



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS – CMPF
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

DANIEL BELARMINO DE PAIVA

ANÁLISE DE COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE COLUNAS EM PÓRTICOS
PLANOS DE AÇO

Pau dos Ferros - RN

2021

DANIEL BELARMINO DE PAIVA

**ANÁLISE DE COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE COLUNAS EM PÓRTICOS
PLANOS DE AÇO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal Rural do Semiárido, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Matheus Fernandes de Araújo Silva.

Pau dos Ferros – RN

2021

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

P142a Paiva, Daniel.

Análise dos coeficientes de flambagem de colunas em pórticos planos de aço / Daniel Paiva. - 2021.

38 f. : il.

Orientador: Matheus Silva.

Monografia (graduação) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Curso de Engenharia Civil, 2021.

1. Flambagem . 2. Pórticos. 3. Análise. 4. Coeficiente. I. Silva, Matheus , orient. II. Título.

DANIEL BELARMINO DE PAIVA

**ANÁLISE DE COEFICIENTES DE FLAMBAGEM DE COLUNAS EM PÓRTICOS
PLANOS DE AÇO**

Monografia apresentada à Universidade Federal Rural do Semi-Árido – UFERSA, como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Pau dos Ferros, 27 de maio de 2021.

BANCA EXAMINADORA

**MATHEUS FERNANDES
DE ARAUJO
SILVA:01435936418**

Assinado de forma digital por
MATHEUS FERNANDES DE
ARAÚJO SILVA:01435936418
Dados: 2021.06.11 15:53:33
-03'00'

Prof. Dr. Matheus Fernandes de Araújo Silva
Orientador

**LEONARDO
HENRIQUE BORGES
DE OLIVEIRA:
08219316446**

Assinado digitalmente por LEONARDO HENRIQUE
BORGES DE OLIVEIRA:08219316446
DN: CN=LEONARDO HENRIQUE BORGES DE
OLIVEIRA:08219316446, OU=UFERSA - Universidade
Federal Rural do Semi-Arido, O=ICPEdu, C=BR
Razão: Eu estou de acordo com o documento.
Localização: Pau dos Ferros/RN
Data: 2021.06.11 17:09:27-03'00'
Foxit Reader Versão: 10.1.1

Prof. Dr. Leonardo Henrique Borges de Oliveira
Examinador

**PAULO HENRIQUE
ARAÚJO
BEZERRA:01398117
455**

Digitally signed by PAULO
HENRIQUE ARAÚJO
BEZERRA:01398117455
Date: 2021.06.11 17:45:55
-03'00'

Prof. Dr. Paulo Henrique Araújo Bezerra
Examinador

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	5
1.1 Problema	5
1.2 Justificativa	6
2. OBJETIVOS	7
2.1 Objetivo Geral.....	7
2.2 Objetivos Específicos	7
3. REFERENCIAL TEÓRICO	8
3.1 Instabilidade.....	8
3.2 Coluna de Euler	9
3.3 Método dos ábacos.....	12
3.4 Pórticos	15
3.5 Tipos de análise	16
3.6 Método dos elementos finitos (MEF)	18
4. METODOLOGIA.....	20
4.1 Caracterização dos perfis	21
4.2 Modelagem dos perfis em elementos finitos	22
4.3 Modelos de pórticos.....	23
4.3.1 1º Modelo de pórtico	23
4.3.2 2º Modelo de pórtico	24
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	25
5.1 Análise dos modelos escolhidos	25
5.1.1 1º Modelo de pórtico	25
5.1.2 2º Modelo de pórtico	26
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	29
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	30
APÊNDICE A – Memorial de cálculo para o 1º modelo	32

APÊNDICE B – Memorial de cálculo para o 2º modelo.....	34
APÊNDICE C – Teste de convergência para o 1º modelo.....	37
APÊNDICE D – Teste de convergência para o 2º modelo.....	38

1. INTRODUÇÃO

O estudo da estabilidade de colunas é um tópico de grande importância no dimensionamento estrutural. Entre os fatores que são definidos está a carga crítica a que poderá estar submetida os pilares da edificação e consequentemente os limites aos quais as peças poderão começar a apresentar instabilidade.

Os primeiros estudos desse tema são atribuídos a Leonhard Euler (1707- 1783) que através da utilização de uma barra ideal obteve o que ficou conhecido como a “coluna de Euler”. Nessa coluna, Euler utilizou uma variável conhecida como carga crítica que seria a carga limite à compressão ao qual a estrutura estaria submetida sem apresentar instabilidade.

Entre os fatores presentes nesse estudo, está o cálculo do comprimento efetivo de uma coluna de aço, que é uma variável utilizada na análise de instabilidade de barras submetidas à esforços de compressão. Nessa análise, é utilizado o coeficiente K (fator de comprimento efetivo para uma barra de aço), que é um fator que depende da rigidez das ligações e da rigidez à flexão dos elementos estruturais adjacentes nas extremidades dos pilares.

Seguindo os procedimentos da NBR 8800:2008, o coeficiente K é calculado de maneira isolada para cada barra de aço, não considerando a interação com o restante da estrutura ou uma distribuição de esforços desigual entre os pilares. Como é o caso, por exemplo, das ligações viga-pilar ou pilares com maior rigidez nas ligações como acontece em edificações com contraventamento.

Sabendo disso, no presente trabalho serão criados modelos no software de elementos finitos LISA®. Espera-se que o software obtenha resultados mais acurados devido a capacidade de analisar globalmente o pórtico e não apenas a coluna individualmente. Porém, todas as metodologias tem suas limitações e em virtude disso alguns pórticos podem apresentar os resultados mais coerentes com o material que será utilizado como parâmetro que serão a NBR 8800:2008 e o método dos ábacos.

Como veremos no decorrer desse trabalho, o método dos ábacos trata-se de uma metodologia bastante antiga e empregada em diversas normas estrangeiras (inclusive estava presente na NBR 8800:1986) consistindo em ábacos nos quais são encontradas as contribuições das vigas e pilares e pela junção no ábaco de ambos obtêm-se o valor do K.

1.1 Problema

O fator de comprimento de efetivo (K) possui uma grande importância no cálculo de estabilidade de colunas, já que ele é o parâmetro responsável em determinar a curva de

deslocamento da coluna quando esta encontra-se submetida a carga crítica de acordo com a rigidez das ligações nas extremidades.

Logo, a busca por um K mais preciso além de ser importante para obtermos um melhor conhecimento das estruturas de aço submetidas à compressão, pode também ser visto como uma maneira de termos uma maior segurança no dimensionamento de perfis.

1.2 Justificativa

No cálculo de estruturas de aço submetidos à compressão existe um coeficiente chamado de fator de comprimento efetivo, que tem por objetivo ponderar o comprimento de flambagem dos elementos de acordo com as ligações nas extremidades. Esse fator trata-se de um coeficiente adimensional que funciona como uma correção do comprimento do pilar em função da linha elástica de acordo com as vinculações.

Na norma NBR 8800:2008 as barras são analisadas de maneira isolada possuindo valores fixos de acordo com as ligações existentes em suas extremidades. Porém, em estruturas de múltiplos pavimentos compostas por vários pórticos devido às diversas configurações possíveis há a possibilidade das barras apresentarem um comportamento diferente dos previstos na atual norma de aço e com isso há a possibilidade de diferenças na rigidez das ligações ao longo da edificação. Tendo dessa forma, diferentes valores do coeficiente K .

Sabendo disso, podemos ver que há necessidade da busca por soluções mais satisfatórias e, se possível, com a praticidade que pode ser encontrada na norma. Nesse trabalho, serão realizadas análises de pórticos em estruturas de múltiplos pavimentos examinando os valores do coeficiente K que serão encontrados.

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo Geral

Nesse trabalho, foram analisados pórticos em aço de múltiplos pavimentos por meio do software em elementos finitos LISA®. Foram observados os diferentes modos de instabilidade das colunas dos pórticos e suas cargas críticas correspondentes. Para posteriormente obter o fator de comprimento efetivo e compará-los com os presentes na NBR 8800:2008 e com os obtidos no método dos ábacos.

2.2 Objetivos Específicos

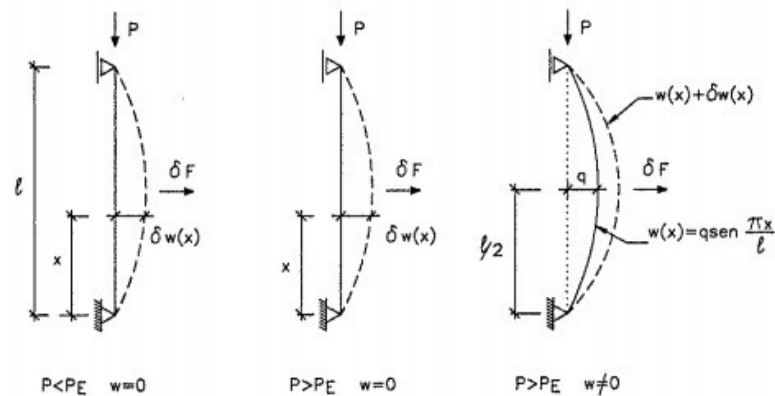
- Modelagem de pórticos em aço de múltiplos pavimentos no LISA;
- Análise do fator de comprimento efetivo (K) para as colunas dos pórticos modelados;
- Comparação com os valores do K recomendados pela NBR 8800:2008 e com os obtidos pelo método dos ábacos de Julian e Lawrence (1959).

3. REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Instabilidade

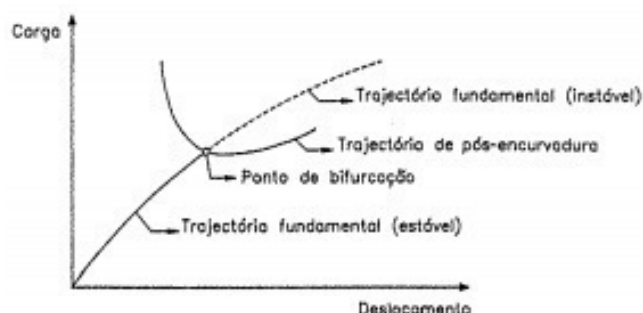
De acordo com REIS & CAMOTIM (2001) pode-se definir algo como estável quando mesmo com todas as perturbações presentes no sistema ele consegue manter a sua configuração de equilíbrio podendo ser um equilíbrio “instável” ou “estável”. Logo, o fenômeno da instabilidade está ligado a perda do sistema em manter as suas características equilibradas em virtude da maior atuação das perturbações.

Figura 1 - Estados de equilíbrio de uma barra de aço



Fonte: Camotim (2001)

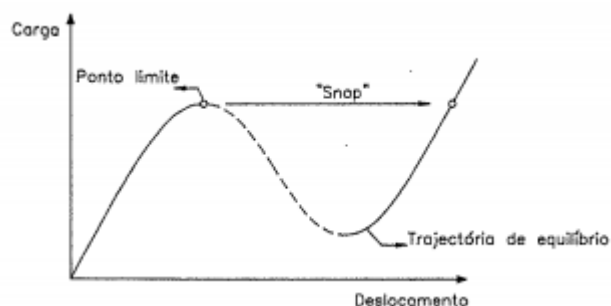
Ainda segundo REIS & CAMOTIM (2001), uma barra quando sujeita a um carregamento pode apresentar três estados de equilíbrio, enquanto o primeiro e o terceiro são considerados estáveis, o segundo é considerado instável. Na primeira situação, a coluna consegue “voltar” a situação inicial sem alterações de suas características. Na segunda situação, a coluna sofre deformações e suas características iniciais são alteradas. Já para a terceira situação, após ter sofrido as deformações a coluna passa por um novo carregamento e dessa vez ela consegue manter as suas características iniciais.

Figura 2 – Instabilidade por bifurcação

Fonte: Camotim (2001)

Segundo Gutierrez (2016) para a situação de instabilidade a barra pode estar sujeita a dois tipos de fenômenos: instabilidade por bifurcação do equilíbrio e problema do ponto limite. A instabilidade por bifurcação ocorre quando uma coluna de material elástico-linear e sem imperfeições é submetida a uma carga superior a crítica e a barra torna-se sujeita a dois tipos de equilíbrio: o equilíbrio estável no qual a barra flete, mas consegue ainda manter as configurações e também poderá ficar em equilíbrio instável que ocorre quando a após fletir qualquer mínima perturbação irá alterá sua configuração inicial (figura 2).

Já, no problema do ponto limite, para uma barra também de material elástico-linear e sem imperfeições à medida que há um acréscimo de carga o material sofre alterações, mas consegue se manter estável. Para a mesma situação, porém com a barra não sendo livre de imperfeições e constituída de material não-linear elástico, há o surgimento de uma excentricidade o que causa um momento externo na peça devido ao crescente aumento de carga tornando-a instável (figura 3).

Figura 3 - Instabilidade pelo problema do ponto limite

Fonte: Camotim (2001)

3.2 Coluna de Euler

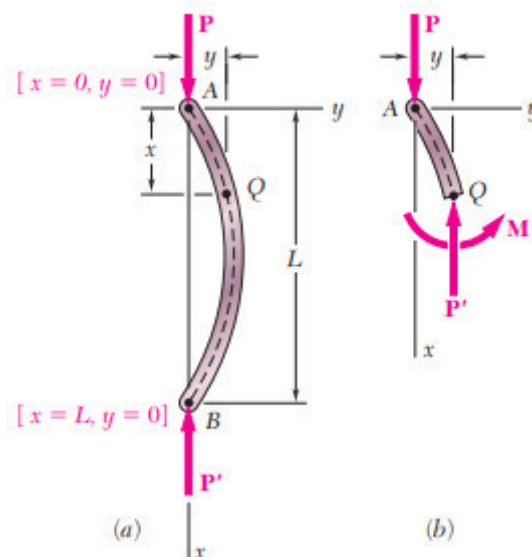
Nesse trabalho será tratado apenas da segunda situação descrita anteriormente. Os primeiros estudos relacionados ao tema foram feitos por Leonhard Euler (1707-783) no que

ficou conhecido como a “coluna de Euler”. Em suas análises, Euler se utilizou de uma estrutura ideal com material de comportamento elástico linear, apoiada por pinos nas extremidades, livre para girar sem nenhum atrito e sujeitas a uma força de compressão axial.

Aumentando essa força de compressão até que ela alcance um valor maior do que a carga crítica, a coluna terá um equilíbrio instável. Com uma pequena perturbação lateral, colapsará e apresentará um deslocamento lateral, fenômeno que foi denominado de flambagem.

Para encontrar qual seria essa carga crítica de acordo com Beer (2011), Euler começou a dedução a partir da linha elástica que esse tipo de coluna formaria. O ponto x é a distância entre a extremidade A da coluna e um ponto Q da linha elástica e y é o deslocamento desse ponto como vemos na figura 4.

Figura 4 - Coluna de Euler



Fonte: Beer (2011)

Considerando o equilíbrio de corpo livre AQ, conclui-se que o momento fletor em Q é de:

$$M = -Py \quad (1)$$

Substituindo esse valor na equação da linha elástica, teremos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-P}{EI} y \quad (2)$$

Onde, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia e o P é a carga crítica.

Transpondo o último termo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \quad (3)$$

Tendo agora que:

$$P^2 = \frac{P}{EI} \quad (4)$$

Reescrevendo a equação, têm-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P^2y = 0 \quad (5)$$

Para essa equação a solução é dada por:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px \quad (6)$$

As condições de contorno nas extremidades A e B da coluna são que $x = 0$ e $y = 0$. Com isso, vemos que $B = 0$. Substituindo então $x = L$ (comprimento da coluna) e $y = 0$, teremos:

$$A \operatorname{sen} pL = 0 \quad (7)$$

Se $A = 0$ ou se $\operatorname{sen} pL = 0$ a equação é satisfeita. Para a primeira, a equação se reduzirá a $y = 0$. Para a segunda equação devemos ter que $pL = n\pi$ e resolvendo a equação encontraremos o P . Substituindo então $x = L$ e $y = 0$, teremos:

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (8)$$

Para o $n = 1$, que seria o primeiro modo de flabagem, teremos, por fim, a carga crítica por flexão encontrada por Euler é descrita pela seguinte equação:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (9)$$

Porém, como já foi dito, a equação da coluna de Euler foi encontrada a partir de um

coluna com pinos como restrição de movimento nas extremidades. Em virtude disso, é adicionado a equação 2.9 o fator de comprimento de flambagem (K).

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{KL^2} \quad (10)$$

Esse fator é utilizado como uma forma de pesar a rigidez nas ligações entre a coluna e as suas extremidades. Resultando dessa forma, no que é chamado de comprimento efetivo da coluna (KL) buscando encontrar valores mais adequados para os diversos níveis de restrição de movimento nas extremidades de uma coluna. Obtendo como resultado, diferentes comprimentos efetivos.

Figura 5 - Valores do K de acordo com a NBR 8800:2008

1	CONDIÇÕES DE CONTORNO							
	OBS.: a) a linha tracejada mostra o eixo da barra após a flambagem b) comprimento reto das barras igual a L							
2	Valores teóricos	K	0,5	0,7	1,0	1,0	2,0	2,0
3		KL	0,5 L	0,7 L	1,0 L	1,0 L	2,0 L	2,0 L
4	Valores recomendados	K	0,65	0,8	1,2	1,0	2,1	2,0
5		KL	0,65 L	0,8 L	1,2 L	1,0 L	2,1 L	2,0 L

REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO		rotação e translação transversal impedidas
		rotação livre e translação transversal impedida
		rotação impedida e translação transversal livre
		rotação e translação transversal livres

Fonte: Fakury (2016)

Essa é a metodologia empregada na NBR 8800:2008. Nela, cada barra é analisada de maneira individual dependendo apenas de como a coluna está ligada nas extremidades e não são levados em considerações possíveis interações entre vigas/pilares, por exemplo.

