



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS, TECNOLÓGICAS E HUMANAS
CURSO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FERNANDO LUCAS CARDOSO SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO DE APLICAÇÕES DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ELEMENTOS ESTRUTURAIS**

ANGICOS
2019

FERNANDO LUCAS CARDOSO SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO DE APLICAÇÕES DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ELEMENTOS ESTRUTURAIS**

Monografia apresentada a Universidade Federal Rural do Semi-Árido como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador: Prof. Me Rodrigo Toledo
Teixeira Câmara

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

C268e Cardoso Silva, Fernando Lucas. Estudo analítico de aplicações de métodos numéricos em elementos estruturais / Fernando Lucas Cardoso Silva. - 2019.
56 f. : il.

Orientador: Rodrigo Toledo Teixeira Câmara.
Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Ciência e Tecnologia, 2019.

1. Estruturas Hiperestáticas. 2. Análise Estrutural. 3. Modelagem Numérica. I. Teixeira Câmara, Rodrigo Toledo, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

FERNANDO LUCAS CARDOSO SILVA

**ESTUDO ANALÍTICO DE APLICAÇÕES DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM
ELEMENTOS ESTRUTURAIS**

Monografia apresentada a
Universidade Federal Rural do Semi-
Árido como requisito para obtenção
do título de Bacharel em Ciência e
Tecnologia.

Aprovada em: 20 / 03 / 2 019.

BANCA EXAMINADORA

Rodrigo Toledo
Rodrigo Toledo Teixeira Câmara, Prof. Me. (UFERSA)
Presidente

Marcilene V. de Nóbrega
Marcilene Vieira de Nóbrega, Profa. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

Enai T. da Cunha
Enai Taveira da Cunha, Profa. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por tornar este momento possível.

Aos meus pais, que apesar de todas as dificuldades, me ajudaram na realização do meu sonho.

Agradeço a todos os meus familiares.

Agradeço ao meu Orientador Rodrigo Toledo Teixeira Câmara por todo apoio e paciência ao longo da elaboração do meu projeto final.

Agradeço a Banca Examinadora por avaliar e mostrar críticas construtivas deste trabalho para não cometer os mesmos erros em trabalhos futuros.

Agradeço a minha namorada Alice Dantas pelo apoio na construção do trabalho.

Agradeço aos meus amigos Gustavo Douglas e João Pedro, pela ajuda no decorrer do trabalho e no decorrer do curso.

Agradeço aos meus amigos da minha cidade natal Leon neto, José William e Thallys Eduardo.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de curso.

Agradeço também a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização do trabalho.

Julgue seu sucesso pelas coisas que
você teve que renunciar para conseguir.

Dalai Lama

RESUMO

O método dos elementos finitos é uma poderosa ferramenta para resolução de um conjunto de problemas complexos dentro da engenharia. Esta técnica consiste em subdividir o problema em vários elementos, calcular cada elemento individualmente e em seguida fazer o somatório de todos os elementos, para assim encontrar forças e deslocamentos, chegando a uma solução aproximada para o problema. O método é indispensável em *softwares* de análise de estruturas, distribuição de calor em placas, etc. O trabalho aborda algumas questões, como: qual a situação atual do ensino do método nas universidades brasileiras de engenharia civil? Quais os principais *softwares*? E como modelar um problema por esse método? O objetivo geral deste trabalho é fazer estudo dos elementos finitos na análise de estruturas, e os objetivos específicos é fazer uma pesquisa quantitativa quanto ao ensino do método no Brasil, levantamento dos *softwares* mais utilizados e ainda solucionar uma estrutura constituída por molas. Na pesquisa realizada, foi constatado que mais da metade das universidades tem a disciplina na estrutura curricular de engenharia civil, foi feita uma análise de dois *softwares* e o exemplo foi resolvido, sendo encontrado as forças e os deslocamentos da estrutura. Conclui-se que, é primordial que os futuros engenheiros civis entendam os conceitos básicos de método dos elementos finitos, devido as suas inúmeras aplicações na engenharia civil.

Palavras-Chave: Estruturas Hiperestáticas. Análise Estrutural. Modelagem Numérica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura simplificada.....	11
Figura 2 - Malha de elementos finitos e ação exterior.....	17
Figura 3 - Malha deformada representada sobre a estrutura indeformada.	18
Figura 4 - Tensões principais e respectivas direções.....	18
Figura 5 - Campo de deslocamentos verticais.	19
Figura 6 - Campo de tensões normais segundo um eixo vertical.....	20
Figura 7 - Diagrama de corpo livre de um elemento de mola.....	28
Figura 8 - Elemento mola 1.	29
Figura 9 - Elemento mola 2.	30
Figura 10 - Índices da matriz.....	32
Figura 11 - Graus de liberdade de uma viga e uma chapa.	33
Figura 12 - Montagem da matriz rigidez.....	34
Figura 13 - Natureza de ensino do M.E.F. em algumas universidades brasileiras....	38
Figura 14 - Ensino do M.F.E. em algumas universidades brasileiras por região.....	39
Figura 15 - Datatron 205. (UFRJ, 1969).....	41
Figura 16 - Software Msc NASTRAN w/ Patran.	42
Figura 17 - Software Ansys.	43
Figura 18 - Problema exemplo.	44
Figura 19 - Matriz rigidez.....	44
Figura 20 - Estrutura deformada.	48

LISTA DE SÍMBOLOS

λ	Escalar qualquer
f	Esforços Internos
Σ	Somatório
$\geq$	Maior ou igual
$\neq$	Diferente

SUMÁRIO

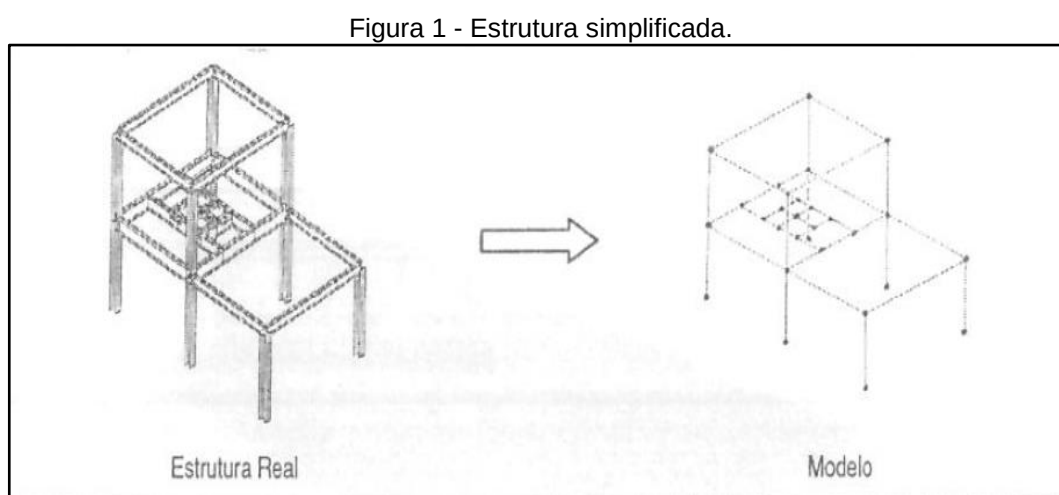
1	INTRODUÇÃO	11
2	OBJETIVOS	14
2.1	Objetivo Geral	14
2.2	Objetivos Específicos	14
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	15
3.1	Elementos finitos – considerações gerais	15
3.2	Utilização dos elementos finitos em análise estrutural	16
3.3	Revisão de matrizes	21
3.3.1	Conceito	21
3.3.2	Matriz quadrada.....	21
3.3.3	Matriz coluna	21
3.3.4	Matriz triangular superior	22
3.3.5	Matriz triangular inferior	22
3.3.6	Matriz simétrica	22
3.3.7	Matriz transposta	22
3.3.8	Produto entre matrizes	23
3.3.9	Determinante de uma matriz quadrada	23
3.3.9.1	Cofator de uma matriz	24
3.4	Fatoração Cholesky	24
3.5	Modelando matriz rigidez	27
3.5.1	Uma mola livre.....	27
3.5.2	Generalização	31
3.5.3	Montagem da matriz rigidez para estruturas maiores.....	33
4	METODOLOGIA	36
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
5.1	Ensino do M.E.F. nas universidades brasileiras.....	38
5.2	Softwares de modelagem numérica	40
5.3	Problema exemplo.....	43
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	49
	REFERÊNCIAS.....	50
	APÊNDICE A – AMOSTRA DA PESQUISA.....	52
	APÊNDICE B – FONTES DA PESQUISA	54

ANEXOS A – POPULAÇÃO DAS REGIÕES 2012 IBGE	56
---	-----------

1 INTRODUÇÃO

Na engenharia civil, principalmente na análise de estruturas que envolvam elementos mais complexos, ocasionalmente não é possível resolver analiticamente o modelo matemático proposto. Daí pode-se utilizar os métodos numéricos para cálculos e simulações mais refinadas.

A simulação computacional é amplamente utilizada para realizar análises e melhorar a qualidade dos produtos e projetos. Grande parte dessas análises é realizada por meio de *softwares* que utilizam o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.). Este método consiste em simplificar uma estrutura – cuja geometria é composta por curvas contínuas – para uma mais simples, composta por pontos e segmentos de retas, como pode-se observar na Figura 1.



Fonte: Azevedo (2003)

Antes do aparecimento do M.E.F., a análise dos meios contínuos era efetuada por resoluções diretas dos sistemas de equações diferenciais parciais que regem o fenômeno. Para facilitar a aplicação desta técnica a problemas não elementares, era comum recorrer a séries de Fourier. Devido à complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogêneos e de geometria simples, para tentar ultrapassar algumas destas limitações era frequente a substituição de derivadas exatas por derivadas aproximadas, calculadas com base em grelhas de pontos. Da aplicação desta técnica, resulta o método das diferenças finitas que, antes do aparecimento dos computadores, apresentava o inconveniente de requerer a resolução de grandes sistemas de equações lineares. Para evitar este

inconveniente foram propostos diversos métodos de relação baseados na sucessiva diminuição de um conjunto de resíduos (AZEVEDO, 2003).

Lotti *et al.* (2006) afirma que, o método foi primeiramente documentado por Gauss no final do século XVIII, entretanto naquela época e antes do aparecimento dos computadores apresentava-se o inconveniente de ser necessário resolver grandes sistemas lineares. Segundo Azevedo (2003), com o grande desenvolvimento que o M.E.F. teve na década de 60 e com a banalização dos computadores, esta técnica se popularizou. Ele ainda afirma que este avanço é tão significativo que os outros métodos deixaram praticamente de ser utilizados.

Junto com a evolução da engenharia civil também surgem projetos progressivamente mais complexos, o que exige o uso cada vez mais intenso de *softwares* de simulação. Com a disseminação do uso destes *softwares*, acompanha-se também exigências maiores de qualificação do profissional, principalmente no que se refere ao uso de *softwares* e quanto a assimilação de funcionamento do mesmo.

Sem o entendimento o usuário passa a ser assim um mero “utilizador” destas ferramentas e corre-se, portanto, o risco de que o engenheiro utilize o software repetindo-se procedimentos (que aprendeu em treinamentos ou por sucessivas improvisações) sem ter verdadeira compreensão do que se está sendo calculado. Com isso, a tendência de ele aceitar os resultados apresentados é alta, mesmo em casos de dados inseridos incorretamente, modelos que não correspondiam com a realidade ou sem condicionantes essenciais (AZEVEDO, 2003).

Diante do cenário que se encontra a engenharia estrutural é inevitável que as empresas não façam uso de *softwares* de simulação computacional para a análise de estruturas, e que parte destes *softwares* utilizados empregue a técnica do método dos elementos finitos. O uso destes *softwares* otimiza tempo, pois substitui cálculos que levariam um longo período para serem resolvidos, evitando assim serviços longos e cansativos para os projetistas, contudo, esses projetistas possuem habilidades necessárias para conseguir analisar corretamente os resultados obtidos? A transmissão aos alunos dos fundamentos do M.E.F. e também de uma introdução à correspondente programação em computador constituem certamente fatores que conduzirão os futuros projetistas a uma utilização mais segura dos softwares de análise de estruturas (AZEVEDO, 2003).

