///C:/Users/Cliente/Downloads/103995045-Aplicacao-do-Calculo-Diferencial-e-Integral-Momento-Fletor-e-Esforco-Cortante.pdf>>. Acesso em: 07 de Out. de 2022.
- [17] BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. Dimensionamento de Vigas de Concreto Armado á Força Cortante. Departamento de Engenharia Civil. Junho de 2012. Notas de Aula. Universidade Estadual Paulista. Disponível em: <<https://engftc.files.wordpress.com/2015/11/cortante.pdf>>. Acesso em: 07 de Out. de 2022.
- [18] BROUSSEAU, Guy. Fondement et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. In J. Brun (Ed), Didactique des Mathématiques, p. 45 – 144. Lausanne: Delashoun et Niestlé, 1996. Citado por PINHEIRO, Felipa Margarida Dias Lima. Contextualização do Saber: Formação Inicial dos Professores de 1º e 2º Ciclo do Ensino Básico. 159f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, 2012.