3.3 Método dos ábacos

Outra metodologia utilizada para o cálculo do fator de comprimento de flambagem K, é utilizando os ábacos de Julian e Lawrence (1959) introduzido pela primeira vez em 1961 pelo AISC (American Institute of Steel Constructions) e que estava presente na antiga NBR 8800:1986.

Esse método foi formulado considerando-se a flambagem elástica conjunta de toda as vigas e pilares do pórtico tendo como base uma série de suposições para a sua aplicação que

são descritas abaixo:

1. Todas as barras são prismáticas e perfeitamente retilínea;
2. Todas as ligações são rígidas;
3. O comportamento é totalmente elástico;
4. Não há compressão significativa nas vigas, de modo que é desprezada a perda de rigidez;
5. Os parâmetros de rigidez $L \sqrt{\frac{N}{EI}}$ dos pilares são todos iguais;
6. Nas estruturas indeslocáveis, as rotações nas extremidades das vigas são iguais em módulo, produzindo curvatura simples;
7. Nas estruturas deslocáveis, as rotações nas extremidades opostas das vigas são iguais em intensidade, produzindo uma curvatura reversa;
8. A rigidez no nó é distribuída entre os pilares de cima e de baixo na proporção do parâmetro I/L entre os mesmos;
9. Todos os pilares atingem a força crítica simultaneamente;
10. As rotações nos nós inferior e superior são alternadas entre os pavimentos.

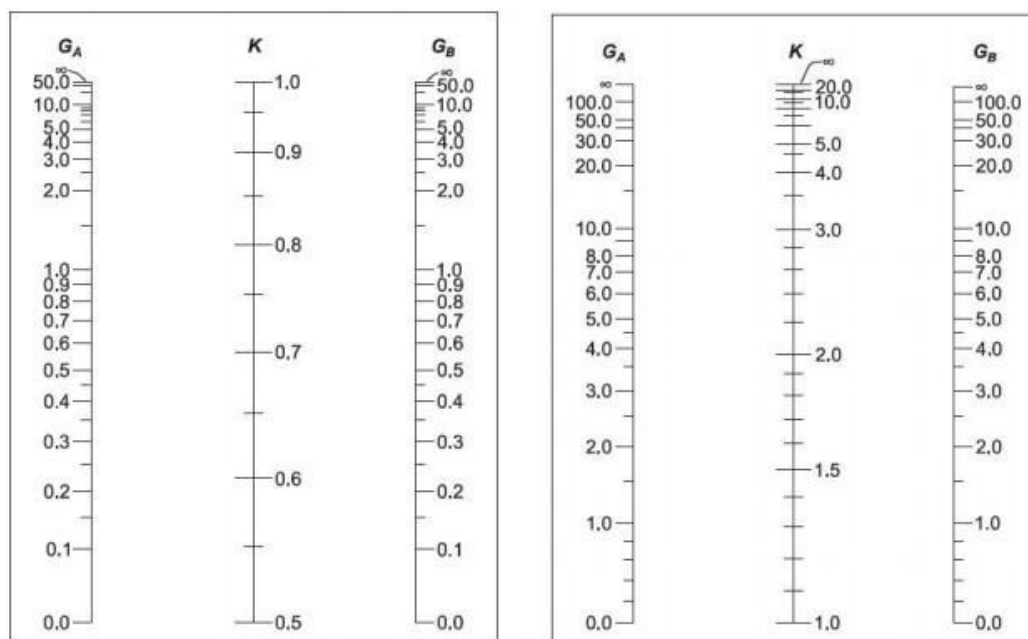
Nessa metodologia, encontram-se os coeficientes G_A e G_B para encontrar a rigidez no topo e na base dos pilares. Esses coeficientes somam, as contribuições à rigidez das barras ligadas ao nó considerado que podem ser tanto vigas como pilares. Para obtenção do valor do K , faz-se uma linha unindo os respectivos pontos de G_A e G_B no ábaco apresentado na Figura 6.

$$G_A = \frac{\sum_i \frac{EI_P}{L_P}}{\sum_i \frac{EI_V}{L_V}} \quad (13)$$

$$G_B = \frac{\sum_i \frac{EI_P}{L_P}}{\sum_i \frac{EI_V}{L_V}} \quad (14)$$

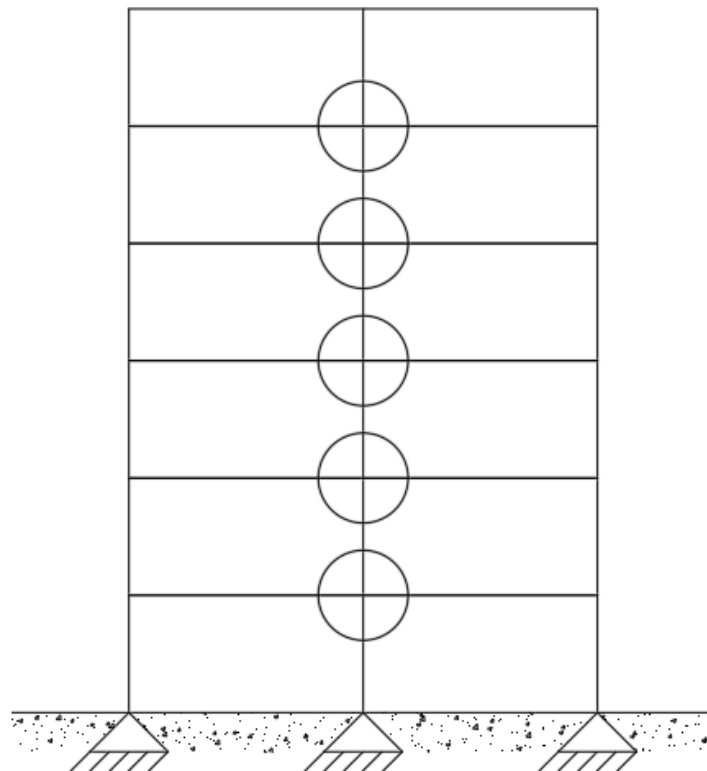
Nas equações 13 e 14, L é o comprimento dos pilares (L_P) ou das vigas (L_V). Como vemos pela própria equação, quanto maior a quantidade peças que chegam aos nós, maior será a colaboração na rigidez dos pilares. Consequentemente, pórticos de múltiplos pavimentos apresentarão diversos locais em que há uma cooperação maior entre peças vizinhas, aumentando ou diminuindo a rigidez no nó e alterando o valor do comprimento efetivo dos pilares.

Figura 6 - Ábacos utilizados para determinação do K



Fonte: AISC (2011)

Na Figura 7, é retratado o exemplo de um pórtico de múltiplos pavimentos para uma melhor compreensão do método dos ábacos. Os locais marcados com o círculo são exemplos de nós em que há o encontro de uma maior quantidade de elementos estruturais. No caso mostrado, há nos nós dos pilares centrais o encontro de duas vigas e dois pilares. Enquanto que no pilar à direita ou à esquerda no máximo há dois pilares e uma viga por nó.

Figura 7 - Pórtico de múltiplos pavimentos

Fonte: Autoria própria (2021)

3.4 Pórticos

Os pórticos são estruturas reticuladas formadas pela união de várias barras de aço unidos em suas extremidades por meio das seguintes ligações:

- Articuladas: não transmitem momentos e a rotação relativa nas extremidades das barras é livre;
- Rígidas: transmitem os momentos e a rotação relativa nas extremidades é impedida;
- Semi-rígidas: transmitem os momentos e possui uma restrição parcial a rotação das barras.