No entanto, percebe-se que, conforme será demonstrado nos resultados, nos cursos de engenharia civil das universidades brasileiras há pouca ênfase no ensino do M.E.F.. A Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), por exemplo, tem a disciplina de Introdução ao método dos elementos finitos apenas como optativa no curso de engenharia civil.

Com um mercado altamente competitivo, no qual o profissional deve estar bem qualificado para que possa se sobressair a seus concorrentes, é fundamental que o engenheiro adquira capacidades diversificadas de modo que possa se adaptar a qualquer necessidade que a função exige.

Nesse contexto, a proposta deste trabalho é apresentar conceitos, definições e softwares que estão no mercado, sendo assim um material introdutório, direcionado para graduandos, abordando o método dos elementos finitos, mostrando o uso deste na engenharia civil, tendo foco na engenharia estrutural. Para Azevedo (2003) existe uma motivação para continuar a ser necessário ensinar as bases teóricas do M.E.F., que consiste no fato de ser fundamental preparar hoje os inovadores de amanhã.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Estudo do uso do método dos elementos finitos em análise de estruturas.

2.2 Objetivos Específicos

- Levantamento do ensino do método dos elementos finitos nas universidades brasileiras de engenharia civil.
- Levantamento dos softwares de método dos elementos finitos mais usados no mercado.
- Cálculo de uma estrutura composta de molas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Elementos finitos – considerações gerais

Não é fácil encontrar uma definição que chegue a ser consolidada na literatura, mas podemos utilizar de algumas bem-conceituadas e que darão boa direção ao entendimento que necessitamos.

Para Lotti *et al.* (2006), “pode-se definir o MEF como um método matemático, no qual um meio contínuo é discretizado (subdividido) em elementos que mantêm as propriedades de quem os originou.”

Já segundo Pavanello (1997) “... o método dos Elementos Finitos foi criado com o objetivo de se resolver os problemas de mecânica que não admitem soluções fechadas (de forma analítica)”. Isto é, consiste em subdividir um problema contínuo em seções com geometrias conhecidas, como retângulos e triângulos que apresentam mesmas propriedades físicas, ligados por juntas denominadas nós, chegando a soluções aproximadas para o problema.

Sobre a formulação para estes elementos, a modelagem é menos complexa, pois triângulos são compostos por apenas 3 nós e grau de liberdade 6 e retângulos compostos por 4 nós e grau de liberdade 8. Porém modelar sistemas de contornos mais complicados exige combinação de vários modelos (GESUALDO, 2010)

Já a definição proposta por Martha (1994, p.1) afirma que,

Método dos Elementos Finitos pode ser interpretado como uma generalização dos procedimentos adotados em uma análise estrutural convencional de sistemas reticulados. Segundo o mesmo autor, a utilização de formulações matriciais em pórticos através do Método dos Deslocamentos, trata-se do próprio conceito do M.E.F. A diferença é que, enquanto a primeira utiliza-se somente dos nós ou elementos estruturais existentes, o segundo é uma idealização da estrutura por um número finito de elementos (regiões), que são utilizadas para representar um meio contínuo.

Devido a um conjunto de adversidades o problema se torna não tão simples de se resolver. Desse conjunto podemos citar, o estudo de um modelo demasiadamente complexo: ainda que utilizar uma quantidade maior de elementos finitos para descrever o objeto acarreta em resultados mais refinados, a complexidade matemática torna-se maior. Cabe ao engenheiro saber dosar a complexidade apropriada para equilibrar a qualidade do resultado com o esforço computacional exigido.

Com o uso de softwares que utilizam o M.E.F., é possível estudar e analisar os resultados de tensão, deformação e deslocamento de uma estrutura. Através destes resultados, é possível identificar a durabilidade do material, identificar pontos de concentração de tensão e entender o comportamento da estrutura diante de um carregamento, o que faz otimizar peças antes mesmo de fabricá-las.

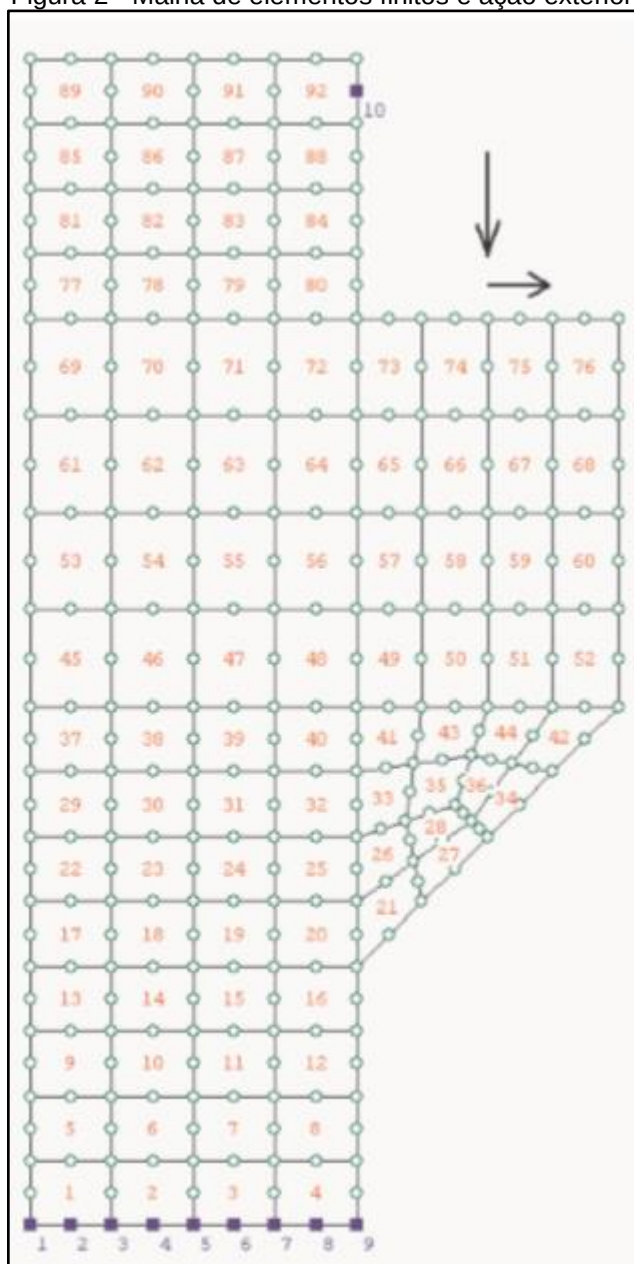
3.2 Utilização dos elementos finitos em análise estrutural

A aplicação do método constitui-se basicamente em resolver e diagnosticar problemas ligados a estruturas, fundamentado na obtenção de deslocamentos, tensões e deformações, permitindo avaliar o desempenho diante de diversas condições a que se propõem uma estrutura, como rigidez, fadiga e resistência.

Ainda há variações do método dos elementos finitos que possibilitam fazer análises térmicas, acústicas e eletromagnética, além de ser possível se estudar o comportamento de fluidos nos casos mais simples. Há casos documentados de uso do M.E.F. para o desenvolvimento de aparelhos ortodônticos (RODRIGUES *et al*, 2014)

A seguir tem uma aplicação da técnica, que foi feita por Azevedo (2000). Na Figura 2 tem-se uma aplicação do M.E.F., no qual consiste em analisar uma estrutura curta e de pequena espessura, que está sujeita às ações assinaladas. Na Figura está representada a malha utilizada, que é constituída de 92 elementos finitos de geometrias quadriláteras, em que cada elemento é composto por 8 nós. A Figura apresenta ainda 10 nós ligados ao exterior, e que estão assinalados com a cor roxa.

Figura 2 - Malha de elementos finitos e ação exterior.



Fonte: Azevedo (2003)

Após a análise da estrutura feita em um software que utiliza o M.E.F., pode-se chegar a valores aproximados dos deslocamentos e das tensões. Na Figura 3 é possível ver os deslocamentos na malha, causados pela ação das forças aplicadas na estrutura. Na mesma Figura tem-se também a malha indeformada, para visualizar melhor tais deformações.

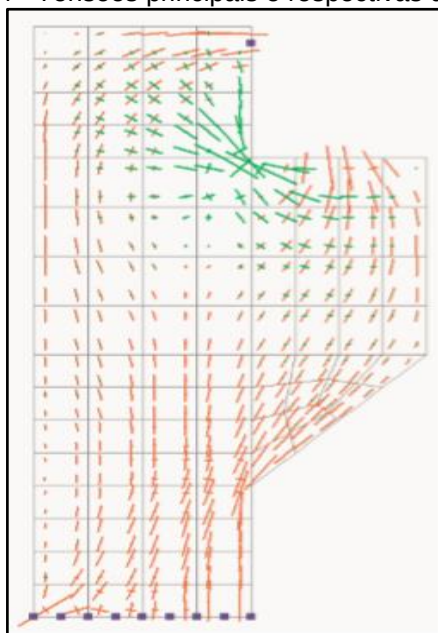
Figura 3 - Malha deformada representada sobre a estrutura indeformada.



Fonte: Azevedo (2003)

Na Figura 4 é possível observar os locais que as tensões principais apresentam maiores valores, assim como, a trajetória das tensões dentro da estrutura, o segmento de reta está orientado segundo a direção principal de tensão e sua grandeza é proporcional aos valores das tensões normais, onde a cor verde indica tração e a vermelha compressão.

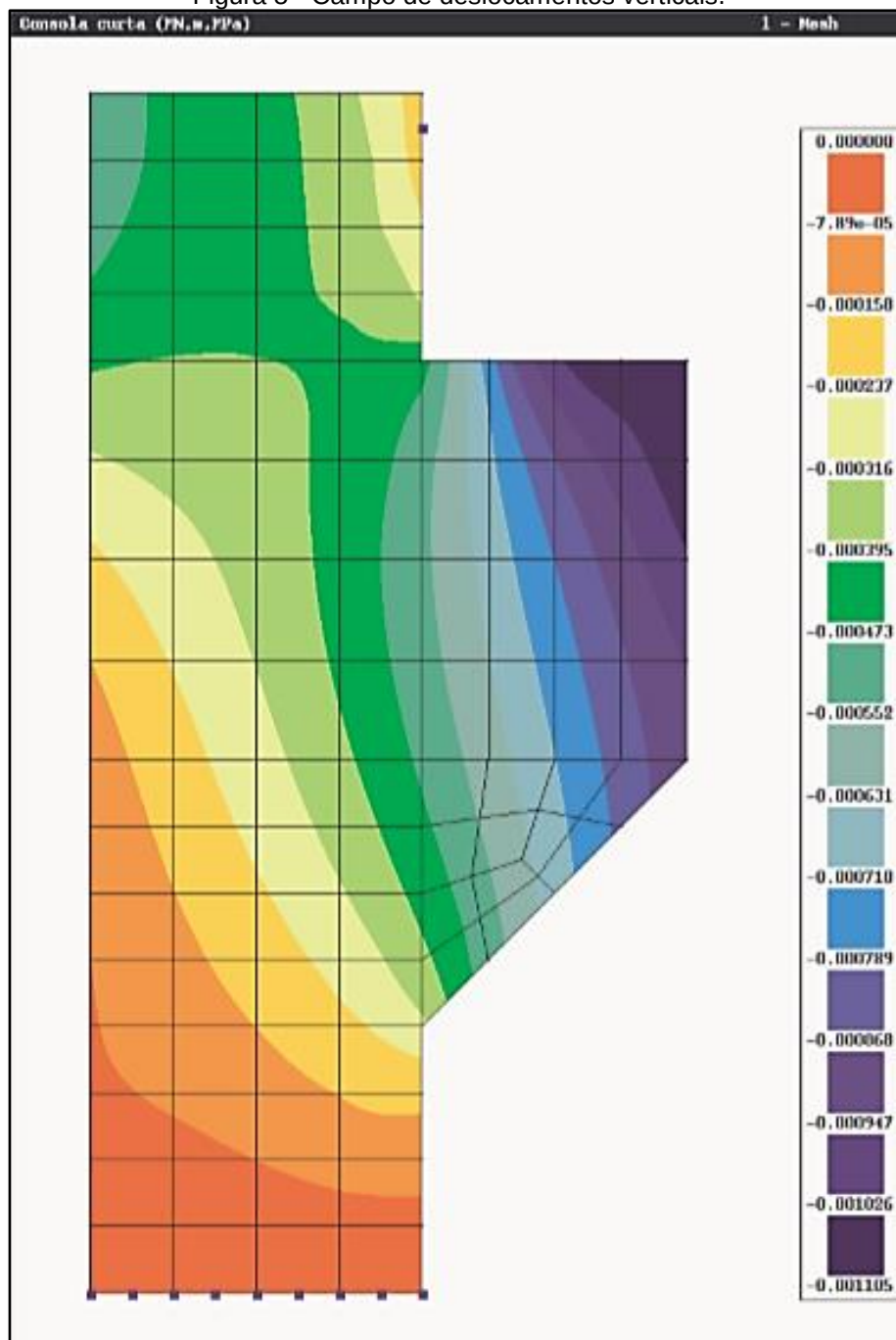
Figura 4 - Tensões principais e respectivas direções.