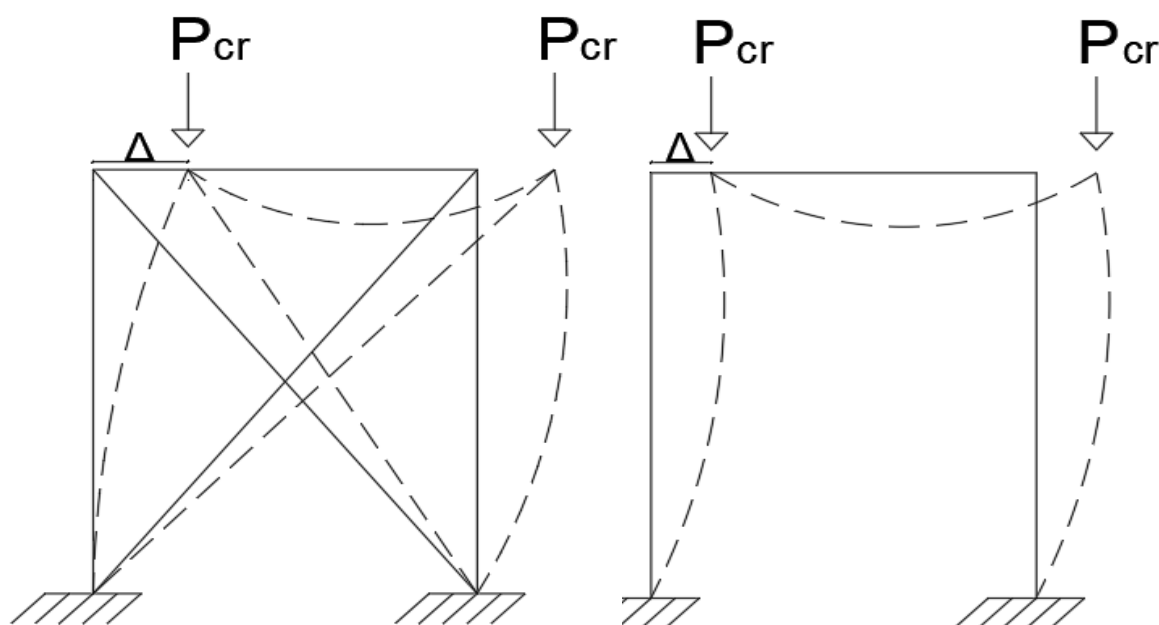
Na prática a maioria das ligações são semi-rígidas, porém por uma questão de facilidade é muito mais comum serem utilizadas ligações articuladas ou rígidas no dimensionamento das estruturas.

Os pórticos são classificados em indeslocáveis e deslocáveis. Os pórticos considerados indeslocáveis são aqueles que apresentam contraventamento e os pórticos considerados deslocáveis são aqueles que não possuem contraventamento. Os contraventamentos são elementos utilizados para garantir a segurança da edificação buscando diminuir ou impedir os deslocamentos laterais que em geral são causados pelos ventos. Justamente por isso, ele

também atua aumentando significativamente a rigidez dos pilares contra deslocamentos laterais que porventura venham a ocorrer na ocasião de uma flambagem.

Em virtude disso, os deslocamentos laterais em estruturas contraventadas tornam-se bastante reduzidos. Nas estruturas deslocáveis ao ser aplicada uma carga crítica na estrutura, os pilares e as vigas são os únicos responsáveis em redistribuir a carga aplicada o que conseqüentemente acarretará em um deslocamento lateral maior em relação as estruturas indeslocáveis como é mostrado na figura 8.

Figura 8 - Pórtico contraventado e não-contraventado



Fonte: Autoria própria (2021)

3.5 Tipos de análise

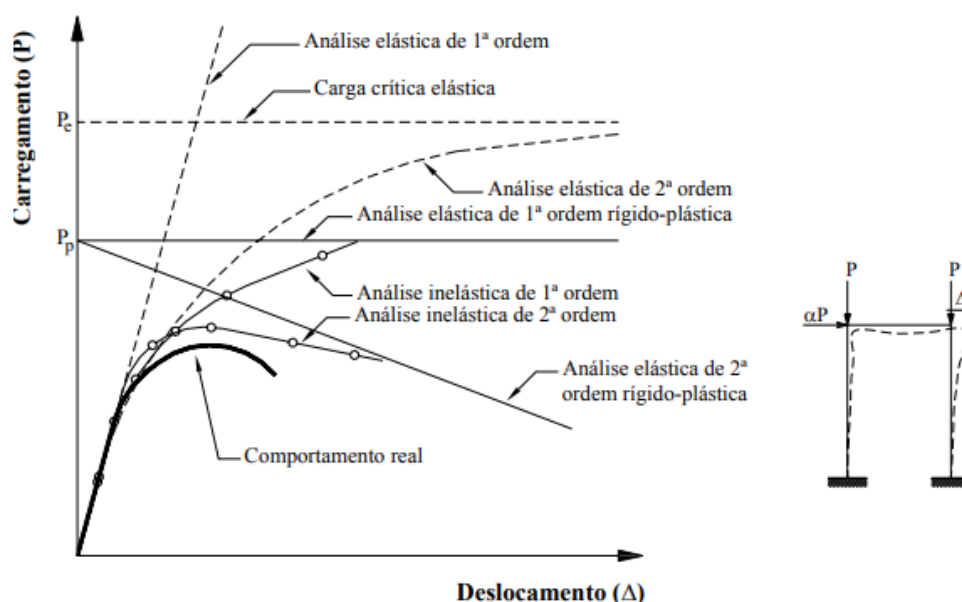
Existem diversos métodos para análises do comportamento global de uma estrutura. Quanto mais complexa a análise mais próximos os resultados encontram-se do comportamento real. Na figura 9, podemos ver um gráfico comparativo entre os principais tipos de análise e quão próximos eles se encontram do comportamento real.

Essas análises se diferenciam principalmente em relação a linearidade do material ou física e a linearidade geométrica. A linearidade física diz respeito às tensões e deformações de maneira linear, ou seja, o material segue a lei de Hooke. Já a linearidade geométrica refere-se a estruturas que após sujeitas as cargas apresentam deslocamentos muito pequenos na

posição indeslocada sendo considerado sem alterações na geometria original da barra.

A rigor de acordo com Paiva (2009), os métodos mais precisos são aqueles em que os materiais não apresentam nem linearidade física nem geométrica, pois conseguem captar efeitos da aplicação de grandes carregamentos como a degradação da resistência do material devido sua plastificação e fenômenos de instabilidade não presentes na análise de primeira ordem.

Figura 9 - Tipos de análise



Fonte: Almeida (2006)

3.5.1 Análise elástica de 1º ordem

A análise de 1º ordem considera que a estrutura apresenta linearidade física e geométrica, ou seja, a estrutura segue a Lei de Hooke e o material é elástico linear. Esse é o tipo de análise mais utilizado, embora seja também o que apresente os resultados mais distantes dos presentes nas estruturas reais.

3.5.2 Análise elástica de 2º ordem

Para a análise elástica de 2º ordem a estrutura o material ainda possui comportamento elástico linear. Porém, nessa análise é incluída os efeitos de 2º ordem, ou seja, o equilíbrio da

estrutura é considerada em sua posição indeslocada.

3.5.3 Análise inelástica de 1º ordem

Essa análise é feita sendo considerada a linearidade geométrica e a não-linearidade física do material. Além disso, também são incluídos os efeitos de plastificação que podem ser desde rótulas plásticas a plastificação de toda a barra.

3.5.4 Análise inelástica de 2º ordem

Nessa análise a estrutura é considerada deslocada (não-linear física) e de material não-linear. Nela são considerados os efeitos de escoamento dos materiais podendo ser de dois tipos principais: plasticidade distribuída ou formulação baseado na formação de rótulas plásticas. É tida como a análise que mais se aproxima do comportamento real.

3.6 Método dos elementos finitos (MEF)

De acordo com Liu & Quek (2003), na resolução dos problemas o MEF discretiza a estrutura em pequenos elementos. Em seguida, cada um desses elementos é adotado em formas simples que são utilizados para a obtenção da equação que rege seu comportamento. Após isso, o método reúne as equações obtidas em cada elemento para formar a equação global da estrutura.

Para a realização dessa análise, o método se utiliza do que é chamado de matriz de rigidez Figura 11. Essa matriz representa as propriedades mecânicas da estrutura e relaciona os deslocamentos nos nós as forças que estão sendo aplicadas. Ela é formada através da junção entre a matriz de deslocamentos figura 10, a matriz de rigidez de uma treliça e a matriz de rigidez de uma viga para cada elemento.

Esse procedimento trata-se de uma simplificação matemática para contabilizar o esforço axial (um grau de liberdade) a que as treliças estão submetidas, juntamente a translação e rotação a que as vigas são sujeitas (dois graus de liberdade por nó). Ao realizar essa combinação e adicionar o vetor deslocamento de um elemento plano, teremos o elemento infinitesimal de um pórtico que se encontra na Figura 12.

Figura 10 - Matriz de deslocamentos

$$\mathbf{d}_e = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$

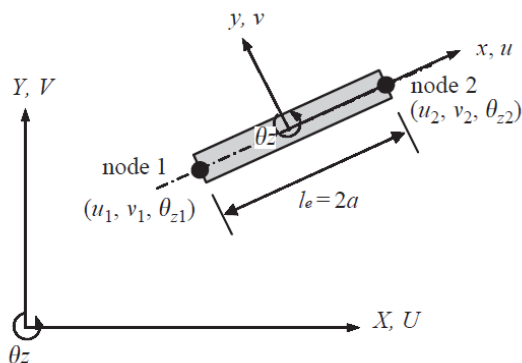
Fonte: Liu & Quek (2003)

Figura 11 - Matriz de rigidez

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & -\frac{AE}{2a} & 0 & 0 \\ \frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^3} & \frac{3EI_z}{2a^2} & 0 \\ & \frac{2EI_z}{a} & 0 & -\frac{3EI_z}{2a^2} & \frac{EI_z}{a} & 0 \\ & & \frac{AE}{2a} & 0 & 0 & 0 \\ sy. & & & \frac{3EI_z}{2a^3} & -\frac{3EI_z}{2a^2} & 0 \\ & & & & \frac{2EI_z}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Liu & Quek (2003)

Como já foi dito anteriormente cada elemento finito de pórtico possui três graus de liberdade em cada nó e como cada elemento possui dois nós, teremos dessa maneira uma matriz quadrada 6 x 6.

Figura 12 - Elemento finito e seus graus de liberdade

Fonte: Liu & Quek (2003)

4. METODOLOGIA

O presente trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise do fator de comprimento efetivo K para pilares de pórticos de aço através do software de elementos finitos LISA® e compará-lo com o empregado na atual NBR 8800:2008 e com o método dos ábacos de Julian e Lawrence (1959).

Na análise, serão modelados diferentes tipos pórticos com vigas de 6,00 m de vão e colunas de 3,00 m de altura não contraventados com cargas unitárias nas extremidades da estrutura atuando na vertical visando encontrar os efeitos causados na estabilidade pela interação dos elementos estruturais e dessa maneira obter resultados mais acurados.

Na adoção dos perfis que seriam utilizados buscou-se perfis em I, pois são bastante utilizados como vigas e pilares nas edificações. O perfil adotado para o pilar foi o CVS (Coluna Viga Soldada) 200x21 com inércia de 1963 cm⁴ e área de 26,5 cm² e para viga foi utilizado o perfil VS (Viga Soldada) 300x23 com inércia de 4296 cm⁴ e área de 28,8 cm².

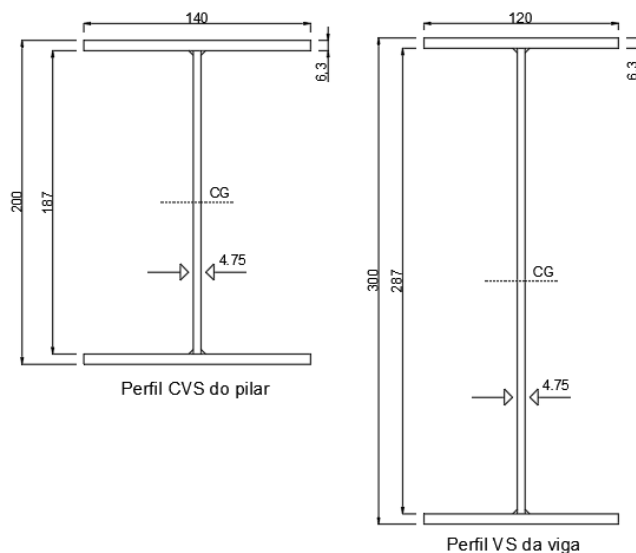
Para a obtenção da carga crítica em cada coluna foi utilizada uma carga unitária (1 kN) na extremidade superior de cada coluna que funciona como um parâmetro. O software para realizar a análise, aumenta a carga utilizada inicialmente até que o valor crítico seja alcançado. Tendo então a carga crítica, é possível então encontrar o fator de comprimento efetivo da coluna K isolando-o na equação da coluna de Euler: $K = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{P_{cr} L^2}}$.

Por fim, o LISA® disponibiliza diversos modos de instabilidade, porém não possui em seu manual nenhum tópico especificando quais são as diferenças entre eles. Dessa forma, uma maneira encontrada para contornar esse problema foi analisar as formas deformadas das colunas. Já que, como o software obtém os resultados a partir do método da coluna de Euler, então os resultados obtidos pelo software apresentarão as mesmas curvas ou bastante próximas aos presentes na tabela da NBR 8800:2008 apresentada na figura 5.

Como condições de contorno as bases dos pilares dos pórticos foram consideradas engastadas na base e nas extremidades superiores há diferentes tipos de restrições ao movimento de acordo com os modos de instabilidade. Porém, essas restrições não mostraram-se iguais em ambos os modelos levando a diferentes valores de K para um mesmo modo de instabilidade como será visto no 2º modelo de pórtico.

4.1 Caracterização dos perfis

Figura 13 - Geometria dos perfis



Fonte: Autoria própria (2021)

As propriedades do aço, mecânicas e geométricas dos perfis utilizados são descritas nas tabelas 1, 2, 3 e 4. As propriedades do aço foram encontradas na ABNT NBR 7007:2016 e as propriedades mecânicas e geométricas da ABNT NBR 5884:2013.

Tabela 1 - Propriedades do aço

Especificação	Denominação	f_y (Mpa)	f_u (Mpa)
ABNT NBR 7007:2016	MR 250	250	400-560

Tabela 2 - Propriedades mecânicas

Módulo de elasticidade (MPa)	Coefficiente de Poisson	Módulo de elasticidade transversal (Mpa)	Coefficiente de dilatação térmica ($^{\circ}\text{C}^{-1}$)	Massa específica (Kg/m^3)
200000	0,3	77000	$1,2 \times 10^{-5}$	7850

Tabela 3 - Propriedades geométricas do perfil utilizado nos pilares

Comprimento da barra (cm)	Massa linear (Kg/m)	Área (cm ²)	d (mm)	h (mm)	b_f (mm)	b_w (mm)	t_f (mm)
300	20,8	26,5	200	187	140	4,75	6,3

Tabela 4 - Propriedades geométricas do perfil utilizado nas vigas

Comprimento da barra (cm)	Massa linear (Kg/m)	Área (cm ²)	d (cm)	h (cm)	b_f (cm)	b_w (cm)	t_f (cm)
600	22,6	28,8	300	287	120	4,75	6,3

4.2 Modelagem dos perfis em elementos finitos

Os perfis foram modelados utilizando a maior quantidade de elementos possíveis. A versão grátis do programa possui 1300 elementos disponíveis, porém como ele sempre dobra a quantidade de elementos ao utilizar a ferramenta “refine”, que é a ferramenta responsável por inserir os elementos na estrutura, nem sempre foi possível usar a quantidade total disponível. Devido a isso, haverá diferentes números de elementos entre os modelos e também entre as vigas e pilares de cada um.

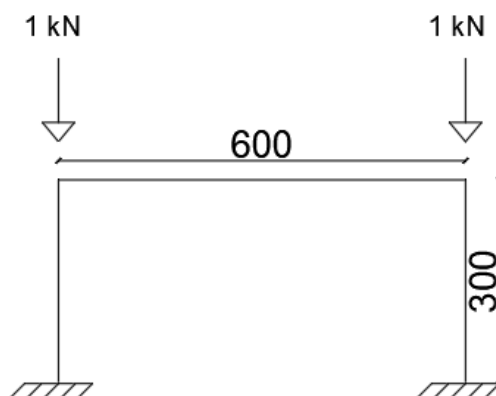
Embora que, a partir de certa quantidade de elementos os resultados na análise de estabilidade dos pórticos não apresentaram basicamente nenhuma diferença sendo, portanto, uma forma de ter apenas uma maior precisão na análise.

Por ser uma análise de flambagem em elementos 2D, o LISA® divide os elementos sempre de maneira linear e em elementos com 2 nós, ou seja, não há formação de elementos com 3 ou mais nós algo bastante comum em análises de estruturas 3D. Dessa maneira, os elementos possuem sempre uma distância constante e são sempre compostos de dois nós.

4.3 Modelos de pórticos

4.3.1 1º Modelo de pórtico

Figura 14 - Pórtico estático



Fonte: Autoria própria (2021)

O primeiro pórtico modelado foi o de um pórtico simples não contraventado de uma estrutura de um pavimento com duas colunas e uma viga.

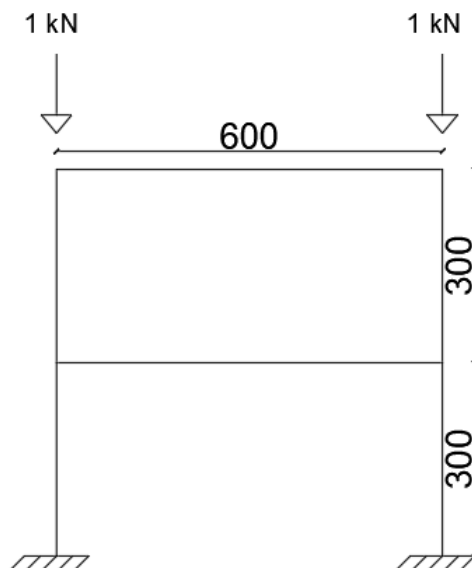
Foram analisados 3 modos de instabilidade para este pórtico:

- 1º modo: rotação e a translação são livres, ou seja, apoio de 1º gênero;
- 2º modo: rotação livre e translação impedida, ou seja, apoio de 2º gênero;
- 3º modo: rotação e translação impedidos, ou seja, apoio de 3º gênero.