Fonte: Azevedo (2003)

Na Figura 5 tem-se os valores de deslocamento na componente vertical representada por cores em cada ponto, ao qual na lateral da malha encontra-se a escala de deslocamentos por cores.

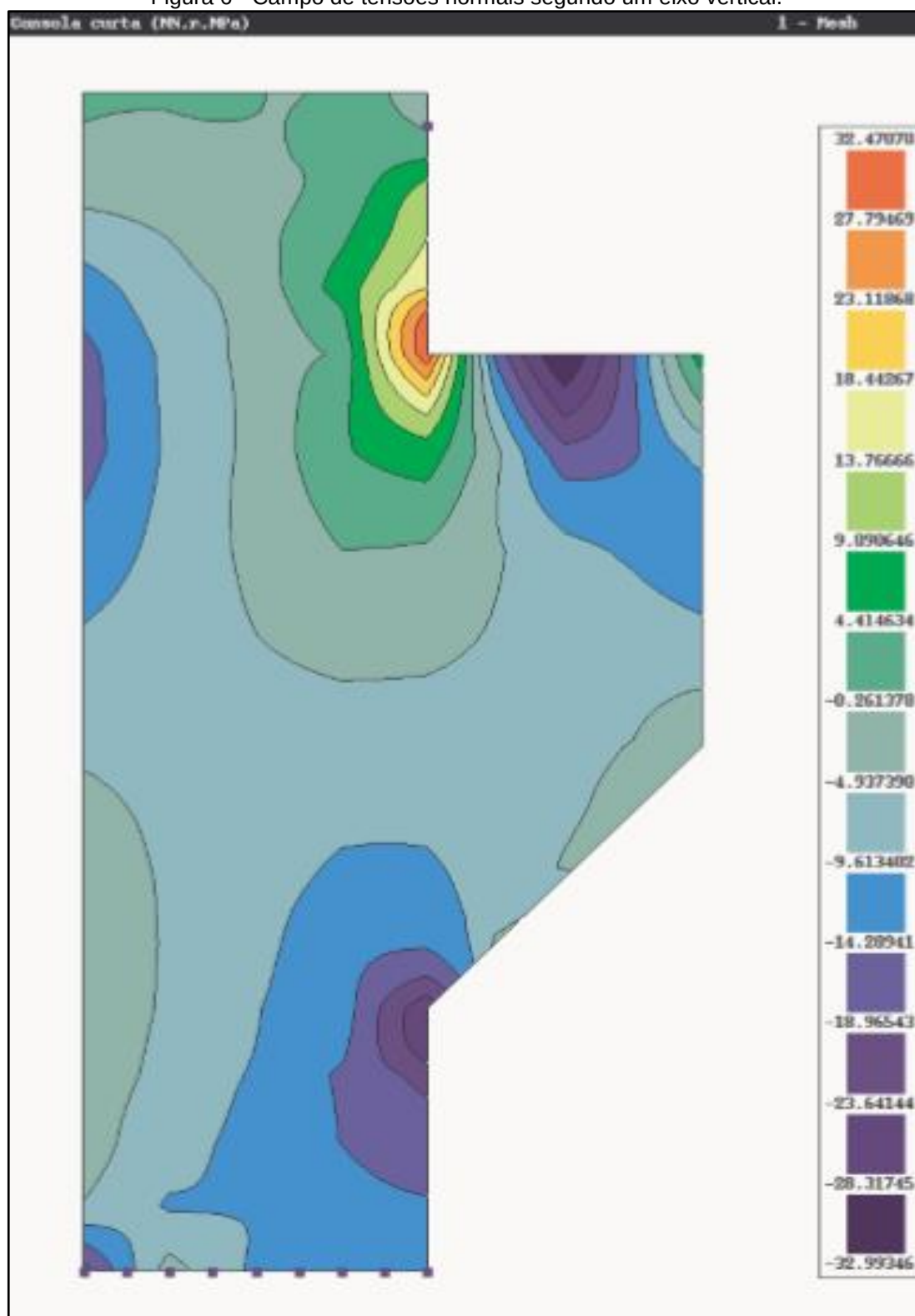
Figura 5 - Campo de deslocamentos verticais.



Fonte: Azevedo (2003)

Na Figura 6 a visualização é semelhante à Figura 5 verificando os valores por intermédio de cores. Na Figura ainda se tem os valores para tensões normais na componente vertical.

Figura 6 - Campo de tensões normais segundo um eixo vertical.



Fonte: Azevedo (2003)

3.3 Revisão de matrizes

3.3.1 Conceito

Nesta seção, todos os conceitos quanto a matriz está de acordo com Steinbruch e Winterle (1987) e Boldrini (1980).

Chama-se matriz de ordem m por n a um quadro de elementos (números, polinômios, funções *etc.*) arranjados em m linhas e n colunas. Cada componente desta matriz é denominada por uma letra minúsculas subscrito com dois índices (a_{ij}), o primeiro indica a linha e o segundo indica a coluna.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}.$$

Se uma matriz A tem m linhas e n colunas, simplesmente se escreve $A_{m,n}$, logo, por exemplo, se uma matriz é de ordem 3 por 4 escreve-se $A_{3,4}$ e diz-se matriz de ordem 3 por 4.

3.3.2 Matriz quadrada

A matriz quadrada é a que $m = n$, ou seja, o número de linhas é igual ao número de colunas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que elemento a_{ij} de uma matriz quadrada faz parte da diagonal principal se $i = j$.

3.3.3 Matriz coluna

A matriz coluna é aquela que possui uma única coluna ($n = 1$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}.$$

3.3.4 Matriz triangular superior

Matriz triangular superior é uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $m = n$ e $a_{ij} = 0$, para $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

3.3.5 Matriz triangular inferior

Matriz triangular inferior é aquela em que $m = n$ e $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

3.3.6 Matriz simétrica

Matriz Simétrica é aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.3.7 Matriz transposta

A matriz transposta da matriz A de ordem m por n , é a matriz A^T de ordem n por m . Que se obtém da matriz A permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (A)^T = B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{11} = b_{11} = 2, \quad a_{12} = b_{21} = 5, \quad a_{21} = b_{12} = 6, \quad a_{22} = b_{22} = 7, \\ a_{31} = b_{13} = 1, \quad a_{32} = b_{23} = 3. \end{aligned}$$

3.3.8 Produto entre matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{l \times p}$ Definimos $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} * b_{kv} = a_{u1} * b_{1v} + \dots + a_{un} * b_{nv}$$

Observações:

- Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{l \times p}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, $n = l$. Além disso, a matriz-resultado $C = AB$ será de ordem $m \times p$.
- O elemento c_{ij} (i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz-produto) é obtido, multiplicando os elementos da i-ésima linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

3.3.9 Determinante de uma matriz quadrada

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \geq 1$, podemos associar a matriz A a um único número denominado determinante ($\det A$). Para matrizes de ordem 2 ou 3 é possível de solucionar de forma simples.

Determinante de matriz de ordem 2 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}).$$

Já determinante de matriz de ordem 3 é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\det A = (a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12} * a_{23} * a_{31} + a_{13} * a_{21} * a_{32}) \\ - (a_{12} * a_{21} * a_{33} + a_{11} * a_{23} * a_{32} + a_{13} * a_{22} * a_{31}).$$

Para matrizes de ordem superior a três, faz-se necessário o uso do conceito de cofator de matriz.

3.3.9.1 Cofator de uma matriz

Seja uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem $n \geq 2$. Eliminando sua linha i e sua coluna j , obtém-se outra matriz $(n - 1)$, cujo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ é chamada de cofator ou complemento algébrico de k_{ij} . Exemplo:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{cof}(K_{11}) = (-1)^{1+1} * \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} = 1 * (5 * 4 - 6 * 9) = -34,$$

com este conceito, a definição da determinante de matrizes de ordem n é dada por

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} * \text{cof}(A_{ij}),$$

onde i é um número fixo qualquer entre 1 e n .

Determinantes de matrizes possuem diversas aplicações. Neste trabalho, consideraremos a que explica que, se um sistema linear é dado por $Ax = B$, então o sistema possui solução única se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Citaremos também que a negação desta propriedade, que diz que um sistema linear possui infinitas ou nenhuma solução se $\det(A) = 0$

3.4 Fatoração Cholesky

O método de Cholesky é um método extremamente eficiente. No entanto, é compatível apenas com uma família de sistemas lineares. Felizmente, esta família,

como veremos a seguir, engloba as que nos deparamos nos problemas modelados por M.E.F..

Uma matriz $A: n \times n$ é denotada “definida positiva” se $x^T A x > 0$ para todo $x \in R^n, x \neq 0$.

Se $A: n \times n$ é simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular $G: n \times n$ com diagonal positiva, tal que $A = G G^T$ (RUGGIERO e LOPES, 1988).

$$A = G * G^T$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}.$$

Os cálculos serão feitos seguindo a ordem de colunas, logo o primeiro passo é realizado na coluna um.

1º Passo: na coluna 1

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ e } g_{j1} = a_{j1}/g_{11} \text{ com } j = 2, \dots, n.,$$

2º Passo: na coluna 2

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} \text{ e } g_{j2} = (a_{j2} - g_{j1} * g_{21})/g_{22} \text{ com } j = 3, \dots, n.,$$

3º Passo: na coluna k

$$g_{kk} = (a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ki}^2)^{1/2} \text{ e } g_{jk} = (a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} g_{ji} * g_{ki})/g_{kk} \text{ com } j = (k+1), \dots, n..$$

Obtido a matriz triangular inferior G , podemos reescrever o sistema linear da seguinte forma.

$$Ax = b \rightarrow (G G^T)x = b.$$

Para melhor ilustrar o método de decomposição vamos resolver a questão 33.b do capítulo 3 do livro “Calculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais” de Ruggiero e Lopes. Digamos que queremos resolver o sistema linear dado por:

$$\begin{cases} 20x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 16 \\ 7x_1 + 30x_2 + 8x_3 = 38, \\ 9x_1 + 8x_2 + 30x_3 = 38 \end{cases}$$

transformando o sistema linear em matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 7 & 30 & 8 \\ 9 & 8 & 30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 38 \\ 38 \end{bmatrix},$$

como a matriz é simétrica, o sistema é um candidato para a decomposição de Cholesky.

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 7 & 30 & 8 \\ 9 & 8 & 30 \end{bmatrix},$$

aplicando-se a decomposição de Cholesky:

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{20} = 4,47$$

$$g_{21} = a_{21}/g_{11} = 7/4,47 = 1,57$$

$$g_{31} = a_{31}/g_{11} = 9/4,47 = 2,01$$

$$g_{22} = \sqrt{a_{22} - g_{21}^2} = \sqrt{30 - 1,57^2} = 5,25$$

$$g_{32} = (a_{32} - g_{21} * g_{31})/g_{22} = (8 - 1,57 * 2,01)/5,25 = 0,92$$

$$g_{33} = \sqrt{a_{33} - (g_{31}^2 + g_{32}^2)} = \sqrt{30 - (2,01^2 + 0,92^2)} = 5,01,$$

segue que G e G^T ficam da seguinte forma:

$$G = \begin{bmatrix} 4,47 & 0 & 0 \\ 1,57 & 5,25 & 0 \\ 2,01 & 0,92 & 5,01 \end{bmatrix}, \quad G^T = \begin{bmatrix} 4,47 & 1,57 & 2,01 \\ 0 & 5,25 & 0,92 \\ 0 & 0 & 5,01 \end{bmatrix},$$

$$Ax = b \rightarrow (GG^T)x = b, \text{ onde } Gy = b \text{ e } G^T x = y,$$

logo o nosso sistema linear será:

$$\begin{cases} 4,47y_1 = 16 \\ 1,57y_1 + 5,25y_2 = 38 \\ 2,01y_1 + 0,92y_2 + 5,01y_3 = 38 \end{cases},$$

após alguns passos, chegamos a números para as incógnitas y :

$$\begin{cases} y_1 = 3,58 \\ y_2 = 6,17, \\ y_3 = 5,02 \end{cases}$$

com as incógnitas do sistema linear anterior encontrados, podemos seguir com a nossa resolução do exemplo, de modo que chegamos ao sistema linear abaixo e os resultados para as incógnitas iniciais do problema.

$$\begin{cases} 4,47x_1 + 1,57x_2 + 2,01x_3 = 3,58 \\ 5,25x_2 + 0,92x_3 = 6,17 \\ 5,01x_3 = 5,02 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1 \cong 0 \\ x_2 \cong 1, \\ x_3 \cong 1 \end{cases}$$

3.5 Modelando matriz rigidez

Por que modelar uma mola? Segundo Alves Filho (2000) o elemento da mola é simples de se compreender, uma vez que é composto por forças apenas axiais e deslocamentos axiais. No entanto, este entendimento permite generalizações, no qual o elemento poderá contar com ações axiais, flexões, cisalhamentos, torções, etc.