P_{cr} para 1º modo de flambagem	P_{cr} para 2º modo de flambagem	P_{cr} para 3º modo de flambagem	Núm. de elementos nas vigas	Núm. de elementos nos pilares	Comp. dos elementos nas vigas	Comp. dos elementos nos pilares
2627,28 kN	8911,38 kN	10851,93 kN	128	256	2,34 cm	1,17 cm

4.3.2 2º Modelo de pórtico

Figura 15 - Pórtico estático



Fonte: Autoria própria (2021)

O segundo pórtico modelado foi o de um pórtico não contraventado de uma estrutura de dois pavimentos com quatro pilares colunas e duas vigas. Sendo a parte inferior do pavimento simétrica a superior.

Os 3 modos de instabilidade para este pórtico foram:

- 1º modo: rotação e a translação são livres;
- 2º modo: rotação e a translação são livres;
- 3º modo: rotação e translação impedidos.

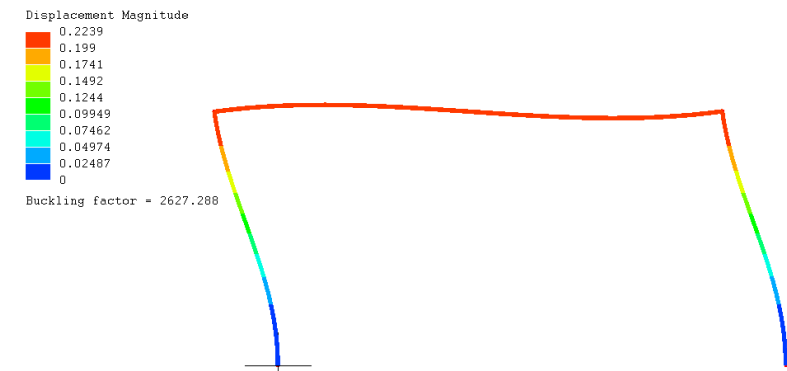
P_{cr} para 1º modo de flambagem	P_{cr} para 2º modo de flambagem	P_{cr} para 3º modo de flambagem	Núm. de elementos nas vigas	Núm. de elementos nos pilares	Comp. dos elementos nas vigas	Comp. dos elementos nos pilares
1865,79 kN	3088,72 kN	6208,22 kN	256	256	2,34 cm	2,34 cm

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 Análise dos modelos escolhidos

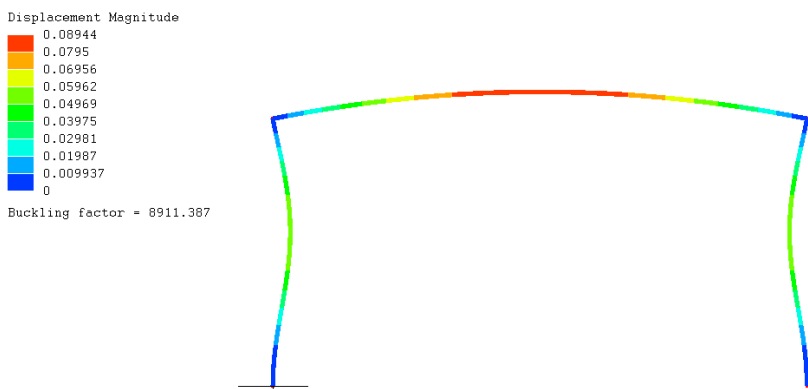
5.1.1 1º Modelo de pórtico

Figura 16 - 1º, 2º e 3º modo de instabilidade



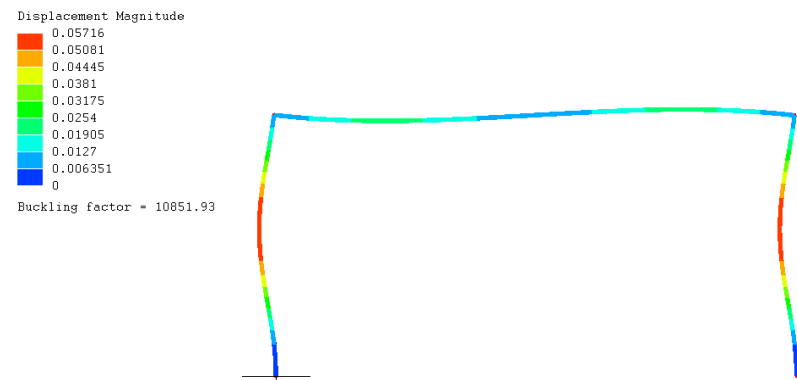
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 17 - 2º modo de instabilidade



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 18 - 3º modo de instabilidade



Fonte: Autoria própria (2021)

Tabela 5 - Valores de K

Método dos ábacos	LISA® 1° modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008	LISA® 2° modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008	LISA® 3° modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008
0,98	1,14	1,20	0,62	0,80	0,56	0,65

Pelos resultados apresentados na tabela 5, o valor recomendado pela NBR 8800:2008 conseguiu ser o mais favorável à segurança para o primeiro módulo de instabilidade. É também interessante notar, que o valor encontrado utilizando-se o método dos ábacos é bem maior do que os demais encontrados para o 2° e 3° modo de instabilidade. Logo, para colunas com rotação livre e translação impedida e rotação e translação impedidos esse método pode representar uma alternativa bastante a favor da segurança.

Além disso, o LISA® apresentou um resultado bem abaixo do recomendado para o 2° modo de flambagem quando comparado a NBR 8800:2008. Sendo exatamente a diferença entre o valor do método dos ábacos e o recomendado pela norma, porém no caso do software ele foi 0,18 inferior ou de 22,5%. Mostrando, com isso, uma grande discrepância e torna esse o menor valor de K obtido em ambos os modelos.

Para o terceiro modo de instabilidade, o resultado do LISA® embora tenha sido bastante próximo da norma tendo uma diferença de apenas 0,09 em valores absolutos em porcentagem esse valor representa 10,7% sendo dessa forma uma diferença bastante expressiva.

5.1.2 2° Modelo de pórtico

Pelos resultados apresentados na tabela 6, vê-se que o LISA® no geral foi quem apresentou os resultados mais favoráveis a segurança. É interessante notar que o 2° modelo de pórtico é exatamente idêntico ao 1° modelo, diferenciando apenas a adição de mais um pavimento. Mesmo assim, o valor do comprimento efetivo foi bem maior para o pórtico de 2 pavimentos o que mostra, como já era esperado, a capacidade que o MEF tem de captar melhor os efeitos atuantes na estrutura, já que quanto maior a altura de um pórtico maior será sua facilidade de apresentar instabilidade.

O método dos ábacos dessa vez apresentou resultados bastante próximos aos da norma para o primeiro e segundo modo, mas em virtude de ser um método com apenas um cálculo

apresentou novamente um valor completamente diferente do 3º modo de instabilidade.

Vale também ressaltar que o valor para o segundo modo de flambagem dessa vez foi considerado como sendo 1,20 e não 0,80 como no 1º modelo. Já que a forma deformada do pórtico foi bem mais próxima a condição de contorno de rotação impedida e translação livre. É possível ver essa diferença comparando as imagens para o segundo modo de instabilidade do 1º e 2º modelo.

Tabela 6 - Valores de K para primeira e segunda coluna respectivamente

Método dos ábacos	LISA® 1º modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008	LISA® 2º modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008	LISA® 3º modo de flambagem	Recomendado pela NBR 8800:2008
1,1	1,36	1,20	1,05	1,20	0,74	0,65
1,15	1,36	1,20	1,05	1,20	0,74	0,65

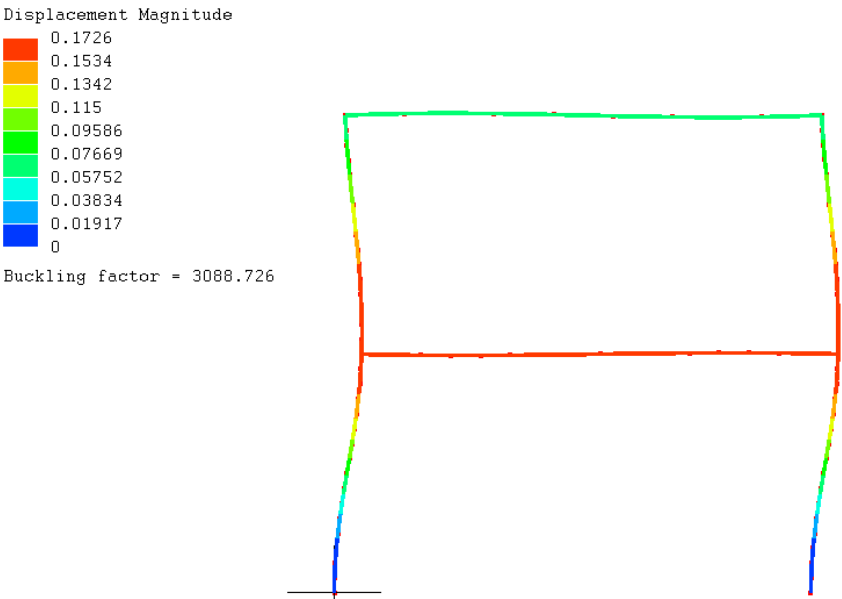
Para o primeiro modo o LISA® apresentou um valor 13,3% maior em relação a NBR 8800:2008 e no terceiro modo o valor foi de 13,8%. Podendo ser considerado uma diferença bastante razoável e que pode causar uma diminuição significativa no cálculo da carga crítica de colunas. Já, para o segundo modo a diferença entre o software e a NBR 8800:2008 foi de 12,5%. Apesar de ter sido um resultado distante do recomendado pela NBR 8800:2008, esse resultado foi 10% menor quando comparado ao primeiro modelo.

Figura 19 - 1º modo de instabilidade



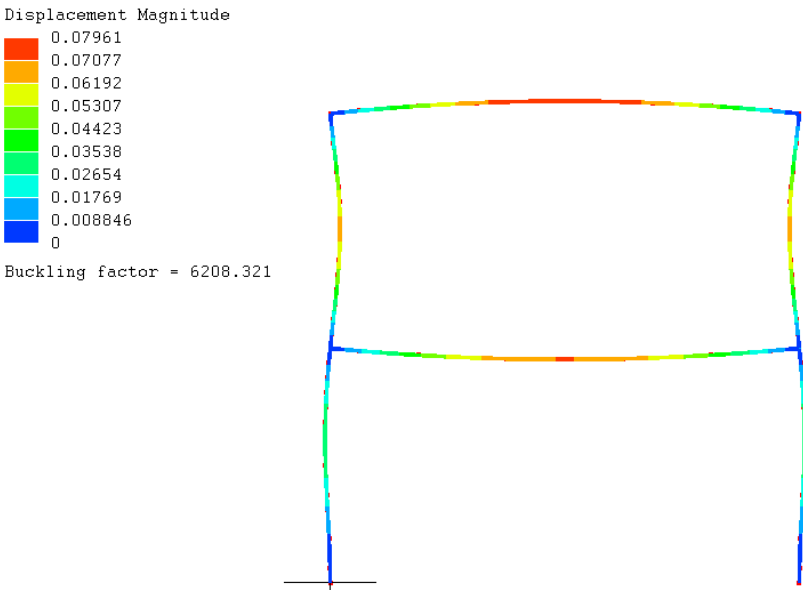
Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 20 - 2º modo de instabilidade



Fonte: Autoria própria (2021)

Figura 21 - 3º modo de instabilidade



Fonte: Autoria própria (2021)

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com as análises realizadas e os resultados obtidos no trabalho podemos fazer as seguintes considerações:

- Os valores recomendados pela norma apresentaram resultados favoráveis à segurança para todos modos de instabilidade do primeiro modelo e resultados bastante próximos aos mais favoráveis ao segundo modelo analisado;
- Os resultados do LISA® podem ser considerados e em algumas situações mostraram-se os mais favoráveis a segurança, porém principalmente para o segundo modo de instabilidade os resultados foram sempre bem abaixo quando comparado a norma;
- Os objetivos buscados no trabalho foram alcançados, já que o LISA® apresentou no geral os melhores resultados para o segundo modelo analisado. Embora isso não tenha sido possível para o primeiro modelo, era esperado que o software nem sempre conseguisse os melhores resultados;
- A sugestão deixada para os futuros trabalhos é de que sejam analisados modelos de pórticos com uma maior quantidade de pavimentos, já que os melhores resultados apresentados pelo LISA® foi em um pórtico de dois pavimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, Andréia C.B. **Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis de estruturas de aço.** 2016. 165 f. Dissertação (mestrado em engenharia civil) – Pós-Graduação em Engenharia Civil na área de Estruturas, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

ANTUNES, Maurício. **Comprimento efetivo de colunas de aço em pórticos deslocáveis.** 2007. 102 f. Dissertação (mestrado em engenharia civil) – Escola de Engenharia de São Carlos da USP, São Carlos, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800:** Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. 2 ed. Rio de Janeiro, 2008. 237 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7007:** Aço-carbono e aço microligado perfis laminados a quente para uso estrutural. 3 ed. Rio de Janeiro, 2016. 10 p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5884:** Perfil I estrutural de aço soldado por arco elétrico – Requisitos gerais. 3 ed. Rio de Janeiro, 2013. 38 p.

BARROS, Alex. **Um estudo da estabilidade de pórticos considerando o fator de comprimento efetivo e as forças nacionais.** 2010. 139 f. Dissertação (mestrado em engenharia civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BEER, Ferdinand P. et al. **Mecânica dos materiais.** 5 ed. Porto Alegre: AMGH, 2011.

CAMOTIM, António; REIS, Dinar. **Estabilidade estrutural.** Portugal: McGrawll-Hill, 2001.

FAKURY, Ricardo H; SILVA, Ana Lydia R. Castro e; CALDAS, Rodrigo B. **Dimensionamento de elementos estruturais de aço e mistos de aço e concreto.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2016.

GUTIERRE, Saulo M. **Estudo sobre a contribuição das lajes na estabilidade global de edifícios.** 2016. 212 f. Dissertação (mestrado em engenharia civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

LIU, G.R; QUEK, S.S. **The finite element: method a practical course.** Burlington: Elsevier Science, 2003.

PAIVA, F. M. **Análise da estabilidade e dimensionamento de pórticos metálicos de sinalização em auto-estradas.** Dissertação de Mestrado, Porto Portugal, 2009.

APÊNDICE A – Memorial de cálculo para o 1º modelo

1º modelo:



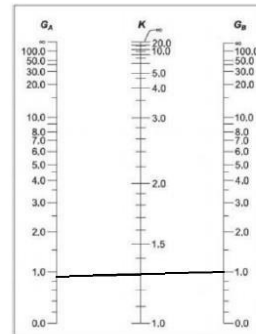
Fonte: Autoria própria (2021)

$$E := 16000 \frac{kN}{cm^2} \quad I_P := 1963 \text{ cm}^4 \quad L_P := 300 \text{ cm} \quad I_V := 4296 \text{ cm}^4 \quad L_V := 600 \text{ cm}$$

$$G_A := \frac{\sum_{n=0}^1 \left(\frac{E \cdot I_P}{L_P} \right)}{\sum_{n=0}^1 \left(\frac{E \cdot I_V}{L_V} \right)} = 0.914 \quad G_B := 1$$

O K estimado foi de:

$$K := 0.95$$



Fonte: AISC (2011)

1º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 1,20.

$$P_{Cr} := 2627.38 \text{ kN}$$

$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 1.145$$



Fonte: Autoria própria (2021)

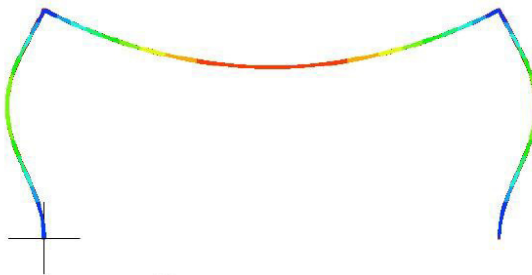
2º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 0,80.

$$P_{Cr} := 8911.39 \text{ kN}$$

$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 0.622$$



Fonte: Autoria própria (2021)

3º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 0,65.

$$P_{Cr} := 10852.08 \text{ kN}$$

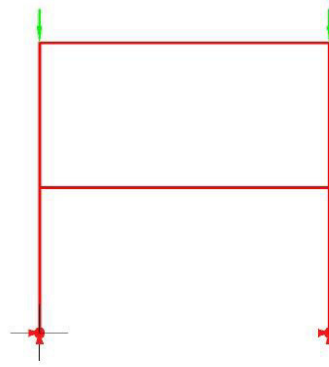
$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 0.563$$



Fonte: Autoria própria (2021)

APÊNDICE B – Memorial de cálculo para o 2º modelo

2º modelo:



Fonte: Autoria própria (2021)