3.5.1 Uma mola livre

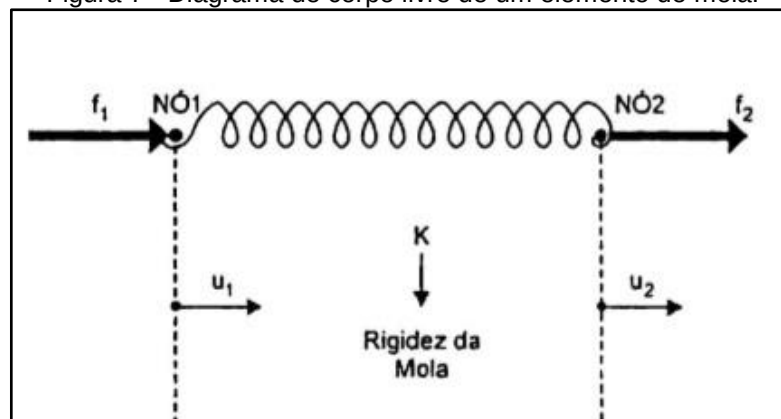
Segundo Halliday *et al.* (2012) uma mola livre, de acordo com o modelo de Hooke, pode ser descrita pelo modelo linear,

$$F = K * d, \tag{1}$$

Onde F é a força aplicada, K é uma constante positiva que representa o coeficiente elástico da mola e d é o deslocamento ou mais precisamente a deformação.

Segundo Alves Filho (2000) o modelo da mola livre, observar-se, no entanto, dois deslocamentos axiais, u_1 e u_2 , e duas forças, f_1 e f_2 , conforme ilustrado no esquema da Figura abaixo.

Figura 7 - Diagrama de corpo livre de um elemento de mola.



Fonte: Alves Filho (2000)

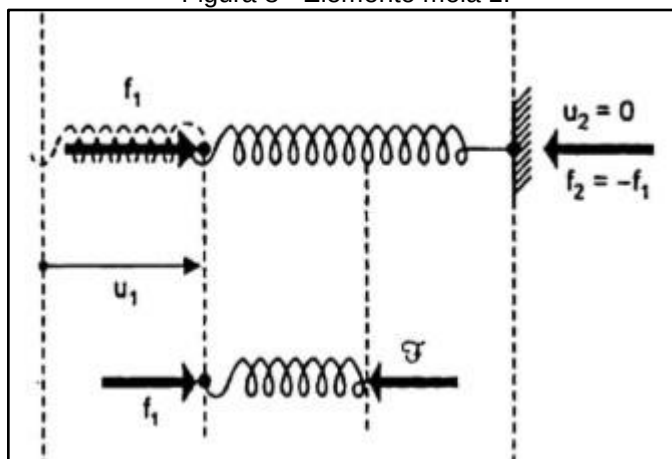
Por esta razão a equação 1 que antes era composta de valores escalares, deve agora ser representada como uma equação de matrizes, passando a ter a seguinte forma.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = [k] * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Para a análise em um ponto nodal, a matriz k é de ordem 2 por 2, essa ordem não é nada mais que por motivo algébrico. Como foi abordado no capítulo anterior, para que o produto entre duas matrizes seja possível, o número de colunas de uma matriz tem que ser igual ao número de linhas da outra.

Ainda, por Alves Filho (2000) para um elemento finito qualquer, composta de vários deslocamentos e esforços, essas matrizes passam a ter ordem m por n . Para se chegar a matriz K , será necessário fazer algumas análises a seguir, partindo das Figuras 8 e 9.

Figura 8 - Elemento mola 1.



Fonte: Alves Filho (2000)

Na Figura 8 uma mola está sendo comprimida, onde $f_2 = -f_1$, com u_2 fixado, sendo seu deslocamento nulo. Para determinar a deformação que a mola sofre com a aplicação da força, iremos fazer a seguinte subtração

$$d = u_2 - u_1,$$

como $u_2=0$, temos assim que $d = -u_1$, assim,

$$f\text{-Força interna } f = k * d = -k * u_1,$$

u_1 é positivo, pois está no sentido positivo do eixo de referência, a força interna está no estado de compressão, logo a força interna é negativa.

Segundo Hibbeler (2010) o equilíbrio de um corpo exige um equilíbrio de forças, para impedir a translação ou um movimento acelerado do corpo ao longo de uma trajetória reta ou curva.

Logo

$$f_1 = -f,$$

como

$$f = -k * u_1,$$

segue que

$$f_1 = k * u_1,$$

e como

$$f_2 = -f_1,$$

temos

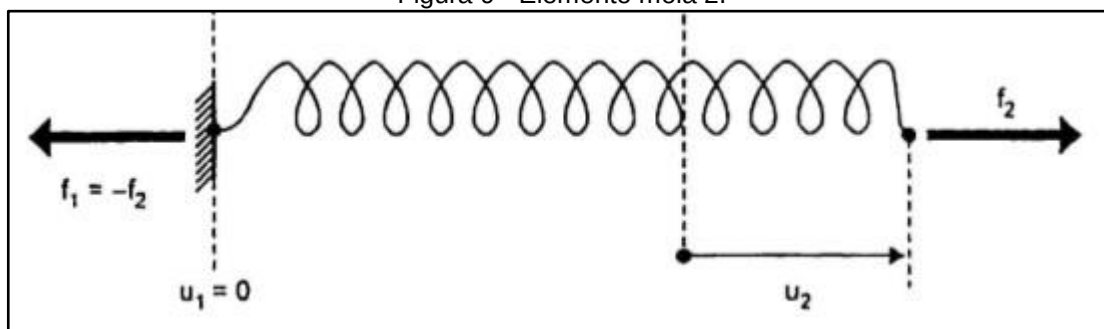
$$f_2 = -k * u_1,$$

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \end{bmatrix},$$

efetuando o produto entre as matrizes, tem-se então que:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11} * u_1 + k_{12} * 0 \\ f_2 &= k_{21} * u_1 + k_{22} * 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k_{11} * u_1 &= k * u_1 \\ k_{21} * u_1 &= -k * u_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k_{11} &= k, \\ k_{21} &= -k. \end{aligned}$$

Figura 9 - Elemento mola 2.



Fonte: Alves Filho (2000)

Seguindo a mesma linha de raciocínio da análise anterior, fixa-se a extremidade esquerda da mola, conforme ilustrado na Figura 9, portanto, pode-se supor que $u_1 = 0$, logo $d = u_2 - u_1$. Segue que

$$d = u_2, f_1 = -f_2,$$

com u_2 atuando no sentido positivo do eixo de referência, logo

$$f - \text{Força interna } f = k * d = k * u_2,$$

com a força interna positiva, o que diz respeito a uma tração. Seguindo observações feitas para figura 8, segue que:

$$f_1 = f,$$

e como

$$f = k * u_2,$$

segue que

$$f_2 = k * u_2,$$

e que

$$f_1 = -f_2,$$

logo,

$$f_1 = -k * u_2,$$

feita a análise da Figura, a matriz rigidez obtida é:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{lll} f_1 = k_{11} * 0 + k_{12} * u_2 & k_{12} * u_2 = -k * u_2 & k_{12} = -k, \\ f_2 = k_{21} * 0 + k_{22} * u_2 & k_{22} * u_2 = k * u_2 & k_{22} = k. \end{array}$$

Chegando a seguinte matriz rigidez da equação:

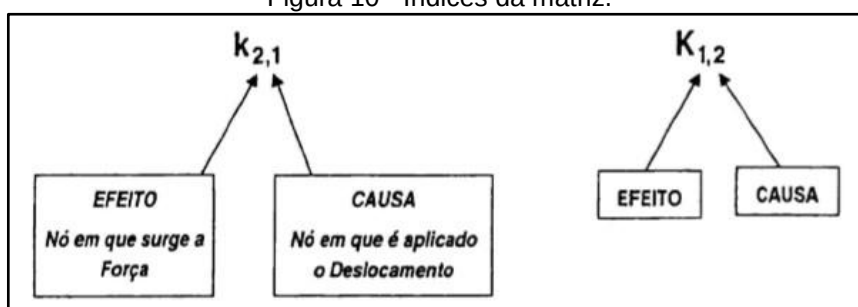
$$[K] = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}.$$

3.5.2 Generalização

Para se compreender como montar a matriz rigidez para grandes estruturas, é preciso entender algumas definições quanto a matriz.

Segundo Alves Filho (2000) os termos da matriz de rigidez do elemento finito representam relações de causa e efeito, as causas são os deslocamentos e os efeitos são as forças. Os índices dos termos das matrizes, além de identificar a linha e a coluna, também representam o nó em que foi aplicado a força (efeito) e o nó em que ocorre deslocamento (causa), conforme ilustra a Figura 10.

Figura 10 - Índices da matriz.

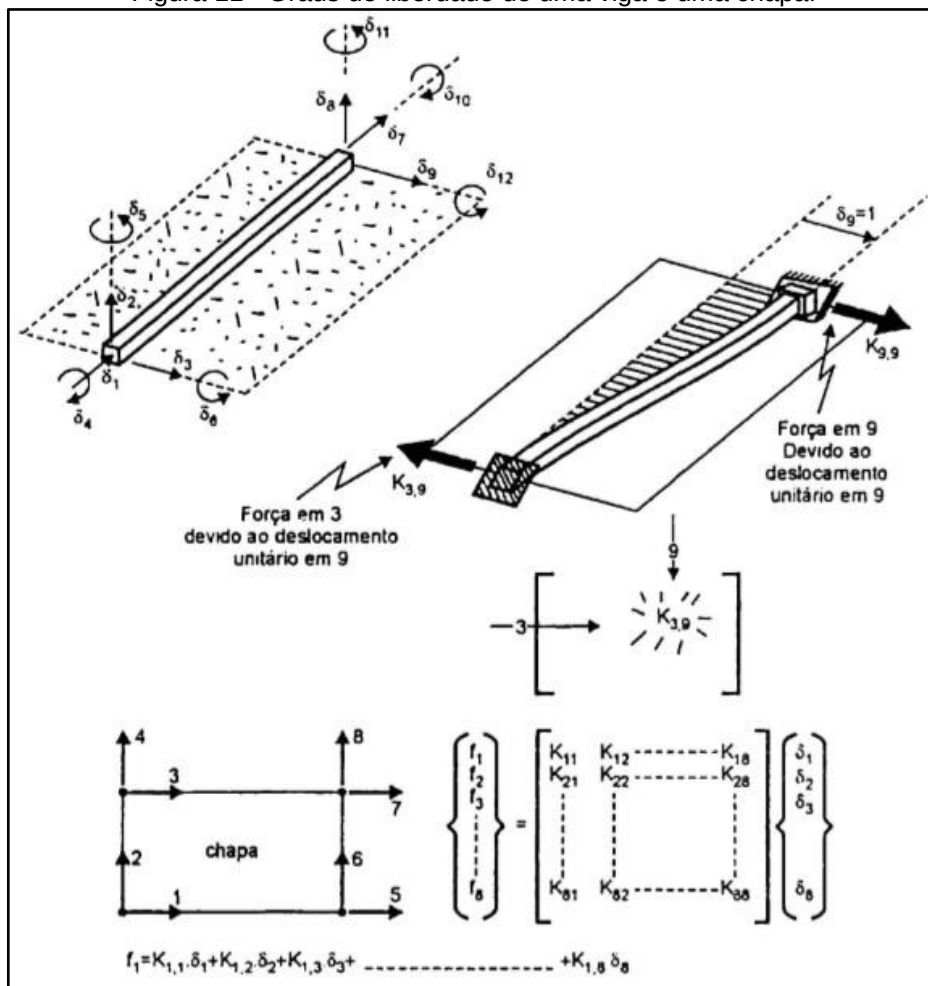


Fonte: Alves Filho (2000)

A princípio a mola que foi usada para modelar a matriz rigidez era bem simples, composta por dois nós e admitindo deslocamentos em apenas uma direção, mas sabe-se que uma viga no espaço está sujeita a três translações e três rotações. Sendo assim é mais adequado identificar os diversos componentes de deslocamento associados ao nó, como componente de deslocamentos na direção x, na direção y e na direção z. Esses componentes são chamados de graus de liberdade do elemento (ALVES FILHO, 2000).

Assim na Figura 11 é representada os graus de liberdade para uma viga no espaço. Ocorrendo um deslocamento unitário no grau de liberdade 9, mantendo todos os outros graus de liberdade bloqueados, isso implica em uma força atuando no grau de liberdade 3 com sentido contrário ao deslocamento do grau de liberdade 9, com este deslocamento, $K_{3,9}$ e $K_{9,9}$ teriam os seguintes significados, força em 3 devido ao deslocamento em 9 e força em 9 devido deslocamento em 9. Desta forma, a força atuante em 3 seria o somatório do produto entre os coeficientes de rigidez – relação força/deslocamento- e os deslocamentos de todos os graus de liberdade. Veja que esse produto, gera uma medida de força (N, Kgf etc.).

Figura 11 - Graus de liberdade de uma viga e uma chapa.



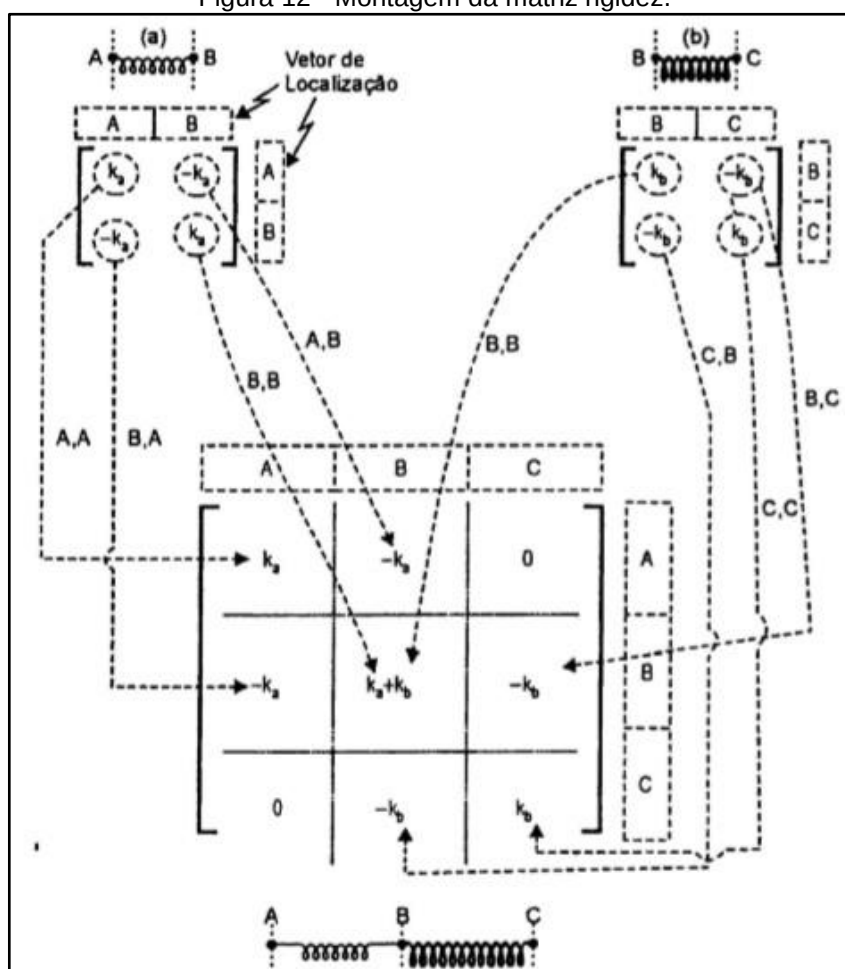
Fonte: Alves Filho (2000)

3.5.3 Montagem da matriz rigidez para estruturas maiores

A partir daqui não se denomina mais os nós de 1 e 2 como feito anteriormente, agora serão denominados de A, B, C, ..., assim para um sistema de duas molas, o elemento (a) fica localizado entre os nós A e B, e o elemento (b) fica localizado dentre os nós B e C.

Os termos i, j da Matriz de Rigidez de cada Elemento são adicionados aos correspondentes locais i, j da Matriz de Rigidez da Estrutura, pois ambos são referidos ao mesmo sistema de Referência. A Figura 12 ilustra melhor o que foi dito anteriormente.

Figura 12 - Montagem da matriz rigidez.



Fonte: Alves Filho (2000)

Como se pode ver na Figura 12, começa-se montando cada elemento de acordo com seu vetor localização, após a montagem de todos os elementos, faz-se a montagem da matriz rigidez da estrutura, seguindo a localização de cada nó. Após esse passo é necessário apenas saber das forças para encontrar o deslocamento ou vice-versa. Para determinar os deslocamentos é necessário escolher uma forma de resolução de sistema linear, seja por inversão de matriz, por algum método numérico de fatoração etc. Neste trabalho, utiliza-se a abordagem de fatoração Cholesky, por ser muito mais eficiente que a técnica de inversão de matriz.

O próximo passo é encontrar as reações nos apoios fixados, para isso é necessário transformar a matriz em duas submatrizes, uma com as forças aplicadas e a outra com as reações impostas nos apoios. Da mesma maneira, é preciso subdividir a matriz coluna dos deslocamentos em duas, uma com os deslocamentos que ocorrem nos nós e a outra com os deslocamentos impostos nos apoios fixos, que são iguais a zero.

A partir dos deslocamentos nodais encontrados, pode-se encontrar os esforços internos, sabendo do comportamento do material, ou seja, a relação força deslocamento. É importante observar que a força interna é encontrada elemento por elemento individualmente, no caso de um afastamento maior que zero entre os nós ocorre uma tração e em caso de afastamento menor que zero, ocorre a compressão.

4 METODOLOGIA

Este trabalho iniciou-se com uma pesquisa bibliográfica em livros, artigos científicos e acadêmicos relacionadas ao método dos elementos finitos. Inicialmente foram-se pesquisados os trabalhos mais citados (segundo a métrica do Scholar Google) e na bibliografia disponível na biblioteca da UFERSA *campus* Angicos.

Foi realizada uma pesquisa quantitativa em 2018 para verificar a situação do ensino do M.E.F. no Brasil. O levantamento foi realizado através de uma pesquisa utilizando o mecanismo de busca Google, no qual eram pesquisadas as estruturas curriculares publicadas online dos cursos de engenharia civil de 40 universidades brasileiras públicas (estaduais e federais).

Com posse da amostra foi feita uma primeira abordagem: “Possui o curso específico método dos elementos finitos?” Se sim era feita a segunda abordagem: “qual a natureza da disciplina?” A amostra é formada por 12 Universidades do Nordeste, 7 do Norte, 5 do Sul, 11 do Sudeste, 5 do Centro-Oeste. Pela quantidade de universidades por região observar-se que o Nordeste e o Sudeste são as que apresentam maior quantidade absoluta de estruturas curriculares nesse estudo. Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 2012 as regiões mais populosas eram o Nordeste e Sudeste, não havendo assim grandes discrepâncias dos resultados obtidos.

No levantamento é contabilizado que a estrutura curricular tem a disciplina, apenas se a disciplina possuir literalmente o nome “elementos finitos”, sendo desconsideradas as que tem o método ensinado dentro de outra disciplina, como é o caso de métodos numéricos para engenharia, que tem como um dos tópicos a ser estudado o M.E.F.. Durante a pesquisa, observou-se que, grande parte tem como nome da disciplina “Introdução a método dos elementos finitos”.

Um dos tópicos levantado na pesquisa bibliográfica foi a utilização de softwares de M.E.F. na engenharia. Na pesquisa foram encontrados vários *softwares*, mas neste trabalho será feita a análise de dois *softwares* que estão no mercado a mais de 40 anos, o ANSYS e o NASTRAN. A escolha dos dois foi feita pelo critério de tempo no mercado e com ajuda do artigo eletrônico de Martins, a partir deste artigo, foram apresentados e listado alguns aspectos importantes de cada *software*.

A resolução do problema com molas, foi realizada fazendo uso da modelagem desenvolvida, primeiro montando a matriz rigidez para estrutura de molas, em seguida fez-se a fatoração da matriz rigidez pelo método de Cholesky obtendo assim duas matrizes, uma triangular inferior e outra triangular superior, a formula de Hooke passou a ser $F = GG^T * u$, em que $F = G * y$ e $G^T * u = y$, ambas com fácil resolução, encontrando os resultados para os deslocamentos dos elementos da estrutura. Com os resultados obtidos para deslocamentos foram encontrados valores para reações e forças internas.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

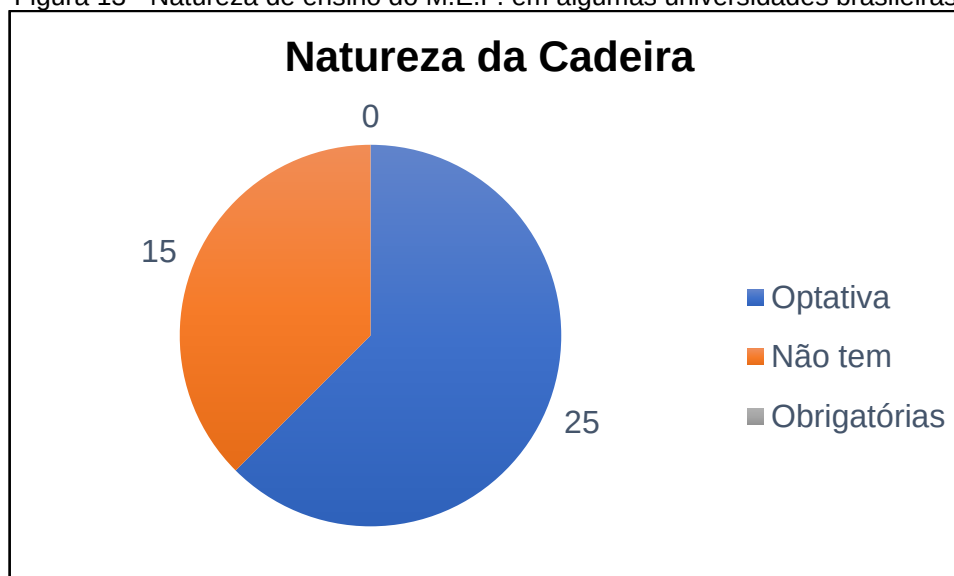
5.1 Ensino do M.E.F. nas universidades brasileiras

Diante de uma série de *softwares* desenvolvidos baseado no método dos elementos finitos, o Engenheiro civil, especialmente engenheiros com área específica de estruturas, deveria concluir a graduação com conhecimento suficiente do método dos elementos finitos. Conforme afirma Alves Filho (2000), “se o engenheiro não sabe modelar o problema sem ter o computador, ele não deve fazê-lo tendo o computador”.

As disciplinas acerca do método dos elementos finitos visam fortalecer a capacidade dos alunos de discernir e identificar os parâmetros importantes para o uso da técnica, as percepções dos alunos sobre as vantagens e limites das ferramentas de simulação numérica, bem como, o uso razoável e a necessidade de verificação analítica seletiva.

Diante deste cenário e para que possamos chegar a uma conclusão sobre o ensinamento do M.E.F. no Brasil, vamos nos fundamentar em uma análise estatística, para que assim alcancemos uma hipótese baseado na natureza da disciplina nas universidades.