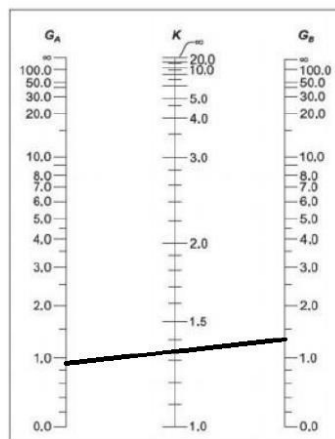
$$E := 16000 \frac{kN}{cm^2} \quad I_P := 1963 \text{ cm}^4 \quad L_P := 300 \text{ cm} \quad I_V := 4296 \text{ cm}^4 \quad L_V := 600 \text{ cm}$$

$$G_A := \frac{\sum_{n=0}^1 \left(\frac{E \cdot I_P}{L_P} \right)}{\sum_{n=0}^1 \left(\frac{E \cdot I_V}{L_V} \right)} = 0.914 \quad G_B := \frac{\sum_{n=0}^2 \left(\frac{E \cdot I_P}{L_P} \right)}{\sum_{n=0}^1 \left(\frac{E \cdot I_V}{L_V} \right)} = 1.371 \quad G_C := 1$$

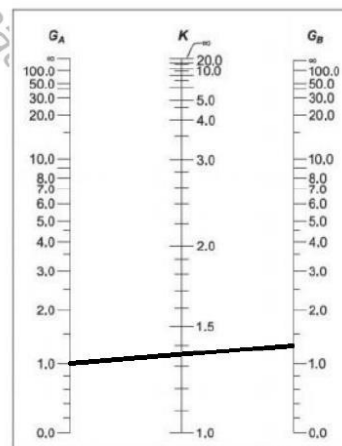
O K estimado para a primeira coluna foi de: O K estimado para a segunda coluna foi de:

$$K_1 := 1.1$$

$$K_2 := 1.15$$



Fonte: AISC (2011)



Fonte: AISC (2011)

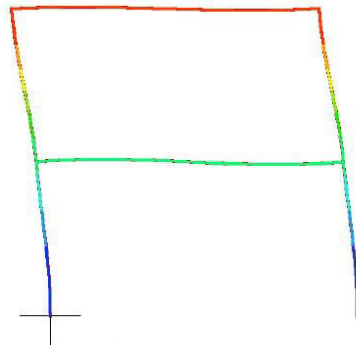
1º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 1,20

$$P_{Cr} := 1865.79 \text{ kN}$$

$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 1.36$$



Fonte: Autoria própria (2021)

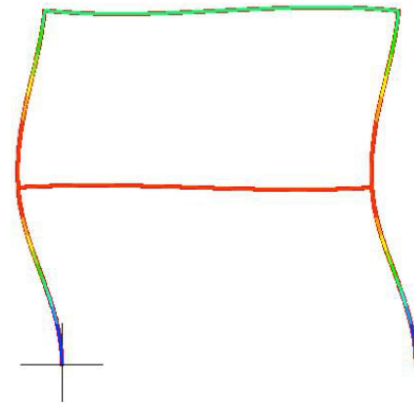
2º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 1,2.

$$P_{Cr} := 3088.72 \text{ kN}$$

$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 1.056$$



Fonte: Autoria própria (2021)

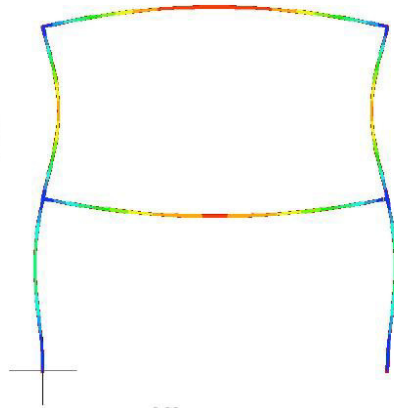
3º modo de instabilidade:

Método da coluna de Euler:

Valor recomendado pela NBR: 0,65.

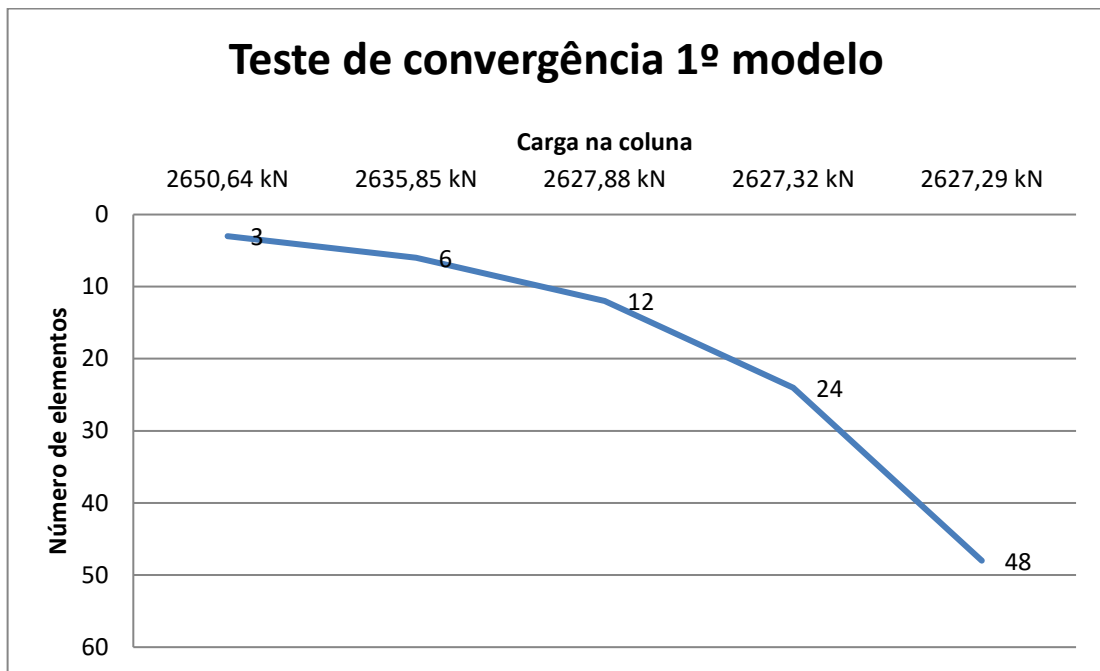
$$P_{Cr} := 6208.22 \text{ kN}$$

$$K := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_P}{P_{Cr} \cdot L_P^2}} = 0.745$$

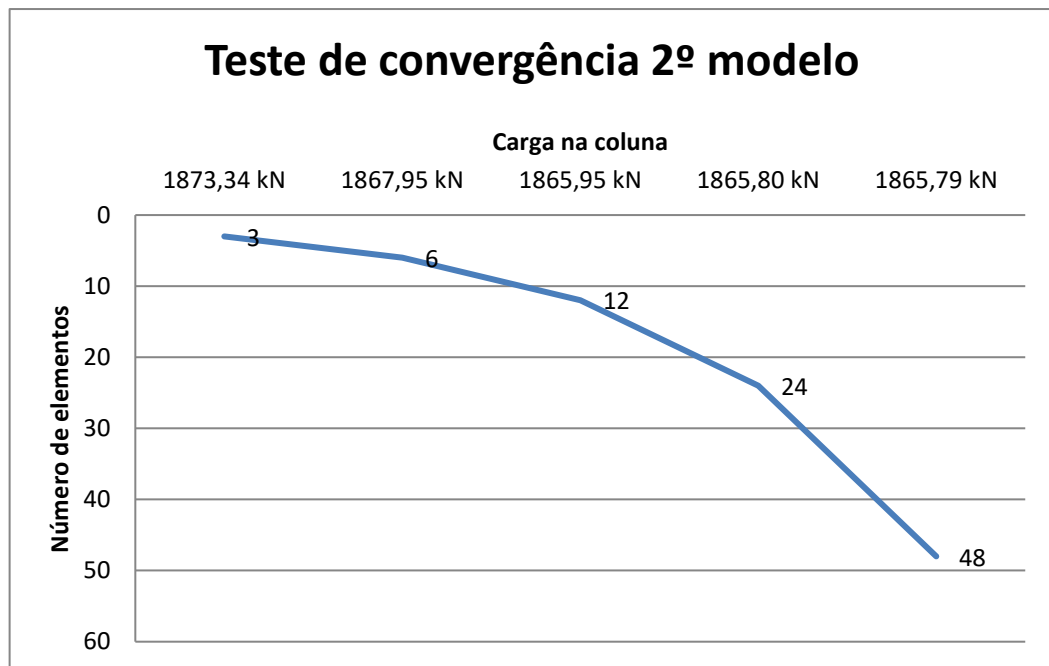


Fonte: Autoria própria (2021)

www.mathcad.com for more information.

APÊNDICE C – Teste de convergência para o 1º modelo

Fonte: Autoria própria (2021)

APÊNDICE D – Teste de convergência para o 2º modelo

Fonte: Autoria própria (2021)