Figura 13 - Natureza de ensino do M.E.F. em algumas universidades brasileiras.

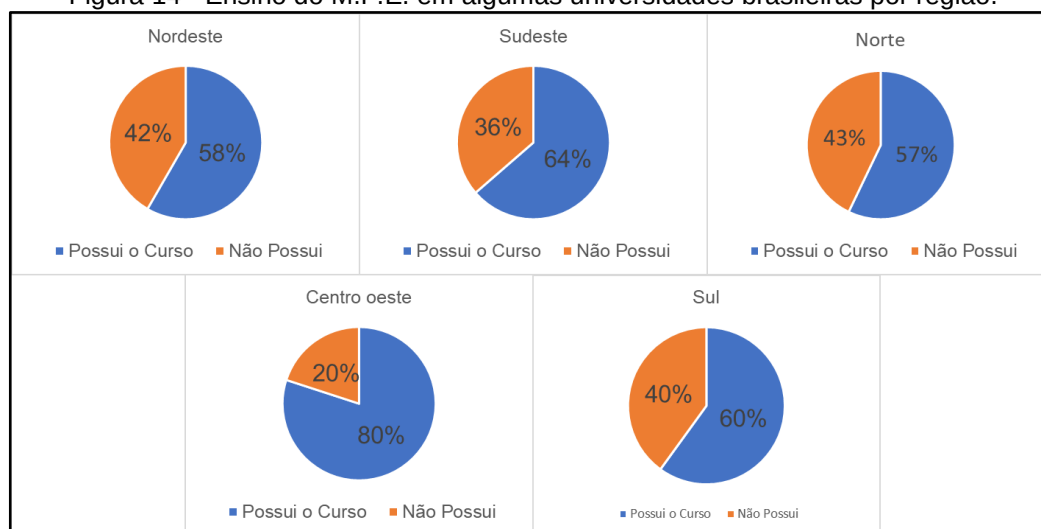


Fonte: Autoria Própria (2019)

É possível ver na Figura 13 que nenhuma das universidades presente nessa pesquisa ofertam a disciplina como obrigatória, 15 não tem a disciplina na sua estrutura curricular do curso e 25 das 40 estruturas curriculares há tem como optativa.

Ainda é possível fazer um comparativo quanto ao ensino por região, como observar-se na Figura 14, onde foi listado o total de universidades presentes na pesquisa por região e feito um gráfico do tipo pizza em que a cor azul representa as graduações de engenharia civil com M.E.F. presente na grade curricular e a cor laranja representa as que não tem. Das cinco universidades da região Centro-oeste presentes no estudo, quatro (80%) tem M.E.F.. Além disto, é a região que apresenta maior dispersão da média e mediana, (62,5% e 60% respectivamente). As demais regiões apresentam porcentagens bem próximas da média e mediana, ficando com valores entre 57% e 64%, um intervalo consideravelmente curto.

Figura 14 - Ensino do M.F.E. em algumas universidades brasileiras por região.



Fonte: Autoria Própria (2019)

Abaixo tem-se um quadro mostrando em porcentagens o total de universidades da amostra que conta com a disciplina na graduação de engenharia civil.

Pesquisa do Ensino do M.E.F.

Região	Quantidade	Possui a disciplina	Porcentagem
Nordeste	12	7	58,33%
Sudeste	11	7	63,64%
Norte	7	4	57,14%
Sul	5	3	60,00%
Centro oeste	5	4	80,00%
Total	40	25	62,50%

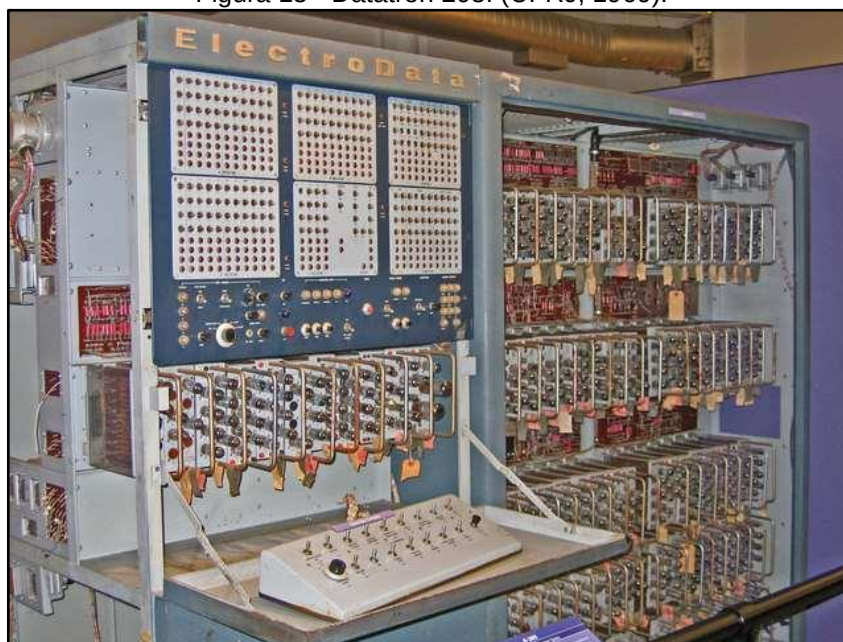
Fonte: Autoria Própria (2019)

Com mais da metade das universidades brasileiras presente na pesquisa tendo a disciplina como optativa, chegando a 62,50%, não é possível afirmar que este método é inexplorado nos cursos, porém, muitos discentes só se deparam com a existência da disciplina quando entram nas disciplinas específicas, que no caso são alunos com ênfase em estruturas que se deparam mais com a matéria, mas nem todos cursam durante este período do curso ou seja 9º e 10º semestres.

5.2 Softwares de modelagem numérica

O método dos elementos finitos é intrinsecamente ligado a *softwares*, desde seus primórdios que a máquina se faz presente como uma aliada do recurso, devido o mesmo ter uma árdua e demorada tarefa, com cálculos trabalhosos e repetitivos. Para os humanos esta tarefa pode levar horas, talvez dias, mas com uso desse instrumento, essa tarefa pode ser concluída em poucos segundos. Um ponto a ser observado é quanto a evolução dos computadores: Ao longo dos anos foi-se reduzindo a necessidade de espaço físico e ampliando-se a capacidade de processamento e de memória. Esse avanço tecnológico foi importante para que hoje existam *softwares* capazes de resolver problemas com rapidez e eficiência. A Figura 15 mostra o primeiro computador utilizado no Brasil para cálculos científicos.

Figura 15 - Datatron 205. (UFRJ, 1969).



Fonte: Moraes (2015)

A análise começará pelo o percussor da área, o NASTRAN. Foi desenvolvido originalmente pela Administração Norte Americana da Aeronáutica e Espaço (NASA) no início da década de 1960, foi criado para fins próprios e financiada pelo governo norte americano para a indústria aeroespacial. No final da década de 1970, Klaus Bathe desenvolveu o ADINA, que posteriormente foi incorporado no NASTRAN. No final da década de 70 a NASA disponibilizou uma versão comercial através da empresa MSC, hoje existem três variações do programa, o NX-NASTRAN(Siemens), o MSC-NASTRAN(MSC) e o Nei-NASTRAN(Nei) (MARTINS, 2018)

Martins (2019) faz a seguinte análise do software:

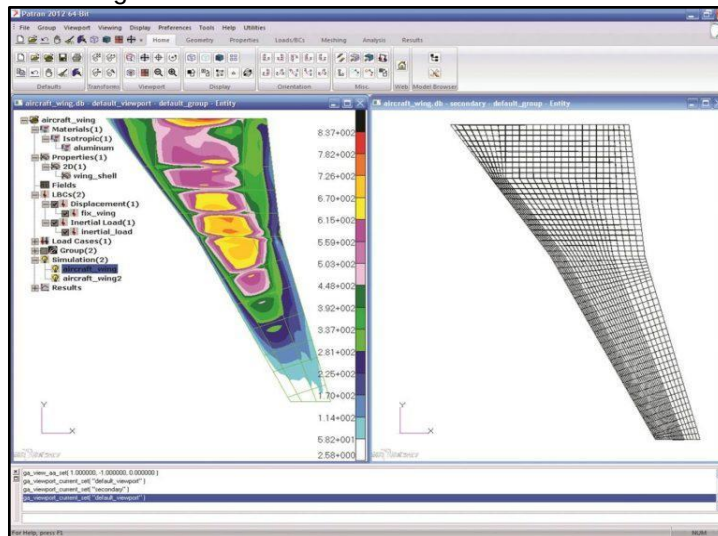
O MSC Nastran é um aplicativo de análise estrutural multidisciplinar usado por engenheiros para realizar análises estáticas, dinâmicas e térmicas em todos os domínios lineares e não lineares, complementado com otimização estrutural automatizada e premiadas tecnologias de análise de fadiga incorporadas, todas habilitadas pela computação de alto desempenho. Os engenheiros usam o MSC Nastran para garantir que os sistemas estruturais tenham a resistência, a rigidez e a vida necessárias para evitar falhas (tensão excessiva, ressonância, flambagem ou deformações prejudiciais) que possam comprometer a função estrutural e a segurança. O MSC Nastran também é usado para melhorar a economia e o conforto dos passageiros de projetos estruturais.

O autor ainda destaca alguns pontos importantes quanto ao *Software*:

- *software* utilizado há vários anos na indústria;
- pré-processador leve (consome pouca RAM);

- pré-processador desatualizado em relação a programas mais recentes.

Figura 16 - Software Msc NASTRAN w/ Patran.



Fonte: Martins (2019)

Outro *software* bastante utilizado é o ANSYS, começou a ser comercializado em 1970, fundado por John Swanson pioneiro na aplicação do método dos elementos finitos.

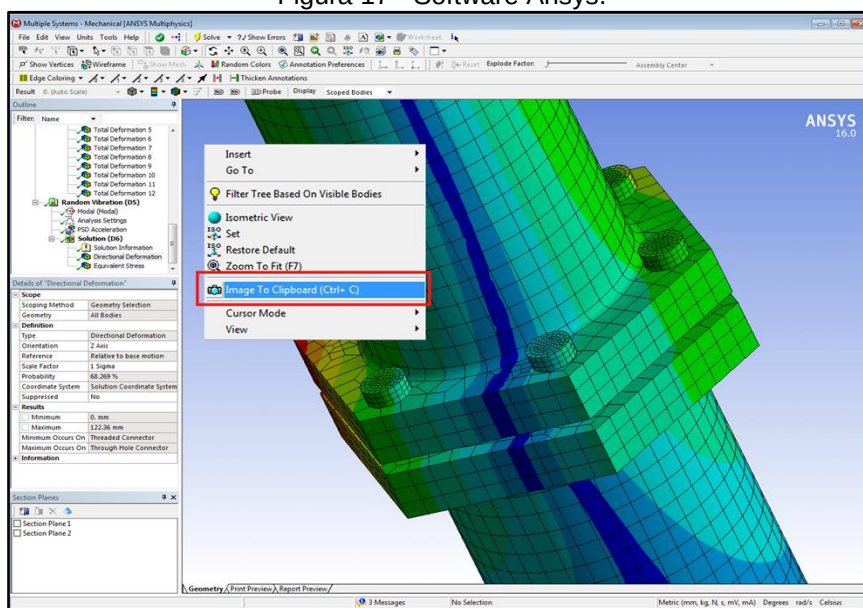
Martins (2019) faz uma análise do *software*:

ANSYS é um *software* de uso geral, usado para simular interações de todas as disciplinas de física, estrutural, vibração, dinâmica de fluidos, transferência de calor e eletromagnética para engenheiros. O *software* permite simular testes ou condições de trabalho e testar em ambiente virtual antes de fabricar protótipos de produtos. Além disso, você pode determinar e melhorar pontos fracos, computar a vida e prever problemas prováveis por simulações em 3D. O ANSYS permite trabalhar integrado a outros *softwares* de engenharia usados na área de trabalho, adicionando módulos de conexão CAD e FEA.

Ele ainda destaca alguns pontos importantes do *software*:

- curva de aprendizado mais rápida;
- interface bastante amigável;
- interface lenta, requerendo muita memória RAM.

Figura 17 - Software Ansys.



Fonte: Martins (2019)

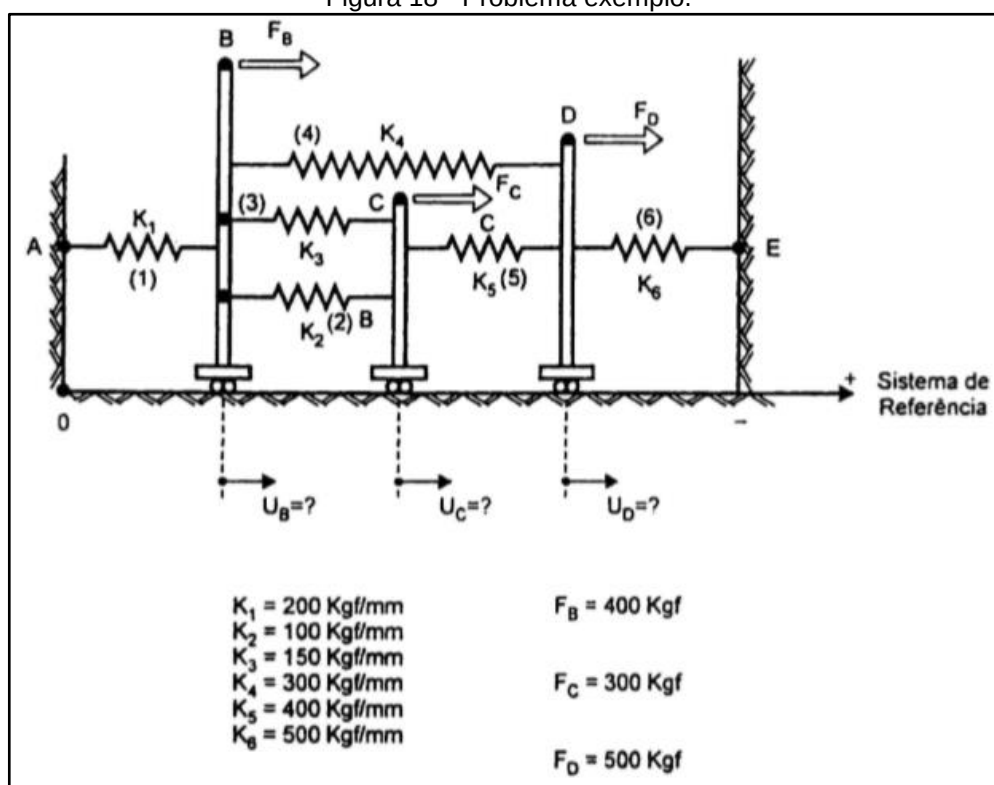
5.3 Problema exemplo

O problema exemplo a ser resolvido, é um modelo estrutural composto de molas, conforme a Figura 18. Apesar de ser um sistema simples, com deslocamentos e forças atuantes em apenas uma direção, é uma boa forma de iniciar a compreensão do M.E.F..

Na Figura 18 tem-se 6 molas, numeradas de 1 a 6. Tem-se também 3 forças conhecidas atuando na estrutura, denominadas F_B , F_C e F_D . Sabemos ainda os valores dos coeficientes elásticos de cada mola, denominados k_1 , k_2 , ..., k_6 .

Em posse destes dados, é possível determinar os deslocamentos da estrutura, denominadas U_B , U_C e U_D .

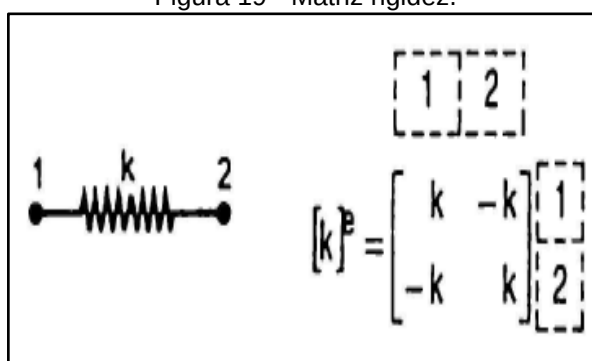
Figura 18 - Problema exemplo.



Fonte: Alves (2000)

Foi visto anteriormente que a mola é definida por dois nós numeradas de acordo com a estrutura, e que para quaisquer elementos mola, não dependendo de onde for utilizada ela sempre terá sua matriz rigidez como a Figura 19.

Figura 19 - Matriz rigidez.



Fonte: Alves (2000)

Partindo para a resolução do problema, montando primeiramente os sistemas por mola, seguindo a letra adotada a cada nó, tem-se então as seguintes matrizes de rigidez.

$$\begin{aligned}
 K^1 &= \begin{bmatrix} A & B & \\ 200 & -200 & A \\ -200 & 200 & B \end{bmatrix} & K^2 &= \begin{bmatrix} B & C & \\ 100 & -100 & B \\ -100 & 100 & C \end{bmatrix} & K^3 &= \begin{bmatrix} B & C & \\ 150 & -150 & B \\ -150 & 150 & C \end{bmatrix} \\
 K^4 &= \begin{bmatrix} B & D & \\ 300 & -300 & B \\ -300 & 300 & D \end{bmatrix} & K^5 &= \begin{bmatrix} C & D & \\ 400 & -400 & C \\ -400 & 400 & D \end{bmatrix} & K^6 &= \begin{bmatrix} D & E & \\ 500 & -500 & D \\ -500 & 500 & E \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Seguindo o procedimento de montagem da matriz rigidez da estrutura utilizando as matrizes rigidez dos elementos.

$$k = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \\ 200 & -200 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A} \\ -200 & 200 + 100 + 150 + 300 & -100 - 150 & -300 & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & -100 - 150 & 100 + 150 + 400 & -400 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & -300 & -400 & 300 + 400 + 500 & -500 & \mathbf{D} \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

simplificando a matriz anterior

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \\ 200 & -200 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{A} \\ -200 & 750 & -250 & -300 & 0 & \mathbf{B} \\ 0 & -250 & 650 & -400 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & -300 & -400 & 1200 & -500 & \mathbf{D} \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

logo pela formula de Hooke $F=K*d$, temos:

$$\begin{bmatrix} F_a \\ F_b \\ F_c \\ F_d \\ F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 750 & -250 & -300 & 0 \\ 0 & -250 & 650 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 1200 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ u_e \end{bmatrix}$$

$$detK = 0$$

Esta matriz é singular (sua determinante é igual a zero) e simétrica, logo não é possível chegar a uma solução devido a mesma ser singular, para que a solução exista será necessário restringir u_a e u_e . Acrescentando-se as forças F_b, F_c e F_d e retirando as forças F_a e F_e da matriz, pois são reações. Essas reações devem ser determinadas mais a frente, agora segue a nova formulação do problema.

$$\begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & C & D \\ 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \\ u_D \end{bmatrix}$$

$$\det K = 525 * 10^6 - 253,5 * 10^6 = 271 * 10^6 \neq 0$$

Veja que a matriz K não é mais singular (determinante diferente de zero) e também simétrica ($k_{ij} = k_{ji}$). como a matriz é simétrica, é uma boa candidata para o método de Cholesky.

$$K = \begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = \sqrt{k_{11}} = \sqrt{750} = 27,39$$

$$g_{21} = k_{21}/g_{11} = -250/27,39 = -9,13$$

$$g_{31} = k_{31}/g_{11} = -300/27,39 = -10,95$$

$$g_{22} = \sqrt{k_{22} - g_{21}^2} = \sqrt{650 - (-9,13)^2} = 23,80$$

$$g_{32} = (k_{32} - g_{21} * g_{31})/g_{22} = (-400 - (-9,13) * (-10,95))/23,80 = -21,01$$

$$g_{33} = \sqrt{k_{33} - (g_{31}^2 + g_{32}^2)} = \sqrt{1200 - ((-10,95)^2 + (-21,01)^2)} = 25,27$$

$$G = \begin{bmatrix} 27,39 & 0 & 0 \\ -9,13 & 23,80 & 0 \\ -10,95 & -21,01 & 25,27 \end{bmatrix}$$

após a decomposição de Cholesky, a matriz K passa a ser (GG^T) , então a equação 8.2 passa ser:

$$F = K * u \rightarrow F = (GG^T) * u, \text{ sendo } G^T * u = y \text{ e } F = G * y$$

$$F = G * y \rightarrow \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,39 & 0 & 0 \\ -9,13 & 23,80 & 0 \\ -10,95 & -21,01 & 25,27 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

transformando essa matriz em sistema linear, chega-se ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} 27,39y_1 = 400 \\ -9,13y_1 + 23,80y_2 = 300 \\ -10,95y_1 - 21,01y_2 + 25,27y_3 = 500 \end{cases}$$

para este sistema linear, encontra-se aos seguintes valores de y .

$$\begin{cases} y_1 \cong 14,6 \\ y_2 \cong 18,21 \\ y_3 \cong 41,25 \end{cases}$$

substituindo os valores em $G^T * u = y$.

$$G^T * u = y \rightarrow \begin{bmatrix} 27,39 & -9,13 & -10,95 \\ 0 & 23,80 & -21,01 \\ 0 & 0 & 25,27 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \\ u_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,6 \\ 18,21 \\ 41,25 \end{bmatrix}$$

agora transformando essas matrizes em um sistema linear, segue que:

$$\begin{cases} 27,39u_B - 9,13u_C - 10,95u_D = 14,6 \\ 23,80u_C - 21,01u_D = 18,21 \\ 25,27u_D = 41,25 \end{cases}$$

resolvendo esse sistema, encontra-se esses três deslocamentos:

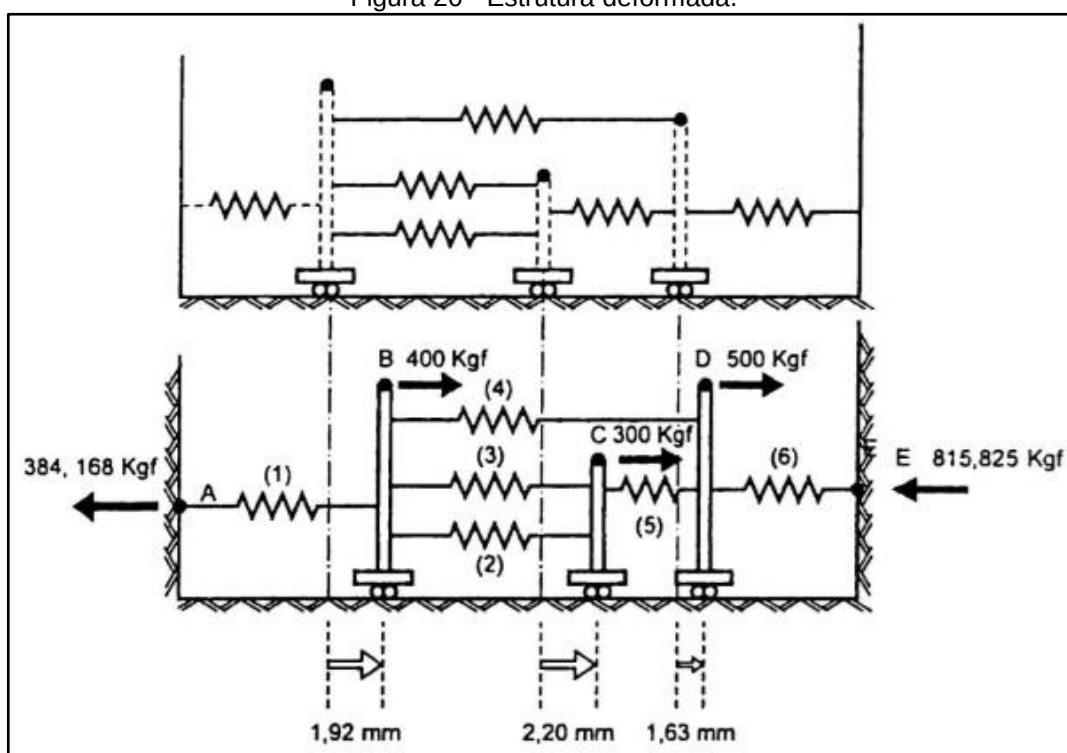
$$\begin{cases} u_B \cong 1,921 \text{ mm} \\ u_C \cong 2,206 \text{ mm} \\ u_D \cong 1,632 \text{ mm} \end{cases}$$

Como a unidade de k no problema é em Kgf/mm , esses deslocamentos são em mm. Agora que já se sabe os deslocamentos, falta encontrar as reações nos apoios e forças internas, primeiro é preciso encontrar as reações que serão úteis no cálculo dos esforços internos.

$$\begin{cases} F_a = 200 * 0 + (-200) * 1,921 + 0 * 2,206 + 0 * 1,632 + 0 * 0 \\ F_e = 0 * 0 + 0 * 1,921 + 0 * 2,206 + (-500) * 1,632 + 500 * 0 \end{cases}$$

o que resulta em: $\begin{cases} F_a \cong -384,2 \text{ Kgf} \\ F_e \cong -816 \text{ Kgf} \end{cases}$

Figura 20 - Estrutura deformada.



Fonte: Alves Filho (2000)

Na Figura 20 pode-se ter uma melhor ideia de como a estrutura irá se comportar com a aplicação das forças. A mola 1 está sendo tracionada, veja que ocorre um afastamento entre a A e B, a mola 2 e 3 estão sendo tracionadas, devido a uma pequena diferença de distância entre as barras B e C, já as molas 4 e 5 estão sendo comprimidas, pois a distância da barra B e D, assim como C e D diminuiram e a mola 6 também é comprimida, pois a barra D sofre um pequeno deslocamento em direção a parede. Esta análise pode ser afirmada pelos esforços internos, em que o sinal negativo é compressão e positivo é tração.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = k_1 * (U_B - U_A) = 200 * (1,921 - 0) = +384,2 \text{ Kgf} \\ f_2 = k_2 * (U_C - U_B) = 100 * (2,206 - 1,921) = +28,5 \text{ Kgf} \\ f_3 = k_3 * (U_C - U_B) = 150 * (2,206 - 1,921) = +42,75 \text{ Kgf} \\ f_4 = k_4 * (U_D - U_B) = 300 * (1,632 - 1,921) = -86,7 \text{ Kgf} \\ f_5 = k_5 * (U_D - U_C) = 400 * (1,632 - 2,206) = -229,6 \text{ Kgf} \\ f_6 = k_6 * (U_E - U_D) = 500 * (0 - 1,632) = -816 \text{ Kgf} \end{array} \right.$$

Uma simulação interativa desse problema, elaborada na plataforma GeoGebra, está disponível no endereço <<https://ggbm.at/xmpvp6pz>> (acessado em 26 de março de 2019).

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma melhor compreensão do método dos elementos finitos, permitindo entender como esta técnica está presente na rotina do engenheiro civil e que por muitas vezes passa despercebida, ainda permitiu tomar conhecimento do ensino em algumas universidades brasileiras de engenharia civil.

O trabalho teve como objetivo geral fazer estudo do uso do método dos elementos finitos na análise de estruturas. Diante da realização do trabalho e com auxílio dos objetivos específicos, conclui-se que:

- De fato, o curso de M.E.F. não tem tanta ênfase nas graduações de engenharia civil, apesar de apresentar uma quantidade considerável na pesquisa, no entanto, na maioria das grades curriculares ela está apenas como optativa, não sendo obrigatória em nenhuma, e algumas ao menos possuíam a disciplina na grade.
- Que com o uso dos *softwares* de M.E.F. e dos quais foram citados dois, é possível que engenheiros consigam acelerar seus projetos, principalmente com o avanço tecnológico, tornando o método mais viável.
- Que com bom estudo bibliográfico os profissionais conseguem entender os cálculos feitos pelos *softwares*.

Trabalhos futuros podem efetuar uma abordagem comparativa do ensinamento do método dos elementos finitos no Brasil e em outros países, ainda pode-se fazer uma pesquisa na sua instituição, elaborando um questionário trabalhado sobre o tema, contendo perguntas como: os discentes conhecem o método? tem interesse no assunto? etc. Recomendamos também fazer um levantamento sobre como este assunto é pesquisado nas pós-graduações.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, A. **Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE**. São Paulo: Érica, 2000.

AZEVEDO, Á. F. M. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**. 1ª. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto , 2003.

BOLDRINI, L. et al. **Álgebra Linear**. 3ª. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

GESUALDO, F. A. R. **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (Notas de Aula)**. Urbelândia: FECIV, 2010.

HALLIDAY, ; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. 10ª. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, v. I, 2012.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 7ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, D. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5ª. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LOTTI, R. S. et al. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, Maringá, v. 2, p. 36, Março/Abril 2006.

MARTHA, L. F. **Método dos Elementos Finitos (Notas de Aula)**. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 1994.

MARTINS, R. Introdução ao Método de Elementos Finitos. **Engenharia Aeronáutica**, 2018. Disponível em: <<https://engenhariaaeronautica.com.br/elementos-finitos-na-aviacao/>>. Acesso em: 20 Fevereiro 2019.

MARTINS, R. Os 5 melhores softwares de simulação de Elementos Finitos. **Engenharia Aeronáutica**, 16 Janeiro 2019. Disponível em: <<https://engenhariaaeronautica.com.br/software-elementos-finitos/>>. Acesso em: 20 Janeiro 2019.

MORAES, A. J. O Método dos Elementos Finitos e a Engenharia Civil. **Revista Especialize On-line IPOG**, Cuiabá-MT, n. 1ª, p. 7, 20 Junho 2015.

PAVANELLO, R. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos (Notas de Aula)**. Campinas: UNICAMP, 1997.

RODRIGUES, F. R. M. et al. Análise de Uma Mola Ortodôntica do Tipo Delta e Sua Influência na Movimntação Dentária: Um Estudo Numérico Experimental. **Ciência & Engenharia**, Curitiba, Dezembro 2014. 6.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. D. R. **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. 2^a. ed. São Paulo: Pearson, 1988.

STEINBRUCH, ; WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

APÊNDICE A – AMOSTRA DA PESQUISA

Ensino de MEF no Curso de Engenharia Civil nas Universidades do Brasil		
Nº	Instituição de Ensino	M.E.F.
1	Universidade de Brasília	Optativa
2	Universidade Federal da Grande Dourados	—
3	Universidade Federal de Goiás	Optativa
4	Universidade Federal de Mato Grosso	Optativa
5	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul	Optativa
6	Universidade Federal de Campina Grande	—
7	Universidade Federal da Bahia	—
8	Universidade Federal da Paraíba	Optativa
9	Universidade Federal de Alagoas	Optativa
10	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia	Optativa
11	Universidade Federal de Pernambuco	—
12	Universidade Federal de Sergipe	Optativa
13	Universidade Federal do Ceará	Optativa
14	Universidade Federal do Maranhão	—
15	Universidade Federal do Piauí	Optativa
16	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	Optativa
17	Universidade Federal Rural do Semi-Árido	—
18	Universidade Federal de Rondônia	Optativa
19	Universidade Federal de Roraima	Optativa
20	Universidade Federal do Acre	—
21	Universidade Federal do Amapá	Optativa
22	Universidade Federal do Amazonas	—
23	Universidade Federal do Pará	Optativa
24	Universidade Federal do Tocantins	—
25	Universidade Federal de Minas Gerais	Optativa
26	Instituto de Tecnologia Aeronáutica	—
27	Universidade Federal do Espírito Santo	—
28	Universidade Federal do Rio de Janeiro	Optativa
29	Universidade Federal Fluminense	Optativa
30	Universidade Federal de Santa Catarina	Optativa
31	Universidade Federal de Santa Maria	—
32	Universidade Federal do Paraná	Optativa
33	Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Optativa
34	Universidade Federal de Pelotas	—
35	Universidade Federal de São Carlos	—
36	Universidade Federal de Uberlândia	Optativa
37	Universidade Federal de Viçosa	—
38	Universidade de São Paulo	Optativa

39	Universidade Estadual de Campinas	Optativa
40	Universidade Estadual Paulista	Optativa

APÊNDICE B – FONTES DA PESQUISA

<http://www.enc.unb.br/disciplinas> - UNB
http://files.ufgd.edu.br/arquivos/arquivos/78/ENGENHARIA_CIVIL/Poster%201%20-%20Conte%C3%BAdo%20Curricular.pdf – UFGD
https://www.eec.ufg.br/up/140/o/Eng_Civil_Anexo_I_Matriz_Curricular_Grade_2009-2.pdf?1332856788 – UFG
<http://www1.ufmt.br/ufmt/un/secao/2505/PROEG> - UFGT
<https://sien.ufms.br/cursos/grade/2102> - UFMS
http://analytics.lsd.ufcg.edu.br/cursosufcg/#/engenharia_civil_d_cg/requisitos - UFCG
<http://www.eng.ufba.br/102-engenharia-civil> - UFBA
<https://security.ufpb.br/ccec/contents/menu/fluxograma-e-componentes> - UFPB
<http://www.ufal.edu.br/unidadeacademica/ctec/graduacao/engenharia-civil> - UFAL
<https://sistemas.ufrb.edu.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/2000001397> - UFRB
<https://www.ufpe.br/engenharia-civil-bacharelado-cao> - UFPE
<https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf> - UFS
https://si3.ufc.br/sigaa/public/curso/curriculo.jsf?lc=pt_BR&id=657474 – UFC
https://sigaa.ufma.br/sigaa/public/curso/curriculo_curso.jsf?lc=pt_BR&lc=pt_BR&id=16416422 – UFMA
<http://leg.ufpi.br/ct/index/pagina/id/1737> - UFPI
<https://sigaa.ufrn.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/100678> - UFRN
<https://engcivil.ufersa.edu.br/matriz-curricular-emenda/> - UFRSA
<http://www.deciv.unir.br/uploads/90954881/Foto%20dos%20docentes/PPP%202009.pdf> – UNIR
http://ufr.br/engcivil/index.php?option=com_content&view=article&id=76&Itemid=311 – UFRR
<https://portal.ufac.br/ementario/curriculo.action?v=335> – UFAC
<http://www2.unifap.br/engcivil/matriz-curricular/> - UNIFAP
<http://biblioteca.ufam.edu.br/attachments/article/259/Projeto%20Pedag%C3%B3gico%20curso%20Engenharia%20Civil.compressed.pdf> – UFAM
http://www.camtuc.ufpa.br/images/Downloads/Doc_Faculdades/Doc_Civil/4267%20PPC%20Engenharia%20Civil%20Gestao%20Ambiental.pdf – UFPA
https://docs.uft.edu.br/share/s/cmQT4Mp4RRKHUjC_Fkswow - UFT
<https://ufmg.br/cursos/graduacao/2401/77613> - UFMG

<http://www.civil.ita.br/graduacao/disciplinas/> - ITA

<http://civil.ufes.br/projeto-pedag%C3%B3gico-e-estrutura-curricular> – UFES

<https://www.siga.ufrj.br/sira/repositorio-curriculo/ListaCursos.html> - UFRJ

<https://app.uff.br/iduff/consultaMatrizCurricular.uff> - UFF

http://ecv.paginas.ufsc.br/files/2016/05/CURRICULO_ENGENHARIA_CIVIL_19911.pdf.pdf - UFSC

<https://www.ufsm.br/cursos/graduacao/santa-maria/engenharia-civil/informacoes-do-curriculo>- UFSM

<http://www.tecnologia.ufpr.br/porta/ccec/wp-content/uploads/sites/32/2016/04/Grade-de-disciplinas-a-partir-de-2011.pdf> - UFPR

http://www.ufrgs.br/ufrgs/ensino/graduacao/cursos/exibeCurso?cod_curso=317 – ufrgs

<https://institucional.ufpel.edu.br/cursos/cod/6300> - UFPel

<http://www.prograd.ufscar.br/cursos/cursos-oferecidos-1/engenharia-civil/engenharia-civil> - UFSCar

<http://www.feciv.ufu.br/engenharia-civil/matriz-curricular> - UFV

http://www.civ.ufv.br/?page_id=13 – UFU

<https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/listarGradeCurricular?codcg=18&codcur=18023&codhab=0&tipo=N> – USP

<http://www.fec.unicamp.br/graduacao/ec/ensino/grade-curricular> - UNICAMP

<http://www.feg.unesp.br/Home/Graduacao19/Civil/Projeto-Pedagogico-Civil.pdf> -

UNESP

ANEXOS A – POPULAÇÃO DAS REGIÕES 2012 IBGE

Região	População	Percentual
Região Norte	16.318.163	8,41%
Região Nordeste	53.907.144	27,79%
Região Sudeste	81.565.983	42,06%
Região Sul	27.731.644	14,30%
Região Centro-Oeste	14.423.952	7,44%
Brasil	193.946.886	100,00%

